ESAIM: MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

JEAN-LUC GUERMOND

Un résultat de convergence d'ordre deux en temps pour l'approximation des équations de Navier-Stokes par une technique de projection incrémentale

ESAIM: Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 33, nº 1 (1999), p. 169-189

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1999__33_1_169_0>

Mathematical Modelling and Numerical Analysis M2AN, Vol. 33, N° 1, 1999, p. 169–189
Modélisation Mathématique et Analyse Numérique

UN RÉSULTAT DE CONVERGENCE D'ORDRE DEUX EN TEMPS POUR L'APPROXIMATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER–STOKES PAR UNE TECHNIQUE DE PROJECTION INCRÉMENTALE

JEAN-LUC GUERMOND[1]

Abstract. The Navier–Stokes equations are approximated by means of a fractional step, Chorin–Temam projection method; the time derivative is approximated by a three-level backward finite difference, whereas the approximation in space is performed by a Galerkin technique. It is shown that the proposed scheme yields an error of $\mathcal{O}(\delta t^2 + h^{l+1})$ for the velocity in the norm of $l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$, where $l \geq 1$ is the polynomial degree of the velocity approximation. It is also shown that the splitting error of projection schemes based on the incremental pressure correction is of $\mathcal{O}(\delta t^2)$ independent of the approximation order of the velocity time derivative.

Résumé. Les équations de Navier–Stokes sont approchées en temps par une schéma de différentiation rétrograde d'ordre deux et une technique de pas fractionnaire du type projection de Chorin–Temam ; l'approximation spatiale est réalisée par une technique de Galerkin. On montre qu'en temps fini, le schéma est d'ordre $\mathcal{O}(\delta t^2 + h^{l+1})$ pour la vitesse dans la norme $l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$, où $l \geq 1$ est le degré polynomial d'approximation de la vitesse. On montre aussi que l'erreur de fractionnement des schémas de projection basés sur une correction de pression incrémentale est d'ordre $\mathcal{O}(\delta t^2)$, que l'approximation de la dérivée temporelle de la vitesse soit d'ordre un ou d'ordre deux.

AMS Subject Classification. 35Q30, 65M12, 65M60.

Reçu : 12 Février 1997. Révisé : 26 Aout 1997.

1. INTRODUCTION

Les techniques de projection sont largement utilisées pour approcher en temps les équations de Navier–Stokes. Ces techniques introduites par Chorin [7, 8] et Temam [21] sont basées sur une marche en temps fractionnaire qui sépare le problème de convection–diffusion de la contrainte d'incompressibilité. À chaque pas de temps, la vitesse déduite du sous-pas de convection–diffusion est projetée sur l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle et à trace normale nulle à la frontière du domaine. Une analyse détaillée de la convergence en temps

Key words and phrases. Incompressible Navier–Stokes equations, Projection method, Second order approximation, Fractional-step method, Finite elements.

[1]Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, CNRS, B.P. 133, 91403, Orsay, France. e-mail: guermond@limsi.fr.

de l'algorithme original a été faite par Rannacher [19]. Il est montré dans [19] que l'erreur en temps est d'ordre $\delta t^{1/2}$ pour la vitesse (resp. la pression) en norme $l^\infty(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)$ (resp. $l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega))$). Toutefois, en considérant des normes plus faibles, l'erreur sur la vitesse (resp. pression) est en $\mathcal{O}(\delta t)$ en norme $l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ (resp. $l^\infty(\mathrm{H}^{-1}(\Omega))$).

De nombreuses variantes de cet algorithme ont été proposées pour en améliorer l'ordre de convergence, voir *e.g.* Quartapelle [17] pour une revue de ces techniques. La version qui nous intéresse ici est la version incrémentale, qui consiste à rendre explicite la pression à l'étape de convection–diffusion et à calculer l'incrément de pression à l'étape de projection. Ce schéma proposé par Goda [10] a été analysé par Van Kan [22] dans le cadre d'une approximation MAC. Il est montré dans [22] que l'erreur en temps de la version incrémentale où l'équation de convection–diffusion est approchée par un schéma de Crank–Nicolson est effectivement d'ordre deux, mais l'analyse est formelle et conduit à une majoration de l'erreur en temps par $c(h)\delta t^2$, où $c(h)$ est une constante qui dépend du paramètre de discrétisation spatiale et $c(h) \to +\infty$ lorsque $h \to 0$ (typiquement $c(h) = \mathcal{O}(1/h^2)$).

Dans cet article on analyse un schéma de projection incrémental basé sur une approximation par différentiation rétrograde d'ordre deux pour la dérivée en temps et une technique de Galerkin pour l'approximation en espace. L'analyse de convergence en temps et en espace du schéma fournit une erreur en $c(\delta t^2 + h^{l+1})$ pour la vitesse en norme $l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$, où la constante c ne depend ni de h ni de δt. L'entier $l \geq 1$ est le degré polynomial d'approximation de la vitesse. En norme $l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ on donne une estimation en $\mathcal{O}(\delta t^{7/4} + h^{l+1})$. Cet article est divisé en quatre parties. Les notations, les définitions et l'algorithme de projection sont présentés dans la section 2. Des résultats préliminaires de convergence à l'ordre un en temps sont donnés dans la section 3. Le résultat principal de convergence à l'ordre deux en temps est énoncé et démontré dans la section 4. On donne finalement dans la section 5 une estimation de l'erreur de fractionnement pour le schéma basé sur l'approximation d'Euler rétrograde. Le résultat remarquable de cette section est que l'erreur de fractionnement est d'ordre deux (dans les normes appropriées) alors que le schéma est d'ordre un.

2. Position du problème

2.1. Hypothèses et notations

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^d$ ($d \leq 3$) dont la frontière est régulière. Plus précisement on suppose que Ω est suffisament régulier pour que l'opérateur de Stokes possède les propriétés de régularisation habituelles (*cf.* les estimations de Cattabriga [6] ou Amrouche et Girault [1]).

Le domaine Ω est supposé rempli d'un fluide incompressible obéissant aux équations de Navier–Stokes

$$\mathcal{P}\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega\times(0,T), \\ \nabla\cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,T), \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times(0,T), \\ u = u_0 \quad \text{sur } \Omega\times\{0\}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où f est un champ de force donné et u_0 est un champ de vecteur solénoidal à trace normale nulle.

Par la suite on adopte les notations habituelles pour les espaces de Sobolev réels : $W^{s,p}(\Omega)$, $0 \leq s < \infty$, $0 \leq p \leq \infty$ et on note $\|\cdot\|_{s,p}$ et $|\cdot|_{s,p}$ les normes et semi-normes correspondantes. Le complété pour la norme $\|\cdot\|_{s,p}$ de l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω est noté $W_0^{s,p}(\Omega)$. Pour simplifier, l'espace de Hilbert $W^{s,2}(\Omega)$ (resp. $W_0^{s,p}(\Omega)$) est noté $H^s(\Omega)$ (resp. $H_0^s(\Omega)$) ; les normes et semi-normes correspondantes sont notées $\|\cdot\|_s$ et $|\cdot|_s$; le dual de $H_0^s(\Omega)$ est noté $H^{-s}(\Omega)$. Le sous-espace de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ des fonctions à moyenne nulle est noté $\mathrm{L}_0^2(\Omega)$.

2.2. L'approximation spatiale

Afin de construire une approximation de Galerkin de (2.1) on introduit (X_h, M_h) une approximation mixte de $(\mathrm{H}_0^1(\Omega)^d, \mathrm{L}_0^2(\Omega))$. On suppose par la suite que cette approximation vérifie les propriétés suivantes (*cf.* *e.g.* Bernardi–Raugel [3], Girault–Raviart [9], ou bien Quarteroni–Valli [18]) :

Il existe $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$ et $c > 0$ tels que pour tout $r \in [0, l]$

$$\left\{\begin{array}{l} \inf_{v_h \in X_h} \{\|v - v_h\|_0 + h\|v - v_h\|_1\} \leq ch^{r+1}\|v\|_{r+1}, \quad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega)^d \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)^d, \\ \inf_{v_h \in X_h} \|v - v_h\|_{1,p} \leq ch^r\|v\|_{r+1,p}, \quad 2 \leq p \leq \infty, \quad \forall v \in W^{r+1,p}(\Omega)^d \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)^d. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Il existe $c > 0$ tel que pour tout $r \in [0, l]$ et tout q in $H^r(\Omega) \cap \mathrm{L}_0^2(\Omega)$,

$$\inf_{q_h \in M_h} \|q - q_h\|_0 \leq ch^r\|q\|_r. \tag{2.3}$$

Enfin, il existe $c > 0$ tel que pour tout v_h dans X_h, on a :

$$\|v_h\|_{n,p} \leq ch^{m-n+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}}\|v_h\|_{m,q}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq 1, \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty. \tag{2.4}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \|v_h\|_{0,\infty} & \leq & c(1 + |\log h^{-1}|)^{1/2}\|v_h\|_{1,2}, \qquad \text{en dimension 2,} \\ \|v_h\|_{0,\infty} & \leq & ch^{-1/2}\|v_h\|_{1,2}, \qquad \text{en dimension 3.} \end{array}\right. \tag{2.5}$$

Remarque 2.1. Les éléments finis P_l/P_{l-1} avec $2 \leq l$ satisfont ces hypothèses. L'entier l est le degré polynomial de l'approximation de la vitesse et la pression est approchée par des polynomes de degré $l-1$. Pour les éléments finis P_1-iso-P_2/P_1 et P_1-bulle/P_1 ces hypothèses sont vérifiées avec $l = 1$; *cf.* [9] pour d'autres exemples.

Afin de simplifier l'écriture des formulations variationnelles, on introduit le laplacien discret $A_h : X_h \longrightarrow X_h'$ tel que pour tout $(u_h, v_h) \in X_h \times X_h$, $(A_h u_h, v_h) = (\nabla u_h, \nabla v_h)$. De plus on note $\pi_h : \mathrm{H}^{-1}(\Omega)^d \longrightarrow X_h'$ l'opérateur tel que $(\pi_h f, v_h) = \langle f, v_h\rangle$ pour tout $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)^d$ et tout $v_h \in X_h$.

Pour représenter le terme de convection on introduit la forme trilinéaire :

$$\forall\ (u, v, w) \in \left[\mathrm{H}_0^1(\Omega)^d\right]^3, \qquad d(u, v, w) = ((u \cdot \nabla)v,\ w) + \frac{1}{2}(\nabla \cdot u,\ v \cdot w), \tag{2.6}$$

où $u \cdot v$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^d$. Cette forme trilinéaire coïncides avec la forme habituelle $(u \cdot \nabla v, w)$ lorsque u est à divergence nulle. En utilisant l'inégalité de Hölder et quelques inégalités de Sobolev classiques (*cf.* *eg.* Brezis [4]), on obtient les inégalités suivantes, souvent utilisées par la suite :

$$\left\{\begin{array}{lll} \max(d(u, v, w), d(v, u, w)) & \leq & c\,(\|u\|_{0,\infty} + \|u\|_{1,3})\,\|v\|_{0,2}\,\|w\|_{1,2}, \\ \max(d(u, v, w), d(v, u, w)) & \leq & c\|u\|_{0,2}\,(\|v\|_{0,\infty}\|w\|_{1,2} + \|v\|_{1,2}\|w\|_{0,\infty}). \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Rappellons que les inégalités d'interpolation de Gagliardo–Nirenberg [4] fournissent la majoration très utile :

$$\|u\|_{0,\infty} + \|u\|_{1,3} \leq c\|u\|_{1,2}^{1/2}\,\|u\|_{2,2}^{1/2}. \tag{2.8}$$

L'opérateur de convection discret $D_h : X_h \times X_h \longrightarrow X_h'$ est défini par $(D_h(u_h, v_h),\ w_h) = d(u_h, v_h, w_h)$. La forme trilinéaire d étant anti-symétrique par rapport à la deuxième et la troisième variable $(d(u, v, w) = -d(u, w, v))$, le produit scalaire $(D_h(u_h, v_h), v_h)$ est nécessairement nul ; l'opérateur $D_h(u_h, \cdot)$ est donc monotone. Cette propriété reproduit au niveau discret une propriété bien connue de la forme continue dès que u est à divergence nulle et à trace normale nulle.

Enfin, on introduit la divergence discrète $B_h : X_h \longrightarrow M_h$ et le gradient discret (l'opérateur transposé) $B_h^{\mathrm{t}} : M_h \longrightarrow X_h'$ de telle sorte que pour tout couple (v_h, q_h) de $X_h \times M_h$ on ait $(B_h v_h, q_h) = (v_h, B_h^{\mathrm{t}} q_h) = -(\nabla \cdot v_h, q_h)$. On suppose par la suite que B_h est surjectif ; c'est-à-dire que l'approximation mixte vérifie la condition de Babŭska–Brezzi [2,5] :

$$\exists c > 0, \qquad \inf_{q_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{(B_h v_h, q_h)}{\|v_h\|_1 \|q_h\|_0} \geq c. \tag{2.9}$$

Pour découpler la contrainte d'incompressibilité du problème d'évolution temporelle, on introduit comme dans Guermond [11,12] un prolongement de B_h. On se donne Y_h un sous-espace de dimension finie de $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$ et on suppose que $X_h \subset Y_h$. L'injection de X_h dans Y_h est notée i_h ; le transposé de i_h est la projection L^2 de Y_h sur X_h. On suppose que Y_h et M_h sont compatibles au sens suivant : ou bien $Y_h \subset \mathrm{H}_0^{div}(\Omega)$ ou bien $M_h \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$. Par exemple, le choix trivial est $Y_h = X_h$, mais on peut aussi poser $Y_h = X_h + \nabla M_h$ dès que $M_h \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$ (le lecteur est renvoyé à Guermond [11] pour une revue détaillée des différents choix de Y_h). On définit maintenant $C_h : Y_h \longrightarrow M_h$ tel que pour tout (v_h, q_h) dans $Y_h \times M_h$, ou bien $(C_h v_h, q_h) = -(\nabla \cdot v_h, q_h)$ si $Y_h \subset \mathrm{H}_0^{div}(\Omega)$ ou $(C_h v_h, q_h) = (v_h, \nabla q_h)$ si $M_h \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$. On montre alors que C_h est un prolongement de B_h :

$$C_h i_h = B_h, \qquad i_h^{\mathrm{t}} C_h^{\mathrm{t}} = B_h^{\mathrm{t}}. \tag{2.10}$$

C_h est surjectif car c'est le prolongement d'un opérateur surjectif. Par la suite on note $H_h = \ker C_h$, $V_h = \ker B_h$ et on introduit $P_{H_h} : Y_h \longrightarrow H_h$ la projection L^2 de Y_h sur H_h. L'opérateur C_h possède la propriété de stabilité suivante

Proposition 2.1. *Soient $q_h \in M_h$, $q \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et $c_0 > 0$ tels que $\|q - q_h\|_0 \leq c_0 h \|q\|_1$; alors il existe $c(c_0) > 0$ tel que $\|C_h^{\mathrm{t}} q_h\|_0 \leq c(c_0)\|q\|_1$.*

2.3. L'algorithme de projection

Pour un temps fini $T > 0$ donné et un entier $K \geq 2$, on définit $\delta t = T/K$ et on introduit $t^0, t^1, \ldots, t^K$ une partition de l'intervalle $[0, T]$ de telle sorte que $t^k = k\,\delta t$ pour $0 \leq k \leq K$. Pour toute fonction continue du temps, $\phi(t)$, on note $\phi^k = \phi(t^k)$ et on introduit l'opérateur $\delta_t \phi^k = \phi^k - \phi^{k-1}$ et la convention $\delta_{tt}\phi^k = \delta_t(\delta_t \phi)^k$.

On construit maintenant deux suites de vitesses approchées $\{\tilde{u}_h^k \in X_h\}$, $\{u_h^k \in Y_h\}$ et une suite de pressions approchées $\{p_h^k \in M_h\}$. On suppose données $\hat{u}_h^0 \in V_h$, $\hat{u}_h^1 \in V_h$ et $\hat{p}_h^1 \in M_h$ des approximations de $u_{|t=0}$, $u_{|t=\delta t}$ et $p_{|t=\delta t}$. Noter que $p_{|t=\delta t}$ n'est pas une donnée mais se déduit de $u_{|t=\delta t}$ dès que $u(t)$ est suffisamment régulier au voisinage de $t = 0$. On suppose que toutes les conditions de compatibilité requises par la régularité demandée sont satisfaites (*cf. eg.* Heywood–Rannacher [16] pour les détails sur cette question, et *cf.* Guermond–Quartapelle [13,14] pour une technique alternative si la régularitée en $t = 0$ n'est pas satisfaite). On peut obtenir $\hat{u}_h^1$ et $\hat{p}_h^1$ par différentes techniques (un pas de Crank-Nicolson, un pas de Runge-Kutta implicite, ...) dont on ne discutera pas ici.

Pour $k = 0, 1$ on pose $u_h^k = \tilde{u}_h^k = \hat{u}_h^k$ et pour $k = 1$ on pose $p_h^1 = \hat{p}_h^1$. Pour $1 \leq k \leq K - 1$ on note $f_h^{k+1} = \pi_h f^{k+1}$ et on cherche $\tilde{u}_h^{k+1}$ dans X_h tel que :

$$\frac{3\tilde{u}_h^{k+1} - 4 i_h^{\mathrm{t}} u_h^k + i_h^{\mathrm{t}} u_h^{k-1}}{2\delta t} + A_h \tilde{u}_h^{k+1} + D_h(2\tilde{u}_h^k - \tilde{u}_h^{k-1}, \tilde{u}_h^{k+1}) = f_h^{k+1} - B_h^{\mathrm{t}} p_h^k. \tag{2.11}$$

On cherche ensuite u_h^{k+1} dans Y_h et p_h^{k+1} dans M_h tel que

$$\begin{cases} \dfrac{3u_h^{k+1} - 3i_h\tilde{u}_h^{k+1}}{2\delta t} + C_h^{\mathrm{t}}(p_h^{k+1} - p_h^k) = 0, \\ C_h u_h^{k+1} = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Remarque 2.2. En pratique les vitesses projetées u_h^k et u_h^{k-1} sont éliminées de l'algorithme en remplacant leurs valeurs déduites de l'étape de projection (2.12) et en utilisant la relation $i_h^{\mathrm{t}}C_h^{\mathrm{t}} = B_h^{\mathrm{t}}$ (*cf.* [11–14]). Pour $k \geq 3$, la forme variationnelle de l'étape de convection–diffusion s'écrit

$$\begin{aligned} \left(\frac{3\tilde{u}_h^{k+1} - 4\tilde{u}_h^k + \tilde{u}_h^{k-1}}{2\delta t}, v_h\right) + (\nabla\tilde{u}_h^{k+1}, \nabla v_h) + d(2\tilde{u}_h^k - \tilde{u}_h^{k-1}, \tilde{u}_h^{k+1}, v_h) \\ -\frac{1}{3}(7p_h^k - 5p_h^{k-1} + p_h^{k-2}, \nabla\cdot v_h) = (f^{k+1}, v_h), \qquad \forall v_h \in X_h, \end{aligned} \tag{2.13}$$

et l'étape de projection se réduit à la détermination de la pression en résolvant :

$$C_h C_h^{\mathrm{t}}(p_h^{k+1} - p_h^k) = \frac{3B_h\tilde{u}_h^{k+1}}{2\delta t}\cdot \tag{2.14}$$

Pour le calcul de $\tilde{u}_h^3$ il suffit d'éliminer u_h^2 et pour le calcul de $\tilde{u}_h^2$ aucune vitesse n'est à éliminer puisque u_h^1 et u_h^0 sont connues. Remarquer qu'à l'étape de convection–diffusion le terme de pression $(7p_h^k - 5p_h^{k-1} + p_h^{k-2})/3$ peut s'écrire $2p_h^k - p_h^{k-1} + (p_h^k - 2p_h^{k-1} + p_h^{k-2})/3$; c'est-à-dire que ce terme est formellement une extrapolation d'ordre deux.

Remarque 2.3. Si on choisit $M_h \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$ et $Y_h = X_h + \nabla M_h$, alors C_h^{t} est la restriction de ∇ à M_h (*cf.* [11–14]) et le calcul de la pression à l'étape de projection s'écrit sous la forme variationnelle classique suivante : trouver p_h^{k+1} dans M_h tel que

$$(\nabla(p_h^{k+1} - p_h^k), \nabla q_h) = -\frac{3(\nabla\cdot\tilde{u}_h^{k+1}, q_h)}{2\delta t}, \qquad \forall q_h \in M_h, \tag{2.15}$$

et u_h^{k+1} est directement donné par

$$u_h^{k+1} = \tilde{u}_h^{k+1} - \frac{2\delta t}{3}\nabla(p_h^{k+1} - p_h^k). \tag{2.16}$$

3. Estimations d'ordre un en temps

3.1. Préliminaires

Pour un espace de Banach donné W on note $L^p(W)$ l'espace $L^p(0,T\ ;W)$. On note $l^p(W)$ l'espace $\{(w^0, ..., w^K)\ ; w^k \in W, 0 \leq k \leq K\}$ muni de la norme :

$$\begin{cases} \|w\|_{l^p(W)} = \left(\delta t \displaystyle\sum_{k=0}^{K} \|w^k\|_W^p\right)^{1/p}, \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty, \\ \|w\|_{l^\infty(W)} = \displaystyle\max_{0\leq k\leq K} \|w^k\|_W. \end{cases} \tag{3.1}$$

On définit une approximation de $u(t)$ et $p(t)$ comme suit. Pour tout $t \in [0,T]$, on note $(w_h(t), q_h(t)) \in X_h \times M_h$ la solution du problème de Stokes discret :

$$\begin{cases} (\nabla w_h(t), \nabla v_h) + (B_h^{\mathrm{t}} q_h(t), v_h) = (\nabla u(t), \nabla v_h) - (p(t), \nabla \cdot v_h), & \forall v_h \in X_h, \\ (B_h w_h(t), r_h) = -(\nabla \cdot u(t), r_h), \quad \forall r_h \in M_h. \end{cases} \tag{3.2}$$

Grâce aux propriétés régularisantes de l'opérateur de Stokes dans les domaines réguliers, on montre l'estimation suivante :

Lemme 3.1. *Si $u^{(j)} \in L^\beta(H^{l+1}(\Omega)^d \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)^d)$, $p^{(j)} \in L^\beta(H^l(\Omega))$ pour $1 \leq \beta \leq \infty$ et $j = 0, 1, \dots,$ alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \|u^{(j)} - w_h^{(j)}\|_{L^\beta(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + h \left[\|u^{(j)} - w_h^{(j)}\|_{L^\beta(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)} + \|p^{(j)} - q_h^{(j)}\|_{L^\beta(\mathrm{L}^2(\Omega))} \right] \\ \leq ch^{l+1} \left[\|u^{(j)}\|_{L^\beta(H^{l+1}(\Omega)^d)} + \|p^{(j)}\|_{L^\beta(H^l(\Omega))} \right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On a aussi le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Si pour j entier $1 \leq \beta \leq \infty$, $u^{(j)} \in L^\beta(H^2(\Omega)^d \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)^d)$ et $p^{(j)} \in L^\beta(\mathrm{H}^1(\Omega))$, alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \|w_h^{(j)}\|_{L^\beta(W^{0,\infty}(\Omega)^d \cap W^{1,3}(\Omega)^d)} + \|C_h^{\mathrm{t}} q_h^{(j)}\|_{\mathrm{L}^\beta(\mathrm{L}^2(\Omega))} \\ \leq c \left[\|u^{(j)}\|_{L^\beta(H^2(\Omega)^d)} + \|p^{(j)}\|_{L^\beta(H^1(\Omega))} \right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2. Estimation d'ordre un sur la vitesse

Par la suite on utilise les notations suivantes pour représenter les erreurs :

$$\begin{cases} \eta(t) = u(t) - w_h(t), & \mu(t) = p(t) - q_h(t), \\ e_h^k = w_h(t^k) - u_h^k, & \tilde{e}_h^k = w_h(t^k) - \tilde{u}_h^k, \\ \epsilon_h^k = q_h(t^k) - p_h^k. \end{cases} \tag{3.5}$$

Les fonctions $\eta(t)$ et $\mu(t)$ se comportent comme des erreurs d'interpolation alors que les fonctions e_h^k, $\tilde{e}_h^k$ et ϵ_h^k sont des erreurs d'approximation. On fait les hypothèses suivantes :

(H1) $\max(\|e_h^0\|_0, \|e_h^1\|_0) \leq ch^{l+1}, \qquad \|\epsilon_h^1\|_1 \leq c.$

(H2) u est dans $W^{1,\infty}(\mathrm{H}_0^1(\Omega)^d \cap H^{l+1}(\Omega)^d)$,
$u_{tt} \in L^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$, $u_{ttt} \in L^\infty(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)$,
p est dans $W^{1,\infty}(H^l(\Omega))$,
$p_{ttt} \in L^\infty(L^2(\Omega))$.

Remarque 3.1. En fait, pour obtenir l'ordre 1 en temps, les hypothèses sur les dérivées troisièmes sont inutiles, on pourrait les remplacer par $u_{tt} \in L^2(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)$ et $p_{tt} \in L^2(L^2(\Omega))$.

Un premier résultat de convergence est donné par

Théorème 3.1. *Dans le cadre des hypothèses (H1–H2), la solution de l'algorithme de projection (2.11)–(2.12) satisfait les estimations :*

$$\|u - u_h\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + \|u - \tilde{u}_h\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \leq c(h^{l+1} + \delta t), \tag{3.6}$$

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{l^2(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)} \leq c(h^l + \delta t). \tag{3.7}$$

Preuve. La preuve s'inspire des mêmes idées que dans Guermond–Quartapelle [15], on ne rappelle donc ici que les étapes spécifiques à la différentiation rétrograde d'orde deux.

Étape 1. On établit d'abord les équations qui contrôlent les erreurs. L'approximation $(w_h(t), q_h(t))$ de la solution du problème (2.1) satisfait au temps t^{k+1} l'équation :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{3w_h^{k+1} - 4w_h^k + w_h^{k-1}}{2\delta t} &+ A_h w_h^{k+1} + B_h^{\mathrm{t}} q_h^{k+1} \\ &= f_h^{k+1} + \pi_h[R_0^{k+1} - D(u^{k+1}, u^{k+1})], \\ B_h w_h^{k+1} = 0, & \end{aligned} \right. \tag{3.8}$$

où la forme linéaire $D(u, v)$ est définie par $\langle D(u, v), w\rangle = d(u, v, w)$ et le reste R_0^{k+1} est défini par

$$R_0^{k+1} = \frac{3w_h^{k+1} - 4w_h^k + w_h^{k-1}}{2\delta t} - u_t^{k+1}.$$

On obtient l'équation contrôlant $\tilde{e}_h^{k+1}$ en soustrayant (2.11) à (3.8) :

$$\frac{3\tilde{e}_h^{k+1} - 4i_h^{\mathrm{t}} e_h^k + i_h^{\mathrm{t}} e_h^{k-1}}{2\delta t} + A_h \tilde{e}_h^{k+1} = -B_h^{\mathrm{t}} \psi_h^k + \pi_h[R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}], \tag{3.9}$$

où on a posé $\psi_h^k = q_h^{k+1} - p_h^k = \delta_t q_h^{k+1} + \epsilon_h^k$ et le reste non linéaire est défini par

$$\langle R_{nl}^{k+1}, v_h\rangle = -d(u^{k+1}, u^{k+1}, v_h) + d(2\tilde{u}_h^k - \tilde{u}_h^{k-1}, \tilde{u}_h^{k+1}, v_h).$$

D'autre part, en utilisant le fait que w_h^{k+1} est dans X_h, $B_h w_h^{k+1} = 0$ et C_h est un prolongement de B_h, on obtient le système qui contrôle e_h^{k+1} et ϵ_h^{k+1}

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{3e_h^{k+1} - 3i_h\tilde{e}_h^{k+1}}{2\delta t} + C_h^{\mathrm{t}}(\epsilon_h^{k+1} - \psi_h^k) = 0, \\ &C_h e_h^{k+1} = 0. \end{aligned} \right. \tag{3.10}$$

Étape 2. On multiplie (3.9) par la fonction test $4\delta t\tilde{e}_h^{k+1}$. En utilisant la relation :

$$\begin{aligned} 2(a^{k+1}, 3a^{k+1} - 4a^k + a^{k-1}) = {} & |a^{k+1}|^2 + |2a^{k+1} - a^k|^2 + |\delta_{tt} a_{k+1}|^2 \\ & -|a^k|^2 - |2a^k - a^{k-1}|^2, \end{aligned}$$

pour le premier terme on déduit :

$$\begin{aligned}
2(\tilde{e}_h^{k+1}, 3\tilde{e}_h^{k+1} - 4i_h^{\mathrm{t}} e_h^k + i_h^{\mathrm{t}} e_h^{k-1}) &= 2(\tilde{e}_h^{k+1}, 3e_h^{k+1} - 4e_h^k + e_h^{k-1}) + 6(\tilde{e}_h^{k+1}, \tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}) \\
&= 2(\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}, 3e_h^{k+1} - 4e_h^k + e_h^{k-1}) \\
&\quad + 2(e_h^{k+1}, 3e_h^{k+1} - 4e_h^k + e_h^{k-1}) \\
&\quad + 3\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_0^2 + 3\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2 - 3\|e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&= \|e_h^{k+1}\|_0^2 + \|2e_h^{k+1} - e_h^k\|_0^2 + \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&\quad - \|e_h^k\|_0^2 - \|2e_h^k - e_h^{k-1}\|_0^2 \\
&\quad + 3\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_0^2 + 3\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2 - 3\|e_h^{k+1}\|_0^2,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}$ est dans $\mathrm{im}(C_h^{\mathrm{t}})$ et $3e_h^{k+1} - 4e_h^k + e_h^{k-1}$ est dans $\ker(C_h)$ par construction. En notant α la constante telle que $\alpha\|v\|_1^2 \leq \|\nabla v\|_0^2$ pour tout v dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)^d$, on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned}
-2\|e_h^{k+1}\|_0^2 + \|2e_h^{k+1} - e_h^k\|_0^2 &+ \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_0^2 + 3\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_0^2 + 3\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2 + 4\alpha\delta t\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_1^2 \\
&\leq \|e_h^k\|_0^2 + \|2e_h^k - e_h^{k-1}\|_0^2 - 4\delta t(\tilde{e}_h^{k+1}, B_h^{\mathrm{t}} \psi_h^k) \\
&\quad + 4\delta t\langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, \tilde{e}_h^{k+1}\rangle.
\end{aligned}$$

Le contôle du residu est classique :

$$\begin{aligned}
4\delta t\langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, \tilde{e}_h^{k+1}\rangle &\leq \gamma\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_1^2 + c_1\delta t(\delta t^2 + h^{l+1})^2 \\
&\quad + c_2\delta t\left(\|\tilde{e}_h^k - e_h^k\|_0^2 + \|\tilde{e}_h^{k-1} - e_h^{k-1}\|_0^2 + \|e_h^k\|_0^2 + \|e_h^{k-1}\|_0^2\right),
\end{aligned}$$

où γ est une constante qu'on peut choisir suffisamment petite ; les constantes c_1 et c_2 dépendent linéairement de $1/\gamma$, $\|u\|_{L^\infty(H^{l+1})}$, $\|u_t\|_{L^\infty(H^{l+1})}$, $\|p\|_{L^\infty(H^l)}$, $\|p_t\|_{L^\infty(H^l)}$, $\|u_{tt}\|_{L^\infty(L^2)}$, $\|u_{ttt}\|_{L^\infty(H^1)}$ et $\|p_{ttt}\|_{L^\infty(L^2)}$.

On obtient un contrôle sur $4\delta t(\tilde{e}_h^{k+1}, B_h^{\mathrm{t}}\psi_h^k)$ en multipliant (3.10) par $4\delta t C_h^{\mathrm{t}}\psi_h^k$.

$$\begin{aligned}
4\delta t(\tilde{e}_h^{k+1}, B_h^{\mathrm{t}}\psi_h^k) &= \frac{4}{3}\delta t^2\|C_h^{\mathrm{t}}\epsilon_h^{k+1}\|_0^2 - \frac{4}{3}\delta t^2\|C_h^{\mathrm{t}}\psi_h^k\|_0^2 - 3\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&= \frac{4}{3}\delta t^2\|C_h^{\mathrm{t}}\epsilon_h^{k+1}\|_0^2 - \frac{4}{3}\delta t^2\|C_h^{\mathrm{t}}\epsilon_h^k + \delta_t q_h^{k+1}\|_0^2 - 3\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&\geq \frac{4}{3}\delta t^2\|C_h^{\mathrm{t}}\epsilon_h^{k+1}\|_0^2 - \frac{4(1+\delta t)}{3}\delta t^2\|C_h^{\mathrm{t}}\epsilon_h^k\|_0^2 \\
&\quad - \frac{4(1+\delta t)}{3\delta t}\delta t^2\|C_h^{\mathrm{t}}\delta_t q_h^{k+1}\|_0^2 - 3\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&\geq \frac{4}{3}\delta t^2\|C_h^{\mathrm{t}}\epsilon_h^{k+1}\|_0^2 - \frac{4(1+\delta t)}{3}\delta t^2\|C_h^{\mathrm{t}}\epsilon_h^k\|_0^2 - c\delta t^3 - 3\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2.
\end{aligned}$$

La constante c est proportionnelle à $\|u_t\|_{L^\infty(H^2)} + \|p_t\|_{L^\infty(H^1)}$. Noter que c'est à ce niveau seulement qu'une erreur de consistance d'ordre δt est introduite. Cette erreur provient du fait que ψ_h^k n'est pas égal à ϵ_h^k mais est égal à $\epsilon_h^k + \delta_t q_h^{k+1}$; *i.e.* $\psi_h^k = \epsilon_h^k + \mathcal{O}(\delta t)$.

En multipliant (3.10) par e_h^{k+1} on obtient

$$3\|e_h^{k+1}\|_0^2 + 3\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2 - 3\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_0^2 = 0.$$

En sommant toutes ces estimations on obtient

$$\begin{aligned}
\|e_h^{k+1}\|_0^2 + \|2e_h^{k+1} - e_h^k\|_0^2 &+ \frac{4}{3}\delta t^2 \|C_h^t \epsilon_h^{k+1}\|_0^2 + \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&+ 3\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2 + (4\alpha - \gamma)\delta t \|\tilde{e}_h^{k+1}\|_1^2 \\
&\le \|e_h^k\|_0^2 + \|2e_h^k - e_h^{k-1}\|_0^2 + \frac{4}{3}\delta t^2 \|C_h^t \epsilon_h^k\|_0^2 \\
&\quad + c_1 \delta t \left(\|e_h^k\|_0^2 + \|e_h^{k-1}\|_0^2 + \frac{4}{3}\delta t^2 \|C_h^t \epsilon_h^k\|_0^2 \right) \\
&\quad + c_2 \delta t \left(\|\tilde{e}_h^k - e_h^k\|_0^2 + \|\tilde{e}_h^{k-1} - e_h^{k-1}\|_0^2 + (\delta t + h^{l+1})^2 \right).
\end{aligned}$$

On choisit $\gamma = 3\alpha$ et on prend δt tel que $c_2 \delta t \le 1$. En faisant la somme de toutes ces estimations pour k variant de 1 à $n \le K - 1$, on a

$$\begin{aligned}
\|e_h^{n+1}\|_0^2 + \|2e_h^{n+1} - e_h^n\|_0^2 &+ \frac{4}{3}\delta t^2 \|C_h^t \epsilon_h^{n+1}\|_0^2 \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \left(\|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_0^2 + \|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2 \right) + \alpha \delta t \sum_{k=1}^{n} \|\tilde{e}_h^{k+1}\|_1^2 \\
&\le c_1 \left(\|e_h^1\|_0^2 + \|e_h^0\|_0^2 + \delta t^2 \|C_h^t \epsilon_h^1\|_0^2 \right) \\
&\quad + c_2 (\delta t + h^{l+1})^2 + c_3 \delta t \sum_{k=1}^{n} \left(\|e_h^k\|_0^2 + \frac{4}{3}\delta t^2 \|C_h^t \epsilon_h^k\|_0^2 \right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H1) et le lemme de Gronwall discret on déduit

$$\|e\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + \|\tilde{e}\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + \|\tilde{e}\|_{l^2(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)} \le c(\delta t + h^{l+1}).$$

Les majorations finales résultent des définitions :

$$\begin{aligned}
u^k - u_h^k &= \eta^k + \mathrm{e}_h^k, \\
u^k - \tilde{u}_h^k &= \eta^k + \tilde{\mathrm{e}}_h^k.
\end{aligned}$$

C'est à ce niveau seulement que s'introduit l'erreur d'interpolation en $\mathcal{O}(h^l)$ sur l'erreur mesurée en norme H^1. □

3.3. Estimations d'ordre deux sur les incréments

Pour aller vers l'ordre deux il faut obtenir des estimations sur l'incrément des erreurs : $e_h^{k+1} - e_h^k$ et $\tilde{e}_h^{k+1} - \tilde{e}_h^k$. On fait maintenant les hypothèses suivantes :

(H3) $\max(\|e_h^0\|_0, \|e_h^1\|_0) \le c \min(h^{l+1}, \delta t h^l)$,
$\max(\|e_h^0\|_1, \|e_h^1\|_1) \le c \delta t^{1/2} h^l$,
$\|\epsilon_h^1\|_1 \le c h^l$.

(H4) u est dans $W^{2,\infty}(\mathrm{H}_0^1(\Omega)^d \cap H^{l+1}(\Omega)^d) \cap H^3(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)$,
p est dans $W^{2,\infty}(H^l(\Omega)) \cap H^3(L^2(\Omega))$.

En procédant comme dans [15] : c'est-à-dire, en construisant les équations qui contrôlent les erreurs incrémen-

tales
$\delta_t e^{k+1}$, $\delta_t \tilde{e}^{k+1}$ et $\delta_t \epsilon^{k+1}$ et en répétant les arguments de la démonstration du théorème 3.1 on démontre :

Lemme 3.3. *Dans le cadre des hypothèses (H3–H4), il existe $c_s > 0$ et $h_s > 0$, tel que pour h dans $]0, h_s]$ et $\delta t \leq c_s/(1+|\log h^{-1}|)^{1/2}$ en dimension 2 ou $\delta t \leq c_s h^{\frac{1}{2}}$ en dimension 3, la solution de l'algorithme de projection (2.11)–(2.12) satisfait les estimations :*

$$\begin{aligned}\|\delta_t e_h\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} &+ \|\delta_t \tilde{e}_h\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + \delta t \|C_h^{\mathrm{t}} \delta_t \epsilon_h\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega))} + \|\tilde{e}_h - e_h\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \\ &+ \|\delta_t \tilde{e}_h\|_{l^2(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)} + \delta t^{-\frac{1}{2}} \|\delta_t e_h - \delta_t \tilde{e}_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \leq c\delta t(h^l + \delta t).\end{aligned} \tag{3.11}$$

La restriction sur le pas de temps résulte de l'inégalité inverse (2.5) qui est utilisée pour contrôler les incréments des résidus non linéaires ; *cf.* [16] ou [15] pour d'autres détails sur ce type de majoration.

À l'aide de ce lemme on déduit :

Théorème 3.2. *Dans le cadre des hypothèses (H3–H4) et si δt et h vérifient les restrictions du lemme 3.3, la solution de l'algorithme de projection (2.11)–(2.12) satisfait les estimations :*

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{l^\infty(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)} + \|p - p_h\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega))} \leq c(\delta t + h^l). \tag{3.12}$$

Preuve. On procède en trois étapes :

Étape 1. On reconstruit une équation de quantité de mouvement pour contrôler la pression grâce à la condition "inf-sup." En combinant (3.8)$-$(2.11)$-i_h^{\mathrm{t}}$(2.12), on obtient

$$B_h^{\mathrm{t}} \epsilon_h^{k+1} = -\frac{3 i_h^{\mathrm{t}} e_h^{k+1} - 4 i_h^{\mathrm{t}} e_h^k + i_h^{\mathrm{t}} e_h^{k-1}}{2\delta t} + A_h \tilde{e}_h^{k+1} + \pi_h[R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}]. \tag{3.13}$$

La condition "inf-sup" donne

$$c_1 \|\epsilon_h^{k+1}\|_0 \leq \frac{3\|\delta_t e_h^{k+1}\|_0}{2\delta t} + \frac{\|\delta_t e_h^k\|_0}{2\delta t} + c_2 \|\tilde{e}_h^{k+1}\|_1 + \sup_{v_h \in X_h, \|v_h\|_1 = 1} \langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, v_h \rangle.$$

Le contrôle du résidu est classique (*cf.* [16] pour d'autres détails) : si δt et h satisfont les conditions du lemme 3.3, on a l'inégalité suivante

$$\sup_{v_h \in X_h, \|v_h\|_1 = 1} \langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, v_h \rangle \leq c\left(\delta t^2 + h^{l+1} + \|\tilde{e}_h^{k+1}\|_1 + \|\tilde{e}_h^k\|_0 + \|\tilde{e}_h^{k-1}\|_0\right).$$

Grâce au lemme 3.3 on tire finalement la majoration :

$$\|\epsilon_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega))} \leq c(\delta t + h^l).$$

Étape 2. En faisant le produit scalaire de (3.13) par $2\delta_t \tilde{e}_h^{k+1}$ on obtient

$$\begin{aligned}\|\nabla \tilde{e}_h^{k+1}\|_0^2 + \frac{5}{2\delta t}\|\delta_t e_h^{k+1}\|_0^2 &\leq \|\nabla \tilde{e}_h^k\|_0^2 + \frac{1}{2\delta t}\|\delta_t e_h^k\|_0^2 + \delta t \|\epsilon_h^{k+1}\|_0^2 + \frac{1}{\delta t}\|\delta_t \tilde{e}_h^{k+1}\|_1^2 \\ &\quad + \langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, 2\delta_t \tilde{e}_h^{k+1} \rangle \\ &\leq \|\nabla \tilde{e}_h^k\|_0^2 + \frac{1}{2\delta t}\|\delta_t e_h^k\|_0^2 + \delta t \|\epsilon_h^{k+1}\|_0^2 + \frac{2}{\delta t}\|\delta_t \tilde{e}_h^{k+1}\|_1^2 \\ &\quad + \sup_{v_h \in X_h, \|v_h\|_1 = 1} \delta t \langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, v_h \rangle^2.\end{aligned}$$

De cette majoration on tire (grâce au lemme de Gronwall discret, au lemme 3.3 et à la majoration sur $\|\epsilon_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega))}$ obtenue ci-dessus) l'estimation :

$$\|\tilde{e}_h\|_{l^\infty(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)} \leq c(\delta t + h^l).$$

Étape 3. Les estimations désirées résultent des étapes 1 et 2 et des définitions :

$$u(t^k) - \tilde{u}_h^k = \eta^k + \tilde{e}_h^k, \qquad p(t^k) - p_h^k = \mu^k + \epsilon_h^k.$$

La démonstration du théorème est complète. □

4. Estimations d'ordre deux

Avant de démontrer l'ordre deux, on établit quelques résultats préliminaires. En particulier on introduit l'approximation de l'inverse à droite de l'opérateur de Stokes.

4.1. L'inverse à droite discret de l'opérateur de Stokes

On définit l'opérateur $S_h \ : H_h \longrightarrow H_h$ tel que pour tout v_h dans H_h, le couple $(S_h v_h, r_h) \in X_h \times M_h$ soit la solution du problème de Stokes discret dual :

$$\left\{ \begin{aligned} & A_h^{\mathrm{t}}(S_h v_h) + B_h^{\mathrm{t}} r_h = i_h^{\mathrm{t}} v_h \\ & B_h S_h v_h = 0. \end{aligned} \right. \tag{4.1}$$

Cette définition a bien un sens car $S_h v_h \in \ker(B_h) \subset \ker(C_h) = H_h$, puisque C_h est un prolongement de B_h. L'opérateur S_h est l'équivalent discret de l'inverse à droite de l'opérateur de Stokes. Il a les propriétés suivantes.

Lemme 4.1. *La forme bilinéaire $(v_h, w_h) \longmapsto (v_h, S_h w_h)$ agissant sur $H_h \times H_h$ est symétrique positive et sa restriction à $V_h \times V_h$ est définie.*

Preuve. Soit (v_h, w_h) dans $H_h \times H_h$. De l'identité $(v_h, S_h w_h) = (A_h^{\mathrm{t}} S_h v_h, S_h w_h)$ on déduit que la forme bilinéaire est symétrique et positive (car A_h est auto-adjoint et positif). Supposons que v_h est dans V_h, grâce à la coercivité de A_h on déduit que $(v_h, S_h v_h)$ est nul si et seulement si $S_h v_h$ est nul ; c'est-à-dire, en revenant à la définition de $S_h v_h$, $i_h^{\mathrm{t}} i_h v_h = v_h$ est dans l'image de B_h^{t}. En conclusion v_h appartient à $\ker(B_h) \cap \mathrm{im}(B_h^{\mathrm{t}})$, c'est-à-dire $v_h = 0$. □

Remarque 4.1. La forme linéaire $v_h \longmapsto (v_h, S_h v_h)^{1/2}$ est une norme sur V_h. Par la suite on note (abusivement) $\|v_h\|_*$ la quantité $(v_h, S_h v_h)^{1/2}$ pour tout v_h dans H_h.

Lemme 4.2. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout v_h dans H_h on a :*

$$\|S_h v_h\|_1 \leq c\|v_h\|_*. \tag{4.2}$$

Preuve. Il suffit de multiplier (4.1) par $S_h v_h$, puis d'utiliser l'inégalité de Poincaré et la définition de $\|v_h\|_*$. □

Lemme 4.3. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout v_h dans H_h on a :*

$$\|A_h^{\mathrm{t}} S_h v_h\|_0 \leq c\|v_h\|_0, \ \textit{et} \qquad \|C_h^{\mathrm{t}} r_h\|_0 \leq c\|v_h\|_0. \tag{4.3}$$

Preuve. Soit $(s, r) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^d \times \mathrm{L}_0^2(\Omega)$ la solution du problème de Stokes dual

$$\begin{cases} (\nabla w, \nabla s) - (r, \nabla \cdot w) = (v_h, w), & \forall w \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^d, \\ (q, \nabla \cdot s) = 0, & \forall q \in \mathrm{L}_0^2(\Omega). \end{cases}$$

D'après les propriétés régularisantes de l'opérateur de Stokes (*cf.* [1,6]), on a

$$\|s\|_2 \leq c\|v_h\|_0, \text{ et } \qquad \|r\|_1 \leq c\|v_h\|_0.$$

De la théorie de l'approximation du problème de Stokes on déduit :

$$\|s - S_h v_h\|_1 + \|r - r_h\|_0 \leq ch\|s\|_2.$$

En utilisant une inégalité inverse, on a

$$\begin{aligned} \|A_h^{\mathrm{t}} S_h v_h\|_0 &= \sup_{w_h \in X_h - \{0\}} (A_h^{\mathrm{t}} S_h v_h, w_h)/\|w_h\|_0 \\ &= \sup_{w_h \in X_h - \{0\}} (\nabla S_h v_h, \nabla w_h)/\|w_h\|_0 \\ &\leq \sup_{w_h \in X_h - \{0\}} (\nabla(S_h v_h - s), \nabla w_h)/\|w_h\|_0 + \sup_{w_h \in X_h - \{0\}} (\nabla s, \nabla w_h)/\|w_h\|_0 \\ &\leq ch^{-1}\|S_h v_h - s\|_1 + \|\Delta s\|_0 \\ &\leq c\|s\|_2 \\ &\leq c\|v_h\|_0. \end{aligned}$$

On déduit la seconde inégalité en utilisant la stabilité en norme H^1 de C_h^{t} (*cf.* proposition 2.1) :

$$\begin{aligned} \|C_h^{\mathrm{t}} r_h\|_0 &\leq c\|r\|_1 \\ &\leq c\|v_h\|_0. \end{aligned}$$

□

Ce lemme permet à son tour de montrer le résultat suivant qui sera déterminant par la suite.

Lemme 4.4. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout v_h dans X_h et tout w_h dans H_h on a :*

$$(A_h v_h, S_h w_h) \geq (P_{H_h} i_h v_h, w_h) - c\|w_h\|_0 \|i_h v_h - P_{H_h} i_h v_h\|_0. \tag{4.4}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} (A_h v_h, S_h w_h) &= (v_h, A_h^{\mathrm{t}} S_h w_h) \\ &= (v_h, i_h^{\mathrm{t}} w_h) - (v_h, B_h^{\mathrm{t}} r_h) \\ &= (i_h v_h, w_h) - (v_h, i_h^{\mathrm{t}} C_h^{\mathrm{t}} r_h) \\ &= (P_{H_h} i_h v_h, w_h) - (i_h v_h - P_{H_h} i_h v_h, C_h^{\mathrm{t}} r_h) \\ &\geq (P_{H_h} i_h v_h, w_h) - \|i_h v_h - P_{H_h} i_h v_h\|_0 \|C_h^{\mathrm{t}} r_h\|_0. \end{aligned}$$

On déduit le résultat cherché en utilisant la majoration $\|C_h^{\mathrm{t}} r_h\|_0 \leq c\|w_h\|_0$ obtenue au lemme précédent. □

Remarque 4.2. On comprend mieux l'intérêt de cette minoration en posant $w_h = P_{H_h} i_h v_h$. Dans ce cas particulier, pour tout $\epsilon \in]0,1[$ on obtient :

$$(A_h v_h, S_h P_{H_h} i_h v_h) \geq (1-\epsilon)\|P_{H_h} i_h v_h\|_0^2 - c_\epsilon \|i_h v_h - P_{H_h} i_h v_h\|_0^2. \tag{4.5}$$

Cette inégalité fournit un contrôle sur $\|P_{H_h} i_h v_h\|_0$. □

4.2. L'ordre deux en norme $\mathrm{l}^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^{\mathrm{d}})$ sur la vitesse

Avant de donner le résultat principal de cette section, on présente de façon heuristique les lignes directrices du raisonnement qui permet de démontrer l'ordre deux en temps. On reconstruit tout d'abord une équation de quantité de mouvement pour la quantité $i_h^{\mathrm{t}} e_h^{k+1}$ en combinant (3.8)–(2.11)–i_h^{t}(2.12).

$$\frac{3i_h^{\mathrm{t}} e_h^{k+1} - 4i_h^{\mathrm{t}} e_h^k + i_h^{\mathrm{t}} e_h^{k-1}}{2\delta t} + A_h \tilde{e}_h^{k+1} + B_h^{\mathrm{t}} \epsilon_h^{k+1} = \pi_h[R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}]. \tag{4.6}$$

La linéarisation du terme convectif et l'approximation de la dérivée temporelle sont construites pour être consistantes à l'ordre deux. On peut donc s'attendre à ce que les résidus correspondants soient du second ordre en δt, d'ailleurs l'étape 2 de la preuve du théorème 3.1 fait clairement apparaître que la seule erreur de consistance d'ordre un en δt est introduite par le décalage temporelle sur la pression. Pour éliminer l'erreur de consistance liée à la pression, il suffit de tester l'équation (4.6) par une fonction dans V_h (c'est-à-dire utiliser une fonction test à divergence discrète nulle). L'introduction de l'opérateur S_h est motivée par le fait que $S_h e_h^{k+1}$ est un bon candidat pour tester (4.6). En effet, lorsqu'on fait le produit scalaire de $S_h e_h^{k+1}$ avec (4.6), l'approximation de la dérivée temporelle fait apparaître des normes $\|\cdot\|_*$ qui se contrôlent facilement ; le terme de pression disparaît naturellement ; les résidus sont *a priori* contôlables à l'ordre deux ; le terme le plus gênant est $(A_h \tilde{e}_h^{k+1}, S_h e_h^{k+1})$. Or d'après ce qui précède on a

$$(A_h \tilde{e}_h^{k+1}, S_h e_h^{k+1}) \geq (1-\epsilon)\|e_h^{k+1}\|_0^2 - c_\epsilon \|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0^2.$$

Ce terme permet donc un contrôle en norme L^2 de e_h^{k+1} au terme d'erreur près $\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0$ qu'il est possible de contrôler en utilisant les estimations d'ordre deux établis pour les incréments des erreurs (*cf.* lemme 3.3).

Le résultat essentiel de cette section est donc :

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses (H3–H4) et les conditions sur δt et h du lemme 3.3, la solution de l'algorithme (2.11)–(2.12) vérifie :*

$$\|u - u_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + \|u - \tilde{u}_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \leq c(\delta t^2 + h^{l+1}) \tag{4.7}$$

Preuve. On procède en trois étapes :

Étape 1. On reconstruit l'équation de quantité de mouvement (4.6) qui contrôle $i_h^{\mathrm{t}} e_h^{k+1}$ en combinant (3.8)–(2.11) –i_h^{t}(2.12).

Étape 2. On multiplie (4.6) par la fonction test : $4\delta t S_h e_h^{k+1}$. En utilisant la symétrie de la forme bilinéaire $(v_h, S_h w_h)$ (*cf.* lemme 4.1) on obtient :

$$\begin{aligned}\|e_h^{k+1}\|_*^2 + \|2e_h^{k+1} - e_h^k\|_*^2 + \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_*^2 + 4\delta t(A_h \tilde{e}_h^{k+1}, S_h e_h^{k+1})\\ \leq \|e_h^k\|_*^2 + \|2e_h^k - e_h^{k-1}\|_*^2 + 4\delta t\langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, S_h e_h^{k+1}\rangle.\end{aligned}$$

En remarquant que $e_h^{k+1} = P_{H_h} \imath_h \tilde{e}_h^{k+1}$, on applique le lemme 4.4 avec $\epsilon = 1/4$ dans l'inéquation (4.5) et on obtient

$$\begin{aligned}\|e_h^{k+1}\|_*^2 + \|2e_h^{k+1} - e_h^k\|_*^2 &+ \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_0^2 + 3\delta t \|e_h^{k+1}\|_0^2 \\ &\leq \|e_h^k\|_*^2 + \|2e_h^k - e_h^{k-1}\|_*^2 + c\delta t \|e_h^{k+1} - \imath_h \tilde{e}_h^{k+1}\|_0^2 \\ &\quad +4\delta t \langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, S_h e_h^{k+1} \rangle.\end{aligned}$$

On contrôle le premier reste en utilisant la majoration du lemme 4.2 :

$$\begin{aligned}4\delta t \langle R_0^{k+1}, S_h e_h^{k+1} \rangle &\leq 4\delta t \|R_0^{k+1}\|_{-1} \|S_h e_h^{k+1}\|_1 \\ &\leq \delta t \|e_h^{k+1}\|_*^2 + c\delta t \|R_0^{k+1}\|_{-1}^2 \\ &\leq \delta t \|e_h^{k+1}\|_*^2 + c\delta t \Big[h^{l+1} \left(\|u_t\|_{L^\infty(H^{l+1})} + \|p_t\|_{L^\infty(H^l)} \right) \\ &\qquad + \delta t^2 \left(\|u_{ttt}\|_{L^\infty(H^1)} + \|p_{ttt}\|_{L^\infty(L^2)} \right) \Big]^2 \\ &\leq \delta t \|\tilde{e}_h^{k+1}\|_*^2 + c\delta t (h^{l+1} + \delta t^2)^2.\end{aligned}$$

Maintenant on contrôle le reste induit par les termes non linéaires. On décompose ce reste comme suit :

$$\begin{aligned}-\langle R_{nl}^{k+1}, S_h e_h^{k+1} \rangle &= d(\delta_{tt} u^{k+1}, u^{k+1}, S_h e_h^{k+1}) + d(2\eta^k - \eta^{k-1}, u^{k+1}, S_h e_h^{k+1}) \\ &+ d(2w_h^k - w_h^{k-1}, \eta^{k+1}, S_h e_h^{k+1}) + d(2\tilde{e}_h^k - \tilde{e}_h^{k-1}, w_h^{k+1}, S_h e_h^{k+1}) \\ &+ d(2w_h^k - w_h^{k-1}, \tilde{e}_h^{k+1}, S_h e_h^{k+1}) - d(2\tilde{e}_h^k - \tilde{e}_h^{k-1}, \tilde{e}_h^{k+1}, S_h e_h^{k+1}).\end{aligned}$$

On note $R_1(S_h e_h^{k+1}), \ldots, R_6(S_h e_h^{k+1})$ les six restes. On donne maintenant une majoration pour chacun de ces termes. En utilisant la majoration du lemme 4.2 on a

$$\begin{aligned}4\delta t \, |R_1(S_h e_h^{k+1})| &\leq c\delta t \|\delta_{tt} u^{k+1}\|_0 \, \|u^{k+1}\|_2 \, \|S_h e_h^{k+1}\|_1 \\ &\leq c\delta t^3 \|u_{tt}\|_{L^\infty(L^2)} \, \|u\|_{L^\infty(H^2)} \, \|e_h^{k+1}\|_* \\ &\leq c\delta t^5 + \delta t \|e_h^{k+1}\|_*^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\delta t \, |R_2(S_h e_h^{k+1})| &\leq c\delta t \|2\eta^k - \eta^{k-1}\|_0 \, \|u^{k+1}\|_2 \, \|S_h e_h^{k+1}\|_1 \\ &\leq c\delta t \, h^{l+1} \left(\|u\|_{L^\infty(H^{l+1})} + \|p\|_{L^\infty(H^l)} \right) \|e_h^{k+1}\|_* \\ &\leq c\delta t \, h^{2(l+1)} + \delta t \|e_h^{k+1}\|_*^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\delta t \, |R_3(S_h e_h^{k+1})| &\leq c\delta t \left(\|2w_h^k - w_h^{k-1}\|_{1,3} + \|2w_h^k - w_h^{k-1}\|_{0,\infty} \right) \|\eta^{k+1}\|_{0,2} \, \|S_h e_h^{k+1}\|_{1,2} \\ &\leq c\delta t \, h^{l+1} \left(\|u\|_{L^\infty(H^{l+1})} + \|p\|_{L^\infty(H^l)} \right) \|S_h e_h^{k+1}\|_{1,2} \\ &\leq c\delta t \, h^{2(l+1)} + \delta t \|e_h^{k+1}\|_*^2.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_0 \leq \|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^k\|_0 + \|e_h^k\|_0$, on déduit

$$\begin{aligned}
4\delta t\,|R_4(S_h e_h^{k+1})| &\leq c\delta t\left(2\|\tilde{e}_h^k\|_{0,2} + \|\tilde{e}_h^{k-1}\|_{0,2}\right)\left(\|w_h^k\|_{1,3} + \|w_h^k\|_{0,\infty}\right)\|S_h e_h^{k+1}\|_{1,2} \\
&\leq c\delta t\left(2\|\tilde{e}_h^k\|_{0,2} + \|\tilde{e}_h^{k-1}\|_{0,2}\right)\left(\|u\|_{L^\infty(H^2)} + \|p\|_{L^\infty(H^1)}\right)\|e_h^{k+1}\|_* \\
&\leq c\delta t\left(\|\tilde{e}_h^k - e_h^k\|_0 + \|\tilde{e}_h^{k-1} - e_h^{k-1}\|_0 + \|\delta_t e_h^k\|_0 + \|e_h^k\|_0\right)\|e_h^{k+1}\|_*.
\end{aligned}$$

Maintenant on utilise le résultat du lemme 3.3 pour borner $\|\tilde{e}_h^k - e_h^k\|_0 + \|\tilde{e}_h^{k-1} - e_h^{k-1}\|_0 + \|\delta_t e_h^k\|_0$ par $c\delta t(\delta t + h^l)$. En remarquant que pour $l \geq 1$ et $h \leq 1$, on a $2\delta t h^l \leq \delta t^2 + h^{l+1}$, on peut majorer $c\delta t(\delta t + h^l)$ par $c(\delta t^2 + h^{l+1})$. Finalement, on obtient

$$4\delta t\,|R_4(S_h e_h^{k+1})| \leq \gamma\delta t\|e_h^k\|_0^2 + c_1\delta t\|e_h^{k+1}\|_*^2 + c_2\delta t(\delta t^2 + h^{l+1})^2.$$

On procède de la même façon pour le cinquième terme :

$$\begin{aligned}
4\delta t\,|R_5(S_h e_h^{k+1})| &\leq c\delta t\left(\|2w_h^k - w_h^{k-1}\|_{1,3} + \|2w_h^k - w_h^{k-1}\|_{0,\infty}\right)\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_{0,2}\|S_h e_h^{k+1}\|_{1,2} \\
&\leq c\delta t\left(\|u\|_{L^\infty(H^2)} + \|p\|_{L^\infty(H^1)}\right)\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_{0,2}\|e_h^{k+1}\|_* \\
&\leq c\delta t\left(\|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_{0,2} + \|e_h^{k+1}\|_{0,2}\right)\|e_h^{k+1}\|_* \\
&\leq \gamma\delta t\|e_h^{k+1}\|_0^2 + c_1\delta t\|e_h^{k+1}\|_*^2 + c_2\delta t(\delta t^2 + h^{l+1})^2.
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme on a :

$$4\delta t\,|R_6(S_h e_h^{k+1})| \leq c\delta t\|2\tilde{e}_h^k - \tilde{e}_h^{k-1}\|_1\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_1\|S_h e_h^{k+1}\|_1.$$

On utilise le résultat du théorème 3.2 pour borner $\|\tilde{e}_h^{k-1}\|_1$, $\|\tilde{e}_h^k\|_1$ et $\|\tilde{e}_h^{k+1}\|_1$ par $c(\delta t + h^l)$. En remarquant que $h^{4l} \leq h^{2(l+1)}$ dès que $l \geq 1$ et $h \leq 1$, on obtient finalement :

$$4\delta t\,|R_6(S_h e_h^{k+1})| \leq c\delta t(\delta t^2 + h^{l+1})^2 + \delta t\|e_h^{k+1}\|_*^2.$$

En combinant toutes les majorations obtenues on déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\|e_h^{k+1}\|_*^2 + \|2e_h^{k+1} - e_h^k\|_*^2 &+ \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_0^2 + 3\delta t\|e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&\leq \|e_h^k\|_*^2 + \|2e_h^k - e_h^{k-1}\|_*^2 + c\delta t(\delta t^2 + h^{l+1})^2 \\
&\quad + \gamma\delta t\|e_h^{k+1}\|_0^2 + \gamma\delta t\|e_h^k\|_0^2 + c\delta t\|e_h^{k+1}\|_*^2.
\end{aligned}$$

Étape 3. On choisit $\gamma \leq 1$. En sommant de $k = 1$ à $n \leq K - 1$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|e_h^{n+1}\|_*^2 + \|2e_h^{n+1} - e_h^n\|_*^2 &+ \sum_{k=1}^{n}\|\delta_{tt} e_h^{n+1}\|_0^2 + \delta t\sum_{k=1}^{n}\|e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&\leq \|e_h^1\|_*^2 + \|2e_h^1 - e_h^0\|_*^2 + \delta t\|e_h^1\|_0^2 \\
&\quad + c(\delta t^2 + h^{l+1})^2 + c\delta t\sum_{k=1}^{n+1}\|e_h^k\|_*^2.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall discret on obtient :

$$\|e_h\|_{l^\infty(\|\ \|_*)} + \|e_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \leq c(\delta t^2 + h^{l+1}).$$

Le résultat final découle de cette majoration, du lemme 3.3 et des définitions de e_h et $\tilde{e}_h$. □

4.3. Estimation en norme $l^\infty(L^2(\Omega)^d)$ de l'erreur sur la vitesse

On cherche maintenant à obtenir une estimation de l'erreur en norme $l^\infty(L^2(\Omega)^d)$. Dans un premier temps on cherche un contrôle de l'erreur incrémentale $\delta_t e_h^{k+1}$ et on fait les hypothèses suivantes

(H5) $\max(\|e_h^0\|_0, \|e_h^1\|_0) \leq c \min(h^{l+1}, \delta t^{3/2} h^l)$.

(H6) $u \in W^{3,\infty}(H^{l+1}(\Omega)^d \cap H_0^1(\Omega)^d) \cap W^{4,\infty}(H^1(\Omega)^d)$
et $p \in W^{3,\infty}(H^l(\Omega)) \cap W^{4,\infty}L(L^2(\Omega))$.

On donne d'abord deux lemmes qui permettent de contrôler les résidus linaires et non linéaires. En procédant comme dans la démonstration du théorème 4.1 on déduit

Lemme 4.5. *Sous les hypothèses du théorème 3.2, on a :*

$$\sup_{v_h \in X_h, \|v_h\|_1 = 1} \langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, v_h \rangle \leq c\left(\delta t^2 + h^{l+1} + \|e_h^{k+1}\|_0 + \|e_h^k\|_0 + \|e_h^{k-1}\|_0\right). \tag{4.8}$$

Le contrôle du résidu incrémental est fourni par :

Lemme 4.6. *Sous les hypothèses du théorème 3.2 et (H6), on a :*

$$\begin{aligned}\sup_{v_h \in X_h, \|v_h\|_1 = 1} \langle \delta_t R_0^{k+1} &+ \delta_t R_{nl}^{k+1}, v_h \rangle \leq c_1 \delta t(\delta t^2 + h^{l+1}) \\ &+ c_2 \delta t\left(\|e_h^{k+1}\|_0 + \|e_h^k\|_0 + \|e_h^{k-1}\|_0\right) \\ &+ c_3\left(\|\delta_t e_h^{k+1}\|_0 + \|\delta_t e_h^k\|_0 + \|\delta_t e_h^{k-1}\|_0\right) \\ &+ c_4 \sum_{l=k-1}^{k+1} \|\delta_t(\tilde{e}_h^l - e_h^l)\|_0.\end{aligned} \tag{4.9}$$

On établit maintenant une majoration en $\mathcal{O}(\delta t^{5/2})$ sur l'incrément $\delta_t e_h^{k+1}$.

Lemme 4.7. *Sous les hypothèses du théorème 3.2 et (H5–H6), on a :*

$$\|\delta_t e\|_{l^2(L^2(\Omega)^d)} \leq c_1 \delta t^{3/2}(\delta t + h^l) + c_2 \delta t(\delta t^2 + h^{l+1}). \tag{4.10}$$

Preuve. On procède en trois étapes.

Étape 1. Les erreurs incrémentales sont contrôlées par l'équation

$$\frac{3 i_h^t \delta_t e_h^{k+1} - 4 i_h^t \delta_t e_h^k + i_h^t \delta_t e_h^{k-1}}{2\delta t} + A_h \delta_t \tilde{e}_h^{k+1} + B_h^t \delta_t \epsilon_h^{k+1} = \pi_h[\delta_t R_0^{k+1} + \delta_t R_{nl}^{k+1}]. \tag{4.11}$$

Étape 2. On multiplie (4.11) par la fonction test $4\delta t S_h \delta_t e_h^{k+1}$, et en appliquant le lemme 4.4 (avec $\epsilon = 1/4$ dans l'inéquation (4.5)) et on obtient

$$\begin{aligned}
\|\delta_t e_h^{k+1}\|_*^2 + \|2\delta_t e_h^{k+1} &- \delta_t e_h^k\|_*^2 + \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_0^2 + 3\delta t\|\delta_t e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&\leq \|\delta_t e_h^k\|_*^2 + \|2\delta_t e_h^k - \delta_t e_h^{k-1}\|_*^2 + c\delta t\|\delta_t e_h^{k+1} - i_h \delta_t \tilde{e}_h^{k+1}\|_0^2 \\
&\quad + 4\delta t\langle \delta_t R_0^{k+1} + \delta_t R_{nl}^{k+1}, S_h \delta_t e_h^{k+1}\rangle, \\
&\leq \|\delta_t e_h^k\|_*^2 + \|2\delta_t e_h^k - \delta_t e_h^{k-1}\|_*^2 + c\delta t\|\delta_t e_h^{k+1} - i_h \delta_t \tilde{e}_h^{k+1}\|_0^2 \\
&\quad + c_\gamma \delta t\|\delta_t e_h^{k+1}\|_*^2 + \gamma\delta t \sup_{v_h\in X_h, \|v_h\|_1=1} \langle \delta_t R_0^{k+1} + \delta_t R_{nl}^{k+1}, v_h\rangle^2,
\end{aligned}$$

où $\gamma > 0$ peut être choisi suffisamment petit.

Étape 3. En utilisant la majoration du residu fournie par le lemme 4.6, en utilisant les majorations du lemme (3.3), en choisissant γ suffisamment petit et en sommant de $k = 2$ à $n \leq K - 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\delta_t e_h^{n+1}\|_*^2 + \|2\delta_t e_h^{n+1} - \delta_t e_h^n\|_*^2 &+ \sum_{k=2}^n \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_0^2 + \delta t \sum_{k=2}^n \|\delta_t e_h^{k+1}\|_0^2 \\
&\leq c_1\|\delta_t e_h^2\|_*^2 + c_2\|\delta_t e_h^1\|_*^2 + c_3\delta t\sum_{k=2}^n \|\delta_t e_h^{k+1}\|_*^2 \\
&\quad + c_4\delta t^2(\delta t^2 + h^{l+1})^2 + c_5\delta t^3(\delta t + h^l)^2.
\end{aligned}$$

L'hypothèse d'initialisation (H5) implique :

$$\max(\|\delta_t e_h^2\|_*, \|\delta_t e_h^1\|_*) \leq c_1\delta t^{3/2}(\delta t + h^l) + c_2\delta t(\delta t^2 + h^{l+1}).$$

En appliquant le lemme de Gronwall discret on obtient :

$$\|\delta_t e_h\|_{l^\infty(\|\ \|_*)} + \|\delta_t e_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \leq c_1\delta t^{3/2}(\delta t + h^l) + c_2\delta t(\delta t^2 + h^{l+1}),$$

ce qui complète la preuve. □

Remarque 4.3. Noter qu'il y a dans la majoration (4.10) un défaut d'optimalité d'un facteur $\delta t^{1/2}$. En effet, puisqu'on a montré dans le théorème 4.1 que l'erreur sur la vitesse en norme $l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ est en δt^2, on pourrait s'attendre à une estimation sur l'incrément de l'erreur en norme $l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ en δt^3. Ce défaut d'optimalité est due au manque d'optimalité de la majoration

$$\|\delta_t e - \delta_t \tilde{e}_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \leq c\delta t^{3/2}(\delta t + h^l),$$

qui a été obtenue au lemme 3.3. Il est peut-être possible de retrouver une majoration optimale en travaillant sur les incréments des incréments. Le défaut d'optimalité subi à ce niveau est responsable de la perte d'un facteur $\delta t^{1/4}$ sur l'évaluation de l'erreur sur la vitesse en norme $l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ obtenue ci-dessous.

La majoration du lemme 4.7 permet maintenant d'établir le résultat majeur de cette section :

Théorème 4.2. *Sous les hypothèses du théorème 3.2 et les hypothèses (H5–H6), on a :*

$$\|u - u_h\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + \|u - \tilde{u}_h\|_{l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \leq c(\delta t^{7/4} + \delta t^{3/4}h^l + h^{l+1}). \tag{4.12}$$

Preuve. On prend l'équation de conservation de quantité de mouvement (4.6) comme point de départ. On fait le produit scalaire de cette équation par $4\delta t S_h \delta_t e_h^{k+1}$. En utilisant la symétrie de la forme bilinéaire $(v_h, S_h w_h)$ (*cf.* lemme 4.1) on obtient

$$5\|\delta_t e_h^{k+1}\|_*^2 + \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_*^2 + 4\delta t(A_h \tilde{e}_h^{k+1}, S_h \delta_t e_h^{k+1}) = \|\delta_t e_h^k\|_*^2 + 4\delta t\langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, S_h \delta_t e_h^{k+1}\rangle.$$

On utilise maintenant le lemme 4.4 en remarquant que $\delta_t e_h^{k+1} = P_{H_h} i_h \delta_t \tilde{e}_h^{k+1}$.

$$\begin{aligned} 5\|\delta_t e_h^{k+1}\|_*^2 + \|\delta_{tt} e_h^{k+1}\|_*^2 \ &+\ 4\delta t(e_h^{k+1}, \delta_t e_h^{k+1}) \leq \|\delta_t e_h^k\|_*^2 + c\delta t\|\delta_t e_h^{k+1}\|_0 \|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0 \\ &+\ \gamma\|S_h \delta_t e_h^{k+1}\|_1^2 + c_\gamma \delta t^2 \sup_{v_h \in X_h, \|v_h\|_1 = 1} \langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, v_h\rangle^2, \end{aligned}$$

où la constante $\gamma \geq 0$ peut être choisie suffisamment petite de telle sorte que $\gamma\|S_h \delta_t e_h^{k+1}\|_1^2 \leq \|\delta_t e_h^{k+1}\|_*^2$. La majoration du résidu est fournie par le lemme 4.5. Finalement on a

$$\begin{aligned} 4\|\delta_t e_h^{k+1}\|_*^2 + 2\delta t\|e_h^{k+1}\|_0^2 \ &\leq\ \|\delta_t e_h^k\|_*^2 + 2\delta t\|e_h^k\|_0^2 + c\delta t\|\delta_t e_h^{k+1}\|_0 \|\tilde{e}_h^{k+1} - e_h^{k+1}\|_0 \\ &+\ c\delta t^2 \left(\delta t^2 + h^{l+1} + \|e_h^{k-1}\|_0 + \|e_h^k\|_0 + \|e_h^{k+1}\|_0\right)^2. \end{aligned}$$

En prenant la somme de $k = 1$ à $n \leq K - 1$ on obtient

$$\begin{aligned} 2\delta t\|e_h^{n+1}\|_0^2 \ &\leq\ \|\delta_t e_h^1\|_*^2 + 2\delta t\|e_h^1\|_0^2 + c_1\|e_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \|\delta_t e_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \\ &+\ c_2 \delta t(\delta t^2 + h^{l+1})^2 + c_3 \delta t\|e_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)}. \end{aligned}$$

L'hypothèse d'initialisation (H5), la majoration du lemme 4.7 et le résultat de convergence du théorème 4.1 donnent finalement

$$\begin{aligned} \|e_h^{n+1}\|_0^2 \ &\leq\ c_1(\delta t^2 + h^{l+1})^2 + c_2\left[\delta t^{3/2}(\delta t + h^l) + \delta t(\delta t^2 + h^{l+1})\right](\delta t + h^l), \\ &\leq\ c_1(\delta t^2 + h^{l+1})^2 + c_2 \delta t^{3/2}(\delta t + h^l)^2. \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. □

Remarque 4.4. L'exposant 7/4 n'est probablement pas optimal pour la convergence en norme $l^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$. Il est peut-être possible d'améliorer un peu le résultat en invoquant des arguments techniques un peu plus sophistiqués sur les incréments d'ordre deux.

4.4. Une estimation en norme faible sur la pression

Il est possible d'améliorer un peu le résultat de convergence obtenu sur la pression dans le théorème 3.2 en introduisant une norme faible dépendente du maillage. Pour tout q dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ on définit :

$$\|q\|_{B_h, A_h} = \sup_{v_h \in X_h} \frac{(q, \nabla\cdot v_h)}{\|A_h^{\mathrm{t}} v_h\|_0} \cdot \tag{4.13}$$

Grâce à la condition "inf-sup," il est clair que la restriction de $\|\cdot\|_{B_h,A_h}$ à M_h définit une norme, toutefois, cette norme est plus faible que la norme $\|\cdot\|_0$. Plus précisement, la nouvelle norme est la contrepartie discrète sur M_h de la norme

$$\|q\|_{\nabla\cdot,\nabla^2} = \sup_{v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^d \cap \mathrm{H}^2(\Omega)^d} \frac{(q, \nabla\cdot v)}{\|v_h\|_2} \cdot \tag{4.14}$$

Grâce aux propriétés régularisantes de l'opérateur de Stokes, il est possible de montrer le résultat suivant

$$\forall q \in \mathrm{L}_0^2(\Omega), \qquad c_1\|q\|_{-1} \leq \|q\|_{\nabla\cdot\nabla^2} \leq c_2\|q\|_0, \tag{4.15}$$

qui signifie que la topologie associée à la nouvelle norme est plus grossière que celle de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ mais qu'elle est plus fine que celle de $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Avec la nouvelle norme discrète pour mesurer l'erreur sur la pression, on a le résultat suivant

Théorème 4.3. *Sous les hypothèses du théorème 3.2 et les hypothèses (H5–H6), on a :*

$$\|p - p_h\|_{l^2(\|\cdot\|_{B_h,A_h})} \leq c(\delta t^{3/2} + h^l). \tag{4.16}$$

Preuve. D'après (3.13) on a

$$\|\epsilon_h^{k+1}\|_{B_h,A_h} \leq \frac{3\|\delta_t e_h^{k+1}\|_0}{2\delta t} + \frac{\|\delta_t e_h^k\|_0}{2\delta t} + \|\tilde{e}_h^{k+1}\|_0 + \sup_{v_h\in X_h,\|v_h\|_1=1} \langle R_0^{k+1} + R_{nl}^{k+1}, v_h\rangle.$$

Le résultat cherché est une conséquence de cette inégalité, des majorations des lemmes 4.5 et 4.7 et du théorème 4.1. □

Remarque 4.5. La difficultés qu'on rencontre à établir des résultats de convergence à l'ordre deux (ou en tous cas à un ordre plus grand que un) dans des normes naturelles pour la pression (*i.e.* dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$) ou pour la vitesse (*i.e.* dans $\mathrm{H}^1(\Omega)^d$) sont symptomatiques de la présence d'une couche limite numérique à la frontière de Ω. Cette couche limite est imperceptible à l'ordre deux pour la vitesse mesurée dans la norme $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$, en revanche elle apparaît à un ordre compris entre un et deux lorsque la vitesse est mesurée dans la norme $\mathrm{H}^1(\Omega)^d$ ou lorsque la pression est mesurée dans la norme $\mathrm{L}^2(\Omega)$ (voir Rannacher [19] pour une discussion détaillée sur la couche limite numérique induite par le schéma non incrémental continu en espace).

5. Remarques sur l'erreur de fractionnement

On finit cet article par une étude de l'erreur de fractionnement des algorithmes de projection basés sur une correction de pression incrémentale. Le résultat essentiel de cette section est que l'erreur de fractionnement est d'ordre deux pour la vitesse dans la norme $l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$.

Pour illustrer cette propriété remarquable, considérons l'algorithme de projection incrémental basé sur une approximation par différentiation rétrograde d'ordre un de la dérivée temporelle. En conservant les mêmes notations que dans les sections précédentes, on considère l'algorithme suivant : pour $1 \leq k \leq K-1$ on cherche $\tilde{u}_h^{k+1}$ dans X_h tel que :

$$\frac{\tilde{u}_h^{k+1} - i_h^{\mathrm{t}} u_h^k}{\delta t} + A_h\tilde{u}_h^{k+1} + D_h(\tilde{u}_h^k, \tilde{u}_h^{k+1}) = f_h^{k+1} - B_h^{\mathrm{t}} p_h^k. \tag{5.1}$$

On cherche ensuite u_h^{k+1} dans Y_h et p_h^{k+1} dans M_h tel que

$$\begin{cases} \frac{u_h^{k+1} - i_h\tilde{u}_h^{k+1}}{\delta t} + C_h^{\mathrm{t}}(p_h^{k+1} - p_h^k) = 0, \\ C_h u_h^{k+1} = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Bien sûr, la mise en œuvre pratique de cet algorithme se fait en éliminant la vitesse projetée comme expliqué dans la remarque 2.2.

Considérons maintenant l'algorithme totalement couplé : trouver $w_{z,h}^{k+1}$ dans X_h et $q_{z,h}^{k+1}$ dans M_h tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{w_{z,h}^{k+1}-w_{z,h}^{k}}{\delta t}+A_h w_{z,h}^{k+1}+D_h(w_{z,h}^{k},w_{z,h}^{k+1})+B_h^{\mathrm{t}} q_{z,h}^{k+1}=f_h^{k+1}, \\ B_h w_{z,h}^{k+1}=0. \end{array}\right. \tag{5.3}$$

La différence entre $w_{z,h}^{k+1}$ et $\tilde{u}_h^{k+1}$ ou bien entre $w_{z,h}^{k+1}$ et u_h^{k+1} est par définition l'erreur de fractionnement. C'est l'erreur induite par le découplage, opéré dans l'algorithme de projection, entre la contrainte d'incompressibilité et les phénomènes de convection–diffusion. La caractéristique remarquable de la techniques incrémentale (*i.e.* celle pour laquelle la pression est rendue explicite à l'étape de convection–diffusion) est résumée par le résultat suivant :

Théorème 5.1. *Il existe une constante c qui ne dépend que de* $(w_{z,h},q_{z,h})$ *et* T, *tel que*

$$\|w_{z,h}-u_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)}+\|w_{z,h}-\tilde{u}_h\|_{l^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)}\leq c\delta t^2. \tag{5.4}$$

Preuve. On ne donne ici qu'une idée de la preuve. Introduisons les notations suivantes pour désigner les erreurs de fractionnement : $\tilde{e}_{z,h}^{k}=w_{z,h}^{k}-\tilde{u}_h^{k}$, $e_{z,h}^{k}=w_{z,h}^{k}-u_h^{k}$ et $\epsilon_{z,h}^{k}=q_{z,h}^{k}-p_h^{k}$. Il est clair que les erreurs de fractionnement sont contrôlées par les systèmes d'équations

$$\frac{\tilde{e}_{z,h}^{k+1}-i_h^{\mathrm{t}} e_{z,h}^{k}}{\delta t}+A_h\tilde{e}_{z,h}^{k+1}=-B_h^{\mathrm{t}}\psi_{z,h}^{k}+R_{z,h}^{k+1}(\tilde{e}_{z,h}^{k},\tilde{e}_{z,h}^{k+1}), \tag{5.5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{e_{z,h}^{k+1}-i_h\tilde{e}_{z,h}^{k+1}}{\delta t}+C_h^{\mathrm{t}}(\epsilon_{z,h}^{k+1}-\psi_{z,h}^{k})=0, \\ C_h e_{z,h}^{k+1}=0, \end{array}\right. \tag{5.6}$$

où on a posé $\psi_{z,h}^{k}=q_{z,h}^{k+1}-p_h^{k}=\delta_t q_{z,h}^{k+1}+\epsilon_{z,h}^{k}$ et le reste non linéaire est défini par

$$R_{z,h}^{k+1}(\tilde{e}_{z,h}^{k},\tilde{e}_{z,h}^{k+1})=D_h(w_{z,h}^{k},w_{z,h}^{k+1})-D_h(\tilde{u}_h^{k},\tilde{u}_h^{k+1}).$$

La structure de ces équations est quasiment la même que (3.9)–(3.10) sauf que la seule source d'erreur qui subsite maintenant est le terme $B_h^{\mathrm{t}}\psi_{z,h}^{k}$ qui est au second membre du pas de convection–diffusion. On peut alors reproduire tous les arguments des sections 3 et 4. □

Le résultat un peu suprenant du théorème 5.1 peut être vérifié numériquement assez facilement. Il suffit pour un problème donné de réaliser une marche en temps en évaluant à chaque pas de temps la solution du système couplé (5.3) et la solution du système fractionné (5.1)–(5.2). La solution du sytème couplée peut être calculée de multiples façons (résolution directe ou itérative de l'opérateur d'Uzawa, technique de matrice d'influence, *etc.*) mais en pratique son évaluation est toujours beaucoup plus coûteuse que celle de la solution découplée (des rapports 20 à 50 en temps de calcul sont typiques). Cette expérience a été réalisée dans [14] pour le problème de la cavité entraînée en dimension 2 en utilisant des éléments finis P_2/P_1. L'expérience numérique rapportée dans [14] montre clairement que l'erreur de fractionnement est bien d'ordre deux conformément à l'énoncé du théorème 5.1.

References

[1] C. Amrouche and V. Girault, On the existence and regularity of the solution of Stokes problem in arbitrary dimension. *Proc. Japan Acad.* **67** (1991) 171-175.

[2] I. Babŭska, The finite element method with Lagragian multipliers. *Numer. Math.* **20** (1973) 179-192.

[3] C. Bernardi and G. Raugel, A conforming finite element method for the time-dependent Navier–Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **22** (1985) 455-473.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris (1983).

[5] F. Brezzi, On the existence uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO* **R2** (1974) 129-151.

[6] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **31** (1961) 308-340.

[7] A.J. Chorin, Numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Math. Comp.* **22** (1968) 745-762.

[8] A. J. Chorin, On the convergence of discrete approximations to the Navier–Stokes equations. *Math. Comp.* **23** (1969) 341-353.

[9] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations.* Springer Series in Computational Mathematics **5** Springer-Verlag (1986).

[10] K. Goda, A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows. *J. Comput. Phys.* **30** (1979) 76-95.

[11] J.-L. Guermond, Some practical implementations of projection methods for Navier–Stokes equations. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **30** *(1996) 637-667.*

[12] J.-L. Guermond, Sur l'approximation des équations de Navier–Stokes instationnaires par une méthode de projection. C. R. Acad. Sci. Paris **319** *(1994) 887-892.*

[13] J.-L. Guermond and L. Quartapelle, Unconditionally stable Finite-Element Method for the unsteady Navier-Stokes equations, 9th International Conference on Finite Element in Fluids. Venezia, Italy, October 1995 **I** *367-376.*

[14] J.-L. Guermond and L. Quartapelle, Calculation of incompressible viscous flows by an unconditionally stable projection finite element method. J. Comput. Phys. **132** *(1997) 12-33.*

[15] J.-L. Guermond and L. Quartapelle, On the approximation of the Navier–Stokes equations by finite element projection methods. Numer. Math. **80** *(1998) 207-238.*

[16] J.G. Heywood and R. Rannacher, Finite element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem, I, II, III, and IV. SIAM J. Numer. Anal. **19** *(1982) 275-311;* **23** *(1986) 750-777;* **25** *(1988) 489-512;* **27** *(1990) 353-384.*

[17] L. Quartapelle, Numerical Solution of the Incompressible Navier–Stokes Equations. ISNM 113 Birkhäuser, Basel (1993).

[18] A. Quarteroni and A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 5, Springer-Verlag (1994).

[19] R. Rannacher, On Chorin's projection method for the incompressible Navier–Stokes equations. Lectures Notes in Mathematics Springer, Berlin (1992) 167-183.

[20] R. Temam, Navier–Stokes Equations. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2. North-Holland (1977).

[21] R. Temam, Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier–Stokes. Bull. Soc. Math. France **98** *(1968) 115-152.*

[22] J. Van Kan, A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. SIAM J. Sci. Stat. Comput. **7** *(1986) 870-891.*