M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique

A. Harrabi

Pseudospectre d'une suite d'opérateurs bornés

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 32, nº 6 (1998), p. 671-680

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1998__32_6_671_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 32, n° 6, 1998, p. 671 à 680)

PSEUDOSPECTRE D'UNE SUITE D'OPÉRATEURS BORNÉS (*)

A. HARRABI †

Résumé. — *Nous établissons la continuité de l'ϵ-pseudospectre ($\forall \epsilon > 0$) sous la propriété de convergence uniforme. De plus nous montrons que si $\|T_n - T\| \to 0$ où T et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des opérateurs bornés sur un espace de Banach, alors le spectre de la suite d'opérateurs $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au sens de Godunov et Ryabenki [9] est égal au spectre de T. La même étude est faite pour la convergence collectivement compacte pour laquelle des résultats un peu moins forts sont établis. Enfin, le cas particulier des opérateurs représentés par des matrices triangulaires sera traité. © Elsevier, Paris*

Mots-Clés : ϵ-pseudospectre, spectre d'une suite d'opérateurs bornés, convergence uniforme, convergence collectivement compacte.

Abstract. — *We establish the continuity of the ϵ-pseudospectrum (for all $\epsilon > 0$) under the notion of uniform convergence. Moreover, we prove that if $\|T_n - T\| \to 0$ where T and $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are bounded operators in a Banach space then the spectrum of the operator family $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, in the sense of Godunov and Ryabenki [9], is equal to the spectrum of T. The same study is made for the case of a collectively compact convergence under which weaker results are established. Finally, the particular case of operators represented by triangular matrices is treated. © Elsevier, Paris*

INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous plaçons dans le cadre de l'espace des opérateurs bornés sur un espace de Banach X, noté $\mathscr{L}(X)$. La norme sur X et la norme d'opérateurs associée sur $\mathscr{L}(X)$ sont notées par $\| \cdot \|$. Soit $T \in \mathscr{L}(X)$. On note par $\sigma(T)$ le spectre de T et par $\rho(T)$ l'ensemble résolvant de T [7, 10].

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$. On dit que λ est une valeur propre ϵ-approchée d'un opérateur T borné si $\lambda \in \sigma(T)$ ou si $\lambda \in \rho(T)$ et $\|(\lambda - T)^{-1}\| \geqslant \epsilon^{-1}$ [11]. L'ϵ-pseudospectre de T, noté $\sigma_\epsilon(T)$, est par définition l'ensemble de toutes les valeurs propres ϵ-approchées de T [6, 18].

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{L}(X)$, une suite d'opérateurs continus sur X. On définit le spectre de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\sigma(\{T_n\}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \limsup_{n \to \infty} \|(\lambda - T_n)^{-1}\| = \infty \right\}$, où l'on pose par convention que $\|(\lambda - T)^{-1}\| = \infty$ si $\lambda \in \sigma(T)$ [9].

Dans cet article, on considère les deux notions de convergence : uniforme et collectivement compacte, définies pour des opérateurs bornés dans $\mathscr{L}(X)$ [7].

Dans la première partie, on rappelle quelques propriétés du spectre et de la résolvante, ainsi que les résultats existants pour la continuité du spectre sous la notion de convergence uniforme.

Dans la seconde partie, on établit l'égalité entre le spectre de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et le spectre de T sous l'hypothèse de convergence uniforme : $\|T_n - T\| \to 0$. Enfin on démontre que $\lim_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(T_n) = \sigma_\epsilon(T)$ pour tout $\epsilon > 0$ lorsque $\|T_n - T\| \to 0$.

Dans la troisième partie, on s'intéresse au cas de la convergence collectivement compacte (c.c.) et une brève comparaison entre les deux notions de convergence (uniforme et collectivement compacte) est effectuée.

Pour le spectre de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $T_n \xrightarrow{c.c} T$ on établit les inclusions $\sigma_a(T) \subseteq \sigma(\{T_n\}) \subseteq \sigma(T)$, où $\sigma_a(T)$ est le spectre ponctuel approché. En ce qui concerne le pseudospectre, on verra que $\liminf_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(T_n) \supseteq \sigma_\epsilon(T)$, sous l'hypothèse $\sigma(\{T_n\}) = \sigma(T)$.

(*) Manuscrit reçu le 17 juin 1997.
Soumis à Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M²AN).
† Université des Sciences Sociales (Toulouse I) et CERFACS 42, avenue G. Coriolis, 31057 Toulouse Cedex, France (harrabi@cerfacs.fr).

Un exemple où $\limsup \sigma_\epsilon(T_n) \supset \liminf \sigma_\epsilon(T_n) \supset \sigma_\epsilon(T)$ et où les deux inclusions sont strictes est donné.

Dans la quatrième et dernière partie, on étudie le cas particulier des matrices triangulaires dans $\mathscr{L}(l^2)$. Si A_n est la restriction de A (matrice triangulaire) sur l'espace engendré par $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$, on montre que $\sigma(A_n) \subset \sigma(A)$ où l'inclusion est généralement stricte, $\sigma(\{A_n\}) = \sigma(A)$ et que $\lim_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(A_n) = \sigma_\epsilon(A)$ pour tout $\epsilon > 0$. On constate que, dans ce cas, on peut conclure sans avoir recours à une hypothèse de convergence uniforme ou de convergence collectivement compacte en général.

Le plus souvent, la connaissance du spectre et du pseudospectre d'un opérateur différentiel ou intégral T, défini sur un espace de Banach X, passe par le calcul de ceux d'une suite d'approximations $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de T de rang fini. D'où la question qui se pose naturellement : pour quelle notion de convergence $T_n \to T$ a-t-on continuité des pseudospectres lorsque $n \to \infty$?

Une réponse complète dépasse de loin les limites de cet article. Cet article se propose de fournir des résultats qui constituent, à notre connaissance, la première tentative de réponse générale, quoique encore partielle à cette question.

Le lecteur est renvoyé à Trefethen [19] et à la bibliographie qui y est contenue, pour la description de certains opérateurs particuliers. D'autres opérateurs particuliers importants sont traités dans les publications [4, 15, 16].

1. SPECTRE ET RÉSOLVANTE

Dans cette partie, nous rappelons quelques propriétés classiques du spectre et de la résolvante dans le cas d'un opérateur T borné sur un espace de Banach X. Le lecteur intéressé est invité à voir [7, 8, 10] pour plus d'informations.

1.1. Le spectre

Soit $T \in \mathscr{L}(X)$. L'ensemble résolvant de T est défini par $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, (\lambda - T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)\}$. La résolvante de T est $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$ où λ représente λI et I est l'identité de X. Le spectre $\sigma(T)$ de T est le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$. En d'autres termes, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, \lambda - T$ non inversible ou $\lambda - T$ n'admet pas d'inverse dans $\mathscr{L}(X)\}$. On remarque que :

1. $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$,
2. $\lambda \to R(\lambda, T)$ est une fonction analytique sur $\rho(T)$,
3. $\sigma(T)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$, inclus dans $B(0, \|T\|) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\lambda| \leq \|T\|\}$.

Le spectre de T est la réunion de trois parties distinctes [7], notées par $P\sigma(T)$, $C\sigma(T)$, $R\sigma(T)$ avec les définitions suivantes :

1. $P\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, \lambda - T$ non inversible $\}$ est *le spectre ponctuel.*
2. $C\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, \lambda - T$ admet un inverse non borné dont le domaine de définition est dense dans $X\}$ est *le spectre continu.*
3. $R\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, \lambda - T$ admet un inverse borné ou non dont le domaine de définition est non dense dans $X\}$ est *le spectre résiduel.*

Dans le cas où $\lambda \in C\sigma(T)$, l'inverse de $\lambda - T$ ne peut pas être borné. En effet sinon, il existerait $M > 0$, tel que $\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq M$, c'est-à-dire $\forall x \in X$, $\|x\| \leq M \|(\lambda - T)x\|$. Alors l'espace image $\mathrm{Im}(T)$ de X par T serait fermé. Or $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans X qui est fermé, donc égal à X, ce qui est impossible sinon T serait inversible.

Par contre, lorsque $\lambda \in R\sigma(T)$, il se peut que $\lambda - T$ admette un inverse borné sur son domaine, comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple 1.1 : Dans $X = l^2$, l'opérateur de translation à gauche $\dot{T}$, défini par

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots),$$

admet le spectre $\sigma(T) = P\sigma(T) \cup C\sigma(T) = \{\lambda \,;\, |\lambda| \leq 1\}$ avec $P\sigma(T) = \{\lambda \,;\, |\lambda| < 1\}$ et $C\sigma(T) = \{\lambda \,;\, |\lambda| = 1\}$ [7]. L'opérateur adjoint T^* de T représente la translation à droite :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) \mapsto (0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots) .$$

Il admet le spectre $\sigma(T^*) = R\sigma(T^*) \cup C\sigma(T^*) = \{\lambda \,;\, |\lambda| \leq 1\}$ avec $R\sigma(T^*) = \{\lambda \,;\, |\lambda| < 1\}$ et $C\sigma(T^*) = \{\lambda \,;\, |\lambda| = 1\}$. On sait que $0 \in R\sigma(T^*)$ et $\operatorname{Im}(T^*) = \{0\} \times l^2$. De plus T^* est une isométrie entre l^2 et $\{0\} \times l^2$. On peut donc définir l'inverse de T^* sur $\{0\} \times l^2$ et $\| (T^*)^{-1}_{|\{0\} \times l^2} \| = 1$ [7]. On voit donc que pour $0 \in R\sigma(T^*)$, T^* est d'inverse borné sur son domaine. △

On rappelle que si σ dénote l'application de $\mathscr{L}(X)$ dans $\mathbb{C}$, définie par $T \mapsto \sigma(T)$, alors la fonction σ est semi-continue supérieurement : soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs de $\mathscr{L}(X)$ et T un opérateur de $\mathscr{L}(X)$; alors si $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$, $\limsup_{n \to \infty} \sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$ [7, 10, 14].

Enfin on définit le spectre ponctuel approché par $\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X / \|x_n\| = 1$ et $\lim_{n \to \infty} \|(\lambda - T)\, x_n\| = 0\}$. On rappelle que $\partial\sigma(T) \cup P\sigma(T) \cup C\sigma(T) \subseteq \sigma_a(T) \subseteq \sigma(T)$ où $\partial\sigma(T)$ est la frontière de $\sigma(T)$. L'ensemble $\sigma_a(T)$ est fermé non vide dans $\sigma(T)$ donc compact [7, p. 96].

1.2. La résolvante

La résolvante $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$ est une fonction analytique de $\rho(T)$ ouvert de $\mathbb{C}$ et à valeur dans $\mathscr{L}(X)$ [5, 7, 8, 10, 12, 14, 17]. On rappelle la formulation intégrale de Cauchy. Si $\{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\lambda - \lambda_0| \leq r\} \subseteq \rho(T)$ où $\lambda_0 \in \rho(T)$ et $r > 0$, alors

$$R(\lambda_0, T) = \frac{1}{2\, i\pi} \int_{|\lambda - \lambda_0| = r} \frac{R(\lambda, T)}{\lambda - \lambda_0}\, d\lambda = \int_0^1 R(\lambda_0 + re^{2\, i\pi t}, T)\, dt .$$

Par suite

$$\|R(\lambda_0, T)\| = \left\| \int_0^1 R(\lambda_0 + re^{2\, i\pi t}, T)\, dt \right\| \leq \int_0^1 \|R(\lambda_0 + re^{2\, i\pi t}, T)\|\, dt .$$

Donc $R(\lambda, T)$ vérifie le principe du maximum : si $R(\lambda, T)$ est analytique sur un ouvert borné U tel que la fermeture de U est incluse dans $\rho(T)$, alors $\|R(\lambda, T)\|$ atteint son maximum sur la frontière ∂U de U. Le problème est de savoir si la norme de la résolvante $\|(\lambda - T)^{-1}\|$ peut être constante sur tout un ouvert de $\rho(T)$.

Nous remarquons tout d'abord qu'une fonction analytique à valeurs dans un espace de Banach quelconque peut avoir une norme constante sur tout un ouvert sans qu'elle soit constante, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 1.2 : On munit $\mathbb{C}^2$ de la norme 2, c'est-à-dire $\|(z_1, z_2)\| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$ et $\mathscr{L}(\mathbb{C}^2) \sim \mathbb{C}^{2 \times 2}$ de la norme matricielle associée. Soit

$$f : \mathbb{C} \to \mathscr{L}(\mathbb{C}^2) \sim \mathbb{C}^{2 \times 2} \,;\, z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} .$$

On a $\|f(z)\| = 1$, pour tout z tel que $|z| \leq 1$. △

Mais une publication récente [4] montre que la norme de la résolvante ne peut pas être constante sur un ouvert de l'ensemble résolvant dans le cas d'un opérateur borné dans un espace de Hilbert. Dans le cas d'un espace de Banach on peut démontrer le résultat suivant.

LEMME 1 1 *Soit X un espace de Banach Soit $T \in \mathscr{L}(X)$ Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$ On suppose qu'il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|(\lambda_0 - T)^{-1}\| = \|(\lambda_0 - T)^{-1}x\|$ Alors il existe λ aussi proche que l'on veut de λ_0 tel que $\|(\lambda - T)^{-1}\| > \|(\lambda_0 - T)^{-1}\|$*

Démonstration Puisque $\|(\lambda_0 - T)^{-1}\| = \|(\lambda_0 - T)^{-1}x\|$ et $\|x\| = 1$, il existe $y^* \in X^*$ et $\|y^*\| = 1$ tel que $\|(\lambda_0 - T)^{-1}\| = y^*(\lambda_0 - T)^{-1}x$ Soit $f(\lambda) = y^*(\lambda - T)^{-1}x$ La fonction f est holomorphe en λ et non constante elle ne peut donc pas avoir de maximum local Par conséquent, il existe λ aussi proche que l'on veut de λ_0, tel que $\|(\lambda - T)^{-1}\| \geqslant |y^*(\lambda - T)^{-1}x| > \|(\lambda_0 - T)^{-1}\|$ Ce qui prouve le lemme □

En particulier, si X est un espace de Banach de dimension finie, et si $T \in \mathscr{L}(X)$, alors la norme de la résolvante n'est pas constante sur un ouvert de $\rho(T)$

Dans la suite de cet article, nous formulons l'hypothèse suivante sur T

$$(H) \quad \begin{cases} \textit{la norme de la résolvante de l'opérateur } T \textit{ borné dans} \\ \textit{un espace de Banach } X \textit{ quelconque est telle qu'il n'existe} \\ \textit{aucun ouvert de } \rho(T) \textit{ sur lequel elle soit constante} \end{cases}$$

Cette hypothèse est vérifiée pour $T \in \mathscr{L}(X)$ lorsque X est un espace de Hilbert ou un espace de Banach de dimension finie A notre connaissance, rien n'a encore été prouvé en ce qui concerne le cas d'un espace de Banach de dimension infinie

1.3. Le spectre d'une suite d'opérateurs

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{L}(X)$ On définit l'ensemble résolvant de la famille $\{T_n\}$ par

$$\rho(\{T_n\}) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,, \exists n_\lambda \in \mathbb{N}, m_\lambda \in \mathbb{R}, m_\lambda > 0 \text{ tels que } \lambda \in \rho(T_n) \text{ et } \|R(\lambda, T_n)\| \leqslant m_\lambda, \forall n \geqslant n_\lambda\}$$

Le spectre d'une suite d'opérateurs $\sigma(\{T_n\})$ est le complémentaire de $\rho(\{T_n\})$ dans $\mathbb{C}$ Cette notion a été introduite directement par Godunov et Ryabenki [9] On peut caractériser cet ensemble par

$$\sigma(\{T_n\}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}\,, \exists \{T_n\}_{N_1 \subseteq \mathbb{N}} \text{ tel que } \lambda \in \sigma(T_n), \forall n \in N_1,$$
$$\text{ou } \exists \{T_n\}_{N_2 \subseteq \mathbb{N}} \text{ tel que } \lambda \in \rho(T_n)\ \forall n \in N_2 \text{ et } \lim_{n \to \infty} \|R(\lambda, T_n)\| = \infty\Big\}$$

Dans cette caractérisation, la famille $\{T_n\}_{N_i \subseteq \mathbb{N}}$, $i = 1, 2$, est une sous suite infinie de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indexée par N_i, $i = 1, 2$

Pour faciliter l'écriture, on utilise la convention suivante $\|R(\lambda, T)\| = \infty$, $\forall \lambda \in \sigma(T)$ Elle est motivée par la propriété que la norme de la résolvante est infinie sur le bord du spectre si $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \rho(T)$ et $\lim_{n \to \infty} \operatorname{dist}(\lambda_n, \sigma(T)) = 0$ où $\operatorname{dist}(\lambda_n, \sigma(T)) = \inf_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda_n - \lambda|$, alors $\lim_{n \to \infty} \|(\lambda_n - T)^{-1}\| = \infty$ Avec cette convention d'écriture

$$\sigma(\{T_n\}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\,, \limsup_{n \to \infty} \|R(\lambda, T_n)\| = \infty\right\}$$

Néanmoins, on se souviendra que la norme de la résolvante peut être bornée sur son domaine de définition lorsque $\lambda \in R\sigma(T)$ (voir l'Exemple 1 1 ci-dessus)

2. CONVERGENCE UNIFORME

On considère maintenant une famille d'opérateurs $T_n \in \mathscr{L}(X)$ qui converge vers T dans un sens à préciser

LEMME 2 1 *1 Si $T_n x \to Tx$, $\forall x \in X$ (hypothèse H1), alors $\sigma(\{T_n\}) \supseteq \sigma_a(T)$*
2 Si de plus, $T_n^* x \to T^* x$, $\forall x \in X$ (hypothèse H2), alors $\sigma(\{T_n\}) \supseteq \sigma(T)$

3. *Si $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$, (hypothèse H3), alors $\sigma(\{T_n\}) = \sigma(T)$.*

Démonstration :

1. Soit $\lambda \in \rho(\{T_n\})$, cela implique qu'il existe $n_0 > 1$ et $M > 0$ tel que $\|R(\lambda, T_n)\| \leqslant M$, $\forall n > n_0$. Par suite, pour tout $x \in X$, on a $\|x\| \leqslant M \|(\lambda - T_n) x\|$. Puisque $T_n x \to Tx$ cela implique que $\|x\| \leqslant M \|(\lambda - T) x\|$. Donc $\lambda \notin \sigma_a(T)$ et le point 1 est prouvé. En particulier $\lambda - T$ est injective et $\operatorname{Im}(\lambda - T)$ est fermé.
2. D'une manière similaire et grâce à la deuxième hypothèse, on obtient $\|x\| \leqslant M \|(\bar{\lambda} - T^*) x\|$, qui implique que $\operatorname{Im}(\lambda - T)$ est dense dans X. Par suite $\lambda - T$ est inversible, puisqu'il est fermé. Ceci prouve le point 2.
3. L'hypothèse $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ implique les hypothèses $H1$ et $H2$, donc $\sigma(\{T_n\}) \supseteq \sigma(T)$. De plus, $\forall \lambda \in \rho(T)$, $\lambda \in \rho(T_n)$ pour n suffisamment grand et $R(\lambda, T_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} R(\lambda, T)$. Par conséquent la suite $(R(\lambda, T_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour n très grand. Ce qui prouve le point 3. □

Il est évident que les hypothèses $H1$ et $H2$ du lemme ne suffisent pas pour avoir l'égalité entre $\sigma(\{T_n\})$ et $\sigma(T)$, car $\sigma(\{T_n\})$ peut être très grand par rapport $\sigma(T)$. D'un autre côté, l'hypothèse $H3$ est trop restrictive. Nous verrons plus loin qu'on peut avoir l'égalité $\sigma(\{T_n\}) = \sigma(T)$ dans le cas de matrices triangulaires, qui ne vérifient pourtant pas l'hypothèse $H3$. De manière similaire, la famille d'opérateurs étudiée par Reddy [15] et Böttcher [4] ne vérifient pas la condition $H3$, mais elle satisfait bien l'égalité $\sigma(\{T_n\}) = \sigma(T)$.

2.1. Le spectre ponctuel ϵ-approché

Le spectre ponctuel ϵ-approché est défini par Nevanlinna [13, p. 19] par

$$\Sigma_\epsilon(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \exists x \in X,\ \|x\| = 1 \text{ tel que } \|(\lambda - T) x\| < \epsilon\}.$$

$\Sigma_\epsilon(T)$ forme une famille d'ouverts emboîtés, croissante en fonction de ϵ. Nevanlinna [13, p. 24] démontre que la fermeture $cl\Sigma_\epsilon(T)$ est continue : si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $T \in \mathscr{L}(X)$ et $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$, alors $\lim_{n \to \infty} cl\Sigma_\epsilon(T_n) = cl\Sigma_\epsilon(T)$. Sa preuve utilise implicitement la condition que l'opérateur T vérifie (H).

2.2. L'ϵ-pseudospectre

La notion d'ϵ-pseudospectre (ensemble des valeurs propres de certaines matrices proches d'une matrice donnée) a été introduite par Varah essentiellement pour l'étude de la sensibilité du spectre de matrices non normales.

Pour un opérateur borné, l'ϵ-pseudospectre est équivalent à l'ensemble de toutes les ϵ-valeurs propres introduites par Landau [11].

DÉFINITION 2.1 : *Pour $\epsilon > 0$, l'ϵ-pseudospectre d'un opérateur T borné, est l'ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $\sigma_\epsilon(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \|(\lambda - T)^{-1}\| \geqslant \epsilon^{-1}\} \cup \sigma(T)$.*

Nous allons donner quelques définitions équivalentes dans le cas d'un opérateur T satisfaisant l'hypothèse (H). Nous verrons l'importance de cette hypothèse dans la démonstration des équivalences des définitions et des théorèmes suivants.

THÉORÈME 2.2 : *Soit $T \in \mathscr{L}(X)$ où X est un espace de Banach, T vérifiant (H). Alors l'ϵ-pseudospectre $\sigma_\epsilon(T)$ admet les définitions équivalentes suivantes :*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \|(\lambda - T)^{-1}\| \geqslant \epsilon^{-1}\} \cup \sigma(T), \tag{2.1}$$

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tel que } \|x_n\| = 1,\ \lim_{n \to \infty} \|(\lambda - T) x_n\| \leqslant \epsilon\right\} \cup \sigma(T), \tag{2.2}$$

$$cl\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \lambda \in \sigma(T + E) \text{ avec } \|E\| \leqslant \epsilon\}, \tag{2.3}$$

$$cl\Sigma_\epsilon(T) \cup \sigma(T). \tag{2.4}$$

Avant de prouver ce théorème, les remarques suivantes s'imposent

1 $\cup R\sigma(T)$ (au lieu de $\cup\,\sigma(T)$) suffit dans les définitions (2 1), (2 2) et (2 4)

2 La démonstration du théorème est plus facile dans le cas de matrices (c'est-à-dire dim $(X) < \infty$) Dans ce cas, $\cup\,\sigma(T)$ n'est pas nécessaire dans (2 1), (2 2) et (2 4) , de plus l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}\,,\, \lambda \in \sigma(T+E)$ avec $\|E\| \leqslant \epsilon\}$ est fermé par nature Par ailleurs $\sigma_\epsilon(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,,\, \sigma_{\min}(\lambda - T) \leqslant \epsilon\}$ si on choisit la norme euclidienne $\|\,.\,\|_2$

3 L'équivalence entre (2 1) et (2 4) est donnée dans Nevanlinna [13], en s'appuyant implicitement sur l'hypothèse (H)

Démonstration Pour démontrer le Théorème 2 2, nous prouvons successivement $(2\ 1) \Leftrightarrow (2\ 2)$, $(2\ 4) \Rightarrow (2\ 3)$, $(2\ 1) \Rightarrow (2\ 4)$ et $(2\ 3) \Rightarrow (2\ 1)$

- $(2\ 1) \Leftrightarrow (2\ 2)$

— Soit $\lambda \in \rho(T)$ et $\|(\lambda - T)^{-1}\| \geqslant \epsilon^{-1}$, alors $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\|y_n\| = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} \|(\lambda - T)^{-1} y_n\| = \|(\lambda - T)^{-1}\| \geqslant \epsilon^{-1}$ Soit $x_n = (\,\|(\lambda - T)^{-1} y_n\|\,)^{-1} (\lambda - T)^{-1} y_n$, on a $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \|(\lambda - T)\, x_n\| = \lim\limits_{n \to \infty} (\,\|(\lambda - T)^{-1}_{y_n}\|\,)^{-1} \leqslant \epsilon$ D'où $(2\ 1) \Rightarrow (2\ 2)$

— Pour montrer que $(2\ 2) \Rightarrow (2\ 1)$, il suffit de prendre $y_n = (\,\|(\lambda - T)\, x_n\|\,)^{-1} (\lambda - T)\, x_n$ On a alors $\|(\lambda - T)^{-1}\| \geqslant \lim\limits_{n \to \infty} \|(\lambda - T)^{-1} y_n\| = \lim\limits_{n \to \infty} (\,\|(\lambda - T)\, x_n\|\,)^{-1} \geqslant \epsilon^{-1}$

- $(2\ 4) \Rightarrow (2\ 3)$

Il est évident que $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\,,\, \lambda \in \sigma(T+E)$ avec $\|E\| \leqslant \epsilon\}$ Soit $\lambda \in \Sigma_\epsilon(T)$ donc $\exists x_0 \in X$, tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|(\lambda - T)\, x_0\| < \epsilon$ Soit $y_0 = (\lambda - T)\, x_0$ Soit $\exists y^* \in X^*$ tel que $\|y^*\| = 1$ et $\langle y^*, x_0 \rangle = 1$ Soit $E \in \mathscr{L}(X)$, $Ex = \langle y^*, x \rangle\, y_0$, on a $(\lambda - T - E)\, x_0 = (\lambda - T)\, x_0 - y_0 = 0$ et $\|Ex\| \leqslant |\langle y^*, x \rangle|\ \|y_0\| < \epsilon\, \|x\|$ Donc $\Sigma_\epsilon(T) \cup \sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}\,,\, \lambda \in \sigma(T+E)$ avec $\|E\| \leqslant \epsilon\}$

- $(2\ 3) \Rightarrow (2\ 1)$

Soit $E \in \mathscr{L}(X)$ de norme inférieure ou égale à ϵ et $\lambda \in \sigma(T+E)$ Si on suppose que $\lambda \in \rho(T)$ et $\|(\lambda - T)^{-1}\| < \epsilon^{-1}$, on aurait $\|(\lambda - T)^{-1} E\| < 1$ ce qui implique que $(\lambda - T)^{-1} E$ est inversible , par suite $\lambda - T - E = (\lambda - T)\,[I - (\lambda - T)^{-1} E]$ serait inversible comme produit de deux opérateurs inversibles, ce qui contredit $\lambda \in \sigma(T+E)$ Donc $\lambda \in (2\ 1)$

- $(2\ 1) \Rightarrow (2\ 4)$

Soit $\lambda \in \rho(T)$ et $\|(\lambda - T)^{-1}\| \geqslant \epsilon^{-1}$ Par l'hypothèse (H), la norme de la résolvante est non constante, donc il existe λ' aussi proche de λ tel que $\|(\lambda' - T)^{-1}\| > \epsilon^{-1}$ Par conséquent, il existe $y \in X$ de norme 1, tel que $\|(\lambda' - T)^{-1} y\| > \epsilon^{-1}$ Soit $x = (\,\|(\lambda' - T)^{-1} y\|\,)^{-1} (\lambda' - T)^{-1} y$ On a $\|(\lambda' - T)\, x\| < \epsilon$, ce qui implique que $\lambda' \in \Sigma_\epsilon(T)$ Par suite $\lambda \in cl\Sigma_\epsilon(T)$ et $(2\ 1) \Rightarrow (2\ 4)$ Ceci finit la démonstration du théorème □

On remarque que l'hypothèse (H) intervient pour montrer que $(2\ 1) \Rightarrow (2\ 4)$ elle est donc indispensable à la démonstration

THEOREME 2 3 *Soit $T \in \mathscr{L}(X)$ satisfaisant (H) Alors*

$$\lim_{\epsilon \to \epsilon_0} \sigma_\epsilon(T) = \sigma_{\epsilon_0}(T), \quad \forall \epsilon_0 > 0 \quad et \quad \lim_{\epsilon \to 0^+} \sigma_\epsilon(T) = \sigma(T)$$

Démonstration En effet, l'ϵ-pseudospectre de T est une famille croissante en fonction de ϵ de compacts emboîtés $\forall \epsilon > \epsilon_0 > 0$, $\sigma_\epsilon(T) \supseteq \sigma_{\epsilon_0}(T) \supseteq \sigma(T)$ Donc $\lim\limits_{\epsilon \to \epsilon_0^+} \sigma_\epsilon(T) = \bigcap\limits_{\epsilon > \epsilon_0^+} \sigma_\epsilon(T)$ Soit $\lambda \in \lim\limits_{\epsilon \to \epsilon_0^+} \sigma_\epsilon(T)$ alors $\|R(\lambda, T)\| \geqslant 1/\epsilon$, $\forall \epsilon > \epsilon_0 > 0$ Or $\epsilon \to \epsilon_0^+$ implique que $\|R(\lambda, T)\| \geqslant 1/\epsilon_0$, et $\lim\limits_{\epsilon \to \epsilon_0^+} \sigma_\epsilon(T) = \sigma_{\epsilon_0}(T)$ D'autre part, l'égalité $\lim\limits_{\epsilon \to \epsilon_0} \sigma_\epsilon(T) = \sigma_{\epsilon_0}(T)$ est évidente d'après l'hypothèse (H) □

THEOREME 2 4 *Soit T un opérateur de $\mathscr{L}(X)$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs de $\mathscr{L}(X)$ On suppose que $T_n \xrightarrow{\|\ \|} T$ quand $n \to \infty$ où T satisfait (H) Alors $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(T_n) = \sigma_\epsilon(T)$*

Démonstration : Il suffit de remarquer que $\sigma(T) = \sigma(\{T_n\}) \subseteq \lim_{n\to\infty} \sigma_\epsilon(T_n)$. Or d'après le Théorème 2.2 précédent, on a $\sigma_\epsilon(T) = cl\Sigma_\epsilon(T) \cup \sigma(T)$, où $\Sigma_\epsilon(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \exists x \in X,\ \|x\| = 1 \text{ et } \|(\lambda - T)n\| < \epsilon\}$. On utilise ensuite le fait que $cl\Sigma_\epsilon(T)$ est une fonction continue de ϵ, ce qui est démontré par Nevanlinna [13], sous l'hypothèse (H). □

3. CONVERGENCE COLLECTIVEMENT COMPACTE

Nous consacrons cette partie à l'étude du pseudospectre et du spectre d'une suite d'opérateurs qui converge vers un opérateur T au sens de la convergence collectivement compacte. Cette notion de convergence introduite par Sobolev a été développée par Anselone [1]. Nous rappelons brièvement cette notion de convergence et quelques-unes de ses propriétés. Le lecteur intéressé est invité à consulter [7, chapitre 3] et [2, 3, 1] pour plus d'informations.

DÉFINITION 3.1 : *Soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'opérateurs de* $\mathscr{L}(X)$ et T *un opérateur de* $\mathscr{L}(X)$. *La suite* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge de manière collectivement compacte vers* T *et on note* $T_n \xrightarrow{cc} T$ *si* $\forall x \in X$, $T_n x \to Tx$, *et* $\bigcup_{n\geqslant 1}(T_n - T)S$ *est relativement compact pour tout* S *borné fermé.*

THÉORÈME 3.1 : *On suppose que* $T_n \xrightarrow{cc} T$. *Alors* $\limsup_{n\to\infty} \sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$.

Démonstration : C'est une conséquence directe du fait simple à établir [1, 7] que $R_n(\lambda) \xrightarrow{cc} R(\lambda)$, $\forall \lambda \in \rho(T)$.

THÉORÈME 3.2 : *On suppose que* $T_n \xrightarrow{cc} T$. *Alors* $\sigma_a(T) \subseteq \sigma(\{T_n\}) \subseteq \sigma(T)$.

Démonstration : Puisque $T_n \xrightarrow{cc} T$, en particulier T_n converge ponctuellement vers T ce qui implique, d'après la première partie du Lemme 2.1, que $\sigma_a(T) \subseteq \sigma(\{T_n\})$. D'autre part, si $\lambda \in \rho(T)$, alors $\lambda \in \rho(T_n)$ pour n suffisamment grand $(n \geqslant n_0)$ et $(\lambda - T_n)^{-1} \xrightarrow{cc} (\lambda - T)^{-1}$. Donc $(\lambda - T_n)^{-1}x \to (\lambda - T)^{-1}x$, $\forall x \in X$ et $\sup_{n\geqslant n_0} \|(\lambda - T_n)^{-1}\| \leqslant M < \infty$. Ce qui prouve le théorème. □

A-t-on réciproquement $\sigma(T) \subseteq \sigma(\{T_n\})$? Nous n'avons pas réussi à démontrer cette inclusion, ni à exhiber de contre-exemple.

THÉORÈME 3.3 : *On suppose que* $T_n \xrightarrow{cc} T$ *qui vérifie* (H). *Si, par ailleurs* $\sigma(T) \subseteq \sigma(\{T_n\})$, *alors*

$$\sigma_\epsilon(T) \subseteq \liminf_{n\to\infty} \sigma_\epsilon(T_n), \quad \forall \epsilon > 0 . \tag{3.1}$$

Démonstration : Soit $\lambda \in \rho(T) \cap \sigma_\epsilon(T)$. Par hypothèse, on sait que la norme de la résolvante de T n'est pas constante sur un ouvert de $\rho(T)$, ce qui implique l'existence d'un certain $\tilde{\lambda}$ aussi proche de λ que l'on veut, et tel que $\|(\lambda - T)^{-1}\| < \|(\tilde{\lambda} - T)^{-1}\|$. D'autre part le fait que $T_n \xrightarrow{cc} T$ implique l'existence d'un entier n_0 positif tel que $\tilde{\lambda} \in \rho(T_n)$, $\forall n \geqslant n_0$ et $(\tilde{\lambda} - T_n)^{-1} \to (\tilde{\lambda} - T)^{-1}$. Le théorème de Banach-Steinhaus prouve que $\|(\tilde{\lambda} - T)^{-1}\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|(\tilde{\lambda} - T_n)^{-1}\|$. Par suite, $\exists m \geqslant n_0$ tel que, pour tout $n \geqslant m$, on a $\|(\tilde{\lambda} - T_n)^{-1}\| > \epsilon^{-1}$. Ce qui conclut la démonstration. □

Remarque : On ne peut pas espérer avoir mieux que l'inclusion (3.1) lorsque $T_n \xrightarrow{cc} T$. En effet, on ne peut pas obtenir $\lim_{n\to\infty} \sigma_\epsilon(T_n) = \sigma_\epsilon(T)$ comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 3.1 : On suppose que $X = l^1$; $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant\infty}$ est la base canonique de X et soit la norme $\|\cdot\|_1$ défini par $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Soit $Tx = 0$, $T_{2n}x = (x, e_n)\, e_1$, pour $n \geqslant 1$ et $T_{2n+1}x = 2(x, e_n)\, e_1$, pour $n \geqslant 0$. Alors

$$\sigma(T) = \sigma(T_n) = \{0\} .$$

De plus $\forall \lambda \neq 0$, on a $\|(\lambda - T)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}$. Donc

$$\sigma_\varepsilon(T) = B(0, \epsilon) = \{\lambda \,;\, |\lambda| \leq \epsilon\} \,;$$

$$\|(\lambda - T_{2n})^{-1}\|_1 = |\lambda|^{-1} + |\lambda|^{-2} \quad \text{et} \quad \|(\lambda - T_{2n+1})^{-1}\|_1 = |\lambda|^{-1} + 2|\lambda|^{-2}.$$

Donc

$$\sigma_\epsilon(T_{2n}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\lambda| \leq \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}}{2}\right\},$$

et

$$\sigma_\epsilon(T_{2n+1}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\lambda| \leq \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 8\epsilon}}{2}\right\}.$$

Par conséquent,

$$\liminf_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(T_n) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\lambda| \leq \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}}{2}\right\},$$

et

$$\limsup_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(T_n) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\lambda| \leq \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 8\epsilon}}{2}\right\}.$$

On voit bien que $\sigma_\epsilon(T_n)$ n'admet pas de limite, et que $\sigma_\epsilon(T)$ est inclus strictement dans $\liminf_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(T_n)$, $\forall \epsilon > 0$. △

4. LES OPÉRATEURS TRIANGULAIRES

Dans cette partie, nous traitons le cas particulier d'opérateurs représentés par des matrices triangulaires supérieures. Les résultats obtenus restent valables dans le cas des matrices triangulaires inférieures, triangulaires supérieures par bloc et triangulaires inférieures par bloc.

Notations : Dans cette partie, nous spécifions $X = l^2$ et $\|\,.\,\|$ la norme euclidienne sur X. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq \infty} \in \mathcal{L}(l^2)$, une matrice triangulaire supérieure infinie continue, donc bornée, telle que $\sup_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \|A\| < \infty$. Soit $A_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matrice triangulaire supérieure finie définie par $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$.

On note que la structure triangulaire garantie la convergence ponctuelle de A_n (resp., A_n^*) vers A (resp., A^*) d'où les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$.

LEMME 4.1 : *Les spectres de A_n, A_m et A vérifient l'inclusion $\sigma(A_n) \subseteq \sigma(A_m) \subseteq \sigma(A)$, $\forall n \leq m$.*

Démonstration : Si $\lambda \in \sigma(A_n)$, $\exists u = (u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$, tel que $A_n u = \lambda u$. Soit $\tilde{u} = (u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots)^T \in l^2$. On vérifie alors que $A\tilde{u} = \lambda \tilde{u}$. □

LEMME 4.2 : *Pour tout λ appartenant à l'ensemble résolvant $\rho(A)$, on a $\lim_{n \to \infty} \|(\lambda - A_n)^{-1}\| = \|(\lambda - A)^{-1}\|$.*

Démonstration : On sait que $\|(\lambda - A_n)^{-1}\| \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|$. La suite $(\|(\lambda - A_n)^{-1}\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, donc elle admet une limite finie inférieure ou égale à $\|(\lambda - A)^{-1}\|$. Donc, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il suffit de montrer que $(\lambda - A_n)^{-1} x \to (\lambda - A)^{-1} x$ quand $n \to \infty$, $\forall x \in l^2$ pour conclure le lemme. Pour cette question, définissons $x = (x_1, ..., x_n, ...)^T$, $x_n = (x_1, ..., x_n, 0, ...)^T$ et $y_n = (0, ..., x_{n+1}, x_{n+2}, ...)^T \in l^2$. Soit B_n et C_n les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} A_n & C_n \\ 0 & B_n \end{pmatrix}$. Les suites $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites d'opérateurs bornés vérifiant $\|B_n\| \leq \|A\|$, $\|C_n\| \leq \|A\|$ et $\|A_n\| \leq \|A\|$. De plus $Ax = A_n x + (B_n + C_n) y_n$.

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A) x - R(\lambda, A_n) x\| &\leq \|R(\lambda, A)\| \; \|x - (\lambda - A) R(\lambda, A_n) x\| \\ &\leq \|R(\lambda, A)\| \; \|x - \underbrace{x_n - ((\lambda - B_n) - C_n) R(\lambda, A) x}_{=0}\| \\ &\leq \|R(\lambda, A)\| \; \|y_n\| \\ &\to 0 \text{ quand } n \to \infty .\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. □

THÉORÈME 4.3 : *Soit A et* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{L}(l^2)$ *définies comme précédemment. Alors*

1. $\sigma(A) = \sigma(\{A_n\})$.

2. $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(A_n) = \sigma_\epsilon(A)$.

Démonstration : $\sigma(\{A_n\}) \supseteq \sigma(A)$ puisque $A_n x \to Ax$ et $A_n^* x \to A^* x$, $\forall x \in l^2$. D'autre part $\lim_{n \to \infty} \|R(\lambda, A_n)\| = \|R(\lambda, A)\|$, $\forall \lambda \in \rho(T)$, donc $\sigma(\{A_n\}) = \sigma(A)$, ce qui prouve le point 1.

D'après le Lemme 4.1, et du fait que $(\|R(\lambda, A_n)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, on a $\sigma_\epsilon(A_n) \subseteq \sigma_\epsilon(A_m) \subseteq \sigma_\epsilon(A)$, $\forall n \leq m$. Donc $(\sigma_\epsilon(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de compacts emboîtés inclus dans $\sigma_\epsilon(A)$. Cette suite admet donc une limite $U_\epsilon = \lim_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(A_n) \subseteq \sigma_\epsilon(A)$. Or $U_\epsilon \supseteq \sigma(\{A_n\}) = \sigma(A)$. Soit ϵ fixé, $\epsilon > \epsilon' > 0$. Montrons que $\sigma_\epsilon(A) \supseteq U_\epsilon \supseteq \sigma_{\epsilon - \epsilon'}(A)$. La première inclusion est évidente d'après ce qui précède. Il nous reste donc à démontrer que $U_\epsilon \supseteq \sigma_{\epsilon - \epsilon'}(A)$. Soit $\lambda \in \sigma_{\epsilon - \epsilon'}(A)$ tel que $\in \sigma(A)$. D'après le Lemme 4.2, on sait que $\|R(\lambda, A_n)\|$ croît vers $\|R(\lambda, A)\|$ si $\lambda \in \rho(A)$. Donc $\exists n_0 > 0$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $\|R(\lambda, A_n)\| \geq (\epsilon - 2^{-1} \epsilon')^{-1} \geq \epsilon^{-1}$. Par conséquent $\lambda \in \sigma_\epsilon(A_n)\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lambda \in U_\epsilon$.

Or $\lim_{\epsilon' \to \epsilon} \sigma_{\sigma'}(A) = \sigma_\epsilon(A)$ ce qui conclut la démonstration de 2. □

Les résultats des théorèmes et lemmes précédents, établis pour le cas des matrices triangulaires, restent valables dans les cas des matrices triangulaires inférieures, triangulaires supérieures par bloc et triangulaires inférieures par bloc, tout en choisissant les matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit. Si $A = (A_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq \infty} \in \mathscr{L}(l^2)$, où les (A_{ij}) pour $1 \leq i \leq j \leq \infty$ sont des blocs matriciels, alors $A_n = (A_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$.

5. CONCLUSION

Les résultats des deux premières parties également sont valables pour toute famille d'opérateurs du type $(T_\alpha)_{\alpha > 0}$ où α est un paramètre positif à valeurs réelles et non seulement entières.

La définition du pseudospectre peut être étendue au cas d'opérateurs fermés (non nécessairement bornés) dans un espace de Banach. De plus le Théorème 2.2 reste valable dans ce cas sous l'hypothèse (H) pour T.

On remarque que la convergence uniforme n'est pas nécessaire pour garantir que $\lim_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(T_n) = \sigma_\epsilon(T)$. Mais souvent T_n et T_n^* convergent ponctuellement vers T et T^* respectivement, ce qui garantit que $\sigma(T) \subseteq \sigma(\{T_n\})$. D'autres propriétés sur T et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont nécessaires pour garantir que $\lim_{n \to \infty} \sigma_\epsilon(T_n) = \sigma_\epsilon(T)$, comme on l'a vu dans le cas des opérateurs triangulaires.

REMERCIEMENTS

Tous mes sincères remerciements vont au Professeur F. Chaitin-Chatelin pour l'aide et les conseils qu'elle m'a apportés, ainsi qu'à toutes les personnes qui ont contribué à approfondir ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] P. M. ANSELONE, *Collectively Compact Operator Approximation Theory,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[2] P. M. ANSELONE and T. W. PALMER, Collectively compact sets of linear operators, *Pacific Journal of Mathematics,* 25, No. 3 : 417-422, 1968.

[3] P. M. ANSELONE and T. W. PALMER, Spectral analysis of collectively compact, strongly convergent operator sequences, *Pacific Journal of Mathematics,* 25, No. 3 : 423-431, 1968.

[4] A. BÖTTCHER, Pseudospectra and singular values of large convolution operators, *J. Int. Eqs. Applics,* 6 : 267-301, 1994.

[5] H. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications,* Masson, quatrième édition, 1993.

[6] F. CHAITIN-CHATELIN and V. FRAYSSÉ, *Lectures on Finite Precision Computations,* SIAM, 1996.

[7] F. CHATELIN, *Spectral Approximation of linear operators,* Academic Press, New York, 1983.

[8] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear operators, part I, general theory.* Wiley (Interscience), New York, 1958.

[9] S. K. GODUNOV and V. S. RYABENKI, *Theory of Difference Schemes : an Introduction.* North-Holland, Amsterdam, 1964. Translation by E. Godfredsen.

[10] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators,* Springer, New York, 1976.

[11] H. J. LANDAU, On Szegö's eigenvalue distribution theorem and non-hermitian kernels, *J. Analyse Math.,* 28 : 335-357, 1975.

[12] E. R. LORCH, The spectrum of linear transformation, *Transactions of American Mathematical Society,* 52 : 238-248, 1942.

[13] O. NEVANLINNA, *Convergence of iterations for linear equations,* Birkhauser, Basel, 1993.

[14] J. D. NEWBURGH, The variation of spectra, *Duke Math. J.,* 5 : 165-176, 1951.

[15] S. C. REDDY, Pseudospectra of Wiener-Hopf integral operators and constant-coefficient difference operators, *J. Integral. Eqs. Applics,* 5 : 369-403, 1993.

[16] L. REICHEL and L. N. TREFETHEN, Eigenvalues and pseudo-eigenvalues of Toeplitz matrices, *Linear algebra and its applications 162-164,* pages 153-185, 1992.

[17] A. E. TAYLOR, The resolvent of a closed transformation, *Bull. AMS,* 44 : 70-74, 1938.

[18] L. N. TREFETHEN, Pseudospectra of matrices. In *Numerical Analysis* 1991, D. F. Griffiths and G. A. Watson editors, Longman, Harlow, 1992.

[19] L. N. TREFETHEN, Pseudospectra of linear operators. SIAM *Rev.*, 39 : 383-406, 1997.