

BRUNO DESPRÉS

**Fonctionnelle quadratique et équations intégrales
pour les problèmes d'onde harmonique
en domaine extérieur**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome
31, n° 6 (1997), p. 679-732

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1997__31_6_679_0

© AFCET, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



FONCTIONNELLE QUADRATIQUE ET ÉQUATIONS INTÉGRALES POUR LES PROBLÈMES D'ONDE HARMONIQUE EN DOMAINE EXTÉRIEUR (*)

Bruno DESPRÉS (1)

Résumé. — On propose une nouvelle formulation du problème de la diffraction d'une onde harmonique par un obstacle borné. Cette formulation repose sur la minimisation d'une fonctionnelle quadratique dans un espace de Hilbert. Après sommation des séries, on obtient un système de type intégral avec des noyaux singuliers mais intégrables : la structure du système est analogue à celle d'un système de Stokes.

Abstract. — We exhibit a quadratic functional for the harmonic wave equation in exterior domain. The functional reaches its unique minimum in the space of out-going and/or in-going solution at the out-going solution with absorbing boundary condition. It gives a « natural » Hilbertian framework to this problem. It is possible to compute explicitly all the terms of the functional to obtain a mixed integral system. Simple algorithms solve the system.

1. INTRODUCTION

Nous proposons une nouvelle formulation pour les problèmes extérieurs de diffraction d'ondes en fréquence tels que l'équation de Helmholtz bidimensionnelle ou tridimensionnelle ainsi que les équations de Maxwell harmoniques tridimensionnelles. Nous restreignons la présentation au problème de Helmholtz bidimensionnel (1-3) extérieur qui modélise la diffraction d'une onde acoustique de fréquence $\omega > 0$ par un obstacle borné.

$$(-\Delta - \omega^2)u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega} \quad (1)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)u - t\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)u = g \in L^2(\Gamma), \quad |t| \leq 1 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right)u = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ à l'infini.} \quad (3)$$

(*) Manuscrit reçu le 21 décembre 1995. Version révisée reçue le 30 mai 1996.

(1) Département de Mathématiques Appliquées, Commissariat à l'Énergie Atomique, Centre d'études de Limeil Valenton, 94195 Villeneuve Saint Georges, Cedex, France. e.mail : despres@limeil.cea.fr

Le domaine diffractant Ω est un ouvert borné connexe de R^2 . La frontière de Ω , notée Γ , est supposée régulière (de classe C^∞). La normale sortante est notée ν . L'équation (2) est une condition de type impédance inhomogène. Dans le cas $t = -1$ on obtient une condition de Dirichlet inhomogène $u = \frac{1}{2i\omega} g$ sur Γ , dans le cas $t = 1$ une condition de Neumann inhomogène $\frac{\partial}{\partial \nu} u = -2g$ sur Γ . Le cas $t = 0$ correspond à ce qu'on appellera par la suite le problème modèle. L'équation (2) est équivalente à

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega z\right) u = \frac{g}{1+t}$$

lorsque l'impédance z et le coefficient de réflexion t sont reliés par

$$z = \frac{1-t}{1+t}, \quad t = \frac{1-z}{1+z}.$$

La condition $Re(z) > 0$ correspond alors à $|t| < 1$. Nous dirons qu'un problème est de grande taille si le diamètre L de Ω est grand devant la longueur d'onde : i.e. $L \gg \frac{2\pi}{\omega}$.

Présentons tout d'abord quelles sont les motivations du travail présenté. La théorie classique des équations intégrales ⁽²⁾ pour les problèmes d'ondes en fréquence [CK83]-[Ned77] permet d'obtenir plusieurs formulations distinctes du même problème initial (1-3) en réduisant le problème initial en milieu infini à un problème intégral posé sur la courbe diffractante. Les méthodes intégrales utilisent une représentation intégrale de la solution u :

soit à partir de $u|_{\Gamma}$ et $\frac{\partial}{\partial \nu} u|_{\Gamma}$

$$u(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} G(|z-y|) u(y) - G(|z-y|) \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) ds, \quad z \in R^2 - \bar{\Omega}, \quad (4)$$

soit à l'aide d'un potentiel (par exemple de double couche φ) donné sur Γ

$$u(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} G(|z-y|) \varphi(y) ds, \quad z \in R^2 - \bar{\Omega}. \quad (5)$$

⁽²⁾ Signalons cependant qu'il existe d'autres approches [Ces94] pour la résolution numérique de (1-3) : principalement l'approche par troncature du domaine du calcul à l'aide d'une condition absorbante [BT80]-[Des91] et les méthodes asymptotiques [BM94]. On peut néanmoins affirmer que pour des problèmes de grande taille l'approche par équation intégrale est nettement plus intéressante en terme de nombre d'inconnues après discrétisation qu'une approche par troncature du domaine du calcul. D'autre part un avantage des équations intégrales est qu'elles mènent à des solutions numériques très précises et à des analyses d'erreur, ce qui est plus difficilement le cas lors de l'emploi des méthodes asymptotiques.

Dans tous les cas le noyau intégral est donné par G la solution fondamentale sortante du problème de Helmholtz en dimension 2 : $G = \frac{H_0^{(2)}(\omega r)}{4i}$. En faisant tendre $z \rightarrow \Gamma$ et en explicitant les limites singulières présentes dans les noyaux intégraux, on obtient une équation intégrale sur Γ . On obtient un système intégral que nous notons

$$Ax = b, \tag{6}$$

où A est un opérateur linéaire complexe, non hermitien ($A^* \neq A$), symétrique ($A' = A$) dans les cas favorables. Dans tous les cas, A n'est pas défini positif. La fonction inconnue que l'on cherche à calculer est x . La formulation (6) est bien posée sous des hypothèses générales : le plus souvent il est nécessaire d'admettre que ω^2 n'est pas valeur propre d'un problème de Helmholtz intérieur de Dirichlet ou de Neumann. C'est ce qu'on appelle le problème des « fréquences irrégulières ». Pour un ensemble dénombrable sans point d'accumulation de fréquence

$$0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n \leq \dots$$

l'opérateur A n'est même pas injectif. Néanmoins le noyau $\text{Ker}(A)$ est toujours de dimension finie.

La discrétisation de (6) se fait à l'aide d'une formulation variationnelle

$$(Ax_h, y_h) = (b, y_h), \quad x_h \in V_h, \quad \forall y_h \in V_h \tag{7}$$

ce qu'on peut également noter

$$A_h x_h = b_h, \quad x_h \in V_h. \tag{8}$$

La difficulté principale vient alors du fait que la matrice complexe pleine $A_h \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ne possède pas de structure mathématique particulière qui permettrait d'effectuer l'inversion de (8) à l'aide d'algorithmes tels que l'algorithme de Jacobi, de Gauss-Seidel ou l'algorithme de type gradient conjugué. En particulier, on est toujours à la recherche d'un préconditionneur efficace et économique pour les algorithmes de type gradient conjugué (voir cependant [A. 93]). Il s'ensuit que la méthode d'inversion la plus couramment utilisée est la méthode de Gauss : cette méthode nécessite lors de son implémentation sur ordinateur une place mémoire proportionnelle à n^2 . Tout cela fait qu'il est très difficile de s'attaquer à la résolution numérique d'un problème de grande taille (on peut considérer que cela commence pour $n \geq 10\,000$) à l'aide des équations intégrales. La difficulté est encore plus évidente pour les équations de Maxwell en dimension 3.

Nous proposons dans cet article un procédé pour obtenir des équations intégrales d'un nouveau type. En ce qui concerne le terme de gauche de (9) la structure des systèmes obtenus est celle d'un système de Stokes intégral

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + tDx \\ 0 \end{pmatrix}, t \text{ donné par l'équation (2)}. \quad (9)$$

Les différents opérateurs A , B et C sont intégraux et réels (à un changement de fonction inconnue près) avec les propriétés $A^* = A \geq \frac{1}{2}I$, $C^* = C \geq 0$. L'opérateur D est complexe et $Re((A - tD)x, x) \geq 0$ mais n'est pas un opérateur intégral. Les opérateurs A et C ne sont pas singuliers. Seuls B contient un noyau intégral présentant une singularité. Les noyaux intégraux sont les mêmes que l'on cherche à calculer une solution sortante (3) ou une solution rentrante $(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega)u = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$: seuls les seconds membres changent. La fonction inconnue que l'on cherche prioritairement à calculer est

$$x = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u \right).$$

x contient une information redondante avec la condition de bord. Le multiplicateur λ exprime une contrainte liée à la condition à l'infini. On peut interpréter [Des95] le multiplicateur λ comme étant proportionnel à x : $\lambda = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) v, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) v \right)$ avec $v = \frac{i\omega}{4\pi}u$. On peut ainsi considérer qu'il y a 4 fois plus d'inconnues dans notre formulation que pour les équations intégrales classiques.

Notre formulation élimine le problème des fréquences irrégulières. On montre que la forme finale (9) est bien posée indépendamment de la présence de valeur propre du problème de Dirichlet ou Neumann intérieur: il s'agit du théorème 3.2. Néanmoins les preuves proposées pour montrer l'équivalence de notre formulation et du problème initial (1-3) nécessitent l'hypothèse technique que ω^2 n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet intérieur. Par un argument de continuité en fonction de ω , cela montre finalement que notre formulation est équivalente au problème initial pour tout ω . Il apparaît ainsi une caractéristique importante de la formulation que nous proposons: l'analyse de la formulation est aisée, on montre facilement qu'il y a existence et unicité de la solution pour tout $\omega > 0$; en revanche la preuve de l'équivalence de la formulation et le problème initial est délicat et nécessite de se placer en dehors des fréquences irrégulières.

Après discrétisation par une méthode de Galerkin, on aura

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h \\ -B_h^* & C_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_h + tD_h x_h \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Les matrices A_h , B_h et C_h sont pleines et réelles (à un changement de fonction inconnue près) : $A_h, B_h, C_h \in R^{n \times n}$. La matrice D_h est complexe et creuse. L'algorithme (11) résout le système (10).

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h \\ -B_h^* & C_h + \varepsilon I_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_h^{n+1} \\ \lambda_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_h + tD_h x_h^n \\ \varepsilon \lambda_h^n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Le paramètre ε est destiné à assurer l'inversion inconditionnelle du système matriciel de gauche. Il suffit donc de savoir résoudre efficacement un système de type Stokes. Un tel système est couramment rencontré en mécanique des fluides [GR86]-[Pir88]-[BF91]. Il existe des algorithmes très efficaces de résolution pour ces systèmes : par exemple les algorithmes de gradient conjugué éventuellement préconditionnés. Ces algorithmes ne nécessitent pas le stockage complet des matrices. Il suffit de savoir effectuer rapidement des multiplications matrice-vecteur (par exemple $d_h = A_h c_h$ ou $d_h = C_h c_h$), ce qui peut se réaliser à l'aide de formules d'intégration numérique à chaque fois que l'algorithme en a besoin, et donc de façon très économique en place mémoire. La seule précaution à prendre est de calculer avec précision les termes singuliers de B_h qui couplent des mailles voisines. Ces termes peuvent être précalculés et stockés. Les termes de B_h qui couplent des mailles distantes peuvent être recalculés comme les termes de A_h et B_h . Il y a alors besoin d'une place mémoire proportionnelle uniquement à n et non pas à n^2 , ce qui permet une résolution numérique précise pour des problèmes de grande taille.

Notons qu'il existe d'autres méthodes pour obtenir des systèmes de type Stokes intégraux différents des équations intégrales classiques. Citons [Ata91] qui utilise une méthode domaine fictif, ce qui revient à prendre la représentation intégrale pour u

$$u(z) = \int_{\Omega} G(z - y) v(y). \tag{12}$$

La fonction v est donnée dans $L^2(\Omega)$. La méthode de résolution pratique préconisée dans [Ata91] requiert à chaque étape la résolution complète d'un problème discret du type

$$\begin{aligned} (-\Delta - \omega^2) \tilde{u} &= w \text{ dans } \tilde{\Omega}, \quad w = v \text{ dans } \Omega, \quad w = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega} - \Omega, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) \tilde{u} &= 0 \text{ sur } \partial \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

posé dans un domaine borné $\tilde{\Omega}$ plus grand que $\Omega : \Omega \subset \tilde{\Omega}$. Sur le plan pratique l'approximation de \tilde{u} est $\tilde{u}_h : \tilde{u}_h \in V_h \subset H^1(\tilde{\Omega})$. Tout cela fait que la résolution numérique du système proposé dans [Ata91] nécessite une place mémoire beaucoup plus importante que celle nécessitée par la discrétisation des inconnues supplémentaires (la deuxième composante de x et λ) introduits dans notre méthode. La méthode des domaines fictifs est alors d'un intérêt très restreint pour un domaine Ω de grande taille.

L'idée fondamentale utilisée pour obtenir le système (9) est la suivante. Soit u la solution de (1-3) dans le cas modèle $t = 0$. Rappelons la définition de l'amplitude de diffusion $a(\theta)$ pour une onde u vérifiant (3)

$$u = \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} a(\theta) + o\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Nous dirons que u est une solution sortante.

On définit de même $b(\theta)$ en considérant la classe de fonctions v telles que

$$(-\Delta - \omega^2)v = 0 \quad \text{dans } R^2 - \tilde{\Omega} \quad (13)$$

$$\left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)v = h^\pm \in L^2(\Gamma) \quad (14)$$

$$v = \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} a(\theta) + \frac{e^{i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} b(\theta) + o\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (15)$$

$$a \in L^2[0, 2\pi[, \quad b \in L^2[0, 2\pi[. \quad (16)$$

Autrement dit nous considérons une classe plus large (non vide voir théorème 2.1) de fonctions qui sont la somme d'une contribution sortante et d'une contribution rentrante. La solution u appartient⁽³⁾ donc à cette classe de fonctions.

Pour tout v dans la classe (13-16), on considère la fonctionnelle quadratique

$$I(v) = \frac{1}{4} \|h^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \|h^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \omega \|a\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \omega \|b\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 - \text{Re}\{(g, h^-)\}_{L^2(\Gamma)}\}. \quad (17)$$

⁽³⁾ La condition (3) correspond à $b = 0$. La représentation intégrale de l'amplitude de diffusion pour la solution u sortante fournit

$$a(\theta) = -4i\omega \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{i\omega y \cdot \vec{e}_\theta} u - e^{i\omega y \cdot \vec{e}_\theta} \frac{\partial}{\partial \nu} u.$$

Donc $a \in C^\infty[0, 2\pi[\subset L^2[0, 2\pi[$. D'autre part la trace de u sur Γ est dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$, d'où $\left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)u \in L^2(\Gamma)$.

Le second membre g est donné par (2). On a le résultat essentiel : la solution u du problème modèle (1-3) (i.e. pour $t = 0$) réalise le minimum de I

$$I(u) \leq I(v), \quad \forall v \text{ satisfaisant (13 - 16)}.$$

Ce résultat est précisé dans le théorème 3.1. Il s'agit du point de départ de notre analyse. La démarche est donc résolument différente des autres méthodes qui utilisent une représentation intégrale : (4) ou (5) pour équations intégrales classiques [CK83]-[Ned77] ; (12) pour la méthode de domaine fictif [Ata91]. Une étude précise des termes présents dans $I(v)$ permet de séparer les termes réguliers des termes singuliers pour lesquels on fournira une équation intégrale avec noyau (faiblement) singulier. Cela explique que nous obtenons un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique sous contrainte, qui se met finalement sous la forme (9). L'inconnue supplémentaire λ est le multiplicateur.

Le plan du travail est le suivant. La section 2 est dévolue à une étude fine de la classe définie par (13-16). Au cours de la section 3, nous définissons la fonctionnelle $I(v)$ à l'intérieur de cette classe. Le minimum de I est atteint par u . On généralise alors à d'autres conditions de bord

$$\left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega\right)u - t\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega\right)u = g, \quad |t| \leq 1.$$

Puis une resommation de certains termes permet d'obtenir finalement le système (9) dont l'expression exacte est donnée à l'équation (80). On obtient alors le système matriciel

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2\delta^*\delta & -K^* \\ K & \frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2}\delta^*\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -tA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

où l'inconnue est $x = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega\right)u, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega\right)u\right)$. Puis à la section 4, nous proposerons un algorithme de résolution pour le système (18). Un exemple numérique obtenu à partir d'une généralisation aux équations de Maxwell tridimensionnelles sera présenté.

Signalons que nous utiliserons intensivement les fonctions spéciales de Bessel et de Hankel de tout ordre [22-23] au cours de l'analyse. Les propriétés (régularité, développement asymptotique, formules d'addition) de ces fonctions spéciales sont essentielles dans les preuves. Cependant la forme finale du système intégral ne contient comme noyau intégral que la fonction de Bessel de deuxième espèce Y_0 .

2. RÉOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY

On va donner une condition nécessaire et suffisante sur (h^+, h^-) pour qu'il existe v solution de

$$(-\Delta - \omega^2)v = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega} \quad (19)$$

$$\left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) v = h^\pm \in L^2(\Gamma) \quad (20)$$

$$v = \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} a(\theta) + \frac{e^{i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} b(\theta) + o\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (21)$$

$$a \in L^2[0, 2\pi[, \quad b \in L^2[0, 2\pi[.$$

Autrement dit nous allons résoudre le problème de Cauchy avec données au bord. Rappelons que ce problème est *a priori* mal posé, si aucune relation de compatibilité n'est imposée sur (h^+, h^-) . A la place de l'équation (21), on va plutôt utiliser la forme équivalente qui sera utile aux démonstrations

$$(\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) \rightarrow 2i\omega a(\theta) \Big|_{r \rightarrow +\infty}, \text{ au sens des distributions}$$

$$(\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(+\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) \rightarrow 2i\omega b(\theta) \Big|_{r \rightarrow +\infty}, \text{ au sens des distributions}$$

et

$$\exists C > 0, \quad |v(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand}$$

$$\exists C > 0, \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta) \right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand} .$$

A la place d'une convergence au sens des distributions, on aurait pu envisager une convergence dans des espaces plus fort : $H^{-1}[0, 2\pi[$ par exemple. Cependant la convergence au sens des distributions est suffisante pour les démonstrations présentées.

Signalons que les fonctions v sont *a priori* somme d'une contribution rentrante et d'une contribution sortante. On ne peut donc pas appliquer les résultats classiques de régularité valables uniquement pour les solutions sortantes. Par exemple la fonction

$$v_s(x) = \sum_n a_n J_n(\omega r) e^{in\varphi}, \quad x = r(\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \sum_n \frac{|a_n|^2}{(|n| + 1)^s} < +\infty, \quad s \geq 0$$

est analytique pour tout $x \in R^2$. Cependant (voir équation (24))

$$a_s(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (+i)^n e^{+i\frac{\pi}{4}} \sum_n a_n e^{ni\theta}.$$

Donc v_s est dans la classe considérée uniquement pour $s = 0$, bien qu'elle soit analytique dans tout compact pour tout $s \geq 0$.

2.1. Condition nécessaire

Fixons l'origine $r = 0$ à l'intérieur de l'objet diffractant Ω . On utilise les solutions particulières de l'équation de Helmholtz homogène construites à l'aide des fonctions de Hankel d'ordre 1 et 2

$$u_n^{(1)}(x) = H_n^{(1)}(\omega r) e^{ni\theta} \tag{22}$$

$$u_n^{(2)}(x) = H_n^{(2)}(\omega r) e^{ni\theta}. \tag{23}$$

DÉFINITION 2.1 : On pose

$$V = \{ (h^+, h^-) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma), \\ \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^+ \right|^2 < +\infty, \\ \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^+ \right|^2 < +\infty \}.$$

On munit V de la norme

$$\| h^+, h^- \|_V^2 = \| h^+ \|_{L^2(\Gamma)}^2 + \| h^- \|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ + 8 \pi \omega \left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8 \pi \omega} \right)^2 \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^+ \right|^2 \\ + 8 \pi \omega \left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8 \pi \omega} \right)^2 \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^+ \right|^2.$$

L'espace V est un espace de Hilbert ⁽⁴⁾, car il est complet.

⁽⁴⁾ On devrait pouvoir montrer que l'espace V est indépendant du point origine choisi à l'intérieur de Ω en utilisant les propriétés des fonctions spéciales. Cependant cela ne joue pas de rôle dans l'analyse qui suit.

THÉORÈME 2.1 : Pour tout $v \in H_{loc}^1(R^2 - \bar{\Omega})$ tel que (5)

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\Delta - \omega^2)v = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega} \\ \left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) v = h^\pm \in L^2(\Gamma) \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) \rightarrow 2i\omega a(\theta)_{r \rightarrow +\infty}, \text{ au sens des distributions} \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) \rightarrow 2i\omega b(\theta)_{r \rightarrow +\infty}, \text{ au sens des distributions} \\ \exists C > 0, \quad |v(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand} \\ \exists C > 0, \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta) \right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand} \\ a \in L^2[0, 2\pi[, \quad b \in L^2[0, 2\pi[\end{array} \right.$$

alors $(h^+, h^-) \in V$.

Preuve : Les solutions particulières $u_n^{(1,2)}$ (voir (22-23)) sont solutions de l'équation de Helmholtz homogène dans $R^2 - \bar{\Omega}$

$$(-\Delta - \omega^2)u_n^{(1,2)} = 0 \quad \text{dans } R^2 - \bar{\Omega}.$$

On connaît les développements asymptotiques [BEM⁺53]-[Wat58] de $u_n^{(1,2)}$.

i) Développement à n fixe, $|x| \rightarrow +\infty$

$$u_n^{(1)}(x) = e^{ni\theta} \frac{e^{i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^n e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) \quad (24)$$

$$u_n^{(2)}(x) = e^{ni\theta} \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^n e^{i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right). \quad (25)$$

On peut dériver ces développements par rapport à r .

$$\frac{\partial}{\partial r} u_n^{(1)}(x) = i\omega e^{ni\theta} \frac{e^{i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^n e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u_n^{(2)}(x) = -i\omega e^{ni\theta} \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^n e^{i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right). \quad (27)$$

⁽⁵⁾ Rappelons que pour tout $v \in H_{loc}^1(R^2 - \bar{\Omega})$ tel que $(-\Delta - \omega^2)v = 0$, alors v est C^∞ autour de tout point de $R^2 - \bar{\Omega}$, non situé sur $\Gamma = \partial\Omega$. Les inégalités $|v(r, \theta)| \leq C$ et $\left| \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta) \right| \leq C$ ont donc un sens. Nous ne reviendrons plus sur ce point.

La notation $O\left(\frac{1}{r}\right)$ représente un terme tel que $\left|O\left(\frac{1}{r}\right)\right| \leq \frac{C}{r}$ pour r grand. La constante C dépend bien évidemment de n dans le cas présent.

ii) Développement à x borné, $|n| \rightarrow +\infty$

$$|u_n^{(1,2)}(x)| \leq C \frac{|n|^{|n|-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{e\omega r}{2}\right)^{|n|}.$$

On a aussi $u_n^{(1)}(x) + u_n^{(2)}(x) = 2 J_n(\omega r) e^{ni\theta}$

$$|J_n(\omega r)| \leq C \frac{\left(\frac{e\omega r}{2}\right)^{|n|}}{|n|^{|n|}}. \tag{28}$$

Soit $r > 0$ tel que le cercle $\{|x| = r\}$ contienne Γ . Comme v et $u_n^{(1,2)}$ sont solutions de l'équation de Helmholtz homogène, nous avons

$$\int_{|x|=r} \frac{\partial}{\partial r} v u_n^{(1,2)} - v \frac{\partial}{\partial r} u_n^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} v u_n^{(1,2)} - v \frac{\partial}{\partial r} u_n^{(1,2)}. \tag{29}$$

Or **terme de droite de (29)**. Rappelons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} v &= \frac{1}{2} (h^+ - h^-) \\ v &= \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} v u_n^{(1,2)} - v \frac{\partial}{\partial v} u_n^{(1,2)} \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (h^+ - h^-) u_n^{(1,2)} - \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-) \frac{\partial}{\partial v} u_n^{(1,2)} \\ &= \frac{1}{2i\omega} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega\right) u_n^{(1,2)} h^+ - \frac{1}{2i\omega} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega\right) u_n^{(1,2)} h^- \end{aligned}$$

terme de gauche de (29) avec $(u_n^{(1)})$. On a

$$\begin{aligned} & \int_{|x|=r} \left(\frac{\partial}{\partial r} v u_n^{(1)} - v \frac{\partial}{\partial r} u_n^{(1)} \right) d\sigma \\ &= \int_{|x|=r} \frac{\partial}{\partial r} v \left(u_n^{(1)} - \frac{e^{i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} e^{ni\theta} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^n e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) d\sigma \\ &- \int_{|x|=r} v \left(\frac{\partial}{\partial r} u_n^{(1)} - i\omega e^{ni\theta} \frac{e^{i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^n e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) d\sigma \\ &+ \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i\omega \right) v \left(e^{ni\theta} \frac{e^{i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^n e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) r d\theta \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

On utilise alors les développements asymptotiques de $u_n^{(1)}$ et les hypothèses du théorème sur le comportement à l'infini sur v . De

$$\left| u_n^{(1)} - \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} e^{ni\theta} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^n e^{-i\frac{\pi}{4}} \right| \leq \frac{C}{r^2}$$

et

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta) \right| \leq C, r \text{ grand}$$

on déduit

$$|I_1| \leq \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}$$

donc la première intégrale I_1 tend vers 0. De

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} u_n^{(1)} - i\omega e^{ni\theta} \frac{e^{i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^n e^{-i\frac{\pi}{4}} \right| \leq \frac{C}{r^2}$$

et

$$|v(r, \theta)| \leq C, r \text{ grand}$$

on déduit

$$|I_2| \leq \frac{C}{r^2}.$$

La deuxième intégrale I_2 tend vers 0. On utilise

$$(\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) \rightarrow 2 i\omega a(\theta)_{r \rightarrow +\infty},$$

au sens des distributions pour obtenir concernant la troisième intégrale I_3

$$I_3 \rightarrow 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} a e^{ni\theta} d\theta, \quad r \rightarrow +\infty$$

d'où finalement

$$\int_{|x|=r} \left(\frac{\partial}{\partial r} v u_n^{(1)} - v \frac{\partial}{\partial r} u_n^{(1)} \right) d\sigma \rightarrow 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} a e^{ni\theta} d\theta, \quad r \rightarrow +\infty$$

terme de gauche de (29) avec $(u_n^{(2)})$. On a de même

$$\begin{aligned} & \int_{|x|=r} \frac{\partial}{\partial r} v u_n^{(2)} - v \frac{\partial}{\partial r} u_n^{(2)} \approx \int_{|x|=r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v u_n^{(2)} \\ & \approx \int_{|x|=r} 2 i\omega b(\theta) \frac{e^{i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} e^{ni\theta} \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^n e^{i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) r d\theta \\ & \rightarrow 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} b e^{ni\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Il est facile alors de connaître a et b grâce à leurs coefficients de Fourier

$$a(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \left(e^{-ni\theta} \int_{\theta=0}^{2\pi} a e^{ni\theta} d\theta \right)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a(\theta) &= \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right) \\ &\times \sum_n \left(e^{-ni\theta} (i)^n \int_r \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^+ - \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^- \right). \end{aligned} \quad (30)$$

De même

$$b(\theta) = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right) \times \sum_n \left(e^{-ni\theta} (-i)^n \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^+ \right) \quad (31)$$

Le fait que $a(\theta)$ et $b(\theta)$ soient de carré intégrable se réduit alors à la condition sur la convergence de la série constituée de leurs coefficients de Fourier respectifs. C.Q.F.D.

DÉFINITION 2.2 : On définit

$$\alpha : V \rightarrow L^2[0, 2\pi[$$

$$\beta : V \rightarrow L^2[0, 2\pi[$$

où $\alpha(h^+, h^-) = a(\theta)$ est donné par l'équation (30), et $\beta(h^+, h^-) = b(\theta)$ est donné par l'équation (31).

La théorie du scattering [Mel94] consiste précisément dans l'étude de la transformation $\alpha \rightarrow \beta$ dans le cas d'un objet diffractant Ω parfaitement réfléchissant : i.e. $|t| = 1$. La transformation en question est appelée matrice de scattering. Le résultat fondamental est que la matrice de scattering est une isométrie.

2.2. Condition suffisante

Nous aurons besoin du lemme préliminaire suivant.

LEMME 2.1 : Pour tout $g \in L^2(\Gamma)$ et pour tout $b \in L^2[0, 2\pi[$, il existe ⁽⁶⁾ un $v \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 - \bar{\Omega})$ solution du problème extérieur avec condition de radiation inhomogène

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\Delta - \omega^2) v = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega}, \\ \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) v = g \text{ sur } \Gamma, \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v \rightarrow 2i\omega b(\theta),_{r \rightarrow +\infty} \text{ au sens des distributions,} \\ \exists C > 0, \quad |v(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand,} \\ \exists C > 0, \quad \left| \frac{\partial}{\partial v} v(r, \theta) \right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand.} \end{array} \right. \quad (32)$$

⁽⁶⁾ Il y a en fait unicité de la solution, ce qui sera démontré au théorème 2.2. de même concernant la solution de (33).

De même, pour tout $g \in L^2(\Gamma)$ et pour tout $a \in L^2[0, 2\pi[$, il existe un $w \in H^1_{loc}(R^2 - \bar{\Omega})$ solution du problème extérieur avec condition de radiation inhomogène

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\Delta - \omega^2) w = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right) w = g \text{ sur } \Gamma, \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right) v \rightarrow 2i\omega a(\theta)_{r \rightarrow +\infty}, \text{ au sens des distributions,} \\ \exists C > 0, \quad |w(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand,} \\ \exists C > 0, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r} w(r, \theta)\right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand.} \end{array} \right. \quad (33)$$

Preuve : Considérons le système (32). On décompose v sous la forme

$$v = v_1 + v_2$$

où

$$v_1 = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} b(\theta) e^{i\omega x \vec{e}_\theta} d\theta, \quad \vec{e}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$$

et v_2 est la solution classique [DL84], [CK83] de

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\Delta - \omega^2) v_2 = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega}, \\ \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right) v_2 = g - \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right) v_1 \text{ sur } \Gamma, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right) v_2 = o\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{array} \right.$$

On a de manière évidente

$$\exists C > 0, \quad |v(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand}$$

$$\exists C > 0, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta)\right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand.}$$

Il reste à vérifier que

$$2i\omega b(\theta) - (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right) v_1(r, \theta) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty \quad (34)$$

au sens des distributions. Pour toute fonction $c(\theta) \in C^\infty[0, 2\pi]_{\text{périodique}}$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\theta=0}^{2\pi} (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v_1(r, \theta) c(\theta) d\theta \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} b(\varphi) e^{i\omega r e_\theta e_\varphi} d\varphi c(\theta) d\theta \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i\omega r e_\theta e_\varphi} c(\theta) d\theta \right) b(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

On utilise le théorème de la phase stationnaire [Mel94] [page 5]. Soit

$$\Phi(\theta, r) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{i\omega r e_\theta e_\varphi} g(\varphi) d\varphi$$

avec $g \in C^\infty[0, 2\pi]_{\text{périodique}}$. Alors pour r grand

$$\begin{aligned} & |\Phi(\theta, r) - (e^{i\omega r} (\omega r)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\pi i} (2\pi)^{\frac{1}{2}} g(\theta) \\ & \quad + e^{-i\omega r} (\omega r)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}\pi i} (2\pi)^{\frac{1}{2}} g(-\theta))| \leq \frac{C}{r^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

La constante C est uniforme en θ . Cela implique

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i\omega r e_\theta e_\varphi} c(\theta) d\theta \right) = e^{-i\frac{\pi}{4}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} (\omega r)^{-\frac{1}{2}} 2i\omega c(\varphi) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

d'où

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v_1(r, \theta) c(\theta) d\theta \rightarrow 2i\omega \int_{\varphi=0}^{2\pi} c(\varphi) b(\varphi) d\varphi$$

On aurait bien sûr pu considérer l'autre condition de radiation avec a . C.Q.F.D.

THÉORÈME 2.2 : Soit Ω un ouvert borné connexe ⁽⁷⁾ de R^2 . Nous supposons ⁽⁸⁾ que ω^2 n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet intérieur. Alors pour tout $(h^+, h^-) \in V$, il existe un unique $v \in H^1_{loc}(R^2 - \bar{\Omega})$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\Delta - \omega^2) v = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega}, \\ \left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) v = h^\pm, \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) \rightarrow 2 i\omega \alpha(h^+, h^-) (\theta)_{r \rightarrow +\infty}, \\ \hspace{10em} \text{au sens des distributions,} \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) \rightarrow 2 i\omega \beta(h^+, h^-) (\theta)_{r \rightarrow +\infty}, \\ \hspace{10em} \text{au sens des distributions,} \\ \exists C > 0, \quad |v(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand,} \\ \exists C > 0, \quad \left| v \left(\frac{\partial}{\partial r} r, \theta \right) \right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand,} \end{array} \right.$$

Les fonctions α et β sont données par la définition 2.2.

Preuve : La preuve s'appuie sur les représentations intégrales des solutions des problèmes extérieurs grâce à la solution élémentaire, ainsi que sur des formules d'addition qui permettent d'exprimer cette solution élémentaire comme une série de fonctions de Hankel.

Soit $(h^+, h^-) \in V$. On note

$$T_0 = \frac{1}{2 i\omega} (h^+ + h^-)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} (h^+ - h^-)$$

$$\tilde{\beta} = \beta(h^+, h^-)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha(h^+, h^-).$$

⁽⁷⁾ Si Ω n'est pas connexe, ou si Ω n'est pas un ouvert (par exemple dans le cas d'ailes infiniment minces), des contre-exemples montrent que le résultat est faux.

⁽⁸⁾ Cette hypothèse est purement technique. Elle est utile à la démonstration que nous avons choisie, et est liée à la représentation intégrale particulière utilisée. Il devrait être possible d'enlever cette hypothèse en choisissant une représentation intégrale plus adaptée. Autrement dit, il nous semble clair que les valeurs propres des problèmes intérieurs ne jouent aucun rôle dans cette théorie. Il reste cependant à vérifier tout cela.

On considère une solution v du problème extérieur suivant. On est assuré de son existence grâce au lemme 2.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega\right) v = -T_1 + i\omega T_0 \text{ sur } \Gamma, \\ (-\Delta - \omega^2) v = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega}, \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right) v \rightarrow 2i\omega \tilde{\beta}(\theta)_{r \rightarrow +\infty}, \text{ au sens des distributions,} \\ \exists C > 0, \quad |v(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand,} \\ \exists C > 0, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta)\right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand.} \end{array} \right. \quad (36)$$

i) Représentation intégrale de v

On peut mettre v sous forme intégrale grâce à la solution fondamentale sortante G

$$G(x) = \frac{H_0^{(2)}(\omega|x|)}{4i}$$

$$(-\Delta - \omega^2) G = \delta.$$

Soit x un point fixe tel que $x \in R^2 - \Omega$, $x \notin \Gamma$, $|x| < r$. Soit $\Gamma_r = \{y; |y| = r\}$ une frontière artificielle contenant Γ ; le paramètre r est destiné à tendre vers $+\infty$. On a

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{|y|=r} \left(\frac{\partial}{\partial r} v(y) G(x-y) - v(y) \frac{\partial}{\partial r} G(x-y) \right) d\sigma_y \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial r} v(y) G(x-y) - v(y) \frac{\partial}{\partial r} G(x-y) \right) d\sigma_y \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\int_{|y|=r} \left(\frac{\partial}{\partial r} v(y) G(x-y) - v(y) \frac{\partial}{\partial r} G(x-y) \right) d\sigma_y \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \varphi) \frac{1}{4i} \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\omega x e_\varphi} r d\varphi \\ &\quad + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} v(r, \varphi) \left(G(x - r e_\varphi) - \frac{1}{4i} \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\omega x e_\varphi} \right) r d\varphi \\ &\quad - \int_{\varphi=0}^{2\pi} v(y) \left(\frac{\partial}{\partial r} G(x - r e_\varphi) + i\omega \frac{1}{4i} \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\omega x e_\varphi} \right) r d\varphi \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

On a

$$|x - re_\varphi| = (|x|^2 + r^2 - 2rx \cdot e_\varphi)^{\frac{1}{2}} = r \left(1 - 2 \frac{x \cdot e_\varphi}{r} + \frac{|x|^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où pour r grand

$$||x - re_\varphi| - (r - x \cdot e_\varphi)| \leq \frac{C}{r}.$$

On déduit

$$\left| G(x - re_\varphi) - \frac{1}{4i} \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\omega x e_\varphi} \right| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}}}.$$

Les hypothèses du théorème sur le développement à l'infini de v impliquent

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} v(r, \varphi) \right| \leq C.$$

Donc

$$\left| \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} v(r, \varphi) \left(G(x - re_\varphi) - \frac{1}{4i} \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\omega x e_\varphi} \right) r d\varphi \right| \leq \frac{C}{r^2}$$

et

$$I_2 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty.$$

De même

$$\left| \int_{\varphi=0}^{2\pi} v(r, \varphi) \left(\frac{\partial}{\partial r} G(x - re_\varphi) + i\omega \frac{1}{4i} \frac{e^{-i\omega r}}{(\omega r)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\omega x e_\varphi} \right) r d\varphi \right| \leq \frac{C}{r^2}$$

et

$$I_3 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty.$$

L'hypothèse

$$(\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v \rightarrow 2i\omega \tilde{\beta}(\varphi)_{r \rightarrow +\infty}, \text{ au sens des distributions}$$

permet d'obtenir finalement

$$I_1 \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \tilde{\beta} e^{i\omega x e_\theta} d\theta, \quad r \rightarrow +\infty$$

ce qui implique ainsi

$$\begin{aligned} \int_{|y|=r} \left(\frac{\partial}{\partial r} v(y) G(x-y) - v(y) \frac{\partial}{\partial r} G(x-y) \right) d\sigma_y \\ \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \tilde{\beta} e^{i\omega x e_\theta} d\theta. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega}, \quad x \notin \Gamma \\ v(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \tilde{\beta} e^{i\omega x e_\theta} d\theta \\ - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} v(y) G(x-y) - v(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y) \right) d\sigma_y. \end{aligned}$$

ii) Preuve de $v = T_0$ et $\frac{\partial}{\partial \nu} v = T_1$ sur Γ

On passe à la limite $x \rightarrow \Gamma$ à l'extérieur de Ω . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v(x) - \int_{\Gamma} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y) d\sigma_y \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \tilde{\beta} e^{i\omega x e_\theta} d\theta - \int_{\Gamma} T_1(y) G(x-y) d\sigma_y, \quad x \in \Gamma. \quad (37) \end{aligned}$$

On a utilisé le résultat sur les intégrales singulières [DL84]-[CK83]

$$\lim_{x \rightarrow \Gamma, x \notin \Omega} \int_{\Gamma} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y) d\sigma_y \rightarrow \frac{1}{2} v(x) + \int_{\Gamma} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y) d\sigma_y$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \Gamma, x \notin \Omega} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} v(y) G(x-y) d\sigma_y = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} v(y) G(x-y) d\sigma_y.$$

On utilise maintenant le résultat intermédiaire suivant dont nous reportons la démonstration à la fin de la preuve

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma} T_0(y) \frac{\partial}{\partial v} G(x-y) d\sigma_y + \int_{\Gamma} T_1(y) G(x-y) d\sigma_y \\
 & = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \tilde{\beta} e^{i\omega x e_{\theta}} d\theta, \quad \forall x \in \Omega, \quad x \notin \Gamma.
 \end{aligned} \tag{38}$$

On passe à la limite $x \rightarrow \Gamma$ à l'intérieur de Ω . On obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} T_0(x) - \int_{\Gamma} T_0(y) \frac{\partial}{\partial v} G(x-y) d\sigma_y + \int_{\Gamma} T_1(y) G(x-y) d\sigma_y \\
 & = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \tilde{\beta} e^{i\omega x e_{\theta}} d\theta, \quad \forall x \in \Gamma.
 \end{aligned} \tag{39}$$

On a utilisé le résultat sur les intégrales singulières [DL84]-[CK83]

$$\lim_{x \rightarrow \Gamma, x \notin \Omega} \int_{\Gamma} T_0(y) \frac{\partial}{\partial v} G(x-y) d\sigma_y \rightarrow -\frac{1}{2} T_0(x) + \int_{\Gamma} T_0(y) \frac{\partial}{\partial v} G(x-y) d\sigma_y$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \Gamma, x \in \Omega} \int_{\Gamma} T_1(y) G(x-y) d\sigma_y = \int_{\Gamma} T_1(y) G(x-y) d\sigma_y.$$

Ces limites doivent être prises au sens des distributions. On a finalement grâce à (37-39)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} (T_0 - v)(x) + \int_{\Gamma} (T_0 - v)(y) \frac{\partial}{\partial v} G(x-y) d\sigma_y \\
 & - \int_{\Gamma} \left(T_1 - \frac{\partial}{\partial v} v\right)(y) G(x-y) d\sigma_y = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (T_0 - v) \in L^2(\Gamma).
 \end{aligned}$$

Or par construction

$$T_1 - \frac{\partial}{\partial v} v = i\omega(T_0 - v)$$

D'où

$$-\frac{1}{2}(T_0 - v)(x) + \int_{\Gamma} (T_0 - v)(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x - y) d\sigma_y$$

$$- i\omega \int_{\Gamma} (T_0 - v)(y) G(x - y) d\sigma_y = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (T_0 - v) \in L^2(\Gamma).$$

C'est une équation intégrale homogène. On reconnaît l'équation intégrale homogène duale de l'équation intégrale homogène qui apparaît lors de la représentation de la solution du problème mixte en potentiel de simple couche ([CK83] page 98). Étant donné que nous avons imposé que ω^2 n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet intérieur, il y a alors unicité de la solution ⁽⁹⁾, et donc $v = T_0$ et $\frac{\partial}{\partial \nu} v = T_1$. Il en résulte $\left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)v = h^{\pm}$.

iii) v satisfait l'autre condition de radiation

Il reste à s'assurer que v satisfait l'autre condition de radiation

$$(\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right) v(r, \theta) \rightarrow 2i\omega a(\theta),_{r \rightarrow +\infty} \text{ au sens des distributions.}$$

C'est en fait élémentaire. Il suffit de considérer w solution de l'autre problème extérieur avec la condition de radiation entrante inhomogène

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right) w = T_1 + i\omega T_0 \\ (-\Delta - \omega^2) w = 0 \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right) w \rightarrow 2i\omega \tilde{a}(\theta),_{r \rightarrow +\infty}, \text{ au sens des distributions} \\ \exists C > 0, \quad |w(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand} \\ \exists C > 0, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r} w(r, \theta)\right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand.} \end{cases} \quad (40)$$

On refait le raisonnement des points i) et ii) avec l'autre solution élémentaire. On a

$$w = T_0 = v, \quad \text{sur } \Gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} w = T_1 = \frac{\partial}{\partial \nu} v, \quad \text{sur } \Gamma$$

$$(-\Delta - \omega^2) w = (-\Delta - \omega^2) v = 0.$$

⁽⁹⁾ Notons que cela prouve au passage l'unicité de la solution proposée par le lemme 2.1

Un principe de continuation unique montre alors que

$$v = w \text{ partout .}$$

Donc v satisfait bien les deux conditions de radiation.

iv) Unicité de v

L'unicité de v vient de l'unicité de la solution de la représentation intégrale.

v) Preuve du résultat intermédiaire

Nous montrons finalement le résultat intermédiaire (38)

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} T_0(y) \frac{\partial}{\partial v} G(x-y) d\sigma_y + \int_{\Gamma} T_1(y) G(x-y) d\sigma_y \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \tilde{\beta} e^{i\omega x e_{\theta}} d\theta . \end{aligned}$$

Étant donné que $G = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}$, et compte tenu de la définition 2.2 de $\tilde{\beta}$, cela revient à

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} T_0(y) \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(x-y) d\sigma_y + \int_{\Gamma} T_1(y) \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(x-y) d\sigma_y \quad (41) \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} 2i\omega \\ & \quad \times \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\sum_n e^{-n\theta} (-i)^n \int_{\Gamma} -u_n^{(2)} T_1 + \frac{\partial}{\partial v} u_n^{(2)} T_0 \right) e^{i\omega x e_{\theta}} d\theta \\ & = \frac{i}{8\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\sum_n e^{-n\theta} (-i)^n \int_{\Gamma} -u_n^{(2)} T_1 + \frac{\partial}{\partial v} u_n^{(2)} T_0 \right) e^{i\omega x e_{\theta}} d\theta, \quad x \in \Omega . \end{aligned}$$

On utilise alors les propriétés des fonctions de Hankel et Bessel

a)

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-n\theta} e^{i\omega x e_{\theta}} d\theta = 2\pi i^n e^{-n\theta_x} J_n(\omega r_x)$$

$$x = r_x (\cos \varphi_x, \sin \varphi_x) \tag{42}$$

b)

$$H_0^{(2)}(t) = \sum_n J_n(z) e^{ni\varphi} H_n^{(2)}(Z) \quad (43)$$

$$t = \sqrt{z^2 + Z^2 - 2zZ \cos \varphi}, \quad |z| < |Z|$$

ce développement est valable pour $|z| < |Z|$ et on peut le dériver.

Alors (en effectuant des permutations intégrales-sommes qu'on justifiera ultérieurement)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\sum_n e^{-ni\theta} (-i)^n \int_{\Gamma} -u_n^{(2)} T_1 + \frac{\partial}{\partial v} u_n^{(2)} T_0 \right) e^{i\omega x e_0} d\theta \\ &= \sum_n \left(e^{-ni\varphi_x} J_n(\omega r_x) \int_{\Gamma} -u_n^{(2)} T_1 + \frac{\partial}{\partial v} u_n^{(2)} T_0 \right) \\ &= \int_{\Gamma} - \left(\sum_n H_n^{(2)}(\omega r_y) e^{ni\varphi_y} e^{-ni\varphi_x} J_n(\omega r_x) \right) T_1 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sum_n H_n^{(2)}(\omega r_y) e^{ni\varphi_y} e^{-ni\varphi_x} J_n(\omega r_x) \right) T_0 \\ &= \int_{\Gamma} -H_0^{(2)}(\omega|x-y|) T_1 + \frac{\partial}{\partial v_y} H_0^{(2)}(\omega|x-y|) T_0 \end{aligned}$$

car

$$t = \omega \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos(\varphi_y - \varphi_x)} = \omega|x-y|.$$

Il y a convergence absolue de la série sous la condition $|x| < |y|$, ce qui est assuré pour $|x|$ petit. Cela justifie toutes les permutations intégrales-sommes. On vient de montrer (41) et donc (38) pour $|x|$ petit. Les termes de droite et de gauche de (41) sont des solutions de l'équation de Helmholtz homogène pour $x \in \Omega$ et sont égaux pour $|x|$ petit dans Ω . Un principe de continuation unique [Des91] assure alors que le résultat est valable $\forall x \in \Omega$. C.Q.F.D.

LEMME 2.2 : Soit $W \subset V$.

$$W = \left\{ (g^+, g^-) \in V, \alpha(g^+, g^-) \in C^\infty[0, 2\pi]_{\text{périodique}}, \right. \\ \left. \beta(g^+, g^-) \in C^\infty[0, 2\pi]_{\text{périodique}} \right\}$$

On suppose que ω^2 n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet intérieur. Alors pour tout $(g^+, g^-) \in W$ il existe un unique $w \in H_{loc}^1(R^2 - \bar{\Omega})$, solution de

$$\begin{cases} (-\Delta - \omega^2) w = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega}, \\ \left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) w = g^\pm, \\ \left| (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) w(r, \theta) - 2 i\omega\alpha(h^+, h^-) \right| \\ \leq \frac{C}{r} \text{ pour } r \text{ grand, } \forall \theta \in [0, 2\pi[, \\ \left| (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) w(r, \theta) - 2 i\omega\beta(h^+, h^-) \right| \\ \leq \frac{C}{r} \text{ pour } r \text{ grand, } \forall \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

La constante C est uniforme en θ . Elle dépend de α et β .

De plus W est dense dans V .

Preuve :

(i) Soit $(g^+, g^-) \in W$. Alors le théorème précédent apprend qu'il existe un unique $w \in H_{loc}^1(R^2 - \bar{\Omega})$, solution de

$$\begin{cases} (-\Delta - \omega^2) w = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega}, \\ \left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) w = h^\pm, \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v \rightarrow 2 i\omega\alpha(h^+, h^-)_{r \rightarrow +\infty} \text{ au sens des distributions,} \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v \rightarrow 2 i\omega\beta(h^+, h^-)_{r \rightarrow +\infty} \text{ au sens des distributions,} \\ \exists C > 0, \quad |v(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand,} \\ \exists C > 0, \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta) \right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand.} \end{cases}$$

Une représentation intégrale de w est

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \beta e^{i\omega x e_\theta} d\theta \\ &- \int_r \left(\frac{\partial}{\partial \nu} w(y) G(x-y) - w(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y) \right) d\sigma_y \\ G(x) &= \frac{H_0^{(2)}(\omega|x|)}{4i}. \end{aligned}$$

Étant donné que

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) G \right| \leq \frac{C}{r^2}$$

on a le résultat classique [CK83]

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} w(y) G(x-y) - w(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y) \right) d\sigma_y \right| \leq \frac{C}{r^2}.$$

D'autre part $\beta \in C^\infty$, le lemme de la phase stationnaire (voir équation (35)) implique que pour tout θ

$$\begin{aligned} & \left| (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \beta e^{i\omega x e_0} d\theta \right) - 2i\omega \beta(h^+, h^-)(\theta) \right| \\ & \leq \frac{C}{r} \text{ pour } r \text{ grand, } \forall \theta \in [0, 2\pi[. \end{aligned}$$

La constante C est uniforme en θ . D'où le résultat

$$\begin{aligned} & \left| (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) w(r, \theta) - 2i\omega \beta(h^+, h^-)(\theta) \right| \\ & \leq \frac{C}{r} \text{ pour } r \text{ grand, } \forall \theta. \end{aligned}$$

L'autre condition de radiation se traite en prenant l'autre solution élémentaire.

(ii) Il reste à vérifier que W est dense dans V . Soit $(h^+, h^-) \in V$: soit v associé à (h^+, h^-) par l'équation (36). Soit $(\beta_n)_{n=0,1,2, \dots}$ une suite telle que

$$\beta_n \in C^\infty[0, 2\pi[\text{ périodique, } \beta_n \rightarrow \beta(h^+, h^-) \text{ dans } L^2[0, 2\pi[.$$

On considère $w_n \in H_{loc}^1(R^2 - \bar{\Omega})$ solution du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta - \omega^2) w_n = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega} \\ \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) w_n = h^- \\ (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(+\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) w_n \rightarrow 2i\omega \beta_n(\theta), r \rightarrow +\infty, \text{ au sens des distributions,} \\ \exists C > 0, |w_n(r, \theta)| \leq C \text{ pour } r \text{ grand} \\ \exists C > 0, \left| \frac{\partial}{\partial r} w_n(r, \theta) \right| \leq C \text{ pour } r \text{ grand.} \end{cases} \quad (44)$$

En reprenant les calculs du théorème précédent, on voit que $e_n = w_n - v$ est solution de l'équation intégrale

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} e_n(x) - \int_{\Gamma} e_n \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y) d\sigma_y \\ & + i\omega \int_{\Gamma} e_n(y) G(x-y) d\sigma_y \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\beta_n - \beta)(\theta) e^{i\omega x e_0} d\theta, \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Cette équation intégrale est inversible, car ω^2 n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet intérieur (voir preuve du théorème 2.2). Le second membre est infiniment régulier. Donc il existe [Ned77] une constante $C > 0$ telle que

$$\|e_n\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left\| \int_{\theta=0}^{2\pi} (\beta_n - \beta)(\theta) e^{i\omega x e_0} d\theta \right\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Or

$$\left\| \int_{\theta=0}^{2\pi} (\beta_n - \beta)(\theta) e^{i\omega x e_0} d\theta \right\|_{H^1(\Gamma)} \rightarrow 0, \quad \forall s.$$

Il s'ensuit que $e_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\Gamma)$. Donc

$$h_n^+ = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right) w_n \rightarrow h^+, \quad \text{dans } L^2(\Gamma).$$

A partir des équations (30-31), on voit que

$$\begin{aligned} & \alpha(\theta) - i\beta(\theta + \pi) = 2 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right) \\ & \times \sum_p \left(e^{-p i \theta} (i)^p \int_{\Gamma} \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right) (J_p e^{p i \varphi}) h^+ - \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right) (J_p e^{p i \varphi}) h^- \right). \end{aligned}$$

De même

$$\alpha_n(\theta) - i\beta_n(\theta + \pi) = 2 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right) \times \sum_p \left(e^{-pi\theta} (i)^p \int_{\Gamma} \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) (J_p e^{pi\varphi}) h_n^+ - \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) (J_p e^{pi\varphi}) h_n^- \right).$$

avec

$$h_n^+ \rightarrow h^+, \quad h_n^- = h^-.$$

Les fonction J_p étant très régulières (voir (28)), on en déduit sans peine que

$$\alpha_n(\theta) - i\beta_n(\theta + \pi) \rightarrow \alpha(\theta) - i\beta(\theta + \pi), \quad \text{dans } L^2[0, 2\pi[$$

et finalement

$$\alpha_n \rightarrow \alpha, \quad \text{dans } L^2[0, 2\pi[$$

C.Q.F.D.

On en déduit le corollaire.

COROLLAIRE 2.1 : *L'espace V est dense dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.*

Preuve : Supposons que $(z^+, z^-) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ soit tel que

$$(z^+, y^+)_{L^2(\Gamma)} + (z^-, y^-)_{L^2(\Gamma)} = 0, \quad \forall y \in V.$$

Prenons $y = \left(\left(+\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(1,2)}, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(1,2)} \right)$ en faisant varier les indices 1, 2 et n . Donc $y \in V$. D'après la définition de α et β , cela implique que $Z = (-z^-, z^+)$ est tel que

$$\alpha(Z) = 0, \quad \text{et} \quad \beta(Z) = 0.$$

D'où $Z \in V$. Le lemme 2.2 implique que les deux composantes de Z sont des combinaisons linéaires de $v|_{\Gamma}$ et $\frac{\partial}{\partial v} v|_{\Gamma}$ où la fonction v est l'unique solution de

$$\begin{cases} (-\Delta - \omega^2) v = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega} \\ \left(\pm \frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) v = \mp Z^{\mp} \\ \left| (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) - 2i\omega\alpha(Z) \right| \leq \frac{C}{r} \text{ pour } r \text{ grand, } \forall \theta \in [0, 2\pi[, \\ \left| (\omega r)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) - 2i\omega\beta(Z) \right| \leq \frac{C}{r} \text{ pour } r \text{ grand, } \forall \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

D'où

$$\left| \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) \right| \leq \frac{C}{r^2}$$

et

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v(r, \theta) \right| \leq \frac{C}{r^2}.$$

On en déduit que

$$|v(r, \theta)| \leq \frac{C}{r^2}.$$

La constante C est uniforme en θ . Le théorème de Rellich [Wil75] affirme alors que $v = 0$ partout. D'où $Z = 0$. L'espace V est donc dense dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. C.Q.F.D.

3. FORMULATION DU PROBLÈME EXTÉRIEUR

Dans un premier temps, on va donner un résultat d'isométrie dans V . Puis on construira une fonctionnelle convexe continue dont le minimum est atteint en

$$(h^+, h^-) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u, \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u \right)$$

où u est la solution du système

$$(-\Delta - \omega^2) u = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega} \tag{45}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u = g \text{ sur } \Gamma \tag{46}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) u = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ à l'infini.} \tag{47}$$

On généralisera ensuite à d'autres conditions de bord.

3.1. Lemme d'isométrie

LEMME 3.1 : $\forall (h^+, h^-) \in V$, on a

$$\begin{aligned} 4\omega \| \alpha(h^+, h^-) \|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \| h^+ \|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ = 4\omega \| \beta(h^+, h^-) \|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \| h^- \|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

Preuve : Il suffit de vérifier le résultat pour $(h^+, h^-) \in W$, puisque W est dense dans V . Cela vient de

$$\begin{aligned} & \int_{|x|=R} \left| \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) v \right|^2 + \int_{\Gamma} \left| \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v \right|^2 \\ & - \int_{|x|=R} \left| \left(+\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) v \right|^2 - \int_{\Gamma} \left| \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v \right|^2 \\ & = -4 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} v i \overline{\omega v} \right\} + 4 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial r} v i \overline{\omega v} \right\} \\ & = -4 \operatorname{Re} \left\{ i\omega \int_{x \in R^2 - \Omega, |x| \leq r} |\nabla v|^2 - \omega^2 |v|^2 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Puis on fait tendre $R \rightarrow +\infty$. On a d'après le lemme 2.2

$$\int_{|x|=R} \left| \left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v \right|^2 \rightarrow 4\omega \int_{\theta=0}^{2\pi} |a(\theta)|^2 d\theta = 4\omega \|\alpha(h^+, h^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2$$

et

$$\int_{|x|=R} \left| \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) v \right|^2 \rightarrow 4\omega \int_{\theta=0}^{2\pi} |b(\theta)|^2 d\theta = 4\omega \|\beta(h^+, h^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2$$

C.Q.F.D.

On obtient sans peine le corollaire.

COROLLAIRE 3.1 : $\forall (h^+, h^-) \in V$ et $\forall (g^+, g^-) \in V$, on a

$$\begin{aligned} & 4\omega (\alpha(h^+, h^-), \alpha(g^+, g^-))_{L^2[0, 2\pi[} + (h^+, g^+)_{L^2(\Gamma)} \\ & = 4\omega (\beta(h^+, h^-), \beta(g^+, g^-))_{L^2[0, 2\pi[} + (h^-, g^-)_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Preuve : On prend

$$(l^+, l^-) = (h^+, h^-) + c(g^+, g^-), \quad c \in \mathbb{C}.$$

On applique le lemme précédent

$$\begin{aligned} & 4\omega \|\alpha(l^+, l^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \|l^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ & = 4\omega \|\beta(l^+, l^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \|l^-\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad \forall c \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

et on développe. C.Q.F.D.

3.2. Formulation du problème extérieur

3.2.1. *Problème modèle*

DÉFINITION 3.1 : $\forall (h^+, h^-) \in V$, on pose

$$I(h^+, h^-) = \omega \| \alpha(h^+, h^-) \|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \omega \| \beta(h^+, h^-) \|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \frac{1}{4} \| h^- \|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \| h^+ \|_{L^2(\Gamma)}^2 - \text{Re}\{ (g, h^-)_{L^2(\Gamma)} \}. \tag{48}$$

THÉORÈME 3.1 : *La fonctionnelle $I(h^+, h^-)$ est continue dans V . Elle est strictement convexe. Elle atteint son unique minimum en*

$$(h^+, h^-) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u, \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u \right)$$

où u est la solution du problème modèle (45-47), et on a

$$\beta(h^+, h^-) = 0.$$

Preuve : La continuité et la convexité sont évidentes. L'espace V est un espace de Hilbert. Le terme quadratique dans $I(h^+, h^-)$ est exactement $\| h^+, h^- \|_V^2$ ce qui fait qu'il existe un minimum global pour I . On écrit les conditions d'optimalité au minimum.

$$(\nabla I(h^+, h^-), (g^+, g^-)) = 0, \quad \forall (g^+, g^-) \in V$$

c'est-à-dire

$$2\omega (\alpha(h^+, h^-), \alpha(g^+, g^-))_{L^2[0, 2\pi[} + 2\omega (\beta(h^+, h^-), \beta(g^+, g^-))_{L^2[0, 2\pi[} + \frac{1}{2} (h^-, g^-)_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{2} (h^+, g^+)_{L^2(\Gamma)} = (g, g^-)_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall (g^+, g^-) \in V. \tag{49}$$

Grâce au corollaire 3.1, on obtient

$$4\omega (\beta(h^+, h^-), \beta(g^+, g^-))_{L^2[0, 2\pi[} + (h^-, g^-)_{L^2(\Gamma)} = (g, g^-)_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall (g^+, g^-) \in V.$$

Le lemme 2.1 énonce que pour tout $\tilde{\beta} \in L^2[0, 2\pi[$, pour tout $\tilde{g} \in L^2(\Gamma)$, il existe un couple $(g^+, g^-) \in V$, tel que $\beta(g^+, g^-) = \tilde{\beta}$ et $g^- = \tilde{g}$. On en déduit

$$4 \omega (\beta(h^+, h^-), \tilde{\beta})_{L^2[0, 2\pi[} + (h^-, \tilde{g})_{L^2(\Gamma)} = (g, \tilde{g})_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \tilde{\beta}, \forall \tilde{g}.$$

Cela prouve

$$h^- = g = \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u$$

$$\beta(h^+, h^-) = 0.$$

Comme $(h^+, h^-) \in V$, le théorème 2.2 prouve que $\exists v \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 - \Omega)$ tel que

$$(-\Delta - \omega^2)v = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 - \Omega,$$

$$h^\pm = \left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) v.$$

Notons

$$l^\pm = \left(\pm \frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u$$

où u est la solution du problème modèle. Donc

$$h^- - l^- = 0, \quad \beta(h^+, h^-) - \beta(l^+, l^-) = 0.$$

Le lemme 3.1 prouve alors que

$$h^+ - l^+ = 0, \quad \alpha(h^+, h^-) - \alpha(l^+, l^-) = 0.$$

Et donc

$$h^+ = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u$$

$$\alpha(h^+, h^-) = a(\theta)$$

C.Q.F.D.

Remarque 3.1 : La fonctionnelle $I(h^+, h^-)$ atteint son minimum pour la solution de

$$(-\Delta - \omega^2)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega} \tag{50}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega\right) u = g \in L^2(\Gamma) \tag{51}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right) u = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ à l'infini} \tag{52}$$

qui est sortante. Concernant la solution d'un problème avec condition à l'infini rentrante tel que

$$(-\Delta - \omega^2) u = 0 \text{ dans } R^2 - \bar{\Omega} \tag{53}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega\right) u = g \in L^2(\Gamma) \tag{54}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right) u = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ à l'infini} \tag{55}$$

la fonctionnelle est $J(h^+, h^-)$

$$J(h^+, h^-) = \omega \|\alpha(h^+, h^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \omega \|\beta(h^+, h^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \frac{1}{4} \|h^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \|h^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 - Re\{(g, h^+)\}_{L^2(\Gamma)}\}.$$

Les seuls changements entre J et I sont dans le terme linéaire, c'est-à-dire dans le second membre. Les termes quadratiques sont les mêmes.

Remarque 3.2 : Une forme explicite pour la partie quadratique est

$$I(h^+, h^-) = + 8 \pi \omega^3 \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8 \pi \omega}\right)^2 \sum_n \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} u_n^{(1)} u - u_n^{(1)} \frac{\partial}{\partial v} u \right|^2 + 8 \pi \omega^3 \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8 \pi \omega}\right)^2 \sum_n \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} u_n^{(2)} u - u_n^{(2)} \frac{\partial}{\partial v} u \right|^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial}{\partial v} u \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\omega^2}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \dots$$

A un changement d'inconnues près, la partie quadratique de I correspond à un opérateur réel. C'est dû au fait que $u_n^{(1)}$ et $u_{-n}^{(2)}$ sont des fonctions conjuguées.

3.2.2. Autres conditions de bord

Il y a *a priori* deux possibilités pour prendre en compte d'autres conditions de bord. La première sera sûrement d'intérêt limité, car elle est restreinte à des conditions de bord du type impédance

$$\left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega z\right) u = g, \quad Re(z) > 0.$$

En revanche la deuxième procédure est applicable pour des conditions du type

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)u - t\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)u = g, \quad |t| \leq 1.$$

Pour $t = 1$ on a une condition de Neumann inhomogène, et pour $t = -1$ une condition de Dirichlet inhomogène. On voit que z et t sont reliés par

$$z = \frac{1-t}{1+t}, \quad t = \frac{1-z}{1+z}.$$

La condition $\operatorname{Re}(z) > 0$ correspond alors à $|t| < 1$.

3.2.3. Condition de bord $\operatorname{Re}(z) > 0$

On change (h^+, h^-) en

$$h^+ = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\bar{z}\right)u$$

$$h^- = \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega z\right)u.$$

On introduit un poids dans le produit scalaire de $L^2(\Gamma)$.

$$(f, g)_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \frac{1}{\operatorname{Re}(z)} f \bar{g}.$$

Avec ces modifications, on construit encore une fonctionnelle convexe dont le minimum est atteint pour la solution. Cependant il est impossible de prendre les cas limites $z = 0$ (condition de Neumann) et $z = \infty$ (condition de Dirichlet). C'est pourquoi nous n'étudierons pas plus avant cette modélisation dans cette note.

3.2.4. Condition de bord plus générale $|t| \leq 1$

On ne formule plus le problème comme minimisation d'une fonctionnelle convexe. En revanche, on décompose la condition

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)u - t\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)u = g, \quad |t| \leq 1$$

en

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)u = G$$

$$G = t\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega\right)u + g. \quad (56)$$

Le couple (h^+, h^-) est alors le minimum de la fonctionnelle I avec terme source G

$$I(h^+, h^-) = \omega \|\alpha(h^+, h^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \omega \|\beta(h^+, h^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \frac{1}{4} \|h^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \|h^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \text{Re}\{(G, h^-\}_{L^2(\Gamma)}\}.$$

La condition d'optimalité et l'équation (56) donnent finalement

$$2\omega(\alpha(h^+, h^-), \alpha(g^+, g^-))_{L^2[0, 2\pi[} + 2\omega(\beta(h^+, h^-), \beta(g^+, g^-))_{L^2[0, 2\pi[} + \frac{1}{2}(h^-, g^-)_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2}(h^+, g^+)_{L^2(\Gamma)}^2 - t(h^+, g^-)_{L^2(\Gamma)} = (g, g^-)_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall (g^+, g^-). \tag{57}$$

3.3. Coercivité de la forme bilinéaire dans l'équation (57)

Condition d'impédance $|t| < 1$. On conserve les espaces fonctionnels

$$(h^+, h^-) \in V, \quad \forall (g^+, g^-) \in V.$$

La forme bilinéaire (57) est trivialement coercive dans V .

Condition de Neumann $t = 1$. On conserve les espaces fonctionnels

$$(h^+, h^-) \in V, \quad \forall (g^+, g^-) \in V.$$

La forme bilinéaire (57) est encore coercive dans V . Cela vient du fait que la solution d'un problème extérieur avec condition de Neumann L^2 donne un u à trace dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$.

Condition de Dirichlet $t = -1$. La forme bilinéaire (57) n'est plus coercive dans V . Il faudra travailler un peu pour déterminer l'espace dans lequel la fonctionnelle est coercive.

Remarque 3.3 : Cette coercivité dépend de t . En revanche la formulation est toujours positive. Il est élémentaire de voir que

$$\forall t, |t| \leq 1, \quad \forall (h^+, h^-) \text{ Re}\left(\frac{1}{2} \|h^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \|h^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 - t(h^+, h^-)_{L^2(\Gamma)}\right) \geq 0.$$

3.4. Sommaton des séries

On peut reformuler la forme bilinéaire (57) comme un système intégral mixte avec multiplicateur de Lagrange. Nous énonçons ce résultat sous la forme suivante. Soient K, δ et A les opérateurs définis (81), (76) et (79), avec

$$\text{Dom}(K) = \{(h^+, h^-), (h^+ + h^-) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), (h^+ - h^-) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}.$$

On note $B = (0, g)$ le second membre. $t(|t| \leq 1)$ est défini dans la condition de bord (2), et $\tau = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega}$.

PROPOSITION 3.1: Soit u la solution de (1-3). Soit $x = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u \right) \in \text{Dom}(K)$. Alors il existe un multiplicateur $\lambda = (\lambda^+, \lambda^-) \in \text{Dom}(K)$ tel que le couple (x, λ) est solution du système

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2 \delta^* \delta - K^* \\ K \\ \frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2} \delta^* \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -tA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

On peut montrer que le multiplicateur λ est proportionnel à x [Des95].

Nous allons procéder en trois temps.

- 1) Tout d'abord, lemme 3.2, nous allons éliminer une singularité dans les séries exprimant $\alpha(h^+, h^-)$ et $\beta(h^+, h^-)$ ce qui permettra d'effectuer une sommation qui fera apparaître explicitement $e^{i\omega x e_\theta}$.
- 2) Ensuite nous donnerons, proposition 3.2, une équation intégrale non singulière satisfaite par le terme restant, grâce à une fonction test donnée sur une surface Γ_2 strictement à l'intérieur de l'objet diffractant. Cette équation intégrale apparaît comme une contrainte dans un problème de minimisation quadratique (théorème 3.2). L'utilisation d'un multiplicateur de Lagrange permet d'obtenir alors un système du type Stokes. Le multiplicateur est donné sur la surface Γ_2 .
- 3) Finalement, section 3.4.5, nous passons à la limite en faisant tendre Γ_2 vers Γ , la frontière diffractante, et nous expliciterons les noyaux intégraux obtenus après passage à la limite.

3.4.1. Élimination d'une singularité

LEMME 3.2 : On note

$$y_n = Y_n(\omega r) e^{ni\theta}$$

où les Y_n sont les fonctions de Bessel de seconde espèce. On a pour I (définition 3.1)

$$\begin{aligned} I(h^+, h^-) = & 2\omega \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left| \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_\theta} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_\theta} h^+ \right|^2 \\ & + 4\pi\omega \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) y_n h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) y_n h^+ \right|^2 \\ & + \frac{1}{4} \|h^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \|h^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \text{Re}\{(g, h^-)_{L^2(\Gamma)}\}. \end{aligned} \quad (59)$$

L'intégrale en θ n'est plus singulière ⁽¹⁰⁾.

Preuve : On a les relations

$$\begin{aligned} \|\alpha(h^+, h^-)\|^2 &= \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \times 2\pi \times \\ &\times \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^+ \right|^2 \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \|\beta(h^+, h^-)\|^2 &= \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \times 2\pi \times \\ &\times \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^+ \right|^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Le développement asymptotique de $u_n^{(1,2)}$ pour x borné est

$$|u_n^{(1,2)}| \leq C \frac{|n|^{|n|-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{e\omega r}{2} \right)^{|n|}}.$$

⁽¹⁰⁾ L'intégrale en θ correspond très exactement à la formule que l'on utilise classiquement pour calculer $a(\theta)$ une fois que l'on connaît u et $\frac{\partial}{\partial v} u$ sur Γ . Pour u solution du problème modèle, on a le résultat bien connu

$$a(\theta) = -2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e^{\theta}} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e^{\theta}} h^+$$

Pour un v quelconque, on a à partir de (65) et des définitions de a (30) et b (31)

$$a(\theta) - ib(\theta + \pi) = -2 e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e^{\theta}} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e^{\theta}} h^+. \quad (60)$$

On a donc transformé

$$\begin{aligned} I(h^+, h^-) &= \omega \|\alpha(h^+, h^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 + \omega \|\beta(h^+, h^-)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 \\ &+ \frac{1}{4} \|h^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \|h^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \text{Re}\{(g, h^-)\}_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} I(h^+, h^-) &= \frac{\omega}{2} \|\alpha(h^+, h^-)(\theta) + i\beta(h^+, h^-)(\theta + \pi)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 \\ &+ \frac{\omega}{2} \|\alpha(h^+, h^-)(\theta) - i\beta(h^+, h^-)(\theta + \pi)\|_{L^2[0, 2\pi[}^2 \\ &+ \frac{1}{4} \|h^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \|h^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \text{Re}\{(g, h^-)\}_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Cela exprime une forte singularité des séries dans l'expression de la fonctionnelle I . On combine les deux séries pour éliminer une des deux singularités. Or utilise les relations

$$\frac{1}{2} (u_n^{(1)} + u_n^{(2)}) = J_n(\omega r) e^{ni\theta} = j_n \quad (63)$$

et

$$\frac{1}{2i} (u_n^{(1)} - u_n^{(2)}) = Y_n(\omega r) e^{ni\theta} = y_n \quad (64)$$

où J_n et Y_n sont les fonctions de Bessel de première et seconde espèces. L'intérêt est que

$$|J_n(\omega r)| \leq C \frac{\left(\frac{e\omega r}{2}\right)^{|n|}}{|n|^{|n|}}.$$

On obtient pour chaque terme de la série exprimant $\|\alpha(h^+, h^-)\|^2 + \|\beta(h^+, h^-)\|^2$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(1)} h^+ \right|^2 \\ & + \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) u_n^{(2)} h^+ \right|^2 \\ & = 2 \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) j_n h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) j_n h^+ \right|^2 \\ & + 2 \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) y_n h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial \nu} + i\omega \right) y_n h^+ \right|^2. \end{aligned}$$

La série en j_n n'est plus singulière. Elle est absolument convergente pour $(h^+, h^-) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. On a ⁽¹⁾

$$\sum_n e^{-ni\theta} e^{ni\varphi} i^n J_n(\omega r) = e^{i\omega r \cos(\theta - \varphi)} = e^{i\omega y \vec{e}_\theta}, \quad \vec{y} = r(\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (65)$$

⁽¹⁾ Cette formule est connue sous le nom de formule de Jacobi-Anger [BEM*53] [page 7]

On obtient alors

$$\begin{aligned} & \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) j_n h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) j_n h^+ \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_0} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_0} h^+ \right|^2. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat annoncé. C.Q.F.D.

3.4.2. *Traitement de la deuxième singularité*

Les calculs présentés ont pour objet de proposer une équation non singulière satisfaite par le terme restant dans (59), c'est-à-dire par la série

$$\begin{aligned} & 4\pi\omega \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) y_n h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) y_n h^+ \right|^2 \\ &= 4\pi\omega \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \\ &\times \sum_n \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r) h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r) h^+ \right|^2 \\ &= 4\pi\omega \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 4\omega^2 \\ &\times \sum_n \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r) u - e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} u \right) \right|^2 \end{aligned}$$

On pose

$$\gamma(\theta) = \sum_n e^{-n\theta} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} (e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r)) u - e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} u \right) \quad (66)$$

donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} |\gamma(\theta)|^2 d\theta = \sum_n \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial v} (e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r)) u - e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} u \right) \right|^2.$$

Soit Γ_2 une courbe située strictement à l'intérieur de Ω .

On multiplie $\gamma(\theta)$ par (voir (60))

$$\delta_2(\theta) = \sum_n e^{-n\theta} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v} (e^{ni\varphi} i^n J_n(\omega r)) v - e^{ni\varphi} i^n J_n(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} v \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \gamma(\theta) \overline{\delta_2(\theta)} = \\ & \sum_n \left(\int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r)) u - e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} u \right) \right\} \right. \\ & \left. \left(\times \overline{\left\{ \int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v} (e^{ni\varphi} i^n J_n(\omega r)) v - e^{ni\varphi} i^n J_n(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} v \right) \right\}} \right) \right) \quad (67) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \gamma(\theta) \overline{\left(\int_{y \in \Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v} e^{i\omega y e_0} v - e^{i\omega y e_0} \frac{\partial}{\partial v} v \right)} \\ & = \int_{x \in \Gamma} \int_{y \in \Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v_x} \frac{\partial}{\partial v_y} Y_0(\omega|x-y|) u(x) \overline{v(y)} \\ & \quad + Y_0(\omega|x-y|) \frac{\partial}{\partial v_x} u(x) \frac{\partial}{\partial v_y} \overline{v(y)} \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial v_x} Y_0(\omega|x-y|) u(x) \frac{\partial}{\partial v_y} \overline{v(y)} \\ & - \frac{\partial}{\partial v_y} Y_0(\omega|x-y|) \frac{\partial}{\partial v_x} u(x) \overline{v(y)}, \quad \forall \left(v, \frac{\partial}{\partial v} v \right) \in L^2(\Gamma_2). \quad (68) \end{aligned}$$

On a utilisé la formule d'addition (65) ainsi que la formule d'addition pour les Y_n [BEM⁺53]

$$\begin{aligned} Y_0(t) &= \sum_n J_n(z) e^{ni\varphi} Y_n(Z) \\ t &= \sqrt{z^2 + Z^2 - 2zZ \cos \varphi}, \quad |z| < |Z| \quad (69) \end{aligned}$$

ce développement est valable pour $|z| < |Z|$ et on peut le dériver. Il s'ensuit que (68) a un sens pour une courbe Γ_2 située dans un voisinage de l'origine. Il est facile de voir (par prolongement analytique) que le résultat est encore vrai pour toute courbe Γ_2 située strictement à l'intérieur de Ω .

Tout cela prouve le point (i) de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2 : *Soit Γ_2 une courbe fermée située strictement à l'intérieur de Ω .*

(i) Soit $x \in V$ (V est donné par la définition 2.1) et $\gamma \in L^2[0, 2\pi[$ donné par (66) (en prenant $x = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u \right)$). Alors le couple (x, γ) vérifie (68).

(ii) Réciproquement, si le couple

$$(x, \gamma) \in (L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)) \times L^2([0, 2\pi[)$$

vérifie l'équation variationnelle (68), alors $x \in V$ et vérifie (66).

La preuve de la partie réciproque de la proposition est la suivante.

Preuve : Tout d'abord remarquons que l'équation variationnelle (68) est équivalente à

$$f(\vec{y}) = 0, \quad \forall \vec{y} \in \Omega,$$

$$f(\vec{y}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \gamma(\theta) e^{-i\omega y e_0} + \int_{x \in \Gamma} \frac{\partial}{\partial v_x} Y_0(\omega|x-y|) u(x) - Y_0(\omega|x-y|) \frac{\partial}{\partial v_x} u(x). \quad (70)$$

En effet l'équation variationnelle (68) implique

$$f(\vec{y}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v_y} f(\vec{y}) = 0, \quad \forall \vec{y} \in \Gamma_2.$$

Étant donné que $(-A - \omega^2)f = 0$, un principe de continuation unique prouve l'équivalence entre (68) et (70).

Nous montrons maintenant le point réciproque (ii). Supposons donc que (68) soit vrai pour une courbe située strictement à l'intérieur de Ω . On en déduit grâce à (70) que (68) est vrai pour toute courbe strictement à l'intérieur de Ω , et donc en particulier pour une courbe Γ_2 proche de l'origine. Donc (67) est vrai pour une courbe Γ_2 proche de l'origine.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \gamma(\theta) \overline{\delta_2(\theta)} = \sum_n \left(\int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r)) u - e^{ni\varphi} i^n Y_n(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} u \right) \right\} \right. \\ \left. \left(\times \overline{\left\{ \int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v} (e^{ni\varphi} i^n J_n(\omega r)) v - e^{ni\varphi} i^n J_n(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} v \right) \right\}} \right) \right). \quad (71)$$

Prenons comme fonction test $y_n = \frac{1}{2i}(u_n^{(1)} - u_n^{(2)})$ donné par (64).

$$v_n = (v_n^+, v_n^-) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) y_n, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) y_n \right) \in V.$$

De même on note

$$v_{n,2} = (v_n^+, v_n^-) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v_2} + i\omega \right) y_n, \left(-\frac{\partial}{\partial v_2} + i\omega \right) y_n \right) \in L^2(\Gamma_2) \times L^2(\Gamma_2).$$

Grâce aux développements de (24-25), on sait que

$$\alpha(v_n) = -\frac{1}{2i} e^{n\theta} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^n e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\beta(v_n) = \frac{1}{2i} e^{n\theta} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^n e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il s'ensuit que

$$\alpha(v_n)(\theta) - i\beta(v_n)(\theta + \pi) = -\frac{1}{i} e^{n\theta} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^n e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

D'où grâce à (60) dans le cas où Γ_2 est une courbe fermée,

$$-2 e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} 2i\omega \left(\int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v} e^{i\omega y e_\theta} v_{n,2}^- - e^{i\omega y e_\theta} \frac{\partial}{\partial v} v_{n,2}^+ \right) = -\frac{1}{i} e^{n\theta} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^n e^{i\frac{\pi}{4}}$$

c'est-à-dire

$$\delta_2(\theta) = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v} e^{i\omega y e_\theta} y_n - e^{i\omega y e_\theta} \frac{\partial}{\partial v} y_n = -4(i)^n e^{n\theta}.$$

De plus grâce à (65), on a

$$\sum_m e^{-m\theta} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v} (e^{m\varphi} i^m J_m(\omega r)) y_n - e^{m\varphi} i^m J_m(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} y_n \right) = -4(i)^n e^{m\theta}. \quad (72)$$

D'où

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v} (e^{-m\varphi} i^{-m} J_{-m}(\omega r)) y_n - e^{-m\varphi} i^{-m} J_{-m}(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} y_n \right) \\ = (-1)^m \int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v} (e^{-m\varphi} i^{-m} J_{-m}(\omega r)) y_n - e^{-m\varphi} i^{-m} J_{-m}(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} y_n \right) \\ = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ -4(i)^n & \text{si } m = n \end{cases}$$

et grâce à (71)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \gamma(\theta) \overline{(-4(i)^n e^{n i \theta})} \\ = -4(-i)^n \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} (e^{-n\varphi} i^{-n} Y_{-n}(\omega r)) u - e^{-n\varphi} i^{-n} Y_{-n}(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} u \right) \quad (73)$$

Prenons à présent une fonction test construite à partir de $j_n = \frac{1}{2} (u_n^{(1)} + u_n^{(2)})$. A partir de (71) on voit que les termes à gauche et à droite de l'égalité sont tous nuls.

Étant donné l'ensemble des fonctions tests v_n choisies est dense dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ (voir corollaire 2.1), on vient de montrer que (68) implique

$$\gamma(\theta) = \sum_n e^{-n i \theta} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} (e^{n\varphi} i^n Y_n(\omega r)) u - e^{n\varphi} i^n Y_n(\omega r) \left(\frac{\partial}{\partial v} u \right) \right\} \quad (74)$$

C.Q.F.D.

3.4.3. Minimisation sous contrainte

On minimise la fonctionnelle

$$\tilde{I}(h^+, h^-, \gamma) = \\ 2\omega \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_0} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) r^{i\omega y e_0} h^+ \right|^2 \\ + 8\omega^3 \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} |\gamma(\theta)|^2 d\theta \\ + \frac{1}{4} \|h^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \|h^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \operatorname{Re}(g_1, h^+)_{L^2(\Gamma)} \\ - \operatorname{Re}(g_2, h^-)_{L^2(\Gamma)} - \operatorname{Re}(\psi, \gamma)_{L^2(\Gamma)} \quad (75)$$

sous la contrainte exprimée par (68). On a le théorème.

THÉORÈME 3.2 : *Pour tout $(g_1, g_2, \psi) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \times L^2[0, 2\pi[$, il existe un unique minimum $(h^+, h^-, \gamma) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \times L^2[0, 2\pi[$ de la fonctionnelle (75) sous la contrainte exprimée par (68). Dans le cas $(g_1, g_2, \psi) = (0, g, 0)$, on a*

$$(h^+, h^-) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u \right)$$

où u est la solution du problème modèle (45-47).

Preuve : La fonctionnelle \tilde{I} contrôle la norme L^2 de (h^+, h^-, γ) . Or la contrainte (68) définit un sous-ensemble fermé non vide convexe de $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \times L^2[0, 2\pi[$. On en déduit l'existence du minimum qui est atteint.

Dans le cas $(g_1, g_2, \psi) = (0, g, 0)$, ce minimum est égal à $\left(\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u \right)$ solution du problème modèle car la contrainte (68) est équivalente à (74). C.Q.F.D.

Remarque 3.4 : Dans le cas $(g_1, g_2, \psi) = (g, 0, 0)$, le minimum est égal à $\left(\left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u, \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) u \right)$ solution du problème modèle rentrant (53-55).

3.4.4. Multiplicateur de Lagrange

On introduit le multiplicateur de Lagrange (l^+, l^-) sur Γ_2 pour la contrainte exprimée dans (68). On pose $l^+ = \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) v$ et $l^- = \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) v$.

Soit le Lagrangien

$$\begin{aligned} & L\{(h^+, h^-), \gamma, (l^+, l^-)\} \\ &= \frac{1}{4} \|h^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \|h^+\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \operatorname{Re}\{(g, h^-)_{L^2(\Gamma)}\} \\ &+ 2\omega \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_{\theta}} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_{\theta}} h^+ \right|^2 \\ &+ 8\omega^3 \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega} \right)^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} |\gamma(\theta)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta=0}^{2\pi} \gamma(\theta) \overline{\frac{1}{2i\omega} \int_{x \in \Gamma_2} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_\theta} l^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_\theta} l^+} \right\} \\
 & - \operatorname{Re} \left\{ \int_{y \in \Gamma} \int_{x \in \Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v_x} \frac{\partial}{\partial v_y} Y_0(\omega|x-y|) \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-) \overline{\frac{1}{2i\omega} (l^+ + l^-)} \right. \\
 & \quad + Y_0(\omega|x-y|) \frac{1}{2} (h^+ - h^-) \overline{\frac{1}{2} (l^+ - l^-)} \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial v_x} Y_0(\omega|x-y|) \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-) \overline{\frac{1}{2} (l^+ - l^-)} \\
 & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial v_y} Y_0(\omega|x-y|) \frac{1}{2} (h^+ - h^-) \overline{\frac{1}{2i\omega} (l^+ - l^-)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Introduisons les notations

$$\begin{cases}
 x = (h^+, h^-), \\
 B = (0, g), \text{ } g \text{ est le second membre dans la condition de bord,} \\
 \lambda = (l^+, l^-).
 \end{cases}$$

On note

$$\begin{aligned}
 \delta(x) &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_\theta} h^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_\theta} h^+ \\
 \delta_2(\lambda) &= \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_\theta} l^- - \left(-\frac{\partial}{\partial v} + i\omega \right) e^{i\omega y e_\theta} l^+ \\
 (Kx, \lambda) &= \int_{x \in \Gamma} \int_{y \in \Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v_x} \frac{\partial}{\partial v_y} Y_0(\omega|x-y|) \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-) \overline{\frac{1}{2i\omega} (l^+ + l^-)} \\
 & \quad + Y_0(\omega|x-y|) \frac{1}{2} (h^+ - h^-) \overline{\frac{1}{2} (l^+ - l^-)} \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial v_x} Y_0(\omega|x-y|) \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-) \overline{\frac{1}{2} (l^+ - l^-)} \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial v_y} Y_0(\omega|x-y|) \frac{1}{2} (h^+ - h^-) \overline{\frac{1}{2i\omega} (l^+ - l^-)}. \tag{76}
 \end{aligned}$$

Posons

$$\tau = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8\pi\omega}$$

Le Lagrangien s'écrit alors

$$\begin{aligned} & L\{(h^+, h^-), \gamma, (l^+, l^-)\} \\ &= \frac{1}{4} \|x\|^2 - \operatorname{Re}\{(B, x)\} + 2\omega\tau^2 \|\delta(x)\|^2 \\ & \quad - 8\omega^3\tau^2 \|y\|^2 + \operatorname{Re}\left\{\left(\gamma, \frac{1}{4\pi i\omega}\delta_2 1\right) - K(x, 1)\right\} \end{aligned}$$

Les conditions d'optimalités

$$\frac{\partial}{\partial x} L = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \gamma} L = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} L = 0$$

s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2\delta^*\delta & 0 & -K^* \\ 0 & 16\omega^3\tau^2 I & \frac{1}{4\pi i\omega}\delta_2 \\ K & -\frac{1}{4\pi i\omega}\delta_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \gamma \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

En éliminant γ , on obtient le système équivalent

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2\delta^*\delta & -K^* \\ K & \frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2}\delta_2^*\delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Pour prendre en compte toutes les conditions de bord, on introduit l'opérateur A

$$A(h^+, h^-) = (0, h^+). \quad (79)$$

Il est facile de voir que la formulation (57) devient

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2\delta^*\delta & -K^* \\ K & \frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2}\delta_2^*\delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -tA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (80)$$

3.4.5. Cas $\Gamma_2 = \Gamma$

On peut montrer [Des95] que si la solution se prolonge régulièrement jusqu'à la frontière Γ_2 , alors le multiplicateur existe en tant que fonction suffisamment régulière. Cependant dans la très grande majorité des cas, la

solution ne se prolonge pas régulièrement jusqu'à la frontière Γ_2 . Pour ne jamais rencontrer cette situation qui risque d'être extrêmement pénalisante sur le plan numérique, la solution est simple : il suffit de faire tendre la frontière Γ_2 jusqu'à la frontière Γ . On a pour le noyau régulier

$$\delta_2 \rightarrow \delta.$$

Il est possible d'obtenir une limite pour $(x, K\lambda)$ quand $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma$. Cette limite fait intervenir des noyaux singuliers mais intégrables. On obtient $(Kx, \hat{\lambda})$

$$\begin{aligned} (Kx, \hat{\lambda}) = & \int_{x \in \Gamma} \int_{y \in \Gamma} -Y_0(\omega|z-y|) \frac{1}{2i\omega} \frac{\partial}{\partial t_z} (h^+ + h^-)(z) \\ & \times \overline{\frac{1}{2i\omega} \frac{\partial}{\partial t_y} (l^+ + l^-)(y)} \\ & - 2\omega^2 Y_0(\omega|z-y|) \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-)(z) \overline{\frac{1}{2i\omega} (l^+ + l^-)(y)} (\vec{n}_z \cdot \vec{n}_y) \\ & + Y_0(\omega|z-y|) \frac{1}{2} (h^+ - h^-)(z) \overline{\frac{1}{2} (l^+ - l^-)(y)} \\ & - \frac{\partial}{\partial v_z} Y_0(\omega|z-y|) \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-)(z) \overline{\frac{1}{2} (l^+ - l^-)(y)} \\ & - \frac{\partial}{\partial v_y} Y_0(\omega|z-y|) \frac{1}{2} (h^+ - h^-)(z) \overline{\frac{1}{2i\omega} (l^+ - l^-)(y)} \\ & + 2 \int_{z \in \Gamma} \frac{1}{2} (h^+ - h^-)(z) \frac{1}{2i\omega} (l^+ + l^-)(z) \\ & - \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-)(z) \overline{\frac{1}{2} (l^+ - l^-)(z)}. \quad (81) \end{aligned}$$

La notation $\frac{\partial}{\partial t_z}$ représente la dérivée tangentielle au point z . Les calculs utilisent les limites des potentiels de simple et double couche [CK83]-[Ned77]. La seule difficulté réside dans l'obtention de la forme variationnelle limite pour le terme en $\frac{\partial}{\partial v_z} \frac{\partial}{\partial v_y} Y_0(\omega|z-y|)$. Soit H le Hessien de Y_0 au point $\omega|z-y|$

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad H_{12} = H_{21}.$$

La fonction $Y_0(\omega|z-y|)$ vérifie l'équation de Helmholtz homogène donc

$$-(H_{11} + H_{22}) - \omega^2 Y_0(\omega|z-y|) = 0.$$

Les normales sont

$$v_z = (v_z^1, v_z^2), \quad \text{et } v_y = (v_y^1, v_y^2).$$

La direction tangentielle aux courbes est donc

$$t_z = (-v_z^2, v_z^1), \quad \text{et } t_y = (-v_y^2, v_y^1).$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial v_z} \frac{\partial}{\partial v_y} + \frac{\partial}{\partial t_z} \frac{\partial}{\partial t_y} \right) Y_0(\omega|z-y|) \\ &= [v_z^1 v_y^1 H_{11} + v_z^2 v_y^2 H_{22} + (v_z^1 v_y^2 + v_z^2 v_y^1) H_{12}] \\ &+ [v_z^2 v_y^2 H_{11} + v_z^1 v_y^1 H_{22} - (v_z^1 v_y^2 + v_z^2 v_y^1) H_{12}] \\ &= 2(v_z^1 v_y^1 + v_z^2 v_y^2) (H_{11} + H_{22}) \\ &= -2\omega^2 \vec{v}_z \cdot \vec{v}_y Y_0(\omega|z-y|) \end{aligned}$$

ce qui implique dans le cas où Γ_2 est distinct de Γ

$$\begin{aligned} & \int_{z \in \Gamma} \int_{y \in \Gamma_2} \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{\partial}{\partial v_y} Y_0(\omega|z-y|) \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-)(z) \overline{\frac{1}{2i\omega} (l^+ + l^-)(y)} \\ &= \int_{z \in \Gamma} \int_{y \in \Gamma_2} \left(-\frac{\partial}{\partial t_z} \frac{\partial}{\partial t_y} Y_0(\omega|z-y|) \right. \\ &\quad \left. - 2\omega^2 \vec{v}_z \cdot \vec{v}_y Y_0(\omega|z-y|) \right) \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-)(z) \overline{\frac{1}{2i\omega} (l^+ + l^-)(y)} \\ &= - \int_{z \in \Gamma} \int_{y \in \Gamma_2} Y_0(\omega|z-y|) \\ &\times \left(\frac{1}{2i\omega} \frac{\partial}{\partial t_z} (h^+ + h^-)(z) \overline{\frac{1}{2i\omega} \frac{\partial}{\partial t_y} (l^+ + l^-)(y)} \right. \\ &\quad \left. + 2\omega^2 \vec{r}_z \vec{r}_y \frac{1}{2i\omega} (h^+ + h^-)(z) \overline{\frac{1}{2i\omega} (l^+ + l^-)(y)} \right) \end{aligned}$$

Il est alors aisé de passer à la limite $\Gamma_2 = \Gamma$. L'opérateur K n'est plus défini à partir de $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. Son domaine de définition naturel [Ned77] est l'espace

$$\text{Dom}(K) = \{(h^+, h^-), (h^+ + h^-) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), (h^+ - h^-) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}$$

4. EXEMPLE DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE

4.1. Exemple d'algorithme de résolution

Nous considérons le système (58). La résolution itérative de (58) utilise la propriété

$$\text{Re}\left\{\left(\frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2\delta^*\delta\right) - tA\right\} \geq 0$$

qui est une conséquence de la remarque 3.3 et de l'hypothèse $|t| \leq 1$.

Pour obtenir un algorithme de résolution, on peut alors s'inspirer des méthodes utilisées pour la résolution du problème de Stokes. On peut introduire un paramètre de relaxation $\varepsilon > 0$. La première étape consiste à écrire

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2\delta^*\delta & -K^* \\ K & \frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2}\delta^*\delta + \varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\varepsilon^{n+1} \\ \lambda_\varepsilon^{n+1} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} tA & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^n \\ \lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{82}$$

ce qu'on réécrit en éliminant le multiplicateur

$$\left(\frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2\delta^*\delta + K^*\left(\frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2}\delta^*\delta + \varepsilon I\right)^{-1}K\right)x_\varepsilon^{n+1} = tAx_\varepsilon^n + B$$

ou encore

$$x_\varepsilon^{n+1} = \left(\frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2 + K^*(256\pi^2\omega^5\tau^2\delta^*\delta + \varepsilon I)^{-1}K\right)^{-1}(tAx_\varepsilon^n + B).$$

Pour l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte

$$\begin{cases} e_\varepsilon^n = (e_\varepsilon^{n,+}, e_\varepsilon^{n,-}) = x_\varepsilon^n - x \\ \mu_\varepsilon^n = (\mu_\varepsilon^{n,+}, \mu_\varepsilon^{n,-}) = \lambda_\varepsilon^n - \lambda \end{cases}$$

on a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + 4\omega\tau^2\delta^*\delta & -K^* \\ K & \frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2}\delta^*\delta + \varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{n+1} \\ \mu_\varepsilon^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tA & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^n \\ \mu_\varepsilon^n \end{pmatrix} \quad (83)$$

d'où en multipliant la première ligne par e_ε^{n+1} , la deuxième ligne par μ_ε^{n+1} puis en sommant

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|e_\varepsilon^{n+1}\|^2 + 4\omega\tau^2 \|\delta(e_\varepsilon^{n+1})\|^2 + \frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2} \|\delta(\mu_\varepsilon^{n+1})\|^2 + \varepsilon \|\mu_\varepsilon^{n+1}\|^2 \\ & = |(e_\varepsilon^{n+1}, tAe_\varepsilon^n)| + \varepsilon(\mu_\varepsilon^{n+1}, \mu_\varepsilon^n) \\ & \leq \frac{1}{2} \|e_\varepsilon^{n+1}\|^2 + 4\omega\tau^2 \|\delta(e_\varepsilon^{n+1})\|^2 + \frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2} \|\delta(\mu_\varepsilon^{n+1})\|^2 + \varepsilon \|\mu_\varepsilon^{n+1}\|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|e_\varepsilon^{n+1,+}\| + \frac{1}{2} \|e_\varepsilon^{n,-}\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\mu_\varepsilon^{n+1}\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\mu_\varepsilon^n\| \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2} \|e_\varepsilon^{n+1,-}\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\mu_\varepsilon^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|e_\varepsilon^{0,-}\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\mu_\varepsilon^0\|^2$$

ainsi que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(4\omega\tau^2 \|\delta(e_\varepsilon^{n+1})\|^2 + \frac{1}{256\pi^2\omega^5\tau^2} \|\delta(\mu_\varepsilon^{n+1})\|^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|e_\varepsilon^{0,-}\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\mu_\varepsilon^0\|^2.$$

A partir de ces estimations, il est aisé de montrer sous des hypothèses standard concernant la régularité de la solution que la solution approchée converge vers la solution exacte.

La version discrète de cet algorithme voit apparaître 3 niveaux itératifs : 2 niveaux sont là pour effectuer les gradients conjugués nécessaires à l'inversion de $(256 \pi^2 \omega^5 \tau^2 \delta^* \delta + \varepsilon I)^{-1}$ et à l'inversion de $(\frac{1}{2} I + 4 \omega \tau^2 \delta^* \delta + K^* (256 \pi^2 \omega^5 \tau^2 \delta^* \delta + \varepsilon I)^{-1} K)^{-1}$.

4.2. Résultats numériques

A titre d'illustration, on présente un exemple de résolution numérique obtenu à partir de la généralisation du présent travail aux équations de Maxwell tridimensionnelles [Des]. On considère

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \wedge \vec{E} + i\omega \vec{H} = 0 & \text{dans } R^3 - \Omega, \\ \nabla \wedge \vec{H} - i\omega \vec{E} = 0 & \text{dans } R^3 - \Omega, \\ \vec{E} \wedge \vec{\nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ (-\vec{E} \wedge \vec{e}_r + \vec{H} \wedge \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r) = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ pour } r \text{ grand.} & \end{array} \right. \quad (84)$$

La nouvelle inconnue que nous considérons est

$$x = (\vec{E} \wedge \vec{\nu} + \vec{H} \wedge \vec{\nu} \wedge \vec{\nu}, -\vec{E} \wedge \vec{\nu} + \vec{H} \wedge \vec{\nu} \wedge \vec{\nu}).$$

On obtient un système de structure absolument identique à (58). On le discrétise grâce à une procédure de Galerkin. On inverse le système discret avec la généralisation discrète aux équations de Maxwell de l'algorithme précédent.

Un code de résolution a été écrit au CEA : ce code nécessite une place mémoire uniquement proportionnelle au nombre de degrés de liberté sur la frontière, c'est-à-dire proportionnelle aux nombres d'arêtes d'un maillage de type $H(div)$. En conséquence, l'ordinateur CRAY T3D est capable d'accepter en mémoire un cas avec environ 10^6 triangles sur la frontière. C'est un gain considérable par rapport à une méthode de Gauss appliquée à la résolution d'un système discret obtenu à partir d'un système intégral classique. Il faut cependant considérer que le temps d'inversion est fonction du nombre de mailles.

Soit par exemple un cône-sphère de caractéristiques (tableau 1)

Tableau 1. — Paramètres algorithmiques du cône-sphère.

longueur totale	8 m
fréquence	300 MHz
longueur d'onde	1 m
rapport longueur d'onde/paramètre de maillage	$\lambda/h = 6$
angle d'éclairiment en coordonnées polaires nombre de triangles	$\theta = 10$ degrés, $\varphi = 0$ 8 356
temps C.P.U. sur un CRAY T3D	45 minutes

On itère pour avoir une solution numérique dont nous présentons la courbe de SER (*fig. 1*) (voir [Str41] pour une définition) comparée avec celle fournie par un calcul de référence avec le code SHF89 qui traite spécifiquement les objets de révolution. Les courbes de SER sont pratiquement confondues.

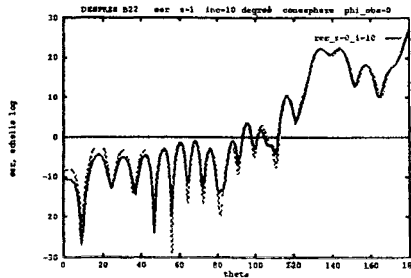


Figure 1. — Courbe de SER du cône-sphère.

CONCLUSION

Ce travail est une première étape. Le point essentiel est que l'on a fait apparaître une fonctionnelle quadratique qui joue un rôle dans les problèmes de diffraction d'onde harmonique. La solution du problème modèle apparaît comme le minimum de la fonctionnelle. Cela permet de donner un cadre Hilbertien naturel aux problèmes de diffraction d'ondes harmoniques. Il est possible d'obtenir une formulation de type Stokes intégral avec des noyaux réels singuliers, mais toujours intégrables quand $\Gamma_2 = \Gamma$.

L'analyse du système intégral devrait pouvoir se faire grâce à des méthodes classiques [BF91] d'analyse des systèmes du type Stokes. Il semble que l'étude du cas limite $\Gamma_2 = \Gamma$ est cruciale pour arriver à construire des approximations numériques vérifiant des conditions inf-sup discrètes.

Il est possible de généraliser l'analyse aux équations de Maxwell harmonique tridimensionnelles. On obtient également un système de Stokes intégral. Une description des premiers résultats numériques obtenus grâce à cette formulation se trouve dans [Des95]. Les résultats confirment l'analyse présentée dans cet article.

L'analyse exposée présente beaucoup d'analogies avec la théorie du scattering [Mel94] : relation d'isométrie pour la S-matrice, expression intégrale non singulière pour la T-matrice, ... Il sera probablement intéressant d'approfondir cela.

Remerciements. L'auteur remercie vivement le professeur Claude Bardos ainsi qu'Olivier Laffite pour de fructueuses discussions concernant ce travail.

RÉFÉRENCES

- [A. 93] A. DE LA BOURDONNAYE, 1993, Décomposition de $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ et nature de l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme, *C. R. Acad. Sci., Série I*, 316 : 369-372,
- [Ata91] C. ATAMIAN, 1991, *Résolution de problèmes de diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques en régime fréquentiel par une méthode de domaines fictifs*. PhD thesis, Paris 6, France.
- [BEM⁺53] H. BATEMAN, A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, and F. G. TRICOMI, 1953, *Higher transcendental functions*. Number 2 in Lecture notes in mathematics. McGraw-Hill.
- [BF91] F. BREZZI and M. FORTIN, 1991, *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag.
- [BM94] D. BOUCHE and F. MOLINET, 1994, *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*. Springer-Verlag.
- [BT80] A. BAYLISS and E. TURKEL, 1980, Radiation boundary conditions for wave like equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33 : 707-725.
- [Ces94] M. CESSENAT, 1994, *Méthodes mathématiques en électromagnétisme*. Commissariat à l'énergie atomique. DAM.
- [CK83] D. COLTON and R. KRESS, 1983, *Integral equation method in scattering theory*. Wiley-Interscience.
- [Des] B. DESPRÉS, Fonctionnelle quadratique et équations intégrales pour les équations de Maxwell harmoniques en domaine extérieur. Soumis au Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

- [Des91] B. DESPRÉS, 1991, *Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique*. PhD thesis, Paris 6, France.
- [Des95] B. DESPRÉS, 1995, Sur la diffraction d'une onde harmonique par un obstacle borné. Technical Report 2790, CEA.
- [DL84] R. DAUTRAY and J. L. LIONS, 1984, *Analyse numérique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 1. Masson.
- [GR86] V. GIRAULT and P. A. RAVIART, 1986, *Finite elements methods for Navier Stokes equations*, volume 5. Springer Series SCM.
- [Mel94] R. B. MELROSE, 1994, Geometric scattering theory. Lecture at Stanford university.
- [Ned77] J. C. NEDELEC, 1977, Cours de l'école d'été d'analyse numérique. Technical report, CEA-EDF-IRIA.
- [Pir88] O. PIRONNEAU, 1988, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Masson.
- [Str41] J. A. STRATTON, 1941, *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill.
- [Wat58] G. N. WATSON, 1958, *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge at the university press, 1958.
- [Wil75] C. WILCOX, 1975. *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*. Number 442 in Lecture notes in mathematics. Springer Verlag, 1975.