

MARGUERITE GISCLON

DENIS SERRE

Conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique fournies, par le schéma de Godunov

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 31, n° 3 (1997), p. 359-380

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1997__31_3_359_0

© AFCET, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



**CONDITIONS AUX LIMITES POUR UN SYSTÈME STRICTEMENT
 HYPERBOLIQUE FOURNIES, PAR LE SCHÉMA DE GODUNOV (*)**

par Marguerite GISCLON et Denis SERRE ⁽¹⁾ ⁽²⁾

Résumé — *Nous étudions les systèmes hyperboliques de lois de conservation en dimension un d'espace, en particulier ce que devient la condition aux limites posée pour le schéma de Godunov lorsque le pas d'espace tend vers zéro*

A l'aide d'estimations sur les entropies, nous démontrons la convergence de la solution du schéma de Godunov adapté au cas d'un domaine $x > 0$ vers la solution d'un système hyperbolique mixte sur un intervalle de temps fini, antérieur à la formation des chocs

Abstract — *We study hyperbolic systems of conservation laws in one space variable, in particular the behaviour of the boundary conditions for the Godunov scheme as the mesh size tends to zero*

Thanks to entropy estimates, we prove the convergence of the solution of the scheme towards the solution of a hyperbolic initial boundary value problem in the slab $\mathbb{R}^+ \times (0, S)$ where S is less than the shock breaking time

INTRODUCTION

Considérons un système de lois de conservation à une dimension d'espace, posé dans le quart de plan $x > 0, t > 0$:

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = b(x), x > 0, \end{cases}$$

où $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1, f$ et b sont des fonctions données, le flux $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe \mathcal{C}^2 , la condition initiale b est bornée et de classe \mathcal{C}^1 .

Nous faisons l'hypothèse

(H1) : pour tout u dans \mathbb{R}^n , les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(u)$ du flux f , notées $\lambda_i(u), 1 \leq i \leq n$, sont réelles, simples et non nulles :

$$\lambda_1(u) < \dots < \lambda_p(u) < 0 < \lambda_{p+1}(u) < \dots < \lambda_n(u).$$

(*) Manuscrit reçu le 26 janvier 1996

⁽¹⁾ Membre de l'Institut Universitaire de France

⁽²⁾ Ecole Normale Supérieure, Mathématiques pures et appliquées, CNRS-UMR 128, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07

Cette hypothèse de stricte hyperbolicité exprime aussi le fait que le bord $x = 0$ n'est jamais caractéristique. Afin d'utiliser la résolution de problèmes de Riemann, nous supposons aussi que chaque champ caractéristique est ou bien vraiment non linéaire, ou bien linéairement dégénéré.

En l'absence d'une condition aux limites, le problème (S) est sous-déterminé (à moins que $p = n$). Notre but est de montrer que le traitement de la frontière $\{x = 0\} \times \mathbb{R}^+$ dans le schéma de Godunov détermine une condition aux limites pour le système (H) , lorsque le pas d'espace Δx tend vers zéro. Nous appellerons cette nouvelle condition au bord la condition aux limites « résiduelle ». Cette question peut être considérée comme une partie de la version discrète de l'étude continue faite dans [Gis95].

Cet article s'articule de la façon suivante :

- description brève du schéma de Godunov adapté au quart de plan $x > 0, t > 0$,
- introduction de la condition aux limites « résiduelle »,
- démonstration de la convergence de la solution du nouveau schéma de Godunov vers la solution du système hyperbolique avec conditions aux limites « résiduelles ». Nous obtenons ainsi le théorème 2 donné au paragraphe 2,
- tests numériques.

1. SCHÉMA DE GODUNOV ADAPTÉ

Nous adaptons le schéma numérique de Godunov au cas d'une demi-droite $x > 0$ de la façon suivante : notons Δt le pas de temps, $\varepsilon = \Delta x$ le pas d'espace, $\lambda = \Delta t / \Delta x$, $x_j = j \Delta x$ pour $j \geq -1$, $t_n = n \Delta t$ pour $n \geq 0$ et u_j^n l'approximation numérique au temps t_n de $u(\cdot, t_n)$, $j \geq -1$, $n \geq 0$ sur $I_j =]x_j, x_{j+1}[$.

Le schéma de Godunov adapté comporte deux étapes, la première est une résolution exacte explicite pendant un temps Δt , la deuxième est une étape de projection sur les fonctions constantes par morceaux (cf. [Lev90]).

Au temps $t = 0$, la donnée initiale est approchée par

$$\begin{cases} u_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} b(y) dy, j \geq 0 \\ u_{-1}^0 = a(0), \end{cases}$$

où a est une fonction donnée de classe \mathcal{C}^1 bornée qui satisfait la condition de compatibilité

$$a(0) = b(0).$$

Connaissant la suite $(u_j^n)_{j \geq -1}$, la résolution exacte sur $] -\frac{\Delta x}{2}, +\infty[$ se fait en juxtaposant les solutions

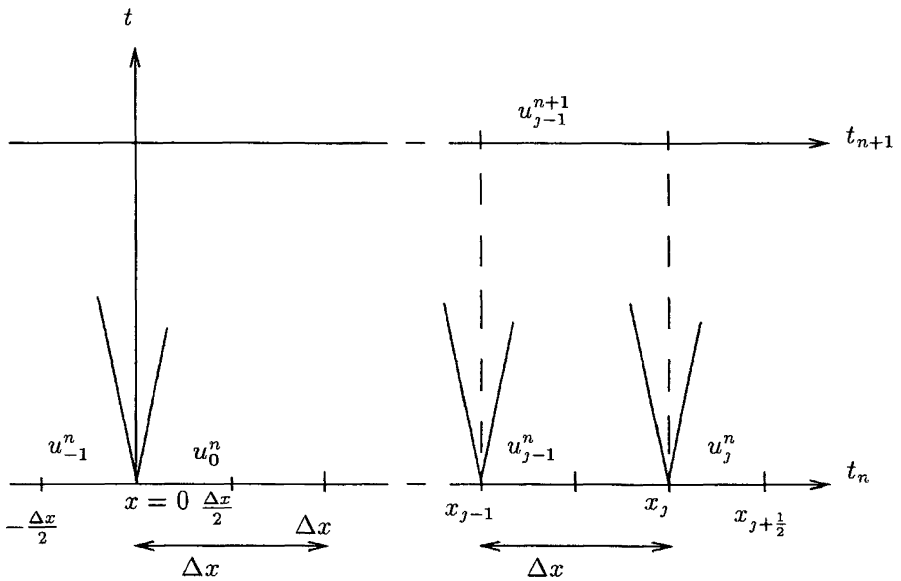
$$u^E(x, t) = R\left(\frac{x - x_{j+1}}{t - t_n}, u_j^n, u_{j+1}^n\right),$$

$$|x - x_{j+1}| < \frac{\Delta x}{2}, j \geq -1, t \in]t_n, t_{n+1}[, n \geq 0,$$

des problèmes de Riemann où

$$(x, t) \mapsto R\left(\frac{x}{t}, \alpha, \beta\right)$$

désigne la solution du problème de Riemann entre α et β . Nous supposons évidemment que les problèmes de Riemann introduits possèdent une solution unique, vérifiant la condition d'entropie de Lax.



Les valeurs u_j^{n+1} pour $j \geq 0$ sont calculées de la façon suivante :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u^E(y, t_{n+1} - 0) dy,$$

et nous posons

$$u_{-1}^{n+1} = a(t_{n+1}).$$

Pour $t > 0$ fixé, nous définissons l'opérateur de projection Π , qui agit sur les fonctions définies sur \mathbb{R}^+ et localement intégrables, de la façon suivante :

$$\Pi \tilde{u}(x) := \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x_{j+1}} \tilde{u}(y) dy, \quad \forall x_j < x < x_{j+1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Pi u^e(x, t_{n+1} - 0) &= u_j^{n+1}, \quad \forall j \geq 0, \quad \forall x_j < x < x_{j+1} \\ &= u^e(x, t_{n+1}), \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

Sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy :

$$(CFL) \left| \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_k(u_j^n) \right| < \frac{1}{2}, \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

u^e est solution exacte entropique de

$$\frac{\partial}{\partial t} u^e + \frac{\partial}{\partial x} f(u^e) = 0,$$

dans chaque bande $\mathbb{R}^+ \times [t_n, t_{n+1}[$. Nous avons donc la formule suivante pour $j \geq 0$:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda [f(R(0, u_j^n, u_{j+1}^n)) - f(R(0, u_{j-1}^n, u_j^n))].$$

2. CONDITIONS AUX LIMITES « RÉSIDUELLES »

Pour A dans \mathbb{R}^n , nous introduisons l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_-(A) &= \{R(0^+, A, v), v \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{\tilde{u} \in \mathbb{R}^n, \tilde{u} \text{ est la valeur en } 0^+ \text{ d'une solution} \\ &\quad \text{d'un problème de Riemann d'état à gauche } A\}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H1), $\mathcal{O}_-(A)$ est une sous-variété de dimension p au voisinage de A .

Remarque : Dans les exemples classiques, si $p = 0$, alors $\mathcal{O}_-(A) = \{A\}$, et si $p = n$, alors $\mathcal{O}_-(A) = \mathbb{R}^n$.

Appliquons les résultats de Li Ta-Tsien et Yu Wen-Ci [LY85] pour montrer l'existence locale de solutions régulières au problème mixte strictement hyperbolique avec conditions aux limites « résiduelles »

$$(C) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = b(x), x > 0, \\ u(0, t) \in \mathcal{O}_-(a(t)), t > 0. \end{cases}$$

La condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution régulière locale à un problème strictement hyperbolique due à Li Ta-Tsien et Yu Wen-Ci est la suivante :

THÉORÈME 1 : *(Li Ta-Tsien, Yu Wen-Ci) Considérons le problème mixte strictement hyperbolique*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, x > 0, 0 < t < T_0, \\ u(x, 0) = b(x), x > 0, \\ g(u(0, t), t) = 0, 0 < t < T_0, \end{cases}$$

avec f de classe \mathcal{C}^2 , $b \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^+)$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times [0, T_0])$. On suppose que les conditions initiale et au bord sont compatibles :

$$g(b(0), 0) = 0,$$

et que l'intersection de $\ker D_u g(b(0), 0)$ et du sous-espace invariant pour $Df(b(0))$ associé aux valeurs propres positives, est réduite à $\{0\}$.

Alors, il existe un temps $T > 0$ tel que le problème mixte admette une et une seule solution continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Si de plus, les conditions initiale et au bord satisfont les relations de compatibilité à l'ordre un, à savoir

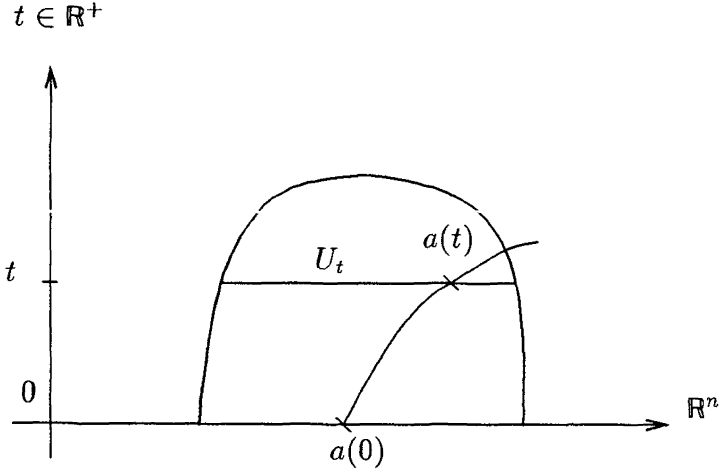
$$\frac{\partial g}{\partial t}(b(0), 0) = D_u g(b(0), 0) Df(b(0)) b'(0),$$

alors cette solution est de classe \mathcal{C}^1 .

Comme $\mathcal{O}_-(a(t))$ est une sous-variété de dimension p au voisinage de $a(t)$, dans \mathbb{R}^n , il existe un voisinage $\mathcal{U} \times [0, s]$ de $(a(0), 0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ et des applications ϕ_t de \mathcal{U} dans \mathbb{R}^{n-p} tels que :

1. $(t, \bar{u}) \mapsto \phi_t(\bar{u})$ est de classe \mathcal{C}^1 ,
2. $\phi_t(a(t)) = 0$ pour tout t dans $[0, s]$,
3. $\phi_t = 0$ est une équation locale de $\mathcal{O}_-(a(t))$,
4. ϕ_t est une submersion.

Donc, le théorème 1 s'applique avec $g(\bar{u}, t) = \phi_t(\bar{u})$.



Si de plus,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(a(0), 0) = D_u \phi(a(0), 0) Df(a(0)) b'(0),$$

alors d'après le théorème 1, il existe un temps $T > 0$ et une solution u de classe \mathcal{C}_b^1 du problème mixte (C) sur $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$. Cette solution est unique. Le temps est limité par l'apparition des chocs dans la solution du problème mixte (C) et parce que $\mathcal{O}_-(a(t))$ est une variété locale, ϕ_t est définie localement.

Nous allons montrer que, sous certaines hypothèses naturelles, il existe un temps $S > 0$ tel que u^ε converge vers u dans $L^\infty(0, S, L^2(\mathbb{R}_x^+))$ lorsque $\varepsilon = \Delta x$ tend vers zéro, c'est-à-dire le théorème de convergence suivant :

THÉORÈME 2 : *Soient une condition aux limites et une condition initiale a et b de classe \mathcal{C}^1 et bornées qui satisfont $a(0) = b(0)$, b étant constant hors d'un intervalle borné.*

Sous les hypothèses supplémentaires (H2) et (H3) mentionnées au paragraphe 3.1, il existe un temps $S > 0$ indépendant du pas de temps et du pas d'espace ε et une solution u^ε du schéma de Godunov modifié définie et

régulière sur $\mathbb{R}_x^+ \times (0, S)$ tels que la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge dans $L^\infty(0, S, L^2(\mathbb{R}^+))$ vers l'unique solution régulière u du système hyperbolique mixte (C), c'est-à-dire

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \sup_{0 < t \leq S} \|u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = 0.$$

3. ESTIMATIONS SUR LES ENTROPIES

Notons B_0 une boule contenant les valeurs $b(x)$ pour $x \geq 0$ et les valeurs $a(t)$ pour $t \geq 0$, et B une boule contenant B_0 et les valeurs $u(x, t)$ pour $x \geq 0$ et t dans $[0, T]$. Soient $\eta > 0$ et B_η le voisinage de B d'ordre η :

$$B_\eta := B + B(0, \eta).$$

Nous notons \mathcal{B}_η une boule qui contient les valeurs des problèmes de Riemann entre deux points quelconques de B_η . Nous désignons par $T^\varepsilon(\eta) = N^\varepsilon(\eta) \Delta t$ le supremum des temps pendant lesquels la solution u^ε est à valeurs dans \mathcal{B}_η :

$$u^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0, T^\varepsilon(\eta)]).$$

Le but de ce paragraphe est de majorer la norme de $u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)$ dans $L^2(\mathbb{R}_x^+)$. La majoration est donnée par le corollaire 1 au paragraphe 3.4.

3.1. Hypothèses supplémentaires

Nous faisons l'hypothèse suivante :

(H2) : le système strictement hyperbolique (S) admet une entropie E de flux F et pour tout K compact de \mathbb{R}^n , il existe une constante α_K strictement positive telle que, pour tout \tilde{u} dans K , pour tout ξ dans \mathbb{R}^n

$$(D^2 E(\tilde{u}) \xi, \xi) \geq \alpha_K |\xi|^2.$$

La solution exacte régulière u vérifie donc

$$\frac{\partial}{\partial t} E(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0, x > 0, t > 0.$$

Par ailleurs, la condition d'entropie de Lax assure, puisque E est convexe,

$$\frac{\partial}{\partial t} E(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} F(u^\varepsilon) \leq 0,$$

dans chaque bande $\mathbb{R}^+ \times [t_n, t_{n+1}[$, au sens des distributions.

Notons

$$\Delta(u^\varepsilon, u) := E(u^\varepsilon) - E(u) - dE(u)(u^\varepsilon - u) \in \mathbb{R},$$

$$\delta(u^\varepsilon, u) := F(u^\varepsilon) - F(u) - dE(u)(f(u^\varepsilon) - f(u)) \in \mathbb{R}.$$

Dans ce texte, nous écrivons indifféremment, en fonction du contexte,

$$\Delta = \Delta(u^\varepsilon, u)(x, t) = \Delta(u^\varepsilon, u) = \Delta(x, t),$$

$$\delta = \delta(u^\varepsilon, u)(x, t) = \delta(u^\varepsilon, u) = \delta(x, t),$$

et

$$a = a(t).$$

Remarquons que

$$\Delta(u^\varepsilon, u) \geq \alpha_0(\eta) |u^\varepsilon - u|^2 \geq 0,$$

où $\alpha_0(\eta)$ est une constante strictement positive telle que $\alpha_0 I_n \leq D^2 E(\tau)$, pour $\tau \in \mathcal{B}_\eta$. Pour majorer la norme dans $L^2(\mathbb{R}_x^+)$ de $u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)$, il est donc équivalent d'estimer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \Delta(x, t) dx$, puis de montrer que u^ε reste dans \mathcal{B}_η pour des temps indépendants de $\varepsilon > 0$.

Nous sommes amenés, pour dégager l'estimation, à faire l'hypothèse (H3) suivante dont la pertinence est discutée au paragraphe 3.2 : pour tout $A \in \mathbb{R}^n$, il existe \mathcal{V} voisinage de A tel que

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathcal{V} \cap \mathcal{O}_-(A))^2, \quad \delta(\alpha, \beta) \leq 0.$$

Le résultat est alors le suivant :

THÉORÈME 3 : *Sous les hypothèses (H1) – (H2) – (H3), si b est constant hors d'un intervalle borné et si nous prenons des pas tels que le rapport $\Delta x / \Delta t$ (déjà minoré par la condition CFL) soit aussi majoré, alors il existe une constante c strictement positive telle que pour tout Δx dans $]0, 1]$,*

$$\forall t \in [0, T^\varepsilon(\eta)], \quad \int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u)(x, t) dx \leq ct \Delta x \exp(ct).$$

Les paragraphes qui suivent consistent en la démonstration de ce théorème à l'aide d'estimations intermédiaires.

3.2. Première estimation

La première estimation est donné par :

PROPOSITION 1 : *Sous les hypothèses (H1) – (H2) – (H3), il existe une constante c strictement positive telle que*

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}[, \int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u)(x, t) dx \leq \exp(c \Delta t) \int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u)(x, t_n + 0) dx .$$

Démonstration : L'estimation est basée sur l'inéquation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \delta(x, t) \leq -D^2 E(u) \left(u^\varepsilon - u, \frac{\partial}{\partial t} u \right) - D^2 E(u) \left(f(u^\varepsilon) - f(u), \frac{\partial}{\partial x} u \right), \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}[.$$

Introduisons dans le membre de droite les quantités

$$\pm D^2 E(u) \left(Df(u) (u^\varepsilon - u), \frac{\partial}{\partial x} u \right)$$

et utilisons la symétrie de Df par rapport à $D^2 E$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \delta(x, t) \leq -D^2 E(u) \left(f(u^\varepsilon) - f(u) - Df(u) (u^\varepsilon - u), \frac{\partial}{\partial x} u \right) \leq c |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^2 .$$

Dans toute la suite, la notation c désigne diverses constantes strictement positives qui dépendent de \mathcal{B}_η .

Intégrons cette inéquation par rapport à x sur $(0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \Delta(x, t) dx - \delta(0, t) &\leq c \int_0^{+\infty} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^2 dx \\ &\leq \frac{c}{\alpha_0} \int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u)(x, t) dx . \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (H3) et à la construction de u^ε au bord, $\delta(0, t)$ est négatif et nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \Delta(x, t) dx \leq c \int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u)(x, t) dx, \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}[,$$

qui fournit par l'inégalité de Gronwall

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Delta(x, t) dx &\leq \exp(c(t - t_n)) \int_0^{+\infty} \Delta(x, t_n + 0) dx \\ &\leq \exp(c \Delta t) \int_0^{+\infty} \Delta(x, t_n + 0) dx, \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}[, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la proposition 1. \square

L'hypothèse (H3) est tout-à-fait réaliste. En effet, nous avons le lemme suivant :

LEMME 1 : Soit $A \in \mathbb{R}^n$.

1. Si $p = 0$, alors $\delta(\alpha, \beta) = 0$, $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathcal{O}_-(A))^2$.
2. Si $p = n$, alors $\delta(\alpha, \beta) \leq 0$, $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^n)^2$.
3. Si $0 < p < n$ alors il existe un voisinage \mathcal{V} de A tel que $\delta(\alpha, \beta) \leq 0$, pour tous α et β dans $\mathcal{V} \cap \mathcal{O}_-(A)$.

Sources

1. Dans le cas $p = 0$, $\mathcal{O}_-(A) = \{A\}$ et donc $\alpha = \beta = A$.
2. Dans le cas $p = n$, voir [BS87].
3. Dans le cas $0 < p < n$, voir [HS89]. \square

Exemple : Illustrons ce qui précède par l'exemple du p -système de la dynamique des gaz. Ici, $n = 2$ et le flux f est défini par

$$f: \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u = (u_1, u_2) & \mapsto & (u_2, p(u_1)) \end{array} \right),$$

avec $p \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $p' > 0$.

Les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées car les valeurs propres de $Df(u)$ sont $\pm \sqrt{p'(u_1)}$, l'entropie E est $E(u) = u_2^2/2 + P(u_1)$ où P est une primitive de p , le flux F est $F(u) = u_2 p(u_1)$. L'ensemble $\mathcal{O}_-(A)$ est ici la courbe de 1-onde $\mathcal{O}_1(A)$. D'après [DG90], la propriété du lemme est globale, c'est-à-dire $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$:

$$\text{si } \alpha \in \mathcal{O}_1(A), \beta \in \mathcal{O}_1(A), \text{ alors } \delta(\alpha, \beta) \leq 0.$$

Ainsi, l'hypothèse (H3) est vérifiée globalement dans les cas $p = 0$, $p = n$ et dans l'exemple du p -système.

3.3. Deuxième estimation

La question maintenant est de savoir comment varie $\int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u) dx$ en t_n . Nous sommes ramenés à majorer $\int_0^{+\infty} \Delta(\Pi u^\varepsilon, u) dx$ à l'aide de $\int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u) dx$ et de la régularité de u .

La deuxième estimation est donnée par :

PROPOSITION 2 : *Sous les hypothèses (H1) et (H2), avec b constant hors d'un intervalle borné, il existe une constante α strictement positive (« petite ») et une constante c strictement positive (éventuellement « grande ») telles que pour tout t dans $[0, \min(T^\varepsilon(\eta), T)]$, nous avons l'inégalité suivante :*

$$\int_0^{+\infty} \Delta(\Pi u^\varepsilon, u) dx + \alpha \int_0^{+\infty} |u^\varepsilon - \Pi u^\varepsilon|^2 dx \leq \int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u) dx + c \Delta x^2.$$

Démonstration : A u fixé dans \mathbb{R}^n , la fonction définie par

$$\begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \rightarrow & \mathbb{R} \\ v \mapsto & \Delta(v, u) \end{pmatrix}$$

est, comme E , strictement convexe.

D'après l'hypothèse (H2),

$$\Delta(v, u) \geq \Delta(\Pi v, u) + (dE(\Pi v) - dE(u))(v - \Pi v) + \alpha |v - \Pi v|^2.$$

Mais,

$$dE(\Pi v) - dE(u) = \Pi g + dE(\Pi u) - dE(u)$$

où $g := dE(\Pi v) - dE(\Pi u)$ car $\Pi v(\cdot, t)$ est une constante sur I_j .

Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Delta(v, u) dx &\geq \int_0^{+\infty} \Delta(\Pi v, u) dx \\ &+ \int_0^{+\infty} (dE(\Pi u) - dE(u))(v - \Pi v) dx + \alpha \int_0^{+\infty} |v - \Pi v|^2 dx, \end{aligned}$$

d'où grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{A}(v, u) dx + \alpha \int_0^{+\infty} |v - \Pi v|^2 dx \leq \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(v, u) dx + \left(\int_0^{+\infty} |dE(u) - dE(\Pi u)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} |v - \Pi v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(\Pi v, u) dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^{+\infty} |v - \Pi v|^2 dx \\ \leq \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(v, u) dx + \frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} |dE(u) - dE(\Pi u)|^2 dx \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Young.

De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |dE(u) - dE(\Pi u)|^2 dx &\leq c \int_0^{+\infty} |u - \Pi u|^2 dx \\ &\leq c(\Delta x)^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} u(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\ &\leq c(\Delta x)^2, \end{aligned}$$

à condition que $\partial u / \partial x \in L_t^\infty(L_x^2)$. Or, comme nous avons supposé que b est constant hors d'un compact et comme la vitesse de propagation est finie, aussi bien pour le problème limite que pour le schéma de Godunov, nous avons u et u^ε constants hors d'un compact. Donc, $\partial u / \partial x = 0$ hors de ce compact.

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{A}(\Pi v, u) dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^{+\infty} |v - \Pi v|^2 dx \leq \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(v, u) dx + c \Delta x^2, \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui donne la proposition en posant $v = u^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times (0, T^\varepsilon(\eta)))$. \square

3.4. Démonstration de l'estimation finale

Le théorème 3 se déduit maintenant des deux propositions précédentes.

Posons

$$\rho_n = \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(u^\varepsilon, u)(x, t_n + 0) dx.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= \int_0^{+\infty} \Delta(\Pi u^\varepsilon, u)(x, t_{n+1} - 0) dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u)(x, t_{n+1} - 0) dx + c \Delta x^2, \end{aligned}$$

d'après la proposition 2,

$$\leq \exp(c \Delta t) \int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u)(x, t_n + 0) dx + c \Delta x^2,$$

d'après la proposition 1,

$$\leq \exp(c \Delta t) \rho_n + c \Delta x^2,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \rho_n &\leq \exp(cn \Delta t)(cn \Delta x^2 + \rho_0) \\ &\leq ct \Delta x \exp(ct) + \rho_0 \exp(cn \Delta t), \end{aligned}$$

car $\Delta x/\Delta t$ est majoré et $t_n = n \Delta t < t$.

Traisons donc ρ_0 :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \int_0^{+\infty} \Delta(u^\varepsilon, u)(x, 0 + 0) dx \leq c \int_0^{+\infty} |u^\varepsilon(x, 0 + 0) - b(x)|^2 dx \\ &\leq c \sum_{j \geq 0} \int_{j \Delta x}^{(j+1) \Delta x} |u_j^0 - b(x)|^2 dx \\ &\leq c \Delta x^2 \|b'\|_{L^2(0, +\infty)}^2 \\ &\leq c \Delta x^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \rho_n &\leq ct \Delta x \exp(ct) + c \Delta x^2 \exp(cn \Delta t) \\ &\leq ct \Delta x \exp(ct). \end{aligned}$$

L'estimation du théorème 3 découle de cette inégalité et de la proposition 1.

Remarquons que la proposition 2 donne ensuite une estimation plus précise mais inutile ici ; en effet,

$$\alpha \int_0^{+\infty} |u^\varepsilon - \Pi u^\varepsilon|^2(x, t) dx + \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(\Pi u^\varepsilon, u)(x, t) dx \leq \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(u^\varepsilon, u)(x, t) dx + c \Delta x^2,$$

d'après la proposition 2

$$\leq ct \Delta x \exp(ct) + c \Delta x^2,$$

$$\forall 0 < t \leq \min(T^\varepsilon(\eta), T). \quad \square$$

Nous avons donc majoré la norme dans $L^2(\mathbb{R}_x^+)$ de $u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)$:

COROLLAIRE 1 : *Sous les hypothèses (H1) – (H2) – (H3), si la condition initiale b est constante hors d'un intervalle borné, alors il existe une constante c strictement positive telle que,*

$$\forall t \in [0, T^\varepsilon(\eta)], \|u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \leq c(\eta) t \Delta x \exp(ct),$$

Démonstration : Elle est immédiate. En effet,

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 &\leq c \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(x, t) dx \\ &\leq ct \Delta x \exp(ct). \quad \square \end{aligned}$$

4. CONVERGENCE DE u^ε VERS u

Le corollaire 1 prouve la convergence de u^ε vers u dans la bande $\mathbb{R}^+ \times [0, S]$ où

$$S = S(\eta) := \liminf_{\Delta x \rightarrow 0^+} \min(T^\varepsilon(\eta), T) \leq T.$$

Pour que ce résultat soit significatif, il reste à montrer que $S(\eta)$ est strictement positif pour tout $\eta > 0$, c'est-à-dire que $T^\varepsilon(\eta)$ ne tend pas vers zéro quand Δx tend vers zéro, ou encore que $T^\varepsilon(\eta)$ est uniformément minoré. Pour le démontrer, reprenons l'estimation du corollaire 1 dans le cas discret.

Posons

$$w_j^n := u_j^n - u(j \Delta x, t_n).$$

Le corollaire 1 devient alors :

PROPOSITION 3 : *Il existe une constante c strictement positive telle que*

$$\forall 0 \leq n \leq N^e(\eta), \sum_{j \geq 0} |w_j^n|^2 \leq cn \Delta t \exp(cn \Delta t) + c \Delta x .$$

Démonstration : Nous avons

$$|w_j^n|^2 = |u_j^n - u(j \Delta x, t_n)|^2 \leq 2|u_j^n - u(x, t_n)|^2 + 2|u(x, t_n) - u(j \Delta x, t_n)|^2. \quad (1)$$

Le deuxième terme du membre de droite est majoré par :

$$0 \leq |u(x, t_n) - u(j \Delta x, t_n)|^2 \leq \Delta x \int_{j \Delta x}^{(j+1) \Delta x} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(y, t_n) \right|^2 dy .$$

Intégrons (1) par rapport à x sur]j Δx, (j + 1) Δx[:

$$\begin{aligned} \Delta x |w_j^n|^2 &\leq 2 \int_{j \Delta x}^{(j+1) \Delta x} |u^e(x, t_n) - u(x, t_n)|^2 dx \\ &\quad + 2(\Delta x)^2 \int_{j \Delta x}^{(j+1) \Delta x} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(y, t_n) \right|^2 dy . \end{aligned}$$

Sommons ensuite sur j :

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{j \geq 0} |w_j^n|^2 &\leq 2 \int_0^{+\infty} (j+1) \Delta x |u^e(x, t_n) - u(x, t_n)|^2 dx \\ &\quad + 2(\Delta x)^2 \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(y, t_n) \right|^2 dy \\ &\leq ct_n \Delta x \exp(ct_n) + 2(\Delta x)^2 \left\| \frac{\partial}{\partial y} u(\cdot, t_n) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \end{aligned}$$

grâce au corollaire 1

$$\leq ct_n \Delta x \exp(ct_n) + 2c(\Delta x)^2. \quad \square$$

Nous pouvons enfin terminer la démonstration du théorème de convergence. En effet, d'après la proposition 3

$$\forall 0 \leq n \leq N^e(\eta), |w_j^n|^2 \leq cn \Delta t \exp(cn \Delta t) + c \Delta x .$$

Si $T^\varepsilon(\eta) < T$, il existe j tel que $|w_j^{N^\varepsilon(\eta)}|^2 \geq \eta^2$ car à $T^\varepsilon(\eta)$, u^ε sort de la boule de rayon η . Soit $n^\varepsilon(\eta)$ le plus petit entier tel que $\sup |w_j^n|^2 > \eta^2$, donc $t^\varepsilon(\eta) = n^\varepsilon(\eta) \Delta t \leq T^\varepsilon(\eta)$ et

$$\begin{aligned} \eta^2 &\leq \sup_j |w_j^{n^\varepsilon(\eta)}|^2 \\ &\leq cn^\varepsilon(\eta) \Delta t + c \Delta x \\ &\leq cn^\varepsilon(\eta) \Delta t + \frac{\eta^2}{2} \quad \text{si } \Delta x \leq \frac{\eta^2}{2c} \end{aligned}$$

d'où $\frac{\eta^2}{2} \leq cn^\varepsilon(\eta) \Delta t = ct^\varepsilon(\eta)$. \square

5. EXEMPLE

L'algorithme est testé dans le cas du p -système avec

$$p(x) = \exp(x) + x - 1.$$

Le pas d'espace est introduit au départ :

$$\Delta x = 0, 1.$$

L'approximation numérique u_j^n est stockée dans un tableau de dimension 101 c'est-à-dire j varie de -1 à 100 . La dernière valeur est calculée selon la formule

$$u_{100}^{n+1} = u_{100}^n - \lambda [f(u_{100}^n) - f(R(0, u_{99}^n, u_{100}^n))].$$

Nous calculons à chaque itération Δt_n pour avoir

$$\max_{-1 \leq j \leq 100} \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_2(u_j^n) = \frac{1}{2}.$$

Les données sont

$$a(t) = (1, 2), \quad b(x) = (1, -1 + 3 \exp(-x)).$$

Elles sont donc bien de classe \mathcal{C}^1 , bornées et satisfont

$$a(0) = b(0).$$

Au temps 2.053, les composantes de u_j^{100} sont données par la figure 1. Nous observons que la couche limite est bien concentrée sur une maille.

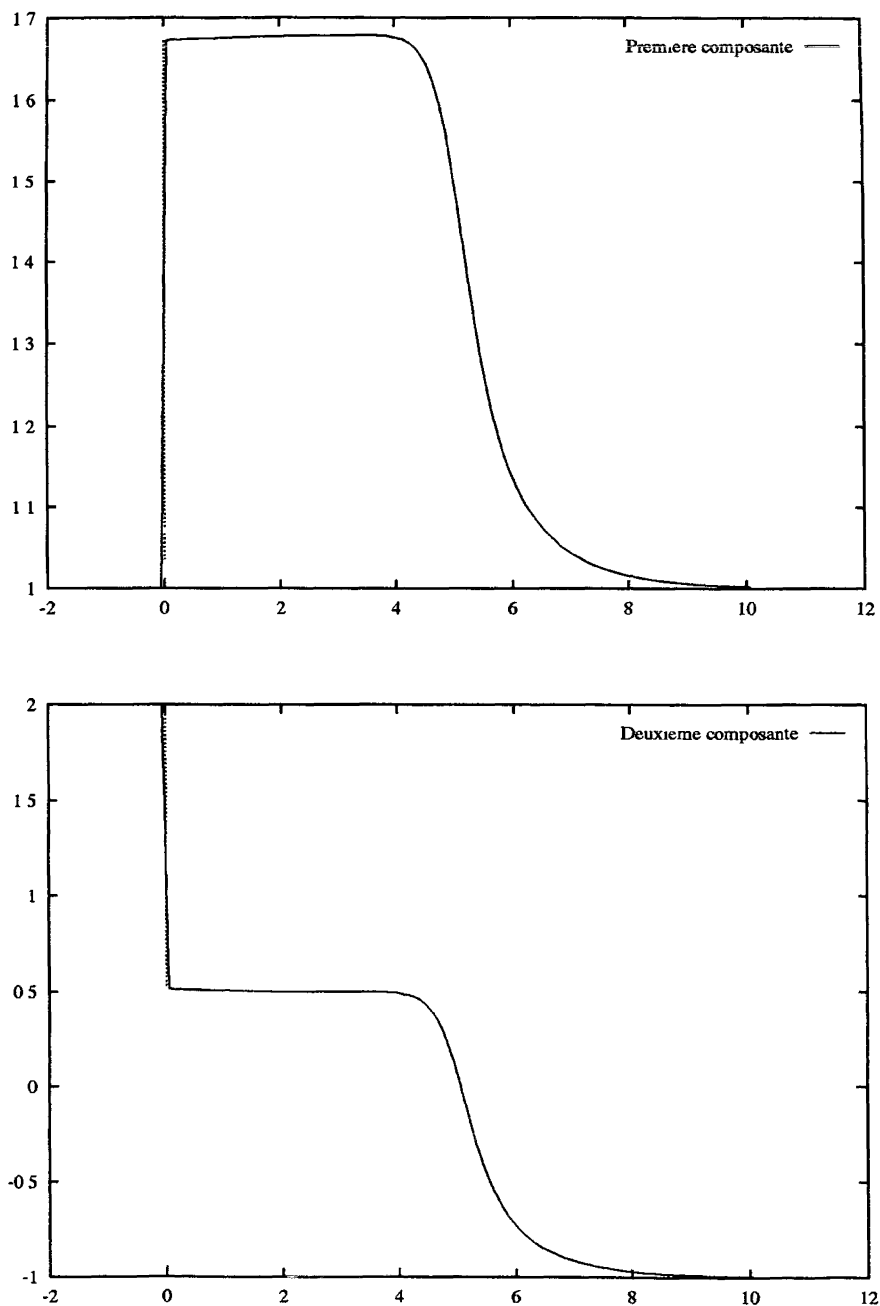


Figure 1. — Godunov, $a(0) = b(0)$, $CFL = 0.5$

Nous avons les mêmes observations au temps 2.046 (voir la figure 2) si nous prenons comme CFL :

$$\max_{-1 \leq j \leq 100} \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_2(u_j^n) = 1 .$$

Pour des raisons mathématiques, liées à la difficulté de la démonstration de la convergence, nous avons supposé la compatibilité de la condition initiale et de la condition aux limites. Mais nous pouvons penser que le résultat reste vrai pour des données non régulières. Le cas est le « demi »-problème de Riemann, où chaque donnée a et b est une constante. La solution du problème mixte avec condition aux limites « résiduelles » est auto-similaire. C'est la restriction au demi-espace $x > 0$ de la solution du problème de Riemann entre a et b . Nous avons testé l'algorithme avec les données

$$a(t) = (1, 2) , \quad b(x) = (1, 5) ,$$

pour lesquelles la solution présente une détente qui sépare b de l'état constant

$$c = (0,09918, 3,5) .$$

Nous obtenons alors au temps 2,593 la figure 3.

Naturellement, l'étude des conditions aux limites « résiduelles » doit être menée bien au-delà du seul schéma de Godunov. Nous observons alors, en général, que la couche limite s'étale sur plusieurs mailles au lieu d'une. A titre d'exemple, les résultats de la figure 4 ont été obtenus au moyen du schéma de Lax-Friedrichs. Ce fait peut être expliqué, au moins formellement, par un développement asymptotique, dans le même esprit que [Gis95]. La justification rigoureuse de ce développement fait l'objet d'une étude en cours.

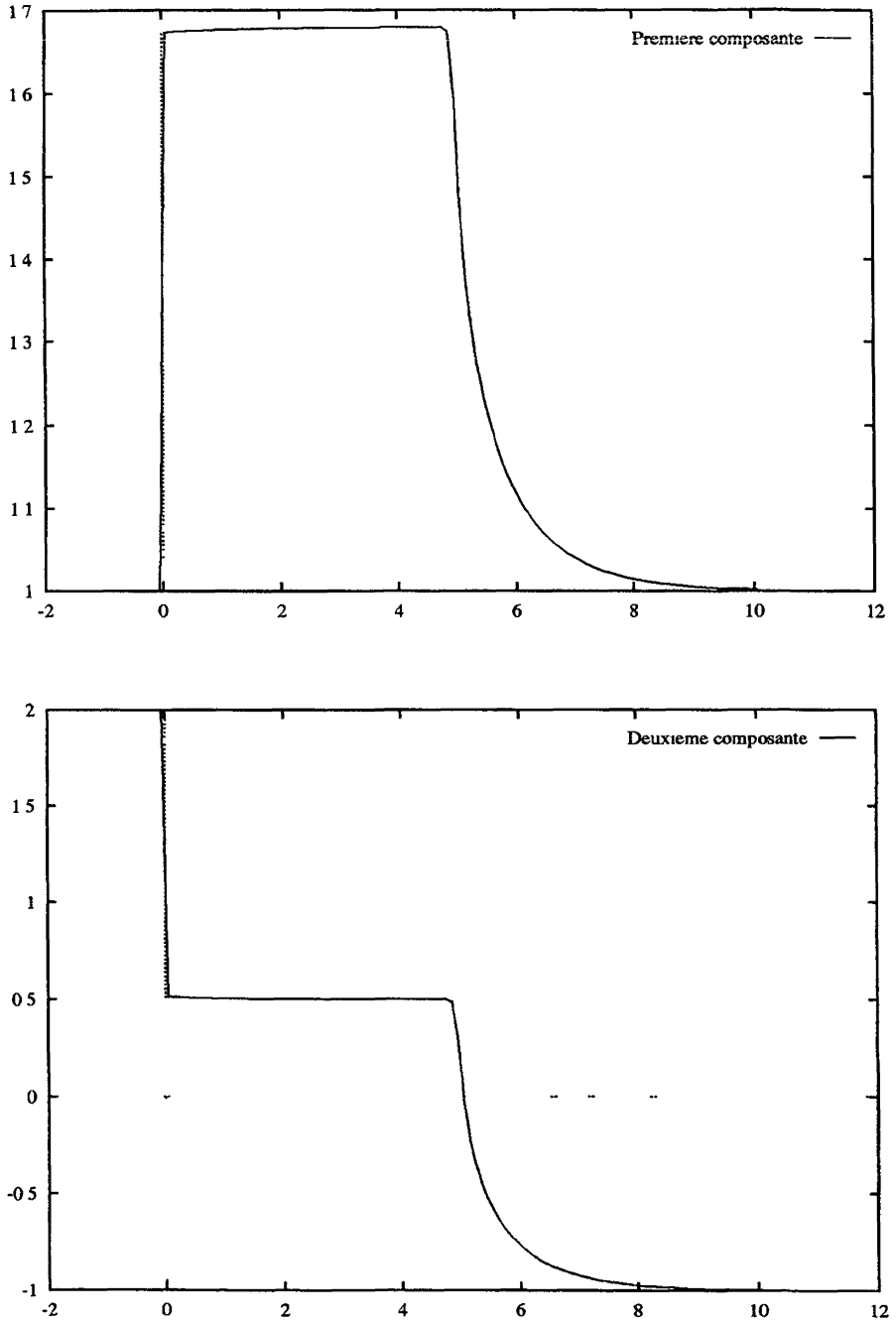


Figure 2. — Godunov, $a(0) = b(0)$, $CFL = 1$

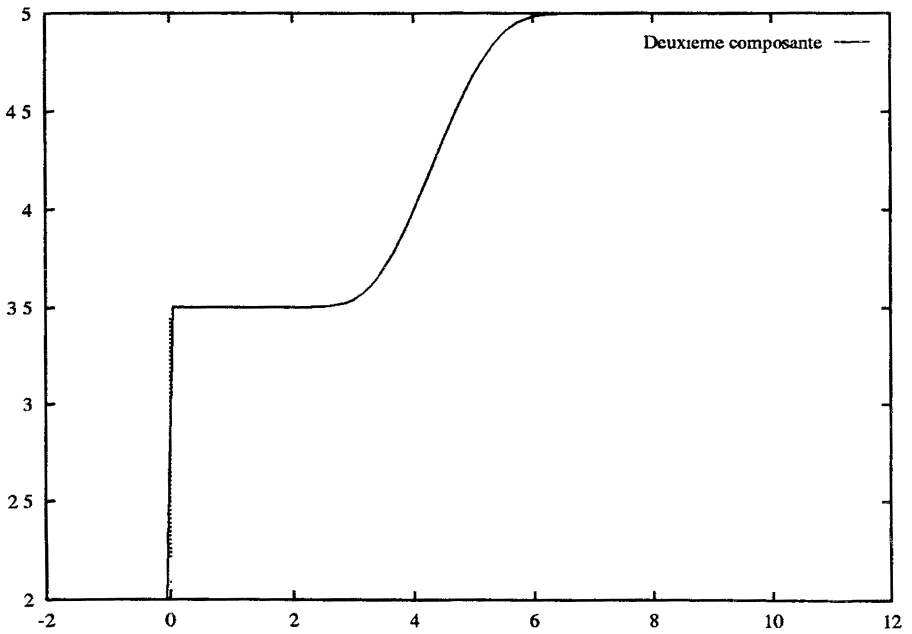
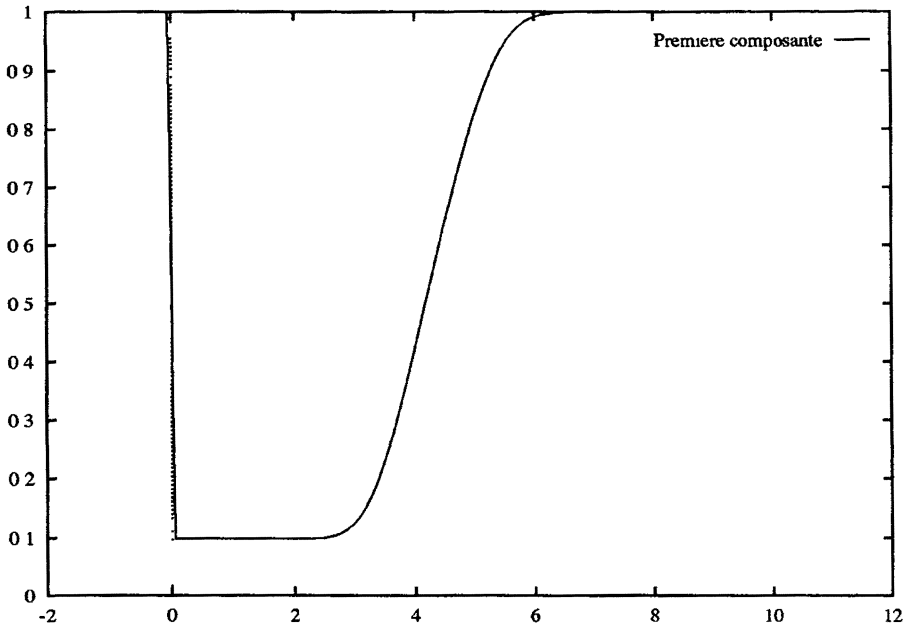


Figure 3. — Godunov, « demi »-problème de Riemann, $CFL = 0.5$

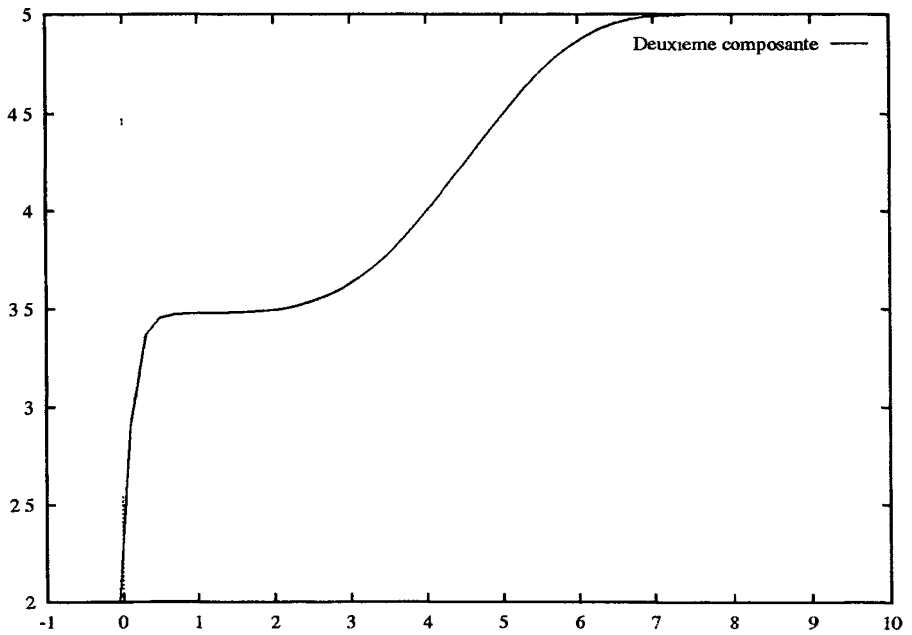
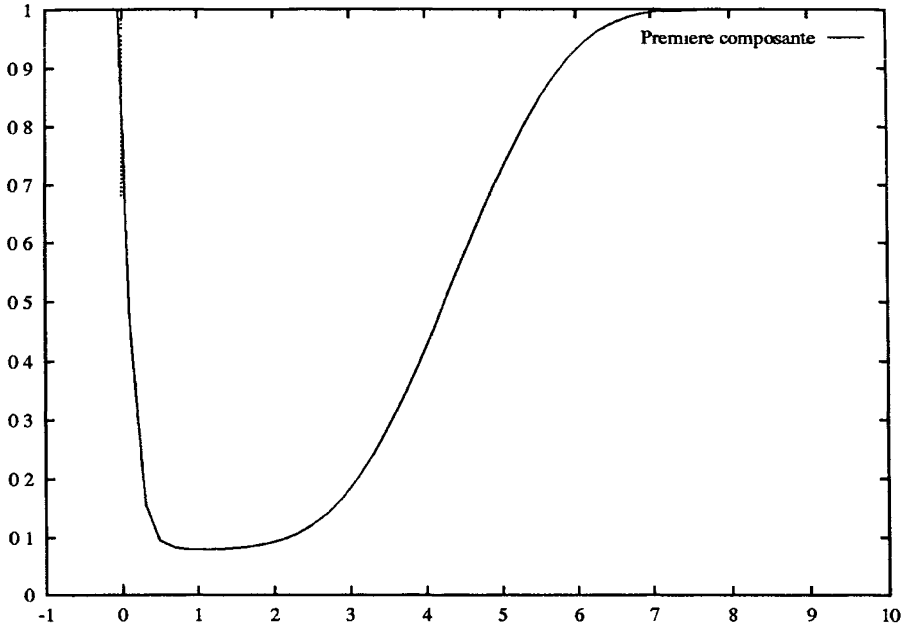


Figure 4. — Lax Friedrichs, $a(0) \neq b(0)$, $CFL = 0.5$

RÉFÉRENCES

- [BS87] A. BENABDALLAH et D. SERRE, 1987, Problèmes aux limites pour des systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations à une dimension d'espace, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I*, p. 677-680.
- [DG90] B. DUBROCA, G. GALLICE, 1990, « Résultats d'existence et d'unicité du problème mixte pour des systèmes hyperboliques de lois de conservation monodimensionnels », *Comm. in Partial Differential Equations*, 15(1), p. 59-80.
- [Gis95] M. GISCLON, 1996, « Étude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique, via l'approximation parabolique », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 75, p. 485-508.
- [HS89] A. HEIBIG, D. SERRE, 1989, « Une approche algébrique du problème de Riemann », *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I*, p. 157-162.
- [Lev90] R. J. LÉVÊQUE, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, 1990.
- [LY85] LI TA TSIEN, YU WEN-CI, *Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems*, Duke University, Mathematics Series, Durham, 1985.