

LAHCÈNE CHORFI

Étude mathématique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 30, n° 3 (1996), p. 299-342

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1996__30_3_299_0

© AFCET, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES MODES GUIDÉS DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE À SYMÉTRIE DE RÉVOLUTION (*)

par Lahcène CHORFI (1)

Résumé. — *Ce rapport est consacré à l'analyse mathématique de la propagation d'ondes guidées dans un milieu élastique à symétrie de révolution. Ce problème est ramené à l'étude spectrale d'une suite d'opérateurs autoadjoints. Nous établissons des résultats qui prolongent et complètent ceux précédemment obtenus dans [2].*

Abstract. — *This report is devoted to the mathematical analysis of the propagation of guided waves in heterogeneous media with a symmetry of revolution. This problem is reduced to the spectral analysis of a sequence of self-adjoint operators. We establish sharp results which extend and complete those previously obtained in [2].*

1. INTRODUCTION

Nous proposons dans cet article une étude mathématique d'ondes guidées par un milieu élastique qui occupe l'espace entier \mathbf{R}^3 et qui possède une symétrie de révolution : ce qui signifie que la densité ρ et les coefficients de Lamé λ et μ dépendent uniquement de la variable radiale $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (Ox_3 étant l'axe de symétrie). Le phénomène de guidage d'ondes est provoqué par les variations locales des fonctions (λ, μ, ρ) . Une étude concernant ce type d'onde a été déjà réalisée dans un cas général (où on abandonne la symétrie de révolution) [2]. Dans notre cas la symétrie de révolution permet de ramener l'étude du système de l'élasticité à celle d'une suite de systèmes différentiels à une variable. Nous établissons des résultats qui prolongent et complètent ceux précédemment obtenus dans [2]. Récemment, le cas des ondes optiques, qui relève de la même approche, a été étudié par [4], [10] et [18]. Dans [1], [21] et [13], les auteurs étudient un autre type d'ondes guidées élastiques : les ondes de surface. Dans leur modèle, le milieu est homogène et invariant dans une direction, dans ce cas la condition de surface libre joue un rôle important dans le mécanisme d'onde guidée.

(*) Article reçu le 5 septembre 1994 et sous forme révisée le 30 novembre 1995.

(1) J.E. 180, *Équations aux Dérivées Partielles-Analyse Numérique*.

UFR-MIM, Université de Provence, 3 Place Victor-Hugo, 13331 Marseille Cedex 3, France.

Cet article est organisé comme suit : dans la Section 2, nous montrons que la recherche des modes guidés se ramène à l'étude spectrale d'une suite d'opérateurs autoadjoints $A_n(\beta)$ définis dans un espace de Hilbert approprié (β étant un paramètre qui désigne le nombre d'onde) puis nous donnons les principales propriétés de la forme bilinéaire $a_n(\beta; u, v)$ qui engendre $A_n(\beta)$. Dans la Section 3, nous déterminons le spectre essentiel de $A_n(\beta)$ et nous prouvons que le spectre ponctuel est borné supérieurement. Dans la Section 4, à l'aide des outils de la théorie spectrale, en particulier du principe du Min-Max, nous étudions en détail le spectre discret, correspondant à un type de modes guidés, et après avoir introduit la notion de seuils nous donnons des estimations *a priori* sur ces seuils. Dans la Section 5, nous présentons une étude asymptotique à haute fréquence des courbes de dispersion et des modes guidés correspondants. Nous montrons que le mode est essentiellement transversal, de plus son énergie est confinée au voisinage des régions de faible résistance au cisaillement. Cette étude asymptotique n'a pas été réalisée auparavant dans le cas de l'élasticité. Par contre des résultats analogues ont été démontrés dans [5] pour le système de Maxwell. La Section 6 est consacrée à la régularité des fonctions propres de $A_n(\beta)$. Ce dernier résultat est utilisé dans la Section 7 pour obtenir un théorème de stabilité des valeurs propres par rapport aux variations locales des coefficients (λ, μ, ρ) du milieu considéré. Plus précisément, nous montrons que les valeurs propres discrètes sont continues par rapport à (λ, μ, ρ) en norme L^1 . Ce résultat est original par rapport aux travaux précédents ([4], [10], cas vectoriel) où on obtient seulement une dépendance continue en norme L^∞ par rapport à l'indice de la fibre optique.

2. MODÈLE MATHÉMATIQUE

2.1. Les équations

Nous nous plaçons dans les hypothèses de l'élastodynamique linéaire dans un milieu hétérogène et isotrope. Nous supposons qu'un milieu élastique occupe l'espace entier \mathbf{R}^3 . Il est caractérisé par des coefficients de Lamé λ , μ , et une densité ρ . On suppose que ce milieu présente une symétrie de révolution d'axe Ox_3 ((O, x_1, x_2, x_3) étant un repère orthonormé de \mathbf{R}^3). De façon précise, λ , μ et ρ dépendent uniquement de la variable radiale $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. La structure du milieu étant cylindrique, nous écrivons les équations du mouvement en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Désignons par e_r, e_θ, e_z les directions locales. Alors le champ des déplacements :

$$\tilde{U}(r, \theta, z) = \tilde{U}_r(r, \theta, z) e_r + \tilde{U}_\theta(r, \theta, z) e_\theta + \tilde{U}_z(r, \theta, z) e_z$$

vérifie le système ([11]) :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} - \sigma_{\theta\theta} = r\rho\frac{\partial^2\tilde{U}_r}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} = r\rho\frac{\partial^2\tilde{U}_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = r\rho\frac{\partial^2\tilde{U}_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

où σ est le tenseur de contraintes (symétrique) lié au déplacement \tilde{U} par les relations suivantes :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda \operatorname{div} \tilde{U} + 2\mu\frac{\partial\tilde{U}_r}{\partial r}; \quad \sigma_{r\theta} = \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{U}_r}{\partial\theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tilde{U}_\theta}{r}\right)\right] \\ \sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial\tilde{U}_z}{\partial r} + \frac{\partial\tilde{U}_r}{\partial z}\right); \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \operatorname{div} \tilde{U} + \frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial\tilde{U}_\theta}{\partial\theta} + \tilde{U}_r\right) \\ \sigma_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial\tilde{U}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{U}_z}{\partial\theta}\right); \quad \sigma_{zz} = \lambda \operatorname{div} \tilde{U} + 2\mu\frac{\partial\tilde{U}_z}{\partial z} \end{cases}$$

avec

$$\operatorname{div} \tilde{U} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\tilde{U}_r)}{\partial r} + \frac{\partial\tilde{U}_\theta}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial\tilde{U}_z}{\partial z}.$$

Nous cherchons le champ de déplacement sous la forme :

$$(2.3) \quad \tilde{U}(r, \theta, z, t) = [U_r(r, \theta) e_r + U_\theta(r, \theta) e_\theta + U_z(r, \theta) e_z] \exp i(\omega t - \beta z).$$

Ce qui signifie que le champ \tilde{U} est une onde plane se propageant dans la direction Oz avec une vitesse de phase égale à $V = \frac{\omega}{\beta}$ (ω : pulsation ; β : nombre d'onde).

Nous dirons que \tilde{U} est un mode guidé si, de plus, \tilde{U} vérifie la condition :

$$(2.4) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (U_r^2 + U_\theta^2 + U_z^2) r dr d\theta < \infty.$$

La condition (2.4) signifie physiquement que les déplacements restent confinés autour de l'axe du cylindre.

En substituant (2.3) and (2.1), le champ

$$U(r, \theta) = (U_r(r, \theta), U_\theta(r, \theta), U_z(r, \theta))$$

doit vérifier le système :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial(r\sigma_{rr}^\beta)}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta r}^\beta}{\partial\theta} - \sigma_{\theta\theta}^\beta - i\beta r\sigma_{zr}^\beta = -\omega^2 \rho r U_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 \sigma_{r\theta}^\beta)}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^\beta}{\partial\theta} - i\beta r\sigma_{\theta z}^\beta = -\omega^2 \rho r U_\theta \\ \frac{\partial(r\sigma_{rz}^\beta)}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}^\beta}{\partial\theta} - i\beta r\sigma_{zz}^\beta = -\omega^2 \rho r U_z \end{cases}$$

où on a posé :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \sigma_{rr}^\beta = \lambda (\operatorname{div}^\beta U) + 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial r}; & \sigma_{r\theta}^\beta = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial\theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta}{r} \right) \right] \\ \sigma_{rz}^\beta = \mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} - i\beta U_r \right); & \sigma_{\theta\theta}^\beta = \lambda \operatorname{div}^\beta U + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta} + U_r \right) \\ \sigma_{\theta z}^\beta = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial\theta} - i\beta U_\theta \right); & \sigma_{zz}^\beta = \lambda \operatorname{div}^\beta U - 2\mu i\beta U_z \end{cases}$$

avec

$$\operatorname{div}^\beta U = \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{\partial U_\theta}{\partial\theta} - i\beta U_z.$$

La structure du milieu étant circulaire, nous pouvons décomposer le champ $U(r, \theta)$ en série de Fourier et ceci nous amène à considérer des champs, pour $n \in \mathbb{N}$, de la forme :

$$(2.7) \quad \begin{cases} U_r(r, \theta) = u_1(r) \cos n\theta \\ U_\theta(r, \theta) = u_2(r) \sin n\theta \\ U_z(r, \theta) = -iu_3(r) \cos n\theta. \end{cases}$$

La recherche des modes guidés se ramène donc à la résolution, pour tout $\beta > 0$, de la suite des problèmes suivants :

$$(\tilde{P}_n(\beta)) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \omega \in \mathbf{R}^+ \text{ et } u = (u_1, u_2, u_3), u \neq 0 \text{ tels que :} \\ - \frac{d}{dr} \left(B \frac{du}{dr} \right) + B_1 \frac{du}{dr} - \frac{d}{dr} (B_2 u) + B_3 u = \omega^2 \rho r u \text{ dans } D'(\mathbf{R}^+) \\ \text{et } \int_0^\infty |u|^2 r dr < +\infty \end{array} \right.$$

où les matrices $B, B_i, i = 1, 2, 3$, sont définies par :

$$B = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) r & 0 & 0 \\ 0 & \mu r & 0 \\ 0 & 0 & \mu r \end{pmatrix}$$

$$B_1 = B_2' = \begin{pmatrix} \lambda & -n\mu & \beta\mu r \\ n\lambda & -\mu & 0 \\ -\beta\lambda r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \frac{(n^2 + 2)\mu + \lambda}{r} + \beta^2 \mu r & \frac{n(\lambda + 3\mu)}{r} & -\beta\lambda \\ \frac{n(\lambda + 3\mu)}{r} & \frac{(2n^2 + 1)\mu + n^2\lambda}{r} + \beta^2 \mu r & -n\beta(\lambda + \mu) \\ -\beta\lambda & -n\beta(\lambda + \mu) & \frac{n^2\mu}{r} + \beta^2 r(\lambda + 2\mu) \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1 : (i) La forme (2.7) a été choisie pour avoir un système à coefficients réels, ce qui nous permet de travailler avec des fonctions à valeurs réelles.

(ii) Pour toute solution (u_1, u_2, u_3) de $\tilde{P}_n(\beta)$ on peut associer un deuxième mode guidé d'après les formules

$$(2.7bis) \quad \begin{cases} U_r(r, \theta) = u_1(r) \sin n\theta \\ U_\theta(r, \theta) = -u_2(r) \cos n\theta \\ U_z(r, \theta) = -iu_3(r) \sin n\theta \end{cases}$$

Ce qui veut dire que chaque valeur propre ω^2 est au moins double.

(iii) Réciproquement, on peut montrer (cf. [7]) que toute solution $U = (U_r, U_\theta, U_z)$ de (2.1) est une combinaison finie de solutions du type (2.7) et (2.7bis).

2.2. Formulation mathématique

Dans la suite, on suppose que les fonctions $\lambda(r)$, $\mu(r)$, et $\rho(r)$ appartiennent à $L^\infty(\mathbf{R}^+)$ et vérifient les propriétés suivantes :

(i) Il existe $R > 0$ tel que : $(\lambda, \mu, \rho) = (\lambda_\infty, \rho_\infty, \mu_\infty)$ si $r > R$.

(ii) $0 < \rho_- \leq \rho_+$; $0 < \lambda_- \leq \lambda_+$; $0 < \mu_- \leq \mu_+$ où, pour

$f \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$, on a noté $f_+ = \operatorname{ess\,sup}_{r \in \mathbf{R}^+} f(r)$ et $f_- = \operatorname{ess\,inf}_{r \in \mathbf{R}^+} f(r)$.

Nous définissons $v_s = \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $v_p = \left(\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$ les vitesses respectives des ondes S et des ondes P du milieu extérieur $\{r \geq R\}$.

Considérons l'espace de Hilbert réel défini par :

$$H = \left\{ u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+) ; \sqrt{ru} \in L^2(\mathbf{R}^+) \right\},$$

muni du produit scalaire $(u, v) = \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 u_j v_j \rho r dr$. On note par $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ la norme associée.

Introduisons la suite d'espaces fonctionnels V_n , $n \in \mathbf{N}$, définie par :

$$V_1 = \left\{ u \in H ; \frac{du}{dr} \in H ; \frac{1}{\sqrt{r}}(u_1 + u_2, u_3) \in L^2(\mathbf{R}^+) \right\}$$

$$V_n = \left\{ u \in H ; \frac{du}{dr} \in H ; \frac{1}{\sqrt{r}}(u_1, u_2, nu_3) \in L^2(\mathbf{R}^+) \right\}, \quad n \neq 1,$$

et munis des normes (naturelles) suivantes :

$$\|u\|_{V_1}^2 = \int_0^\infty \left[|u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \left(\frac{u_1 + u_2}{r} \right)^2 + \left(\frac{u_3}{r} \right)^2 \right] r dr,$$

$$\|u\|_{V_n}^2 = \int_0^\infty \left(|u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + n^2 \left(\frac{u_3}{r} \right)^2 \right) r dr \quad \text{si } n \neq 1.$$

V_n est un espace de Hilbert pour tout n . $D(\mathbf{R}^+)^3$ est dense dans V_n (cf. [9]).

On définit sur V_n la forme bilinéaire symétrique $a_n(\beta; \dots)$ suivante :

$$(2.8) \quad a_n(\beta; u, v) = \int_0^\infty \left(B \frac{du}{dr} \cdot \frac{dv}{dr} + B_1 \frac{du}{dr} \cdot v + B_2 u \cdot \frac{dv}{dr} + B_3 u \cdot v \right) dr \quad \forall u, v \in V_n.$$

Formellement $a_n(\beta; \dots)$ est associée à l'opérateur différentiel $\mathcal{A}_n(\beta)$ défini au sens des distributions par :

$$(2.9) \quad \mathcal{A}_n(\beta) u = \frac{1}{\rho r} \left[-\frac{d}{dr} \left(B \frac{du}{dr} + B_2 u \right) + B_1 \frac{du}{dr} + B_3 u \right]$$

c'est-à-dire :

$$a_n(\beta; u, v) = (\mathcal{A}_n(\beta) u, v).$$

Afin de donner un sens précis au problème $\tilde{P}_n(\beta)$, on introduit l'opérateur non borné $A_n(\beta)$ défini dans H par :

$$(2.10) \quad \begin{cases} D(A_n(\beta)) = \{u \in V_n; \mathcal{A}_n(\beta) u \in H\} \\ A_n(\beta) u = \mathcal{A}_n(\beta) u \quad \text{si } u \in D(A_n(\beta)) \end{cases}$$

et on pose le problème spectral :

$$(\mathcal{P}_n(\beta)) \quad \begin{cases} \text{trouver } \omega \in \mathbf{R} \text{ et } u \in D(A_n(\beta)), u \neq 0, \text{ tels que :} \\ A_n(\beta) u = \omega^2 u \end{cases}$$

On vérifiera dans la Section 2.3 que :

- (i) $a_n(\beta; u, v) = (A_n(\beta) u, v), \quad \forall u, v \in D(A_n(\beta)) \times V_n,$
- (ii) $a_n(\beta; u, v)$ est coercive.

On en déduira à l'aide du théorème de Lax-Milgram que l'opérateur $A_n(\beta)$ est autoadjoint ; de plus le problème spectral $\mathcal{P}_n(\beta)$ est équivalent à la formulation variationnelle :

$$(\mathcal{P}_n(\beta)) \quad \begin{cases} \text{trouver } \omega \in \mathbf{R} \text{ et } u \in V_n, u \neq 0, \text{ tels que :} \\ a_n(\beta; u, v) = \omega^2(u, v); \quad \forall v \in V_n \end{cases}$$

Nous verrons que la résolvante de l'opérateur $A_n(\beta)$ n'est pas compacte. Par suite la question de l'existence de valeurs propres pour $A_n(\beta)$ n'est pas évidente. L'étude du spectre de l'opérateur $A_n(\beta)$ sera ramenée à l'étude de la forme bilinéaire $a_n(\beta; u, v)$.

2.3. Propriétés de la forme bilinéaire $a_n(\beta; u, v)$

PROPOSITION 2.2 : On a :

$$(2.11) \quad (\mathcal{A}_n(\beta) u, v) = a_n(\beta; u, v) \quad \forall (u, v) \in D(A_n(\beta)) \times V_n.$$

Preuve : Elle découle de la densité de l'espace des fonctions test $D(\mathbf{R}^+)^3$ dans V_n et d'une intégration par parties.

PROPOSITION 2.3 : Pour tout $\beta \in \mathbf{R}^+$ et pour tout $u \in V_n$ on a :

$$(2.12) \quad a_n(\beta; u, u) \geq$$

$$\geq \mu_- \int_0^\infty \left[\beta^2 |u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{(n-1)^2}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} \right] r dr \quad (n \neq 1)$$

$$(2.13) \quad a_1(\beta; u, u) \geq \mu_- \int_0^\infty \left[\beta^2 |u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{2}{r^2} (u_1 + u_2)^2 + \frac{u_3^2}{r^2} \right] r dr.$$

Preuve : En développant l'expression de $a_n(\beta; u, u)$ dans la formule (2.8) on aboutit à la forme :

$$(2.14) \quad a_n(\beta; u, u) = \int_0^\infty \lambda |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr + \int_0^\infty \mu \varepsilon_n(\beta; u) dr$$

où $\varepsilon_n(\beta; u)$ est donné par l'expression :

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \varepsilon_n(\beta; u) = & \beta^2 |u|^2 r + r \left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + r \left| \frac{du}{dr} \right|^2 \\ & + \frac{1}{r} ((n^2 + 2) u_1^2 + (2n^2 + 1) u_2^2 + n^2 u_3^2 + 6nu_1 u_2) \\ & - 2n\beta u_2 u_3 \\ & + 2 \left(\beta u_1 r \frac{du_3}{dr} - (nu_1 + u_2) \frac{du_2}{dr} \right) \end{aligned}$$

et

$$\operatorname{div}^\beta u = \frac{du_1}{dr} + \frac{u_1 + nu_2}{r} - \beta u_3.$$

On vérifie que $\varepsilon(\beta, u) \geq 0$ et par suite :

$$(2.16) \quad a_n(\beta; u, u) \geq \mu_- \int_0^\infty \varepsilon_n(\beta; u) dr.$$

En intégrant par parties et en utilisant le comportement de u , qui appartient à V_n , aux bornes de l'intervalle $]0, +\infty[$ on établit l'égalité :

$$(2.17) \quad \int_0^\infty \varepsilon(\beta, u) dr = \int_0^\infty \left[\beta^2 |u|^2 + |\operatorname{div}^\beta(u)|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{(n^2 + 1)}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} + \frac{4 nu_1 u_2}{r^2} \right] r dr.$$

Pour avoir le résultat, il suffit de remarquer que :

$$(n^2 + 1) (u_1^2 + u_2^2) + 4 nu_1 u_2 \geq \begin{cases} (n - 1)^2 (u_1^2 + u_2^2) & \text{si } n \geq 2 \\ 2(u_1 + u_2)^2 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

□

COROLLAIRE 2.4 : La forme bilinéaire $a_n(\beta; u, v)$ est coercive sur V_n et on a :

$$(2.18) \quad a_n(\beta, u, u) \geq \left(\frac{1}{5} \mu_- \right) \min(1, \beta^2) \|u\|_{V_n}^2 \quad \forall u \in V_n.$$

PROPOSITION 2.5 : Pour tout $\beta \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a la décomposition :

$$(2.19) \quad a_n(\beta; u, u) = \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \|u\|^2 + b_n(\beta; u, u) + p(\beta; u, u)$$

où on a posé :

$$(2.20) \quad b_n(\beta; u, u) = \int_0^\infty (\lambda + \mu) |\operatorname{div}^\beta u|^2 r \, dr + \int_0^\infty \mu \left[\left(\frac{du_1}{dr} - \frac{u_1 + nu_2}{r} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 + \left| \frac{du_3}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} \right] r \, dr$$

(2.21)

$$p(\beta; u, u) = \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) |u|^2 r \rho \, dr + 2\beta \int_0^\infty (\mu - \mu_\infty) \frac{d}{dr} (ru_1 u_3) \, dr.$$

Preuve : On obtient (2.19) grâce à des calculs algébriques effectués sur l'expression de $a_n(\beta; u, u)$ fournie par les formules (2.14) et (2.15) en tenant compte des identités suivantes :

$$1. \int_0^\infty \mu |u|^2 r \, dr = \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) |u|^2 r \rho \, dr + \|u\|^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$$

$$2. \begin{cases} \int_0^\infty (\mu - \mu_\infty) \frac{d}{dr} (ru_1 u_3) \, dr = \int_0^\infty \mu \frac{d}{dr} (ru_1 u_3) \, dr - \mu_\infty [ru_1 u_3]_0^\infty \\ = \int_0^\infty \mu \left(u_1 u_3 + ru_1 \frac{du_3}{dr} + ru_3 \frac{du_1}{dr} \right) \, dr. \end{cases}$$

□

La forme $p(\beta; u, v)$ vérifie la propriété de compacité suivante :

LEMME 2.6 : *Pour toute suite (u^p) convergeant faiblement dans V_n vers u , nous avons :*

$$(2.22) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p(\beta; u^p, u^p) = p(\beta; u, u).$$

Preuve : Considérons les espaces de Hilbert suivants :

$$V = \left\{ \sqrt{r}u \in L^2(\mathbf{R}^+), \sqrt{r}u' \in L^2(\mathbf{R}^+) \right\}$$

et

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in V, \frac{u}{\sqrt{r}} \in L^2(\mathbf{R}^+) \right\}.$$

On sait d'après [9] qu'on a les injections

$$\mathcal{V} \subset V \subset L^2(\mathbf{R}^+)$$

où la première est continue et la seconde est compacte.

Comme la suite (u^p) est bornée dans V_n et que ses composantes appartiennent à l'un de ces espaces on peut affirmer que (u^p) converge fortement (vers u) dans $L^2(0, R)^3$.

Par ailleurs, comme $p(\beta; u, u)$ ne fait intervenir que des intégrales sur $[0, R]$ $\left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} = 0 \text{ pour } r \geq R \right)$, on a alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p(\beta; u^p, u^p) = p(\beta; u, u)$$

d'où le résultat.

3. CARACTÉRISATION DU SPECTRE DE L'OPÉRATEUR $A_n(\beta)$

Les inégalités (2.12) et (2.13) montrent que le spectre de $A_n(\beta)$, noté $\sigma(\beta)$ est inclus dans l'intervalle $\left[\beta^2 \frac{\mu_-}{\rho_+}, +\infty \right[$

3.1. Le spectre essentiel de $A_n(\beta)$

Rappelons la définition

DÉFINITION 3.1 : On appelle spectre discret, noté $\sigma_d(\beta)$, de l'opérateur $A_n(\beta)$ l'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie qui sont isolées dans le spectre $\sigma(\beta)$. Le spectre essentiel, noté $\sigma_{ess}(\beta)$, est le complémentaire de $\sigma_d(\beta)$ dans $\sigma(\beta)$.

Nous avons la caractérisation suivante du spectre essentiel (cf. [20]) : Un nombre σ appartient à $\sigma_{ess}(\beta)$ si et seulement s'il existe une suite (u^p) dans $D(A_n(\beta))$ telle que :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \|u^p\| = 1 \\ u^p \rightarrow 0 \text{ dans } H \text{ (faiblement)} \\ A_n(\beta) u^p - \sigma u^p \rightarrow 0 \text{ dans } H \text{ (fortement)}. \end{cases}$$

Une suite (u^p) vérifiant (3.1) est dite *singulière*.

THÉORÈME 3.2 : Pour tout $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, le spectre essentiel de $A_n(\beta)$ est indépendant de n et vérifie :

$$\sigma_{ess}(\beta) = \left[\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, +\infty \right[.$$

Preuve :

$$(i) \quad \sigma_{ess}(\beta) \subset \left[\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, +\infty \right[$$

Soient $\sigma \in \sigma_{ess}(\beta)$ et (u^p) une suite singulière. Le résultat de coercivité (2.18) montre que la suite (u^p) est bornée dans V_n . La compacité de $p(\beta; \cdot, \cdot)$ (voir Lemme 2.6) implique :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p(\beta; u^p, u^p) = 0 .$$

D'après la décomposition (2.19) on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{p \rightarrow \infty} ((A_n(\beta) - \sigma) u^p, u^p) \\ (3.2) \quad &= \lim_{p \rightarrow \infty} a_n(\beta; u^p, u^p) - \sigma \\ &= \left(\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \sigma \right) + \lim_{p \rightarrow \infty} b_n(\beta; u^p, u^p) . \end{aligned}$$

Comme $b_n(\beta; u^p, u^p) \geq 0$, on déduit que $\sigma \geq \beta^2 \mu_\infty / \rho_\infty$.

$$(ii) \quad \sigma_{ess}(\beta) \supset \left[\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, +\infty \right[,$$

On associe à σ appartenant à $\left[\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, +\infty \right[$, une suite singulière $(u^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$. Pour cela, on désigne par $A_n^\infty(\beta)$ l'opérateur qui correspond à $A_n(\beta)$ avec les coefficients constants $\rho = \rho_\infty$, $\lambda = \lambda_\infty$ et $\mu = \mu_\infty$.

Nous avons (cf. [12], p. 776) :

$$A_n^\infty(\beta) u^\sigma = \sigma u^\sigma$$

où

$$u^\sigma = \left(\frac{n}{r} J_n(k_2 r), -k_2 J_{n-1}(k_2 r) + \frac{n}{r} J_n(k_2 r), 0 \right)$$

avec $k_2 = \left(\frac{\sigma}{v_s^2} - \beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et $v_s^2 = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$. J_n désigne la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n .

u^σ n'appartient pas à $D(A_n(\beta))$. Pour cette raison on introduit une fonction de troncature φ_p qui a les propriétés suivantes :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \varphi_p(r) = \varphi\left(\frac{r}{p}\right) \\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+) ; \quad \varphi(r) = 0 \text{ si } r < R \\ \int_0^\infty |\varphi|^2 dr = 1 . \end{cases}$$

Nous définissons la suite (u^p) de la manière suivante :

$$u^p(r) = \frac{1}{\sqrt{p}} \varphi_p(r) u^\sigma(r) .$$

Il est facile de vérifier que (u^p) satisfait :

- $\|A_n(\beta) u^p - \sigma u^p\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$, quand $p \rightarrow \infty$,
- il existe $\alpha > 0$ et $p_0 \in \mathbf{N}$ tel que : $\|u^p\| \geq \alpha, \forall p \geq p_0$ (on peut donc normaliser u^p),
- $u^p \rightarrow 0$ (faiblement) dans H .

Ce qui prouve que la suite (u^p) est singulière. □

3.2. Majoration des valeurs propres

Nous allons montrer que le spectre essentiel $\sigma_{ess}(\beta)$ ne contient pas de valeurs propres strictement supérieures à $\beta^2 v_p^2$.

LEMME 3.3 : *Toute fonction propre u de l'opérateur $A_n(\beta)$ associée à une valeur propre ω^2 telle que $\omega^2 > \beta^2 v_p^2$ vérifie :*

$$u(r) = 0, \quad \forall r \geq R .$$

Preuve : Si $r \geq R$ le système $A_n(\beta) u = \omega^2 u$ est à coefficients constants. Il admet une solution analytique qui s'écrit ([12], p. 776) :

$$u(r) = A\chi_1(r) + B\chi_2(r) + C\chi_2(r), \quad r > R \quad ((A, B, C) \text{ constantes réelles})$$

où

$$\begin{aligned}\chi_1(r) &= \left(k_1 \frac{dR_n}{dr}(k_1 r), -\frac{n}{r} R_n(k_1 r), \beta R_n(k_1 r) \right) \\ \chi_2(r) &= \left(\frac{n}{r} R_n(k_2 r), -k_2 \frac{dR_n}{dr}(k_2 r), 0 \right) \\ \chi_3(r) &= \left(-\beta k_2 \frac{dR_n}{dr}(k_2 r), \beta \frac{n}{r} R_n(k_2 r), -k_2^2 R_n(k_2 r) \right)\end{aligned}$$

avec

$$R_n(r) = C_1 J_n(r) + C_2 Y_n(r), \quad k_1 = \left(\frac{\omega^2}{v_p^2} - \beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } k_2 = \left(\frac{\omega^2}{v_s^2} - \beta^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme la fonction $\sqrt{r}R_n(kr)$ n'appartient pas à $L^2(R, +\infty)$, u appartient à H si et seulement si $A = B = C = 0$.

PROPOSITION 3.4 : *Pour tout β et tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres ω^2 de l'opérateur $A_n(\beta)$ vérifient :*

$$\omega^2 \leq \beta^2 v_p^2.$$

Preuve : Supposons qu'il existe $\omega > \beta v_p$ et $u \in V_n$ tels que :

$$A_n(\beta) u = \omega^2 u.$$

D'après le lemme 3.3

$$u(r) = 0 \quad \text{pour } r > R.$$

Montrons que :

$$u(r) = 0 \quad \text{pour } 0 < r < R.$$

Nous avons à résoudre le système :

$$(P_n) \quad \begin{cases} -\frac{d}{dr} \left(B \frac{du}{dr} \right) + B_1 \frac{du}{dr} - \frac{d}{dr} (B_2 u) + B_3 u = \omega^2 \rho u, & 0 < r < R \\ u(R) = \frac{du}{dr}(R) = 0 & (u \in H_{loc}^2(]0, R])^3. \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{cases} v = u \\ w = -B \frac{du}{dr} - B_2 u \end{cases}$$

alors

$$\frac{dv}{dr} = -B^{-1} w - B^{-1} B_2 v$$

et

$$v(R) = w(R) = 0.$$

A l'aide du changement de fonction inconnue $z = (v, w)$, le système (P_n) est équivalent au problème de Cauchy :

$$(C_n) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dr} = M(r) z, & 0 < r < R \\ z(R) = 0 \end{cases}$$

où

$$M(r) = \begin{pmatrix} -B^{-1} B_2 & -B^{-1} \\ B_1 B^{-1} B_2 + \bar{B}_3 & B_1 B^{-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\bar{B}_3 = -B_3 + \omega^2 \rho r l \quad \text{et } l \text{ désignant la matrice identité.}$$

Comme la fonction :

$$r \rightarrow \|M(r)\|$$

est mesurable et bornée sur chaque intervalle du type $]\epsilon, R]$, $\epsilon > 0$, le problème (C_n) possède l'unique solution $z = 0$ sur l'intervalle $]0, R[$ (cf. [8], p. 37, problème 2). Ce qui établit la proposition. \square

Remarque 3.5 : La question concernant l'existence des valeurs propres dans l'intervalle $]\beta^2 v_s^2, \beta^2 v_p^2[$ a été étudiée dans [15] et [16]. Dans ces travaux on donne, en particulier, un exemple de profil pour lequel il existe de telles valeurs propres.

4. LE SPECTRE DISCRET DE L'OPÉRATEUR $A_n(\beta)$. EXISTENCE DES MODES GUIDÉS

Dans cette section on étudie les valeurs propres qui appartiennent au spectre discret de $A_n(\beta)$. On les caractérise à l'aide du principe du Min-Max (cf. [19], [4]).

DÉFINITION 4.1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, notons par $S_m^n(\beta)$ le nombre réel défini par :

$$(4.1) \quad S_m^n(\beta) = \sup_{(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}) \in H} \left(\inf_{\substack{v \in [v_1, v_2, \dots, v_{m-1}]^\perp \\ v \neq 0}} \frac{a_n(\beta; v, v)}{\|v\|^2} \right)$$

où

$$[v_1, v_2, \dots, v_{m-1}]^\perp = \{v \in V_n; (v, v_j) = 0, 1 \leq j \leq m-1\}.$$

Une caractérisation équivalente des nombres $S_m^n(\beta)$ est fournie par :

$$(4.2) \quad S_m^n(\beta) = \inf_{V \in F_m} \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{a_n(\beta; v, v)}{\|v\|^2}$$

où F_m désigne la famille des sous-espaces de V_n de dimension m .

Désignons par $N_n(\beta)$ le nombre de valeurs propres de l'opérateur $A_n(\beta)$, strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$, comptées avec leur ordre de multiplicité.

Le théorème 3.2 et le principe du Min-Max nous permettent d'énoncer :

PROPOSITION 4.2 :

- $S_1^n(\beta) \leq S_2^n(\beta) \leq \dots \leq S_m^n(\beta) \leq \beta^2 v_s^2$,
- $S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2 \Leftrightarrow N_n(\beta) \geq m$ et dans ce cas, $S_1^n(\beta), \dots, S_m^n(\beta)$ sont exactement les m premières valeurs propres l'opérateur $A_n(\beta)$,
- $S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2 \Leftrightarrow N_n(\beta) < m$ et $S_k^n(\beta) = \beta^2 v_s^2, \quad \forall k \geq m$.

4.1. Existence des modes guidés

Dans ce paragraphe, nous retrouvons certains résultats déjà obtenus dans ([2], Section 3), aussi nous ne détaillons pas certaines démonstrations.

Le théorème 4.3 donne une condition suffisante d'existence du mode fondamental lorsque le nombre d'onde β est voisin de 0 (à basse fréquence).

THÉORÈME 4.3 : Si la condition suivante est vérifiée :

$$(4.3) \quad \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) \rho r \, dr > 0$$

alors

$$S_1^1(\beta) < \beta^2 v_s^2, \quad \forall \beta > 0.$$

Ainsi, pour tout $\beta > 0$, le problème $P_1(\beta)$ admet au moins une solution.

Preuve : Par définition de $S_1^1(\beta)$, il suffit de trouver $\tilde{u} \in V_1$ tel que :

$$a_1(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) < \beta^2 v_s^2 \|\tilde{u}\|^2.$$

Étant donné $a > R$, on définit $\phi_a(r)$ par :

$$\phi_a(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ \frac{\text{Log}(ar)}{\text{Log}(aR)} & \text{si } R \leq r \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq r. \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que :

$$\sqrt{r}\phi_a \in L^2(\mathbf{R}^+) ; \quad \sqrt{r} \frac{d\phi_a}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+) \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left| \frac{d\phi_a}{dr} \right|^2 r dr = 0.$$

En posant $\tilde{u} = (\phi_a, -\phi_a, 0)$, alors $\tilde{u} \in V_1$ et la décomposition (2.19) s'écrit pour $n = 1$:

$$a_1(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) - \beta^2 v_s^2 \|\tilde{u}\|^2 = b_1(\beta, \tilde{u}, \tilde{u})$$

avec

$$b_1(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) = \int_0^\infty (\lambda + 3\mu) \left| \frac{d\phi_a}{dr} \right|^2 r dr - 2\beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) \rho |\phi_a|^2 r dr$$

d'où l'inégalité :

$$\begin{aligned} a_1(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) - \beta^2 v_s^2 \|\tilde{u}\|^2 &\leq \\ &\leq (\lambda_+ + 3\mu_+) \int_0^\infty \left| \frac{d\phi_a}{dr} \right|^2 r dr - 2\beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) \rho r dr. \end{aligned}$$

Nous pouvons affirmer, sous l'hypothèse (4.3), qu'avec a assez grand, on a :

$$S_1^1(\beta) < \beta^2 v_s^2$$

d'où le résultat. □

Remarque 4.4 : En tenant compte de la remarque 2.1 il existe, pour tout $\beta > 0$, au moins deux modes (i.e. un mode double) qui se propagent dans le milieu considéré. Ce résultat est plus précis que le théorème 3.12 de ([2]) puisqu'il montre qu'il s'agit d'un mode d'ordre $n = 1$ (i.e. mode en $e^{i\theta}$).

Le théorème 4.5 montre que si la vitesse des ondes S du milieu intérieur est plus petite que celle du milieu extérieur sur un intervalle, de longueur arbitrairement petite, alors il y a propagation d'ondes guidées pour les grandes valeurs de β (i.e. à haute fréquence).

THÉORÈME 4.5 : *S'il existe un intervalle ouvert $]r_0, r_1[\subset 0, R[$ et un nombre $\delta > 0$ tels que :*

$$(4.4) \quad \frac{\mu(r)}{\rho(r)} + \delta \leq \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \quad \text{pour presque tout } r, \quad r \in]r_0, r_1[$$

alors pour tout (m, n) , il existe un réel $\beta_m(n)$ tel que :

$$(4.5) \quad S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2 \quad \forall \beta > \beta_m(n)$$

ce qui prouve que $A_n(\beta)$ admet au moins m valeurs propres $S_1^n(\beta)$, $S_2^n(\beta)$, ..., $S_m^n(\beta)$ strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$ pour $\beta > \beta_m(n)$.

Preuve : La démonstration est analogue à celle du théorème 4.3. Pour tout m , on construit une sous-variété linéaire $V \subset V_n$ de dimension m qui vérifie

$$a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \leq 3(\lambda_+ + 2\mu_+) \lambda_{n,m} - \beta^2 \delta \|u\|^2 \quad \forall u \in V$$

où $\lambda_{n,m}$ est la m ème valeur propre de l'opérateur de Bessel d'ordre $(n+1)$ sur l'intervalle $]r_0, r_1[$ avec la condition de Dirichlet.

Du principe du Min-Max découle l'inégalité :

$$S_m^n(\beta) - \beta^2 v_s^2 \leq 3(\lambda_+ + 2\mu_+) \lambda_{n,m} - \beta^2 \delta$$

et nous pouvons conclure en choisissant :

$$\beta_m(n) \geq \left[\frac{3(\lambda_+ + 2\mu_+) \lambda_{n,m}}{\delta} \right]^{1/2}$$

□

4.2. Étude des seuils

Le résultat d'existence (Théorème 4.5) nous permet de définir les nombres

$$\begin{cases} \beta_m^0(n) = \sup \{ \beta_m; \forall \beta \leq \beta_m, S_m^n(\beta) = \beta^2 v_s^2 \} \\ \beta_m^*(n) = \inf \{ \beta_m; \forall \beta > \beta_m, S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2 \} \end{cases}$$

On appelle $\beta_m^0(n)$ (resp. $(\beta_m^*(n))$) le m ème seuil inférieur (resp. supérieur), qui correspond aux fréquences de coupures.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ fixé, on a les propriétés suivantes :

1. Si $\beta > \beta_m^*(n)$, $A_n(\beta)$ admet au moins m valeurs propres $\omega_1^2 = S_1^n(\beta)$, ..., $\omega_m^2 = S_m^n(\beta)$ strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$.

2. Si $\beta \leq \beta_m^0(n)$, $A_n(\beta)$ admet au plus $(m - 1)$ valeurs propres $\omega_1^2 = S_1^n(\beta), \dots, \omega_{m-1}^2 = S_{m-1}^n(\beta)$ strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$.

4.2.1. Estimations a priori sur les seuils

THÉORÈME 4.6 : Si la condition (4.4) est vérifiée, il existe une constante C (indépendante de m) telle que :

$$(4.6) \quad \beta_{3m-2}^0(n) \geq C \mu_{n,m}^{1/2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

où $(\mu_{n,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des valeurs propres de l'équation de Bessel d'ordre $|n - 1|$ sur l'intervalle $]0, R[$ avec la condition limite $\frac{dv}{dr}(R) = 0$.

Preuve : A partir de la décomposition (2.19), on est capable de trouver deux constantes positives C_1 et C_2 telles que (cf. [7]) :

$$(4.7) \quad a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq C_1 \int_0^R \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \epsilon_n (n - 1)^2 \frac{|u|^2}{r^2} \right) r dr - C_2 \beta^2 \int_0^R |u|^2 r dr$$

avec

$$\epsilon_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0; \\ 1, & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

1. Considérons d'abord le cas $n \geq 2$. Soient $(\mu_{nm})_{m \in \mathbb{N}^*}$ la suite des valeurs propres de l'équation de Bessel d'ordre $(n - 1)$ sur l'intervalle $]0, R[$ avec la condition $\frac{dw}{dr}(R) = 0$; et $(w_{nm})_{m \in \mathbb{N}^*}$ les fonctions propres normalisées associées.

On sait d'après le principe du Min-Max que :

$$\int_0^R \left(\left| \frac{dv}{dr} \right|^2 + (n - 1)^2 \frac{|v|^2}{r^2} \right) r dr \geq \mu_{nm} \int_0^R |v|^2 r dr,$$

$$\forall v \in [w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nm}]^\perp$$

où

$$[w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nm}]^\perp = \left\{ v \in W_R; \int_0^R v w_j r dr = 0, 1 \leq j \leq m \right\}$$

avec

$$W_R = \left\{ v \in L^2(0, R) ; \int_0^R \left(\left| \frac{dv}{dr} \right|^2 + \frac{|v|^2}{r^2} \right) r dr < \infty \right\} .$$

Maintenant, on définit $3(m-1)$ éléments de H par :

$$\begin{cases} v_j^{(1)} = (\tilde{w}_{nj}, 0, 0) \\ v_j^{(2)} = (0, \tilde{w}_{nj}, 0) \\ v_j^{(3)} = (0, 0, \tilde{w}_{nj}) \end{cases}$$

où

$$\tilde{w}_{nj} = \begin{cases} w_{nj} & \text{si } r \in]0, R[\\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

V_{3m-3} désignant le sous-espace de dimension $(3m-3)$ engendré par ces éléments, notons que si $u \in V_{3m-3}^\perp$ on a :

$$u_{i|]0, R[} \in [w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nm}]^\perp$$

ainsi que

$$a_n(\beta ; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq (C_1 \mu_{nm} - C_2 \beta^2) \int_0^R |u|^2 r dr, \quad \forall u \in V_{3m-3}^\perp .$$

Jointe à (4.1) cette estimation implique l'inégalité :

$$S_{3m-2}^n(\beta) \geq \beta^2 v_s^2, \quad \forall \beta \leq \left(\frac{C_1}{C_2} \mu_{nm} \right)^{1/2}$$

En tenant compte de la proposition 4.2, on obtient l'identité :

$$S_{3m-2}^n(\beta) = \beta^2 v_s^2, \quad \forall \beta \leq \left(\frac{C_1}{C_2} \mu_{nm} \right)^{1/2}$$

ce qui prouve le théorème pour $n \geq 2$.

2. Les cas $n=0$ et $n=1$ s'obtiennent de la même manière : il suffit de choisir comme suite $(w_{nm})_m$ le système trigonométrique $\left\{ \cos(m-1)\pi \frac{r}{R} ; m \in \mathbf{N}^* \right\}$. \square

COROLLAIRE 4.7 : Si la condition (4.4) est vérifiée, il existe deux constantes $C_1(n)$ et $C_2(n)$ telles que, pour m assez grand :

$$(4.8) \quad C_1(n) m \leq \beta_m^0(n) \leq \beta_m^*(n) \leq C_2(n) m .$$

Preuve : Au cours de la démonstration des théorèmes 4.5 et 4.6 nous avons établi l'existence de deux constantes C_1 et C_2 (qui dépendent seulement de (λ, μ, ρ)) telles que :

$$C_1 \mu_{nm}^{1/2} \leq \beta_m^0(n) \leq \beta_m^*(n) \leq C_2 \lambda_{nm}^{1/2}$$

où (μ_{nm}) (resp. (λ_{nm})) sont les valeurs propres de l'opérateur de Bessel avec la condition de Neumann (resp. de Dirichlet). Ainsi le corollaire découle des formules asymptotiques ([3]) :

$$\lambda_{nm} \approx \left(\frac{m\pi}{r_1 - r_0} \right)^2, \quad \mu_{nm} \approx \left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 \quad (m \rightarrow \infty) .$$

PROPOSITION 4.8 : Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $n \geq 2$, on ait : □

$$(4.9) \quad \beta_1^0(n) \geq \eta(n - 1) .$$

Preuve : D'après l'inégalité (4.7) il existe des constantes C_1 et C_2 telles que :

$$a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq C_1(n - 1)^2 \int_0^R \frac{|u|^2}{r} dr - C_2 \beta^2 \int_0^R |u|^2 r dr .$$

L'inégalité

$$\int_0^R |u|^2 r dr \leq R^2 \int_0^R \frac{|u|^2}{r} dr$$

implique alors l'estimation suivante :

$$a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq \left(\frac{C_1(n - 1)^2}{R^2} - C_2 \beta^2 \right) \int_0^R |u|^2 r dr .$$

Le terme de droite est positif si $\beta \leq \frac{n-1}{R} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$, ce qui montre que :

$$\beta_1^0(n) \geq \eta(n - 1) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} .$$

□

Remarque 4.9 : L'estimation (4.9) est un résultat nouveau qui complète les résultats déjà obtenus dans ([2]) sur l'estimation des seuils d'apparition.

Rappelons que $N_n(\beta)$ est le nombre de valeurs propres de $A_n(\beta)$ inférieures à $\beta^2 v_s^2$. Alors le nombre total des modes guidés pouvant se propager dans le milieu avec une vitesse inférieure à v_s est égal à $N(\beta) = N_0(\beta) + 2 \sum_{n \geq 1} N_n(\beta)$ (car d'après la remarque 2.1, si $n \geq 1$, chaque valeur propre $\omega^2 = S_m^n(\beta)$ est au moins double).

PROPOSITION 4.10 : *Pour tout $\beta > 0$, le nombre $N(\beta)$ est fini.*

Preuve : 1) $N_n(\beta)$ est fini. Dans le cas contraire on aurait :

$$\beta_m^0(n) < \beta \quad \forall m \in \mathbf{N}^*$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (4.8) lorsque $m \rightarrow \infty$.

2) $N_n(\beta) = 0$ si n est assez grand : en effet, si $n > 1 + \beta/\eta$, alors on a, d'après (4.9) :

$$\beta < \beta_1^0(n)$$

ce qui signifie, par définition de $\beta_1^0(n)$, que :

$$N_n(\beta) = 0 \quad \text{si} \quad n > 1 + \frac{\beta}{\eta}.$$

La proposition est une conséquence de 1 et 2. □

THÉORÈME 4.11 : *On a :*

(i) $\beta_1^0(0) > 0$

(ii) $\beta_2^0(1) > 0$

Ceci implique que, pour β assez petit, il se propage au plus deux modes guidés.

Preuve : On va utiliser ici la technique développée dans ([2], Théorème 3.11) pour démontrer (ii) (le cas (i), est plus facile).

En utilisant (2.19), il est facile de montrer l'inégalité

$$\begin{aligned}
 a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \lambda_- \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta u|^2 r \, dr \\
 &+ \mu_- \int_0^\infty \left[\left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \left(\frac{u_1 + u_2}{r} \right)^2 + \frac{u_3^2}{r^2} \right] r \, dr \\
 (4.10) \quad &+ 2\beta \int_0^\infty (\mu - \mu_\infty) \left(u_3 \frac{du_1}{dr} + u_1 \frac{du_3}{dr} + \frac{u_1 u_3}{r} \right) r \, dr \\
 &- \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) \rho |u|^2 r \, dr.
 \end{aligned}$$

Soient $\epsilon > 0$, $\alpha > 0$, $0 < \eta < 1/2$ et $R' \geq R$. On a :

$$\begin{aligned}
 \lambda_- \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta u|^2 r \, dr &\geq \\
 &\geq \epsilon \lambda_- \left[\beta^2 (1 - 2\eta) \int_0^{R'} u_3^2 r \, dr - \frac{1}{\eta} \int_0^{R'} \left(\left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \frac{(u_1 + u_2)^2}{r^2} \right) r \, dr \right], \\
 2\beta |\mu - \mu_\infty| \left| u_3 \frac{du_1}{dr} + u_1 \frac{du_3}{dr} + \frac{u_1 u_3}{r} \right| &\leq \\
 &\leq |\mu - \mu_\infty|^2 \frac{\beta^2}{\alpha} (2u_1^2 + u_3^2) + \alpha \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{u_3^2}{r^2} \right).
 \end{aligned}$$

En joignant ces inégalités à (4.10), et après quelques transformations, on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \left(\mu_- - \alpha - \epsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) \int_0^{R'} \left| \frac{du}{dr} \right|^2 r \, dr \\
 (4.11) \quad &+ \beta^2 \int_0^{R'} (K_1 u_1^2 + K_2 u_2^2 + K_3 u_3^2) r \, dr \\
 &+ \left(\mu_- - \epsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) \int_0^\infty |u_1 + u_2|^2 \frac{dr}{r} \\
 &+ (\mu_- - \alpha) \int_0^{R'} u_3^2 \frac{dr}{r}
 \end{aligned}$$

où on a posé :

$$\begin{cases} K_1(r) = \rho \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) - \frac{2}{\alpha} |\mu - \mu_\infty|^2 \\ K_2(r) = \rho \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) \\ K_3(r) = \epsilon \lambda (1 - 2\mu) + \rho \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) - \frac{1}{\alpha} |\mu - \mu_\infty|^2. \end{cases}$$

Considérons la décomposition de u :

$$\begin{cases} u = u_p + u_p^\perp \\ u_p^\perp = \frac{1}{R'} \int_0^{R'} ur \, dr \end{cases}$$

u_p vérifie alors :

$$\int_0^{R'} u_p r \, dr = 0.$$

On peut montrer qu'il existe une constante $C(R') > 0$ telle que, si $u_p = (u_{1p}, u_{2p}, u_{3p})$, on a (cf. [6], annexe 3) :

$$(4.12) \quad \int_0^{R'} |u_{ip}|^2 r \, dr \leq C(R') \int_0^{R'} \left| \frac{du_{ip}}{dr} \right|^2 r \, dr \quad (i = 1, 2, 3).$$

On peut écrire :

$$(4.13) \quad \int_0^{R'} K_i(r) u_i^2 r \, dr = (u_{ip}^\perp)^2 \int_0^{R'} K_i(r) r \, dr + D_i$$

où D_i peut être estimé comme suit (γ quelconque) :

$$(4.14) \quad |D_i| \leq \|K_i\|_\infty \left[(u_{ip}^\perp)^2 \gamma \frac{R^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \int_0^{R'} |u_{ip}|^2 r \, dr \right].$$

En tenant compte simultanément des relations (4.10) à (4.14) on déduit, pour tout $u \in V_1$:

$$\begin{aligned}
 a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \\
 &\geq \left[C(R') \left(\mu_- - \alpha - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) K \right] \int_0^{R'} |u_p|^2 r \, dr \\
 (4.15) \quad &+ \beta^2 \sum_{i=1}^3 (u_{ip}^\perp)^2 \left(\int_0^{R'} K_i(r) r \, dr - \gamma K \frac{R^2}{2} \right) \\
 &+ \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) \int_0^\infty |u_1 + u_2|^2 \frac{dr}{r} + (\mu_- - \alpha) \int_0^{R'} u_3^2 \frac{dr}{r}
 \end{aligned}$$

avec

$$K = \max \{ \|K_i\|_\infty ; 1 \leq i \leq 3 \} .$$

On choisit α, ε, R' et γ de manière à avoir dans l'ordre :

$$(1) \quad \mu_- - \alpha > 0$$

$$(2) \quad \mu_- - \alpha - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} > 0$$

$$(3) \quad \int_0^{R'} K_3(r) r \, dr > 0$$

$$(4) \quad \int_0^{R'} K_3(r) r \, dr - \gamma K \frac{R^2}{2} > 0$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
 a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \\
 &\geq \left[C(R') \left(\mu_- - \alpha - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) K \right] \int_0^{R'} |u_p|^2 r \, dr \\
 (4.16) \quad &+ \beta^2 \sum_{i=1}^3 (u_{ip}^\perp)^2 \int_0^{R'} K_i(r) r \, dr - \gamma K \frac{R^2}{2} \\
 &+ \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) \int_0^\infty |u_1 + u_2|^2 \frac{dr}{r} .
 \end{aligned}$$

Montrons que le second membre est positif si β est voisin de 0. Soit $\delta \in]0, 1[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} |u_1 + u_2|^2 \frac{dr}{r} \geq \frac{1}{R^2} \int_0^{R'} |u_1 + u_2|^2 r dr$$

et

$$(u_1 + u_2) \geq 2(1 - \delta) (u_{1p}^\perp + u_{2p}^\perp)^2 + 2\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) (u_{1p}^2 + u_{2p}^2)$$

ce qui entraîne avec (4.16)

$$\begin{aligned} a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \\ &\geq \left[C(R') \left(\mu_- - \alpha - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) + \frac{2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) K \right] \\ (4.17) \quad &\times \int_0^{R'} |u_p|^2 r dr + \beta^2 \sum_{i=1}^2 (u_{ip}^\perp)^2 \int_0^{R'} K_i(r) r dr - \gamma K \frac{R^2}{2} \\ &+ 2(1 - \delta) \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) (u_{1p}^\perp + u_{2p}^\perp)^2 \quad \forall u \in V_1. \end{aligned}$$

On pose $v = (\chi, -\chi, 0)$ avec

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < r < R' \\ 0 & \text{si } r > R'. \end{cases}$$

Maintenant, si u appartient à V_1 et si u est aussi orthogonale à v on voit, d'une part que $u_{1p}^\perp = u_{2p}^\perp$, et d'autre part que

$$\begin{aligned} a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \\ &\geq \left[C(R') \left(\mu_- - \alpha - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) + \frac{2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) K \right] \\ (4.18) \quad &\times \int_0^{R'} |u_p|^2 r dr + \left[2(1 - \delta) \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) - \beta^2 K(1 + \gamma) R^2 \right] (u_{1p}^\perp)^2 \end{aligned}$$

Si on choisit δ proche de 1 de manière à avoir

$$C(R') \left(\mu_- - \alpha - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) + \frac{2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) > 0$$

puis β assez petit pour que

$$\left[2(1 - \delta) \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) - \beta^2 K(1 + \gamma) R^2 \right] > 0$$

et $C(R') \left(\mu_- - \alpha - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) + \frac{2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) K > 0$

on obtient

$$a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq 0 \quad \forall u \in [v_1]^\perp$$

ce qui entraîne

$$S_2^1(\beta) = \beta^2 v_s^2, \quad \text{pour } \beta \text{ petit}$$

et par suite

$$\beta_2^0(1) > 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème 4.10. □

THÉORÈME 4.12 : *Sous la condition :*

$$(4.19) \quad \int_0^R \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) \rho r \, dr > \frac{1}{\mu_-} \int_0^R |\mu - \mu_\infty|^2 r \, dr$$

le seuil $\beta_1^0(1)$ est strictement positif.

Preuve : On peut écrire l'inégalité (4.17) sous la forme suivante :

$$(4.20) \quad a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq \left[C(R') \left(\mu_- - \alpha - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) + \frac{2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) K \right] \int_0^{R'} |u_\rho|^2 r \, dr + \phi(u_{1\rho}^\perp, u_{\rho_2}^\perp)$$

où ϕ est la forme quadratique

$$\phi(x, y) = (\beta^2 a + c) x^2 + 2 cxy + (\beta^2 b + c) y^2$$

avec les notations suivantes :

$$a = \int_0^{R'} K_1(r) r dr - \gamma K \frac{R^2}{2},$$

$$b = \int_0^{R'} K_2(r) r dr - \gamma K \frac{R^2}{2} \quad \text{et} \quad c = 2(1 - \delta) \left(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} \right).$$

D'après la condition (4.19) il existe α , $\varepsilon < \alpha < \mu_-$, pour lequel on a :

$$\int_0^R (K_1 + K_2) r dr > 0$$

ce qui entraîne $a + b > 0$ pour γ suffisamment petit.

D'autre part nous avons :

- $\beta^2 b + c > 0$,
- $\Delta = \begin{vmatrix} \beta^2 a + c & c \\ c & \beta^2 b + c \end{vmatrix} = \beta^2 [c(a + b) + \beta^2 ab]$.

Comme $a + b > 0$, alors $\Delta > 0$ pour β suffisamment petit.

Nous venons de prouver que la forme ϕ est définie positive pour β voisin de 0. On peut donc rendre le second membre de l'inégalité (4.20) positif si γ et β sont assez petits, ce qui montre que $\beta_1^0(1) > 0$.

En regroupant les résultats obtenus jusqu'ici on conclut, sous l'hypothèse (4.19), que $\beta_1^0(n) > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ceci signifie que si β est suffisamment petit, il n'existe aucun mode guidé de vitesse strictement inférieure à v_s .

5. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES MODES GUIDÉS

L'objet de ce paragraphe est le comportement des modes guidés lorsque $\beta \rightarrow +\infty$ (ou, de manière équivalente, lorsque la fréquence $\omega \rightarrow +\infty$). Certains résultats que nous démontrons sont analogues à ceux obtenus dans ([5]) pour les équations de Maxwell.

5.1. Comportement de la vitesse de phase

Cherchons la limite de la vitesse de phase $v(\beta) = \frac{S_m^n(\beta)^{1/2}}{\beta}$ lorsque $\beta \rightarrow +\infty$.

PROPOSITION 5.1 : Pour tout couple $(n, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on a :

$$(5.1) \quad \limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{S_m^n(\beta)}{\beta^2} \leq (v_s^-)^2$$

où $(v_s^-)^2 = \inf_{0 \leq r \leq R} \left[\frac{\mu(r)}{\rho(r)} \right]$.

Preuve : Si $u = (u_1, 0, 0)$, on a :

$$(5.2) \quad a_n(\beta; u, u) - \beta^2 (v_s^-)^2 \|u\|^2 \leq 3(\lambda_+ + 2\mu_+) \int_0^\infty \left(\left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \frac{(n+1)^2}{r^2} u_1^2 \right) r dr + \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) u_1^2 \rho r dr.$$

En utilisant la notion d'ensemble de Lebesgue (cf. [14], définition 18.6 et théorème 18.5) on établit la propriété suivante :

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \eta > 0 ; \exists r_0 \in [0, R] \text{ et } \delta > 0 \text{ tels que :} \\ \frac{1}{\delta} \int_{I_\delta} \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) \rho r dr < \eta, \quad I_\delta =]r_0 - \delta, r_0 + \delta[. \end{array} \right.$$

Soient $\mu_{n,1}^\delta, \mu_{n,2}^\delta, \dots, \mu_{n,m}^\delta$ les m premières valeurs propres de l'équation de Bessel d'ordre $(n+1)$ sur l'intervalle I_δ avec la condition de Dirichlet homogène ; et soient $v_{n,1}^\delta, v_{n,2}^\delta, \dots, v_{n,m}^\delta$ les fonctions propres associées normalisées et prolongées par zéro à l'extérieur de l'intervalle I_δ . Nous avons :

$$(5.4) \quad \int_0^R \left(\left| \frac{dv_{n,k}^\delta}{dr} \right|^2 + \frac{(n+1)^2}{r^2} |v_{n,k}^\delta|^2 \right) r dr \leq \mu_{n,m}^\delta, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Soit Y le sous-espace engendré par $v_{n,1}^\delta, v_{n,2}^\delta, \dots, v_{n,m}^\delta$ et V l'espace défini par

$$V = \{ u = (u_1, 0, 0) ; u_1 \in Y \}.$$

On vérifie que V est un sous-espace de V_n de dimension m . De plus si $u \in V$, les inégalités (5.2) et (5.4) entraînent :

$$(5.5) \quad \frac{a_n(\beta; u, u)}{\|u\|^2} - \beta^2 (v_s^-)^2 \leq 3(\lambda_+ + 2\mu_+) \mu_{n,m}^\delta + \beta^2 m \max_k \|v_{n,k}^\delta\|_{L^\infty(I_\delta)}^2 \int_{I_\delta} \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) \rho r dr.$$

Par ailleurs, on vérifie que :

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } k = 1, \dots, m; \\ \mu_{n,k}^\delta = \frac{1}{\delta^2} \mu_{n,k}^1 \\ \|v_{n,k}^\delta\|_{L^\infty(I_\delta)}^2 = \frac{1}{\delta} \|v_{n,k}^1\|_{L^\infty(I_1)}^2. \end{array} \right.$$

On déduit alors de (5.3), (5.5) et (5.6) :

$$\frac{a_n(\beta; u, u)}{\|u\|^2} - \beta^2 (v_s^-)^2 \leq \frac{3}{\delta^2} (\lambda_+ + 2\mu_+) \mu_{n,m}^1 + \beta^2 \eta m \max_k \|v_{n,k}^1\|_{L^\infty(I_1)}^2.$$

Du principe du Min-Max découle l'inégalité :

$$(5.7) \quad \frac{S_m^n(\beta)}{\beta^2} \leq (v_s^-)^2 + \varepsilon_m^n(\beta)$$

avec

$$\varepsilon_m^n(\beta) = \left[\frac{3}{\delta^2 \beta^2 \eta} (\lambda_+ + 2\mu_+) \mu_{n,m}^1 + m \max_k \|v_{n,k}^1\|_{L^\infty(I_1)}^2 \right] \eta$$

d'où, pour $\beta > 1/\sqrt{\eta}$, on a :

$$\varepsilon_m^n(\beta) \leq \left[3(\lambda_+ + 2\mu_+) \mu_{n,m}^1 + m \max_k \|v_{n,k}^1\|_{L^\infty(I_1)}^2 \right] \eta.$$

Ceci achève la démonstration. □

5.2. Comportement des amplitudes

Nous considérons maintenant un milieu de vitesse caractéristique $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$ vérifiant les hypothèses :

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Il existe un intervalle } I_\delta =]r_0 - \delta, r_0 + \delta[\subset [0, R] \text{ tel que :} \\ s_1(r - r_0)^2 \leq \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_-}{\rho_+} \leq s_2(r - r_0)^2, \text{ p.p. } r \in I_\delta \quad (0 < s_1 \leq s_2), \\ \text{(ii) Il existe } \alpha_0 > 0 \text{ tel que :} \\ \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_-}{\rho_+} \geq \alpha_0 \quad \text{p.p. } r \in I \setminus I_\delta. \end{array} \right.$$

La condition (5.8(i)) est vérifiée par exemple si la fonction $\frac{\mu}{\rho}$ est de classe C^2 dans un voisinage de r_0 et possède un minimum strict en r_0 . En particulier, il découle de ces hypothèses que

$$(5.9) \quad (v_s^-)^2 = \frac{\mu_-}{\rho_+} \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_{|r-r_0| \leq \delta} \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) dr \leq \frac{2}{3} s_2 \delta^3.$$

Nous allons montrer que, lorsque $\beta \rightarrow +\infty$, l'énergie du mode est confinée autour de la position $r = r_0$, point critique du rapport $\frac{\mu}{\rho}$, puis nous montrons que le déplacement axial u_3 tend vers zéro, c'est-à-dire que le champ u devient transverse.

LEMME 5.2 : *Supposons que le rapport $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ vérifie l'hypothèse (5.8). Alors, pour tout $m \geq 1$, on a :*

$$(5.10) \quad S_m^n(\beta) - \beta^2 (v_s^-)^2 \leq \frac{C_1}{\delta^2} + s_2 C_2 (\beta \delta)^2, \quad \forall \beta \in \mathbf{R}^+$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives indépendantes de (β, δ) .

Preuve : En tenant compte de (5.9) et du fait que $\mu_{n,m}^\delta = \frac{1}{\delta^2} \mu_{n,m}$, l'inégalité (5.5) prend la forme :

$$(5.11) \quad \frac{a_n(\beta; u, u)}{\|u\|^2} - \beta^2 (v_s^-)^2 \leq \frac{3}{\delta^2} (\lambda_+ + 2\mu_+) \mu_{n,m} + \frac{2}{3} s_2 (\beta \delta)^2 m \max_k \|v_{n,k}^1\|_{L^\infty(I_+)}^2 \rho_+ R$$

ceci pour tout $u \in V$ où V est un sous-espace de dimension m de V_n .

Ce qui prouve l'inégalité (5.10). \square

LEMME 5.3 : Supposons que le rapport $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ vérifie les hypothèses (5.8). Pour $m \geq 1$ et $\beta \geq \beta_m^*(n)$, on note $u^m(\beta)$ une fonction propre de $A_n(\beta)$, associée à la valeur propre $\omega^2 = S_m^n(\beta)$ et telle que $\|u^m(\beta)\| = 1$. Alors on a :

$$(5.12) \quad \int_0^\infty |D_n(u^m(\beta))|^2 r dr \leq \frac{1}{\mu_-} \beta^2 \varepsilon(\beta, \delta)$$

$$(5.13) \quad \int_0^\infty |u_3^m(\beta)|^2 r dr \leq \frac{4}{\mu_-} \varepsilon(\beta, \delta)$$

$$(5.14) \quad \int_0^\infty \left[(\lambda + \mu) r |u_3^m(\beta)|^2 + \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta)|^2 \rho r \right] dr \leq \\ \leq 4 \left(\frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho - \sqrt{\mu_-}} \right) \varepsilon(\beta, \delta)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\beta, \delta)$$

avec

$$|D_n(u)|^2 = \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} + \frac{4 n u_1 u_2}{r}$$

$$\text{et } \varepsilon(\beta, \delta) = \frac{C_1}{(\beta\delta)} + s_2 C_2 \delta^2.$$

Preuve : Pour tout $\beta > \beta_m^*$, on a :

$$(5.15) \quad \begin{cases} \|u^m(\beta)\| = 1, \\ a_n(\beta; u^m(\beta), u^m(\beta)) = S_m^n(\beta). \end{cases}$$

A partir de (5.10) et (5.15), on déduit l'inégalité :

$$(5.16) \quad a_n(\beta; u^m(\beta), u^m(\beta)) - \beta^2 (v_s^-)^2 \leq \frac{C_1}{\delta^2} + s_2 C_2 (\beta\delta)^2 \quad \forall \beta > \beta_m^*.$$

D'après la preuve de la proposition 2.3, on a l'inégalité :

$$(5.17) \quad (\lambda_- + \mu_-) \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta(u^m(\beta))|^2 r \, dr + \mu_- \int_0^\infty |D_n(u^m(\beta))|^2 r \, dr \leq a_n(\beta; u^m(\beta), u^m(\beta)) - \beta^2(v_s^-)^2 \leq \frac{C_1}{\delta^2} + s_2 C_2(\beta\delta)^2$$

ce qui établit (5.12).

De la relation $\operatorname{div}^\beta u = \frac{du_1}{dr} + \frac{u_1 + nu_2}{r} - \beta u_3$, on déduit l'inégalité :

$$\beta^2 |u_3^m(\beta)|^2 \leq 4(|\operatorname{div}^\beta(u_m(\beta))|^2 + |D_n(u^m(\beta))|^2)$$

ce qui entraîne avec (5.17) l'inégalité (5.13).

A partir de la décomposition (2.19) on montre que :

$$(5.18) \quad a_n(\beta; u^m(\beta), u^m(\beta)) - \beta^2(v_s^-)^2 \geq \beta t(u^m(\beta), u^m(\beta)) + 2\beta^2 \int_0^\infty \left[(\lambda + \mu) |u_3^m(\beta)|^2 r + \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta)|^2 \rho r \right] dr$$

où on a posé

$$t(u, u) = 2 \int_0^\infty \left[\mu u_1 u_3 + \mu r \left(u_3 \frac{du_1}{dr} + u_1 \frac{du_2}{dr} \right) - 2(\lambda + \mu) u_3 \left(r \frac{du_1}{dr} + u_1 + nu_2 \right) \right] dr .$$

La quantité $t(u^m(\beta), u^m(\beta))$ admet la majoration :

$$(5.19) \quad |t(u^m(\beta), u^m(\beta))| \leq 4 \left(\frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_-} \right) \left(\int_0^\infty |D_n(u^m(\beta))|^2 r \, dr \right)^{\frac{1}{2}} \|u^m(\beta)\| \leq 4 \left(\frac{\lambda_+ + \mu_+}{\sqrt{\mu_-} \rho_-} \right) \left[\frac{C_1}{\delta^2} + s_2 C_2(\beta\delta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Finalement l'inégalité (5.14) découle de (5.16), (5.18) et (5.19).

THÉORÈME 5.4 : Supposons que $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ vérifie les hypothèses (5.8). Pour $m \geq 1$ et $\beta \geq \beta_m^*(n)$, on note $u^m(\beta)$ une fonction propre de $A_n(\beta)$, associée à la valeur propre $\omega^2 = S_m^n(\beta)$ et telle que $\|u^m(\beta)\| = 1$. Alors on a :

$$(5.20) \quad \int_0^\infty |u_3^m(\beta)|^2 r dr \rightarrow_{\beta \rightarrow +\infty} 0$$

$$(5.21) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \int_{|r-r_0| \geq \epsilon} |u^m(\beta)|^2 r dr \rightarrow_{\beta \rightarrow +\infty} 0.$$

Preuve : • Soit $\eta > 0$ quelconque. En choisissant $\delta < \eta$, puis $\beta > \frac{1}{\delta\eta}$, on peut rendre la quantité $\varepsilon(\beta, \delta)^{1/2}$ du lemme 5.3 inférieure à $C\eta$ ($C \geq 0$), ce qui entraîne avec les inégalités (5.13) et (5.14) les égalités suivantes :

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\infty |u_3^m(\beta)|^2 \rho r dr = 0$$

$$\text{et } \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta)|^2 \rho r dr = 0.$$

• Soit $\epsilon > 0$ fixé. Il existe d'après les hypothèses (5.8) une constante $\alpha(\epsilon)$, $0 < \alpha(\epsilon) \leq \alpha_0$, telle que :

$$\forall r \in R^+, \quad |r - r_0| \geq \epsilon \Rightarrow \frac{\mu(r)}{\rho(r)} - (v_s^-)^2 \geq \alpha(\epsilon)$$

ce qui entraîne avec (5.14) :

$$\int_{|r-r_0| \geq \epsilon} |u^m(\beta)|^2 \rho r dr \leq \frac{1}{\alpha(\epsilon)} \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta)|^2 \rho r dr \rightarrow_{\beta \rightarrow +\infty} 0$$

et la preuve est achevée. \square

6. RÉGULARITÉ DES FONCTIONS PROPRES

Le but de ce paragraphe est d'examiner la régularité d'une fonction propre de $A_n(\beta)$ sur l'intervalle $]0, R[$, puis son comportement asymptotique au voisinage de l'origine. Dans ce qui suit, on suppose que (λ, μ, ρ) vérifient les hypothèses suivantes :

(i) $\rho \in L^\infty(]0, R[)$,

(ii) $\lambda(r)$ et $\mu(r)$ sont des fonctions lipschitziennes par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe une partition $r_0 = 0 < r_1 < \dots < r_p = R$ pour laquelle $\lambda, \mu \in W^{1,\infty}(I_k), I_k =]r_{k-1}, r_k[$.

On notera cet espace par \mathcal{L}_m . En particulier, toute fonction constante par morceaux appartient à \mathcal{L}_m .

Soit u un élément de $D(A_n(\beta))$ qui est une fonction propre de $A_n(\beta)$ associée à la valeur propre ω^2 . Alors u vérifie, sur chaque intervalle I_k , le système suivant (équivalent au système $(\hat{P}_n(\beta))$):

(6.1)

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_1}{dr} \right) + n \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{du_2}{dr} - \left[\frac{(n^2 + 2)\mu + \lambda}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{u_1}{r} - n \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{u_2}{r} = \sqrt{r} g_1(u) \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_2}{dr} \right) - n \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) \frac{du_1}{dr} - n \left(\frac{3\mu + \lambda}{\mu} \right) \frac{u_1}{r} - \left[\frac{n^2 \lambda + (2n^2 + 1)\mu}{\mu} \right] \frac{u_2}{r} = \sqrt{r} g_2(u) \end{cases}$$

(6.2)
$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du_3}{dr} \right) - n^2 \frac{u_3}{r} = \sqrt{r} g_3(u)$$

avec

$$g_i(u) \in L^2(0, R) \text{ vérifiant l'estimation } \|g_i(u)\|_{L^2(0, R)} \leq C \|u\|_{V_n}.$$

Remarquons que, si $n = 0$, le système (6.1) se découple pour se ramener à une équation de Bessel.

Moyennant les hypothèses (i) et (ii) sur les coefficients du système, il est clair d'après les équations (6.1) et (6.2) que $u \in H^2(I_k)^3$ pour $2 \leq k \leq p$, et de plus on a l'estimation :

$$\|u\|_{H^2(I_k)^3} \leq C \|u\|_{V_n}.$$

Examinons maintenant le comportement de u au voisinage de $r = 0$. Pour cela, on utilisera une représentation intégrale de u sur l'intervalle $I_1 =]0, r_1[$.

6.1. Réduction du système

Le changement d'inconnues :

$$X_1 = u_1; \quad X_2 = u_2; \quad X_3 = r \frac{du_1}{dr}; \quad X_4 = r \frac{du_2}{dr}$$

transforme (6.1) en un système différentiel du premier ordre :

$$(6.3) \quad \frac{dX}{dr} = \frac{1}{r} A(r) X + \sqrt{r} g(X)$$

où $g(X) = (g_1(u), g_2(u), 0, 0)$ et $A(r)$ est une matrice d'ordre 4 donnée par :

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\lambda + (n^2 + 2)\mu}{\lambda + 2\mu} & \frac{n(\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} & 0 & \frac{-n(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \\ \frac{n(\lambda + 3\mu)}{\mu} & \frac{n^2 \lambda + (2n^2 + 1)\mu}{\mu} & \frac{n(\lambda + \mu)}{\mu} & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice $A(r)$ est lipschitzienne sur l'intervalle I_1 , on peut écrire :

$$A(r) = A_0 + rA_1(r)$$

avec $A_0 = A(0)$, $A_1(r)$ étant de norme bornée sur I_1 . Ainsi le système (6.3) prend la forme :

$$\frac{dX}{dr} = \frac{1}{r} A_0 X + \sqrt{r} \tilde{g}(X)$$

avec $\tilde{g}(X) = \left\{ g(X) + \frac{1}{\sqrt{r}} A_1(r) X \right\}$ qui vérifie l'estimation $\|\tilde{g}(X)\|_{L^2(I_1)^4} \leq C \|u\|_{V_n}$.

L'équation homogène $\frac{dX}{dr} = \frac{1}{r} A_0 X$ est du type Euler ; on sait calculer une matrice fondamentale de solutions $M_n(r)$, dont on connaît les colonnes, à savoir :

- $M_n(r) = \text{col}(r^{s_1} \xi_1, r^{s_2} \xi_2, r^{s_3} \xi_3, r^{s_4} \xi_4)$ si $n \geq 2$,

- $M_1(r) = \text{col}(r^{-2} \xi_1, (\text{Log } r) \xi_2 + \xi_3, \xi_2, r^2 \xi_4)$ si $n = 1$,

où $\{\xi_k; k = 1, \dots, 4\}$ est une base de Jordan de A_0 associée aux valeurs propres $\{s_1 = -n - 1, s_2 = -n + 1, s_3 = n - 1, s_4 = n + 1\}$.

La solution $X(r)$ du système (6.4) admet alors la représentation intégrale :

$$(6.5) \quad X(r) = M_n(r) C + M_n(r) \int_r^{r^*} \sqrt{\tau} M_n^{-1}(\tau) \tilde{g}(X(\tau)) d\tau, r, r^* \in I_1$$

où $C = (c_1, \dots, c_4)$ est une constante et r^* est choisi de manière à avoir une intégrale convergente.

6.2. Estimations a priori

Maintenant nous allons établir une estimation *a priori* sur la solution particulière :

$$\bar{X}(r) = M_n(r) \int_{r^*}^r \sqrt{\tau} M_n^{-1}(\tau) \tilde{g}(X(\tau)) d\tau, \quad r \in I_1.$$

Dans le cas $n \geq 2$, un calcul algébrique donne l'expression

$$(6.6) \quad \bar{X}_i(r) = \frac{1}{\det \xi} \sum_{k=1}^4 r^{s_k} G_k(r) \xi_{ik} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

avec

$$G_k(r) = \int_{r^*}^r \tau^{s_5-k+\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^4 \tilde{g}_j(X(\tau)) \zeta_{jk} \right) d\tau \quad (1 \leq k \leq 4)$$

où les colonnes de la matrice ξ sont ξ_1, ξ_2, ξ_3 et ξ_4 et où $\zeta = (\zeta_{jk})$ est l'adjointe de ξ .

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$(6.7) \quad |G_k(r)| \leq \left\| \sum_{j=1}^4 \tilde{g}_j(X(\tau)) \zeta_{jk} \right\|_{L^2(0, r_1)} \left(\int_{r^*}^r \tau^{2s_5-k+1} d\tau \right)^{1/2}$$

$$\leq Cr^{\gamma_k} \|u\|_{V_n} \quad (\gamma_k = s_5 - k + 1).$$

Par conséquent, on a :

$$(6.8) \quad |\bar{X}_i(r)| \leq Cr \|u\|_{V_n} \quad \forall r \in [0, r_1].$$

Comme

$$(6.9) \quad X_i(r) = \sum_{k=1}^4 c_k \xi_{ik} r^{s_k} + \bar{X}_i(r)$$

et comme $\lim_{r \rightarrow 0} u_i(r) = 0$, $i = 1, 2$, les inégalités (6.8) et (6.9) impliquent :

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Par ailleurs, l'injection continue de V_n ($n \geq 2$) dans $C([0, R])^3$ (cf. [7], propriété 2.5), entraîne :

$$|c_3| + |c_4| \leq C \|u\|_{V_n}.$$

En définitif, on aboutit à :

$$|X_i(r)| \leq Cr \|u\|_{V_n} \quad \forall r \in [0, r_1] \quad (1 \leq i \leq 4)$$

qui équivaut à :

$$(6.10) \quad \begin{cases} |u_i(r)| \leq Cr \|u\|_{V_n} \\ \left| \frac{du_i}{dr} \right| \leq C \|u\|_{V_n} \end{cases} \quad \forall r \in [0, r_1] \quad (i = 1, 2)$$

Afin d'examiner le comportement de la composante u_3 , on utilise la représentation intégrale suivante (équivalente à l'équation (6.2)) :

$$u_3 = c_1 r^{-n} + c_2 r^n + \frac{1}{2n} \left[r^{-n} \int_0^r \tau^{n+\frac{1}{2}} g_3(u(\tau)) d\tau - r^n \int_r^R \tau^{-n+\frac{1}{2}} g_3(u(\tau)) d\tau \right].$$

La condition $u_3(0) = 0$ entraîne $c_1 = 0$. En majorant les intégrales, on aboutit aux estimations

$$|u_3(r)| \leq Cr \|u\|_{V_n} \quad \text{et} \quad \left| \frac{du_3}{dr} \right| \leq C \|u\|_{V_n}, \quad \forall r \in [0, r_1].$$

Lorsque $n = 0$ et $n = 1$ on utilise les mêmes idées pour obtenir (après une étude plus compliquée) les résultats que nous résumons dans le théorème suivant (cf. [7]) :

THÉORÈME 6.1 : Soit u , élément de V_n , une fonction propre de $A_n(\beta)$. Si les coefficients de Lamé (λ, μ) appartiennent à la classe \mathcal{L}_m alors u vérifie sur $[0, r_1]$, les estimations suivantes :

(6.11)

$$\begin{cases} \frac{1}{r} |u(r)| + \left| \frac{du}{dr}(r) \right| \leq C \|u\|_{V_n} \text{ si } n \geq 2 \\ \frac{1}{r} (|u_1(r) + u_2(r)| + |u_3(r)|) + |u(r)| + \left| \frac{du}{dr}(r) \right| \leq C \|u\|_{V_1} \text{ si } n = 1 \\ \frac{1}{r} (|u_1(r)| + |u_2(r)|) + |u_3(r)| + \left| \frac{du}{dr}(r) \right| \leq C \|u\|_{V_0} \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

la constante C étant indépendante de u .

COROLLAIRE 6.2 : Sous l'hypothèse du théorème 6.1, toute fonction propre de u de $A_n(\beta)$ vérifie :

$$(6.12) \quad |u(r)|^2 + |\operatorname{div}^\beta u(r)|^2 + |\varepsilon_n(\beta, u)(r)| \leq C \|u\|_{V_n}^2 \quad p.p. r \in [0, R]$$

l'expression de $\varepsilon_n(\beta; u)$ étant donnée par la formule (2.15).

7. DÉPENDANCE DES FONCTIONS $S_m^n(\beta)$ PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES

La famille d'opérateurs $A_n(\beta)$ dépend de β visiblement de manière quadratique, donc holomorphe en β . Des résultats de Kato (cf. [17]), il en découle que la fonction $\beta \rightarrow S_m^n(\beta)$ est analytique par morceaux. Les points singuliers sont, soit les points d'intersection des graphes des différentes valeurs propres, soit les seuils (les seuls points d'accumulation possibles).

Pour étudier la dépendance par rapport à (ρ, λ, μ) nous allons introduire les notations suivantes :

$$A(r) = (\rho(r), \lambda(r), \mu(r)) ; \quad \|A\|_\infty = \max \{ \|\lambda\|_\infty, \|\mu\|_\infty, \|\rho\|_\infty \}$$

$$a_n(\beta, A ; u, v) = a_n(\beta ; u, u) ; \quad S_m^n(\beta, A) = S_m^n(\beta) .$$

Nous supposons que A varie dans l'espace $(\mathcal{L}_m)^2 \times L^\infty([0, R])$.

Le théorème suivant traduit la continuité de la fonction $A = (\lambda, \mu, \rho) \mapsto S_m^n(\beta, A)$ par rapport à la norme $\|A\|_{L^1(0,R)^3}$. La démonstration est basée sur le corollaire 6.2.

THÉORÈME 7.1 : La fonction $A = (\lambda, \mu, \rho) \mapsto S_m^n(\beta, A)$ vérifie :

$$\begin{aligned}
 |S_m^n(\beta, A) - S_m^n(\beta, A')| &\leq \\
 &\leq \frac{2}{\delta} C m^2 (1 + \beta^2) \max \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \right) \int_0^R (|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'|) r \, dr \\
 (7.1) \quad &+ |\lambda_\infty - \lambda'_\infty| + |\mu_\infty - \mu'_\infty| + |\rho_\infty - \rho'_\infty| \\
 &+ \max \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \right) \max \left(\frac{\rho'_+}{\rho_-}, \frac{\rho_+}{\rho'_-} \right) \int_0^R |\rho - \rho'| r \, dr
 \end{aligned}$$

avec $\delta = \min(\lambda_-, \lambda'_-, \mu_-, \mu'_-, \rho_-, \rho'_-)$.

Preuve : Nous donnons ici la preuve dans le cas $\rho = \rho'$ (dans le cas contraire la démarche est la même).

Utilisons l'écriture suivante :

$$(7.2) \quad a_n(\beta, A; u, u) = \int_0^\infty \lambda |\operatorname{div}^\beta u|^2 r \, dr + \int_0^\infty \mu \varepsilon_n(\beta, u) r \, dr$$

avec

$$\begin{aligned}
 (7.3) \quad \varepsilon_n(\beta, u) &= 2 \left(\left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \beta^2 u_3^2 \right) + \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 \\
 &+ \left(\frac{du_3}{dr} + \beta u_1 \right)^2 + \left(\frac{nu_3}{r} - \beta u_2 \right)^2 + \frac{2}{r^2} (u_1 + nu_2)^2.
 \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
 (7.4) \quad a_n(\beta, A; u, u) &\leq a_n(\beta, A'; u, u) + \int_0^R |\lambda - \lambda'| |\operatorname{div}^\beta u|^2 r \, dr \\
 &+ \int_0^R |\mu - \mu'| \varepsilon_n(\beta, u) r \, dr + |\lambda_\infty - \lambda'_\infty| \int_0^R |\operatorname{div}^\beta u|^2 r \, dr \\
 &+ |\mu_\infty - \mu'_\infty| \int_R^\infty \varepsilon_n(\beta, u) r \, dr; \quad u \in V_n.
 \end{aligned}$$

L'égalité (7.2) entraîne si $u \in V_n$:

$$(7.5) \quad \begin{cases} \int_R^\infty |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr \leq \frac{1}{\lambda'_\infty} a_n(\beta, A'; u, u) \\ \int_R^\infty \varepsilon_n(\beta, u) r dr \leq \frac{1}{\mu'_\infty} a_n(\beta, A'; u, u). \end{cases}$$

A partir de (7.4) et (7.5), la définition de $S_m^n(\beta, A)$ entraîne :

$$(7.6) \quad \begin{aligned} S_m^n(\beta, A) \leq & \max_{u \in V_m} \frac{a_n(\beta, A'; u, u)}{\|u\|^2} + \max_{u \in V_m} \frac{1}{\|u\|^2} \int_0^R |\lambda - \lambda'| |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr \\ & + \max_{u \in V_m} \frac{1}{\|u\|^2} \int_0^R |\mu - \mu'| \varepsilon_n(\beta, u) r dr \\ & + \left(\frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right) \max_{u \in V_m} \frac{a_n(\beta, A'; u, u)}{\|u\|^2} \end{aligned}$$

où V_m est un sous-espace quelconque de V_n de dimension m .

Considérons le cas où $S_m^n(\beta, A) < \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$ et $S_m^n(\beta, A') < \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}$ (les autres cas se traitent de la même manière). Alors il existe, d'après le principe du Min-Max, $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}$ appartenant à V_n tels que :

$$(7.7) \quad \begin{cases} \int_0^\infty u^{(i)} u^{(j)} \rho' r dr = \delta_{ij} \\ a_n(\beta, A'; u^{(i)}, u^{(j)}) = \delta_{ij} S_i^n(\beta, A') \quad (1 \leq i, j \leq m). \end{cases}$$

Choisissons $V_m = [u^{(1)}, \dots, u^{(m)}]$, alors, d'après (7.6), on a :

$$(7.8) \quad \begin{aligned} S_m^n(\beta, A) \leq & S_m^n(\beta, A') + \max_{u \in V_m} \frac{1}{\|u\|^2} \int_0^R |\lambda - \lambda'| |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr \\ & + \max_{u \in V_m} \frac{1}{\|u\|^2} \int_0^R |\mu - \mu'| \varepsilon_n(\beta, u) r dr \\ & + \left(\frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right) \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}. \end{aligned}$$

Si $u \in V_m$ est de norme unité, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sum_{k=1}^m \alpha_k u^{(k)} ; \quad \alpha_k = \int_0^\infty uu^{(k)} \rho' r \, dr \\ \sum_{k=1}^m \alpha_k^2 = 1 \end{array} \right.$$

d'où

$$\operatorname{div}^\beta u = \sum_{k=1}^m \alpha_k \operatorname{div}^\beta(u^{(k)}) \Rightarrow |\operatorname{div}^\beta u|^2 \leq m^2 \max_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{div}^\beta u^{(k)}|^2$$

et

$$(7.9) \quad \|\operatorname{div}^\beta u\|^2_{L^\infty(0,R)} \leq m^2 \max_{1 \leq k \leq m} \|\operatorname{div}^\beta u^{(k)}\|^2_{L^\infty(0,R)}.$$

De la même manière, on montre que :

$$(7.10) \quad \|\varepsilon_n(\beta, u)\|_{L^\infty(0,R)} \leq m^2 \max_{1 \leq k \leq m} \|\varepsilon_n(\beta, u^{(k)})\|_{L^\infty(0,R)}.$$

D'après le corollaire 6.2, il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $k \in [1, m]$, on ait :

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \|\operatorname{div}^\beta u^{(k)}\|^2_{L^\infty(0,R)} &\leq C \|u^{(k)}\|^2_{V_n} \\ \|\varepsilon_n(\beta, u^{(k)})\|_{L^\infty(0,R)} &\leq C \|u^{(k)}\|^2_{V_n} \end{aligned}$$

et par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} (7.12) \quad \|\operatorname{div}^\beta u\|^2_{L^\infty(0,R)} &\leq Cm^2 \max_{1 \leq k \leq m} \|u^{(k)}\|^2_{V_n} \\ &\leq \frac{Cm^2}{\mu'_- \min(1, \beta^2)} \max_{1 \leq k \leq m} a_n(\beta, A'; u^{(k)}, u^{(k)}) \\ &\quad \text{(coercivité de } a_n(\beta)) \\ &\leq \frac{Cm^2}{\mu'_- \min(1, \beta^2)} S_m^n(\beta, A') \\ &\leq \frac{Cm^2}{\mu'_-} (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \quad (\forall u \in V_m). \end{aligned}$$

De la même manière on montre que :

$$(7.13) \quad \|\varepsilon_n(\beta, u^{(k)})\|_{L^\infty(0,R)} \leq \frac{Cm^2}{\mu'_-} (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \quad (u \in V_m)$$

ce qui entraîne, à l'aide de (7.9) :

$$(7.14) \quad S_m^n(\beta, A) - S_m^n(\beta, A') \leq \frac{Cm^2}{\mu'_-} (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \int_0^R (|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'|) r dr + \left(\frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right) \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}.$$

En échangeant les rôles de A et A' , on obtient :

$$(7.15) \quad |S_m^n(\beta, A) - S_m^n(\beta, A')| \leq \frac{(C+1)m^2}{\delta} (1 + \beta^2) \max \left(\frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}, \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) \times \left[\int_0^R (|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'|) r dr + |\lambda_\infty - \lambda'_\infty| + |\mu_\infty - \mu'_\infty| \right]$$

où $\delta = \min(\lambda_-, \lambda'_-, \mu_-, \mu'_-)$. Ce qui achève la preuve. □

Commentaire : Ce résultat est original par rapport aux travaux précédents ([4], [10]) où les auteurs avaient obtenu, dans le cas vectoriel, seulement une dépendance en norme L^∞ des valeurs propres en fonction de l'indice de la fibre optique. Dans notre cas, la démonstration utilise de façon essentielle le caractère axisymétrique du guide, et ce à travers les résultats de régularité propre à la dimension 1.

Remerciements. L'auteur remercie Yves Dermenjian, de l'université de Provence, pour son aide et ses suggestions durant la réalisation de cet article. L'auteur remercie Patrick Joly, directeur de recherche à l'INRIA, pour plusieurs discussions utiles.

RÉFÉRENCES

[1] P. JOLY, A. BAMBERGER and M. KERN, 1991, Propagation of elastic surface waves along a cylindrical cavity of arbitrary cross section. *R.A.I.R.O. Modél. Math. Anal. Numér.*, **25**, p. 1-30.

- [2] Y. DERMENJIAN, A. BAMBERGER and P. JOLY, 1990, Mathematical analysis of the propagation of elastic guided waves in heterogeneous media, *J. Diff. Equ.*, **88**(1).
- [3] M. ABRAMOWITZ and I. STEGUN, 1968, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications.
- [4] A. S. BONNET, 1988, *Analyse mathématique de la propagation des modes guidés dans les fibres optiques*, Technical Report 229, E.N.S.T.A.
- [5] A. S. BONNET and R. DJELLOULI, 1994, High frequency asymptotics of guided modes in optical fibres, *IMA J. of Appl. Math.*, **52**, pp. 271-287.
- [6] L. CHORFI, 1992, *Étude mathématique et numérique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution*. Thèse, Université de Provence.
- [7] L. CHORFI, 1993, *Étude mathématique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution*, Technical Report 1846, I.N.R.I.A.
- [8] E. A. CODDINGTON and N. LEVINSON, 1955, *Theory of ordinary differential equation*, Mc Graw-Hill.
- [9] R. DAUTRAY and J. L. LIONS, 1988, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 4 et 5, Masson, 1988.
- [10] R. DJELLOULI, 1988, *Contribution à l'analyse mathématique et au calcul numérique des modes guidés des fibres optiques*. Thèse, Université Paris-Sud.
- [11] G. DUVAUT, 1990, *Mécanique des milieux continus*, Masson.
- [12] A. C. ERINGEN and E. S. SUHUBI, 1974, *Elastodynamics*, volume I et II, Academic Press.
- [13] J. DUTERTE et P. JOLY, *Ondes guidées par une perturbation géométrique locale du demi-espace élastique homogène*, Technical report, I.N.R.I.A. (à paraître).
- [14] E. HEWITT and K. STROMBERG, 1965, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag.
- [15] P. JOLY, 1989, Nouveau résultat d'existence d'ondes guidées en milieu élastique hétérogène, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **309**(I), p. 709-796.
- [16] P. JOLY and R. WEDER, 1992, New results in guided waves in elastic heterogeneous media, *Math. Meth. in the App. Sc.*, **15**, p. 395-409.
- [17] T. KATO, 1966, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag.
- [18] F. MAHÉ, 1993, *Étude mathématique et numérique de la propagation d'ondes électromagnétiques dans les microguides de l'optique intégrée*. Thèse, Université Rennes.
- [19] M. REED and B. SIMON, 1981, *Methods of modern mathematical physics*, volume 4, Academic Press.
- [20] M. SCHECHTER, 1981, *Operator methods in quantum mechanics*, North-Holland.
- [21] J. TLILI, 1991, *Calcul d'ondes de surfaces élastiques guidées par une fissure*. Thèse, Université Paris VI.