Christine Bernardi

Indicateurs d'erreur en $h - N$ version des éléments spectraux

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 30, n° 1 (1996), p. 1-38

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1996__30_1_1_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 30, n° 1, 1996, p. 1 à 38)

INDICATEURS D'ERREUR EN $h - N$ VERSION DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX (*)

par Christine BERNARDI [1]

Résumé. — *Dans le cadre de la discrétisation par éléments spectraux d'une équation elliptique modèle du second ordre en dimension un ou deux, on effectue l'analyse numérique d'indicateurs d'erreur fondés sur le résidu de l'équation. Les résultats obtenus sont optimaux en dimension un.*

Abstract. — *In the framework of the spectral element method for a model elliptic equation in one or two dimensions, we present the numerical analysis of some error indicators, which rely on the residual of the equation. The results are optimal in one space dimension.*

INTRODUCTION

La méthode des éléments spectraux consiste à approcher la solution d'une équation aux dérivées partielles par des fonctions polynomiales de haut degré sur chaque élément d'une quadrangulation. Cette méthode a une extension naturelle, la méthode d'éléments spectraux avec joints [8], où les hypothèses habituelles en éléments finis sur l'intersection des frontières d'éléments de la quadrangulation peuvent être relaxées. Dans les deux cas, le paramètre de discrétisation est en général un K-uplet formé par les degrés maximaux N_k des polynômes sur chaque élément. Toutefois, comme pour la $h - p$ version des éléments finis, on peut également faire intervenir dans ce paramètre une quantité h_k liée au diamètre des éléments : la grande différence est qu'on veut alors étudier le cas où ces diamètres tendent vers 0, donc où le nombre d'éléments tend vers l'infini. Se reposent dans ce cadre les mêmes problèmes qu'en éléments finis : en particulier, on sait démontrer une estimation d'erreur *a priori*, permettant de déterminer le comportement asymptotique de l'erreur entre les solutions exacte et approchée en fonction des paramètres h_k et N_k, ainsi que de la régularité de la solution exacte, toutefois on ne peut pas toujours estimer cette régularité. On s'intéresse ici à l'« adaptativité du maillage », c'est-à-dire à construire un outil permettant, après une première

(*) Manuscrit reçu le 3 février 1995.
[1] Analyse Numérique, C.N.R.S. et Université Pierre-et-Marie-Curie, B.C. 187, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France.

résolution du problème sur une décomposition grossière, un choix de décomposition le mieux adapté possible au problème (la souplesse de la méthode avec joints facilitant grandement la construction de la nouvelle décomposition).

L'outil est bien connu en éléments finis : il s'appelle *indicateur d'erreur.* Il est impossible de citer tous les articles sur ce sujet, on réfère toutefois à [1] et [13] pour des études en $h - p$ version et à [2] pour la notion d'estimation *a posteriori.* Ce que l'on se propose de faire ici est d'étendre au cas des éléments spectraux une partie des résultats obtenus par Verfürth [15], [16], [17], [18] et par Bernardi, Métivet et Verfürth [9] pour les éléments finis, concernant des indicateurs construits à partir du résidu de l'équation. L'extension n'est pas évidente car une étape importante de la démonstration en éléments finis repose sur des inégalités inverses, qui sont connues pour être mauvaises en méthodes spectrales, il s'agit donc de modifier la forme des indicateurs de façon appropriée.

Toutefois, dans le cadre de la $h - N$ version, deux choix de « raffinement » sont possibles dans les domaines où l'indicateur révèle une mauvaise convergence : soit diviser le domaine de façon à réduire le paramètre h_k, soit augmenter le degré maximal N_k. L'idée pour déterminer la meilleure stratégie est d'utiliser une décomposition spectrale de l'indicateur dans une base appropriée de l'espace de polynômes. L'examen du comportement des coefficients permet alors de trouver le meilleur raffinement : il est en effet préférable d'augmenter le N_k lorsque tous les coefficients sont de même taille et de diminuer le h_k lorsque les coefficients d'ordre élevé sont petits.

Donnons d'abord la définition d'une famille d'indicateurs. On considère une équation variationnelle elliptique posée sur un domaine Ω borné :

trouver un élément u d'un espace de Hilbert X tel que

$$\forall v \in X, \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle, \tag{0.1}$$

avec les hypothèses habituelles : $a(\,.\,,\,.\,)$ est une forme bilinéaire continue sur $X \times X$ et elliptique, $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ désigne le produit de dualité entre X' et X (on suppose f dans X'). On considère également son approximation par éléments spectraux :

trouver un élément u_δ d'un espace X_δ tel que

$$\forall v_\delta \in X_\delta, \quad a_\delta(u_\delta, v_\delta) = (f, v_\delta)_\delta, \tag{0.2}$$

où X_δ est un espace de fonctions dont la restriction à tout élément d'une décomposition de Ω (dépendant de δ) est un polynôme de degré élevé. L'indice δ de la forme bilinéaire et du produit scalaire dans le problème discret vient du fait que les intégrales ont été remplacées par des formules de quadrature. La méthode est conforme si X_δ est inclus dans X et non conforme sinon.

L'idée des indicateurs d'erreur est d'associer à chaque élément Ω_k de la décomposition une quantité η_k, explicitement calculable en fonction de la solution discrète u_δ et de la donnée f, telle que les propriétés suivantes soient vérifiées (les quantités κ_{1k} et κ_{2k} sont des termes portant sur les données dont on connaît explicitement le comportement)

(i) L'erreur $\| u - u_\delta \|_X$ se majore ainsi

$$\| u - u_\delta \|_X \leq c_{1\delta} \Big(\sum_k (\eta_k^2 + \kappa_{1k}^2) \Big)^{\frac{1}{2}} . \tag{0.3}$$

Cette majoration est globale mais il est bien évidemment impossible d'avoir une inégalité locale pour un problème de diffusion.

(ii) Chaque quantité η_k est majorée par une constante $c_{2\delta}$ fois la norme de $u - u_\delta$ dans l'espace des restrictions des fonctions de X à l'élément Ω_k ou à un « petit » voisinage de cet élément, plus le terme κ_{2k}.
On obtient une famille d'indicateurs optimale si les deux constantes $c_{1\delta}$ et $c_{2\delta}$ sont bornées indépendamment de δ : ce sera le cas en dimension 1, mais non en dimension supérieure.

Dans le cadre de cet article, on se limitera au cas d'une équation de Laplace avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes en dimensions 1 et 2, il est facile d'étendre ces résultats à la dimension 3, au cas de conditions non homogènes, de Neumann ou mixtes, à des équations non linéaires ou au problème de Stokes en combinant les arguments présentés ici avec ceux figurant respectivement dans [3], [9], dans [18], dans [14], [17] et dans [9], [16]. Le domaine Ω étant toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un polygone de $\mathbb{R}^2$, on utilisera ici les espaces de Sobolev habituels $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$, munis des norme et semi-norme usuelles, ainsi que l'espace $H_0^1(\Omega)$ et son dual $H^{-1}(\Omega)$. On considère donc le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega , \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega , \end{cases} \tag{0.4}$$

dont la formulation variationnelle s'écrit, lorsque la donnée f est dans $H^{-1}(\Omega)$:

trouver une fonction u de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) , \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle . \tag{0.5}$$

Ici, $\langle \, . \, , . \, \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ tandis que la forme $a(\, . \, , . \,)$ est définie par

$$a(u, v) = \int_\Omega \mathbf{grad}\, u \,.\, \mathbf{grad}\, v \, d\mathbf{x} \, .$$

La discrétisation s'effectue par méthode de Galerkin, en substituant à $H_0^1(\Omega)$ un espace X_δ de dimension finie et en remplaçant les intégrales sur chaque élément par des formules de quadrature appropriées.

L'article présente l'étude d'indicateurs construits à partir du résidu de l'équation, d'abord en dimension 1, puis en dimension 2 successivement pour une méthode conforme et pour une méthode non conforme dans le cadre des éléments à joints. L'analyse d'une décomposition spectrale de ces indicateurs est effectuée dans chaque cas.

Remerciements : L'auteur tient à remercier E. Godlewski pour une première et très ancienne discussion sur la $h - N$ version, ainsi que M. Dauge et Y. Maday pour leurs suggestions qui lui ont permis d'améliorer cet article.

1. INDICATEURS PAR RÉSIDU EN DIMENSION 1

On suppose ici que Ω est un intervalle ouvert borné $]a, b[$, $a < b$. On introduit une suite de nombres réels a_k tels que

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{K-1} < a_K = b \, .$$

On note Ω_k l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$, $1 \leqslant k \leqslant K$, et h_k sa longueur.

Le problème discret

Le paramètre de discrétisation δ est un K-uplet de couples (h_k, N_k), où les N_k sont des entiers $\geqslant 2$. L'espace discret s'écrit ici :

$$X_\delta = \left\{ v_\delta \in H_0^1(\Omega) \, ; \, v_{\delta|\Omega_k} \in \mathbb{P}_{N_k}(\Omega_k) \right\} , \tag{1.1}$$

où $\mathbb{P}_n(\mathcal{O})$ est l'espace des restrictions à un intervalle $\mathcal{O}$ des polynômes à une variable de degré $\leqslant n$.

Sur l'intervalle de référence $\Lambda =]-1, 1[$, on considère la formule de quadrature de Gauss-Lobatto à $N+1$ points :

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^{1} \Phi(\zeta)\, d\zeta = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j^N)\, \rho_j^N, \tag{1.2}$$

où les ξ_j^N sont les zéros de $(1-\zeta^2)\, L_N'$, L_N étant le polynôme de Legendre de degré N. Par translation et homothétie, on définit sur chaque Ω_k une formule de Gauss-Lobatto à $N_k + 1$ points, de nœuds $\xi_j^{N_k}$ et de poids $\rho_j^{N_k}$, puis on pose :

$$(u, v)_\delta = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=0}^{N_k} u(\xi_j^{N_k})\, v(\xi_j^{N_k})\, \rho_j^{N_k}.$$

On note i_δ l'interpolé de Lagrange sur l'ensemble des nœuds $\xi_j^{N_k}$, à valeurs dans

$$Y_\delta = \{ v_\delta \in H^1(\Omega)\, ;\, v_{\delta|\Omega_k} \in \mathbb{P}_{N_k}(\Omega_k) \}.$$

La donnée f étant supposée continue sur Ω, le problème discret consiste à :

trouver une fonction u_δ de X_δ telle que

$$\forall v_\delta \in X_\delta, \quad a_\delta(u_\delta, v_\delta) = (f, v_\delta)_\delta, \tag{1.3}$$

où la forme $a_\delta(\,.\,,\,.\,)$ est définie *a priori* par

$$a_\delta(u_\delta, v_\delta) = (u_\delta', v_\delta')_\delta.$$

Toutefois, la propriété d'exactitude de la formule de quadrature implique ici que

$$\forall u_\delta \in X_\delta, \forall v_\delta \in X_\delta, \quad a_\delta(u_\delta, v_\delta) = a(u_\delta, v_\delta).$$

On en déduit immédiatement que le problème (1.3) admet une solution unique.

On obtient également que

$$\| u - u_\delta \|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leqslant c\Big(\inf_{v_\delta \in X_{\delta -}} | u - v_\delta |_{H^1(\Omega)} + \inf_{f_\delta \in Y_{\delta -}} \| f - f_\delta \|_{L^2(\Omega)} + \| f - i_\delta f \|_{L^2(\Omega)} \Big), \quad (1.4)$$

où $X_{\delta -}$ (resp. $Y_{\delta -}$) est l'espace obtenu en remplaçant, dans la définition de X_δ (resp. Y_δ), chaque N_k par $N_k - 1$.

Premiers résultats d'approximation

On énonce rapidement les arguments permettant une estimation optimale du membre de droite de l'inégalité (1.4) :

(i) meilleure approximation dans $H_0^1(\Lambda)$ [6, Thm 6.2] : si $\pi_N^{1,0}$ désigne l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$, on a pour toute fonction v de $H^s(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$, $s \geqslant 1$:

$$\| v - \pi_N^{1,0} v \|_{H^1(\Lambda)} \leqslant c N^{1-s} \| v \|_{H^s(\Lambda)} . \quad (1.5)$$

On notera simplement $\pi_{N_k}^{1,0}$ le translaté de cet opérateur sur Ω_k, prolongé par 0 en-dehors de $\overline{\Omega}_k$;

(ii) mise à l'échelle [10, Thm 14.1] : si P_N désigne un opérateur de projection, égal à l'identité sur les polynômes de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et tel que la norme de $id - P_N$ de $H^t(\Lambda)$ dans $H^s(\Lambda)$, $t \leqslant s$, soit $\leqslant c N^{t-s}$, on a pour toute fonction v de $H^s(\Lambda)$, $t \leqslant s \leqslant N+1$:

$$\| v - P_N v \|_{H^t(\Lambda)} = \inf_{v_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda)} \| (id - P_N)(v - v_N) \|_{H^t(\Lambda)} \leqslant c N^{t-s} | v |_{H^s(\Lambda)} . \quad (1.6)$$

Cette propriété s'étend à l'opérateur $\pi_N^{1,0}$ par décomposition orthogonale : pour toute fonction v de $H^s(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$, $1 \leqslant s \leqslant N+1$:

$$\| v - \pi_N^{1,0} v \|_{H^1(\Lambda)} \leqslant c N^{1-s} | v |_{H^s(\Lambda)} . \quad (1.7)$$

Le remplacement des normes par des semi-normes dans le membre de droite des deux dernières inégalités se traduira par l'apparition d'une puissance de h_k lorsqu'on utilisera ces inégalités sur Ω_k après translation et homothétie ;

(iii) erreur d'interpolation dans $L^2(\Lambda)$ [6, Thm 13.4] : on a pour toute fonction v de $H^s(\Lambda)$, $s > \frac{1}{2}$:

$$\| v - i_N v \|_{L^2(\Lambda)} \leqslant c N^{-s} \| v \|_{H^s(\Lambda)} , \quad (1.8)$$

où i_N désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds ξ_j^N, $0 \leq j \leq N$, à valeurs dans $\mathbb{P}_N(\Lambda)$.

L'idée est maintenant d'associer à toute fonction v de $H^1(\Lambda)$ la fonction

$$w_\delta = \sum_{k=1}^{K} \pi_{N_k-1}^{1,0}(v - v(a_{k-1})\,\varphi_{k-1} - v(a_k)\,\varphi_k) + \sum_{k=0}^{K} v(a_k)\,\varphi_k\,, \tag{1.9}$$

où les φ_k sont des fonctions continues, affines sur chaque Ω_k, égales à 1 en a_k et à 0 aux autres nœuds $a_{k'}$, $k' \neq k$. La fonction w_δ appartient alors à Y_δ (à X_δ si v est dans $H_0^1(\Omega)$, et on déduit des arguments précédents que, si la restriction de la fonction v à Ω_k est dans $H^{s_k}(\Omega_k)$, $s_k \geq 1$,

$$\| v - w_\delta \|_{H^1(\Omega_k)} \leq c h_k^{\inf\{s_k - 1, N_k\}} N_k^{1 - s_k} \| v \|_{H^{s_k}(\Omega_k)}\,. \tag{1.10}$$

Lorsque la donnée f est dans $H^\sigma(\Omega)$, $\sigma > \frac{1}{2}$, la solution u du problème (0.4) appartient à $H^{\sigma+2}(\Omega)$. En utilisant (1.4), (1.8) et (1.10), on obtient la majoration d'erreur *a priori* :

$$\| u - u_\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{k=1}^{K} h_k^{\inf\{\sigma, N_k\}} N_k^{-\sigma} \right) \| f \|_{H^\sigma(\Omega)}\,,$$

mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici.

Indicateurs d'erreur

Dans le but de définir des quantités η_k vérifiant (0.3), on part de l'inégalité

$$\| u - u_\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq c \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_\delta, v)}{\| v \|_{H^1(\Omega)}}\,. \tag{1.11}$$

Un calcul simple montre alors que, pour tout v_δ dans $X_{\delta-}$,

$$a(u - u_\delta, v) = a(u - u_\delta, v - v_\delta) - \langle f, v_\delta \rangle + (f, v_\delta)_\delta\,,$$

d'où

$$a(u-u_\delta, v) = \sum_{k=1}^{K} \left(\int_{\Omega_k} (f+u_\delta'')(x)(v-v_\delta)(x)\,dx \right.$$
$$\left. - \int_{\Omega_k} (f-i_\delta f)(x)\, v_\delta(x)\,dx \right)$$
$$+ \sum_{k=1}^{K-1} [u_\delta'](a_k)(v-v_\delta)(a_k),$$

où les crochets désignent le saut d'une fonction en un point. L'idée est de choisir $v_\delta = w_\delta$ donné par la formule (1.9). On note alors que le dernier terme de l'inégalité précédente disparaît, d'où

$$a(u-u_\delta, v) = \sum_{k=1}^{K} \left(\int_{\Omega_k} (i_\delta f+u_\delta'')(x)(v-v_\delta)(x)\,dx \right.$$
$$\left. - \int_{\Omega_k} (f-i_\delta f)(x)\, v(x)\,dx \right). \quad (1.12)$$

Nous aurons besoin d'une propriété supplémentaire de l'opéraeur $\pi_N^{1,0}$.

LEMME 1.1 : *Soit s un réel $\geqslant 1$. Pour toute fonction v de $H^s(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$, on a la majoration*

$$\left(\int_{-1}^{1} (v-\pi_N^{1,0} v)^2(\zeta)(1-\zeta^2)^{-1}\,d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c N^{-s} |v|_{H^s(\Lambda)}. \quad (1.13)$$

Démonstration : On rappelle l'équation différentielle vérifiée par les polynômes de Legendre L_n, $n \geqslant 0$:

$$((1-\zeta^2)L_n')' + n(n+1)L_n = 0.$$

On écrit alors la décomposition

$$v = (1 - \zeta^2) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n L_n', \quad \text{d'où} \quad v' = - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n n(n+1) L_n .$$

On vérifie alors que

$$\pi_N^{1,0} v = (1 - \zeta^2) \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n L_n' ,$$

d'où l'on déduit

$$\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^{1,0} v)^2(\zeta) (1 - \zeta^2)^{-1} d\zeta =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 n(n+1) \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leqslant N^{-2} |v - \pi_N^{1,0} v|_{H^1(\Lambda)}^2 .$$

Il suffit alors d'appliquer (1.5) pour conclure.

On voit maintenant comment définir l'indicateur d'erreur sur chaque Ω_k :

$$\eta_k = N_k^{-1} \| (i_\delta f + u_\delta'') (x - a_{k-1})^{1/2} (a_k - x)^{1/2} \|_{L^2(\Omega_k)} . \qquad (1.14)$$

Cette quantité est locale, elle se calcule aisément en fonction de la donnée f et de la solution discrète u_δ. De plus, on déduit de (1.11), (1.12) et du Lemme 1.1 la première estimation.

THÉORÈME 1.2 : *Il existe une constante c_1 indépendante de δ telle qu'on ait la majoration*

$$\| u - u_\delta \|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1 \left(\sum_{k=1}^{K} (\eta_k^2 + \|f - i_\delta f\|_{L^2(\Omega_k)}^2) \right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (1.15)$$

Ceci est exactement une version optimale de l'inégalité (0.3). L'équation de base pour démontrer l'inégalité « inverse » s'écrit, pour toute fonction w de $H_0^1(\Omega)$:

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega_k} (i_\delta f + u_\delta'')(x)\, w(x)\, dx - \sum_{k=1}^{K-1} [u_\delta'](a_k)\, w(a_k)$$
$$= a(u - u_\delta, w) - \int_\Omega (f - i_\delta f)(x)\, w(x)\, dx . \quad (1.16)$$

THÉORÈME 1.3 : *Il existe une constante c_2 indépendante de δ telle que, pour $1 \leqslant k \leqslant K$, on ait la majoration :*

$$\eta_k \leqslant c_2 (\| u - u_\delta \|_{H^1(\Omega_k)} + h_k N_k^{-1} \| f - i_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)}) . \quad (1.17)$$

Démonstration : On applique l'équation (1.16) en choisissant la fonction w égale sur Ω_k à $(i_\delta f + u_\delta'')(x - a_{k-1})(a_k - x)$ et nulle ailleurs :

$$\int_{\Omega_k} (i_\delta f + u_\delta'')^2(x)\,(x - a_{k-1})(a_k - x)\, dx$$
$$= a(u - u_\delta, w) - \int_\Omega (f - i_\delta f)(x)\, w(x)\, dx$$
$$\leqslant |u - u_\delta|_{H^1(\Omega_k)} |w|_{H^1(\Omega_k)} + \| f - i_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)} \| w \|_{L^2(\Omega_k)} .$$

On écrit

$$|w|^2_{H^1(\Omega_k)} \leqslant 2 \int_{\Omega_k} (i_\delta f + u_\delta'')'^2 (x - a_{k-1})^2 (a_k - x)^2\, dx$$
$$+ 2 \int_{\Omega_k} (i_\delta f + u_\delta'')^2(x)\,(a_k + a_{k-1} - 2x)^2\, dx .$$

On utilise alors les deux inégalités inverses suivantes, que l'on démontre en décomposant φ_N dans la base formée par les dérivées L_n' des polynômes de Legendre, $1 \leqslant n \leqslant N + 1$:

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_{-1}^{1} \varphi_N'^2(\zeta)\,(1 - \zeta^2)^2\, d\zeta \leqslant c N^2 \int_{-1}^{1} \varphi_N^2(\zeta)\,(1 - \zeta^2)\, d\zeta , \quad (1.18)$$

et

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_{-1}^{1} \varphi_N^2(\zeta)\, d\zeta \leqslant cN^2 \int_{-1}^{1} \varphi_N^2(\zeta)\,(1-\zeta^2)\, d\zeta, \quad (1.19)$$

pour obtenir

$$|w|_{H^1(\Omega_k)} \leqslant cN_k \|(i_\delta f + u_\delta'')\,(x - a_{k-1})^{1/2}(a_k - x)^{1/2}\|_{L^2(\Omega_k)}.$$

De la même manière, on voit que

$$\|w\|_{L^2(\Omega_k)} \leqslant ch_k \|(i_\delta f + u_\delta'')\,(x - a_{k-1})^{1/2}(a_k - x)^{1/2}\|_{L^2(\Omega_k)}.$$

L'on en déduit

$$\|(i_\delta f + u_\delta'')\,(x - a_{k-1})^{1/2}(a_k - x)^{1/2}\|_{L^2(\Omega_k)} \leqslant cN_k |u - u_\delta|_{H^1(\Omega_k)} + c' h_k \|f - i_\delta f\|_{L^2(\Omega_k)}.$$

Il suffit alors de multiplier par N_k^{-1} pour conclure.

Remarque : Un facteur $h_k N_k^{-1}$ supplémentaire apparaît devant le terme $\|f - i_\delta f\|_{L^2(\Omega_k)}$ dans la majoration (1.17). Son absence dans la majoration (1.15) vient du fait qu'on utilise de l'intégration numérique et qu'on ne sait pas estimer la distance d'une fonction à son interpolée dans $H^{-1}(\Omega_k)$ mieux que dans $L^2(\Omega_k)$. Toutefois les majorations (1.15) et (1.17) satisfont au critère d'optimalité donné dans l'introduction. De plus, on sait calculer de façon explicite les constantes c_1 et c_2.

Remarque : On pourrait songer à remplacer l'indicateur η_k par l'indicateur modifié :

$$\tilde{\eta}_k = h_k N_k^{-1} \|i_\delta f + u_\delta''\|_{L^2(\Omega_k)}. \quad (1.20)$$

Si on a encore la majoration

$$\|u - u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1 \left(\sum_{k=1}^{K} (\tilde{\eta}_k^2 + \|f - i_\delta f\|_{L^2(\Omega_k)}^2) \right)^{\frac{1}{2}},$$

la majoration (1.17) doit être remplacée par

$$\tilde{\eta}_k \leqslant c_2(N_k \| u - u_\delta \|_{H^1(\Omega_k)} + h_k \| f - i_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)}) ,$$

de sorte qu'on perd l'optimalité de la famille d'indicateurs. On va retrouver cette difficulté en dimension 2.

Décomposition spectrale de l'indicateur

On définit sur chaque intervalle Ω_k les translatés des polynômes de Legendre L_n, $n \geqslant 0$:

$$L_{kn}(x) = L_n\left(- 1 + \frac{2(x - a_{k-1})}{h_k} \right) .$$

Puis on pose, pour $1 \leqslant k \leqslant K$ et pour $1 \leqslant m \leqslant N_k + 1$,

$$\eta_{km} = N_k^{-1} h_k^{-\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega_k} (i_\delta f + u_\delta'') (x) L_{km}'(x) (x - a_{k-1}) (a_k - x) dx .$$

Les η_{km} sont, à une constante près, les coefficients du résidu $i_\delta f + u_\delta''$ dans la base formée par les L_{km}'.

THÉORÈME 1.4 : *Il existe des constantes c_1' et c_2' indépendantes de δ telles qu'on ait les majorations*

$$\| u - u_\delta \|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1' \left(\sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{m=1}^{N+1} \eta_{km}^2 + \| f - i_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.21}$$

et

$$| \eta_{km} | \leqslant h_k^{1/2} N_k^{-1/2} \left| \frac{\int_{\Omega_k} (u - u_\delta)'(x) L_{km}(x) dx}{\int_{\Omega_k} L_{km}^2(x) dx} \right| + c_2' h_k N_k^{-1} \| f - i_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)} . \tag{1.22}$$

Démonstration : A partir de l'équation différentielle vérifiée par chaque polynôme de Legendre, on voit que

$$\int_{\Omega_k} L'_{km}(x)\, L'_{kn}(x)\,(x-a_{k-1})\,(a_k-x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{h_k}{2}\,\dfrac{m(m+1)}{m+\frac{1}{2}} & \text{si } m=n\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) En développant la restriction à Ω_k de $i_\delta f + u''_\delta$ dans la base formée par les L'_{km}, on en déduit que

$$\eta_k^2 = \sum_{m=1}^{N+1} \frac{2\left(m+\frac{1}{2}\right)}{m+1}\,\eta_{km}^2\,,$$

et on obtient la première inégalité à partir du Théorème 1.2.

2) En choisissant dans (1.16) w égal à $L'_{km}(x-a_{k-1})\,(a_k-x)$ sur Ω_k et nul ailleurs, on obtient

$$\int_{\Omega_k} (i_\delta f + u''_\delta)\,(x)\,L'_{km}(x)\,(x-a_{k-1})\,(a_k-x)\,dx$$

$$= \int_{\Omega_k} (u-u_\delta)'\,(x)\,\big(L'_{km}(x)\,(x-a_{k-1})\,(a_k-x)\big)'\,dx$$

$$- \int_{\Omega_k} (f-i_\delta f)\,(x)\,L'_{km}(x)\,(x-a_{k-1})\,(a_k-x)\,dx\,.$$

Pour conclure, on utilise l'équation différentielle dans le premier terme et une inégalité de Cauchy-Schwarz dans le second.

Remarque : On a en fait démontré une version locale de l'inégalité (1.21) :

$$\eta_k^2 \leqslant 2 \sum_{m=1}^{N+1} \eta_{km}^2\,.$$

D'autre part, dans l'inégalité (1.22), le premier terme est le coefficient de $(u - u_\delta)'$ dans la base formée par les L_{kn}, multiplié par $h_k^{1/2} N_k^{-1/2}$, et on peut remplacer la norme de $f - i_\delta f$ par son m-ième coefficient dans la base formée par les L'_{kn}, multiplié par la même quantité.

2. INDICATEURS PAR RÉSIDU EN DIMENSION 2

On suppose dorénavant que le domaine Ω est un polygone de $\mathbb{R}^2$ admettant une décomposition en rectangles disjoints Ω_k :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{K} \overline{\Omega}_k \quad \text{et} \quad \Omega_k \cap \Omega_{k'} = \Phi \,, \quad 1 \leqslant k < k' \leqslant K \,. \tag{2.1}$$

Pour simplifier, on suppose vérifiée la propriété d'isotropie suivante : le rapport de la longueur de chaque élément Ω_k à sa largeur est borné indépendamment de k et de la décomposition considérée. Comme précédemment, le paramètre de discrétisation δ est un K-uplet de couples (h_k, N_k), où h_k est la longueur du plus grand côté de Ω_k et N_k est un entier $\geqslant 2$.

Dans un premier temps, on fait en outre une hypothèse de conformité géométrique : l'intersection de deux éléments $\overline{\Omega}_k$ et $\overline{\Omega}_{k'}$ est soit vide, soit un sommet ou un côté entier de Ω_k et de $\overline{\Omega}_{k'}$, $1 \leqslant k < k' \leqslant K$.

Le problème discret

L'espace discret est encore défini par (1.1), où l'espace $\mathbb{P}_n(\mathcal{O})$ pour un domaine $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ est l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$ par rapport à chaque variable. A partir de la formule de quadrature (1.2) et avec des notations évidentes, on définit le produit discret :

$$(u, v)_\delta = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{j=0}^{N_k} u(\xi_i^{N_k}, \xi_j^{N_k})\, v(\xi_i^{N_k}, \xi_j^{N_k})\, \rho_i^{N_k} \rho_j^{N_k} \,.$$

On note encore $\mathcal{I}_\delta$ l'interpolé de Lagrange aux nœuds de coordonnées $(\xi_i^{N_k}, \xi_j^{N_k})$, à valeurs dans

$$Z_\delta = \{ v_\delta \in L^2(\Omega) \,;\, v_{\delta|\Omega_k} \in \mathbb{P}_{N_k}(\Omega_k) \}$$

(l'opérateur $\mathcal{I}_\delta$ est à valeurs dans Y_δ lorsque tous les N_k sont égaux).

Pour une donnée f continue sur Ω, le problème discret s'écrit :

trouver une fonction u_δ de X_δ telle que

$$\forall v_\delta \in X_\delta\,, \quad a_\delta(u_\delta, v_\delta) = (f, v_\delta)_\delta\,, \tag{2.2}$$

où la forme $a_\delta(\,.\,,\,.\,)$ est définie par

$$a_\delta(u_\delta, v_\delta) = (\mathbf{grad}\, u_\delta, \mathbf{grad}\, v_\delta)_\delta\,.$$

Les propriétés de la forme $a_\delta(\,.\,,\,.\,)$ sont bien connues, en particulier on a pour toute fonction v_δ de Y_δ

$$|v_\delta|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant a_\delta(v_\delta, v_\delta) \leqslant 3\,|v_\delta|^2_{H^1(\Omega)}\,.$$

On en déduit que le problème (2.2) admet une solution unique.

Premiers résultats d'approximation

On a aussi bien sûr l'inégalité (1.4) à condition de remplacer l'opérateur i_δ par $\mathcal{I}_\delta$.

Par un argument de tensorisation, on démontre [6, Thm 14.2] l'analogue de la majoration (1.8) sur le carré de référence $\Sigma =]-1, 1[^2$ ainsi qu'une autre majoration en norme $H^1(\Sigma)$: si $\mathcal{I}_N$ désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds (ξ_i^N, ξ_j^N), $0 \leqslant i, j \leqslant N$, à valeurs dans $\mathbb{P}_N(\Sigma)$, on a pour toute fonction v dans $H^s(\Omega)$, $s > 1$:

$$\| v - \mathcal{I}_N v \|_{L^2(\Sigma)} \leqslant c N^{-s} \| v \|_{H^s(\Sigma)}\,, \tag{2.3}$$

et pour toute fonction v dans $H^s(\Omega)$, $s > \frac{3}{2}$:

$$\| v - \mathcal{I}_N v \|_{H^1(\Sigma)} \leqslant c N^{1-s} \| v \|_{H^s(\Sigma)}\,. \tag{2.4}$$

On note aussi que l'argument de mise à l'échelle (1.6) est encore valable en dimension 2.

On rappelle [4, Thm 3.g.4] le résultat suivant : si Γ désigne un côté fixé du carré Σ, il existe un opérateur de relèvement R_N de $\mathbb{P}_N(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$ dans $\mathbb{P}_N(\Sigma)$ tel que, pour tout polynôme φ_N de $\mathbb{P}_N(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$:

(i) $R_N\, \varphi_N$ coïncide avec φ_N sur Γ et s'annule sur les trois autres côtés,

(ii) on a l'estimation

$$\| R_N\, \varphi_N \|_{H^1(\Sigma)} \leqslant c\, \| \varphi_N \|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,. \tag{2.5}$$

On appelle $\Gamma_{k,\ell}$, $1 \leqslant \ell \leqslant L(k)$, les côtés de Ω_k qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$, et on convient de noter $R_{N_k}^{k,\ell}$ l'opérateur de relèvement de $\mathbb{P}_{N_k}(\Gamma_{k,\ell}) \cap H_0^1(\Gamma_{k,\ell})$ dans $\mathbb{P}_{N_k}(\Omega_k)$ construit à partir de l'opérateur ci-dessus.

On obtient alors facilement le résultat de base d'approximation dans X_δ : pour cela, on introduit l'opérateur de projection orthogonale $\Pi_\delta^{1,0}$ de $H_0^1(\Omega)$ sur X_δ.

PROPOSITION 2.1 : *Pour tous réels* $s_k \geqslant 1$, *on a pour toute fonction* v *de* $H_0^1(\Omega)$ *dont la restriction à* Ω_k *est dans* $H^{s_k}(\Omega_k)$, *la majoration :*

$$\| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{H^1(\Omega)} \leqslant c \sum_{k=1}^{K} h_k^{\inf\{s_k - 1, N_k\}} N_k^{1-s_k} \| v \|_{H^{s_k}(\Omega_k)} . \tag{2.6}$$

Démonstration : On suppose ici tous les s_k supérieurs à $\frac{3}{2}$, le résultat général s'en déduisant par un argument d'interpolation. On pose alors :

$$v_\delta = \mathcal{I}_\delta v + \sum_{1 \leqslant k \neq k' \leqslant K} \sum_{\ell=1}^{L(k)} \alpha_{k,k',\ell} R_{N_k}^{k,\ell}((\mathcal{I}_\delta v)_{|\Omega_{k'}} - (\mathcal{I}_\delta v)_{|\Omega_k}) , \tag{2.7}$$

où le coefficient $\alpha_{k,k',\ell}$ est égal à 1 lorsque $\overline{\Omega}_k$ et $\overline{\Omega}_{k'}$ partagent un côté $\Gamma_{k,\ell}$ et que N_k est soit $> N_{k'}$, soit égal à $N_{k'}$ avec $k < k'$, et nul dans tous les autres cas. On vérifie facilement que v_δ appartient à X_δ, et on déduit de (2.5) la majoration

$$\| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{H^1(\Omega)} \leqslant c | v - v_\delta |_{H^1(\Omega)} \leqslant c \left(\sum_{k=1}^{K} | v - \mathcal{I}_\delta v |_{H^1(\Omega_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

La propriété (2.4) de l'opérateur d'interpolation permet alors de conclure.

Lorsque la solution u du problème (0.4) est telle que sa restriction à Ω_k est dans $H^{s_k}(\Omega_k)$, $s_k \geq 1$, et la donnée f telle que sa restriction à Ω_k est dans $H^{\sigma_k}(\Omega_k)$, $\sigma_k > 1$, on déduit de (1.4) et de ce qui précède la majoration d'erreur *a priori* :

$$\|u - u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sum_{k=1}^{K} \left(h_k^{\inf\{s_k - 1, N_k\}} N_k^{1 - s_k} \|u\|_{H^{s_k}(\Omega_k)} \right.$$

$$\left. + h_k^{\inf\{\sigma_k, N_k + 1\}} N_k^{-\sigma_k} \|f\|_{H^{\sigma_k}(\Omega_k)} \right). \quad (2.8)$$

Indicateurs d'erreur

Pour toute fonction v continuement dérivable sur les deux rectangles contenant $\Gamma_{k,\ell}$ dans leur frontière, $[\partial_n v]$ désigne le saut de la dérivée normale de v à travers $\Gamma_{k,\ell}$ (on ne précisera pas le signe). Au vu des résultats obtenus en dimension 1, on introduit sur chaque rectangle Ω_k la fonction d_k, produit des distances aux quatre côtés, et sur chaque côté $\Gamma_{k,\ell}$ la fonction $d_{k,\ell}$, produit des distances aux deux extrémités. Puis on pose, pour un paramètre α, $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\eta_k^\alpha = h_k^{1-2\alpha} N_k^{-1} \|(\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta) d_k^{\alpha/2}\|_{L^2(\Omega_k)}$$

$$+ \frac{1}{2} h_k^{1/2-\alpha} N_k^{-\sup\{1/2, \alpha\}} \sum_{\ell=1}^{L(k)} \|[\partial_n u_\delta] d_{k,\ell}^{\alpha/2}\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})}. \quad (2.9)$$

Bien sûr, les choix les plus naturels pour α sont 0 et 1. On va toutefois établir les majorations pour toutes les valeurs de α, de façon à optimiser le choix de l'indicateur.

Remarque : Lorsque α est nul, on peut remplacer les intégrales figurant dans la définition de η_k^0 par la formule de quadrature, l'indicateur ainsi modifié étant équivalent au précédent. Le problème discret (2.2) impliquant des équations de collocation aux nœuds $(\xi_i^{N_k}, \xi_j^{N_k})$, $1 \leq i, j \leq N - 1$, internes à chaque Ω_k, on note alors que seuls des termes sur les bords des Ω_k interviennent dans l'indicateur modifié. Lorsque α est positif, pour faciliter le calcul des η_k^α, on peut également remplacer chaque intégrale pour l'analogue par translation et homothétie de la mesure $(1 - \zeta^2)^\alpha \, d\zeta$ par une formule de Gauss-Lobatto appropriée, cela oblige toutefois à réinterpoler la solution discrète et la donnée sur de nouvelles grilles.

Pour établir les propriétés de cet indicateur en fonction de α, on aura besoin de propriétés fines de l'opérateur $\Pi_\delta^{1,0}$. On commence par un résultat de dualité, pour lequel on utilisera la notation suivante : pour toute fonction g de $H^{-1}(\Omega)$, on désigne par $T(g)$ la solution w du problème

$$\begin{cases} -\Delta w = g & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

PROPOSITION 2.2 : *On a pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ la majoration :*

$$\| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\sum_{k=1}^{K} \tau_k h_k N_k^{-1} \right) \| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.11}$$

avec

$$\tau_k = \begin{cases} \sup\{1, (h_k N_k)^{-1/3} (\log N_k)^{1/2}\} & \textit{si } \Omega_k \textit{ contient un coin non convexe de } \Omega, \\ 1 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration : L'argument de dualité s'écrit :

$$\| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{L^2(\Omega)} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_\Omega (v - \Pi_\delta^{1,0} v)(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}{\| g \|_{L^2(\Omega)}}$$

$$= \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{a(v - \Pi_\delta^{1,0} v, T(g))}{\| g \|_{L^2(\Omega)}},$$

d'où la majoration :

$$\| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{L^2(\Omega)} \leq | v - \Pi_\delta^{1,0} v |_{H^1(\Omega)} \sup_{g \in L^2(\Omega)} \inf_{w_\delta \in X_\delta} \frac{\| T(g) - w_\delta \|_{H^1(\Omega)}}{\| g \|_{L^2(\Omega)}}.$$

1) Lorsque l'ouvert Ω est convexe, la fonction $T(g)$ appartient à $H^2(\Omega)$ et on déduit immédiatement la majoration cherchée de la Proposition 2.1.

2) Lorsque l'ouvert Ω n'est pas convexe, on écrit (*cf.* [11]) la solution $T(g)$ comme somme d'une fonction de $H^2(\Omega)$ et de singularités S à support contenu dans un petit voisinage de coins non convexes, se comportant comme

la distance à ces coins à la puissance $\frac{2}{3}$. Chaque fonction w étant envoyée par une transformation affine par morceaux sur une fonction $\hat{w}$ définie sur le domaine de référence $\hat{\Delta}$ union de trois carrés, on sait alors [5, Prop. 10] que

$$\inf_{S_\delta \in X_\delta} \|\hat{S} - \hat{S}_\delta\|_{H^1(\hat{\Delta})} \leqslant c \sum_{j=1}^{3} N_{k_j}^{-4/3} (\log N_{k_j})^{1/2},$$

où Ω_{k_1}, Ω_{k_2} et Ω_{k_3} sont les trois rectangles contenant le coin non convexe. On conclut en observant que :

$$\inf_{S_\delta \in X_\delta} \|S - S_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\left(\sup_{1 \leqslant j \leqslant 3} h_{k_j}^{2/3}\right) \inf_{S_\delta \in X_\delta} \|\hat{S} - \hat{S}_\delta\|_{H^1(\hat{\Delta})}$$

et que le rapport d'un h_{k_j} à l'autre est borné indépendamment de la décomposition.

Une version plus fine de ce résultat nécessite des propriétés de régularité de la solution du problème (2.10) avec un second membre moins régulier. On note d la fonction égale à d_k sur chaque Ω_k. On introduit sur chaque Ω_k l'espace de Sobolev $H_\beta^m(\Omega_k)$, pour tout entier positif m et $\beta > -1$, constitué des fonctions dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m appartiennent à

$$L_\beta^2(\Omega_k) = \left\{ v : \Omega_k \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \,;\, \int_{\Omega_k} v^2(\mathbf{x})\, d_k^\beta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < +\infty \right\},$$

on le munit des norme et semi-norme correspondantes. On utilisera également les espaces $H_\beta^m(\Lambda)$ des fonctions qui appartiennent, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m, à

$$L_\beta^2(\Lambda) = \left\{ \varphi : \Lambda \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \,;\, \int_{-1}^{1} \varphi^2(\zeta)\,(1-\zeta^2)^\beta\, d\zeta < +\infty \right\},$$

et les espaces intermédiaires $H_\beta^s(\Lambda)$, s réel positif, construits par interpolation hilbertienne.

LEMME 2.3 : *Soit β un paramètre, $0 \leqslant \beta < \frac{1}{2}$. Pour toute fonction g de $L^2(\Omega)$, la restriction à Ω_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, de la solution $T(gd^{-\beta/2})$:*

— (i) *appartient à $H_\beta^2(\Omega_k)$ lorsque Ω_k ne contient aucun coin non convexe de Ω,*

— (ii) *est la somme d'une fonction de* $H^2_\beta(\Omega_k)$ *et d'une ou plusieurs fonctions, se comportant chacune comme la puissance* $\frac{2}{3}$ *de la distance à un coin non convexe de* Ω *contenu dans* $\overline{\Omega}_k$, *sinon.*

Démonstration : On remarque d'abord que la restriction $gd_k^{-\beta/2}$ de la fonction $gd^{-\beta/2}$ à Ω_k appartenant à $H^{-\beta}(\Omega_k)$, la fonction $T(gd^{-\beta/2})$ est encore définie de façon unique dans $H^1_0(\Omega)$. D'autre part, le résultat est démontré dans [6, Thm 18.14] lorsque le domaine Ω est un seul rectangle (il est également vrai lorsque les conditions aux limites de Dirichlet sont remplacées par des conditions aux limites de Neumann). L'idée est alors d'introduire une fonction de troncature régulière χ, à valeurs entre 0 et 1, et de poser : $w = \chi T(gd^{-\beta/2})$, de sorte que Δw appartient à chaque $L^2_\beta(\Omega_k)$.

1) Dans le cas où le support de χ est contenu dans un seul Ω_k, $\Delta(\chi T(gd^{-\beta/2}))$ appartient à $L^2(\Omega_k)$, donc $\chi T(gd^{-\beta/2})$ appartient à $H^2(\Omega_k)$.

2) Dans le cas où le support de χ intersecte la frontière $\Gamma_{k,\ell}$ de deux ouverts Ω_k et $\Omega_{k'}$ (mais non ses extrémités) et est inclus dans $\Omega_k \cup \Gamma_{k,\ell} \cup \Omega_{k'}$, on utilise l'argument suivant : on suppose, sans restriction, que $\Gamma_{k,\ell}$ est contenu dans l'axe $y = 0$; la fonction

$$w(x,y) - w(x,-y) \quad (\text{resp. } (w(x,y) + w(x,-y)))$$

a son laplacien dans $L^2_\beta(\tilde{\Omega}_k)$, où $\tilde{\Omega}_k$ est l'intersection de Ω_k et du symétrique de $\Omega_{k'}$ par rapport à l'axe $y = 0$; de plus, elle vérifie des conditions de Dirichlet (resp. de Neumann) homogènes sur $\partial\tilde{\Omega}_k$; elle appartient donc à $H^2_\beta(\Omega_k)$, et il en est de même pour la fonction w.

3) Dans le cas où le support de χ contient un coin commun à quatre Ω_k, on utilise exactement le même argument en considérant sur un des Ω_k, la somme de la fonction w sur les trois autres domaines, affectée des signes appropriés.

4) Lorsque le support de χ intersecte la frontière de $\partial\Omega$, on utilise la technique de [12], en particulier pour identifier les fonctions singulières au voisinage des coins non convexes.

LEMME 2.4 : *Soit* β *un paramètre,* $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$. *On a pour toute fonction* v *de* $H^2_\beta(\Sigma)$ *la majoration :*

$$\| v - \mathcal{I}_N v \|_{H^1(\Sigma)} \leq c\, N^{\frac{\beta}{2}-1} \| v \|_{H^2_\beta(\Sigma)} . \tag{2.12}$$

Démonstration : Grâce à l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, il suffit de majorer les quantités $\| \partial_x(v - \mathcal{I}_N v) \|_{L^2(\Sigma)}$ et $\| \partial_y(v - \mathcal{I}_N v) \|_{L^2(\Sigma)}$ et même l'une d'entre elles par raison de symétrie. On rappelle que l'opérateur $\mathcal{I}_N$ est égal à $i_N^{(x)} \circ i_N^{(y)}$, où $i_N^{(x)}$ et $i_N^{(y)}$ sont les opérateurs d'interpolation appliqués dans chaque direction. De la stabilité de l'opérateur $i_N^{(x)}$ dans $H^1(\Lambda)$ (voir [6, (13.27)]), on déduit que

$$\| \partial_x (v - \mathcal{I}_N v) \|_{L^2(\Sigma)} \leqslant \| \partial_x (v - i_N^{(x)} v) \|_{L^2(\Sigma)} + c \| \partial_x v - i_N^{(y)} \partial_x v \|_{L^2(\Sigma)} .$$

On va majorer successivement chacun de ces deux termes.

1) On pose, avec les mêmes notations que précédemment,

$$v_N^{(x)}(x, y) = v(-1, y) + \int_{-1}^{x} (\pi_{N-1}^{(x)} (\partial_x v) (\,.\, , y)) (t) \, dt .$$

En utilisant encore une fois la stabilité de $i_N^{(x)}$, on obtient

$$\| \partial_x (v - i_N^{(x)} v) \|_{L^2(\Sigma)} \leqslant c \; \| \partial_x v - \pi_{N-1}^{(x)} \partial_x v \|_{L^2(\Sigma)} .$$

On rappelle [6, Rem. 6.3] la majoration, pour toute fonction φ de $H_s^s(\Lambda)$ avec $0 \leqslant r \leqslant s$,

$$\| \varphi - \pi_N \varphi \|_{H_r^r(\Lambda)} \leqslant c N^{r-s} \| \varphi \|_{H_s^s(\Lambda)} . \tag{2.13}$$

On en déduit alors

$$\| \partial_x (v - i_N^{(x)} v) \|_{L^2(\Sigma)} \leqslant c N^{\beta/2 - 1} \| \partial_x v \|_{H_{1-\beta/2}^{1-\beta/2}(\Lambda ; L^2(\Lambda))} .$$

Comme β est $\leqslant 1 - \frac{\beta}{2}$, on obtient la majoration cherchée à partir de l'inclusion de $H_\beta^2(\Omega)$ dans $H_\beta^{2-\beta/2}(\Lambda ; H_\beta^{\beta/2}(\Lambda))$, donc dans $H_\beta^{2-\beta/2}(\Lambda ; L^2(\Lambda))$ (voir [6, Thm 18.2]).

2) Pour majorer le second terme, on utilise l'estimation de stabilité, vraie pour toute fonction φ de $H_r^r(\Lambda)$ s'annulant en ± 1, $r > \frac{1}{2}$, (voir [6, (13.21)]) :

$$\| i_N \varphi \|_{L^2(\Lambda)} \leqslant c (\| \varphi \|_{L^2(\Lambda)} + N^{-r} \| \varphi \|_{H_r^r(\Lambda)}) .$$

La fonction v étant continue sur Σ, on introduit ici les fonctions

$$w(x,y) \quad = v(x,y) - v(x,-1)\frac{1-y}{2} - v(x,+1)\frac{1+y}{2}$$

$$w_N^{(y)}(x,y) = \pi_N^{(y)} w(x,y) + \pi_N^{(y)} w(x,-1)(-1)^{N-1}\left(\frac{L_N'(y)}{N(N+1)} - \frac{L_{N-1}'(y)}{N(N-1)}\right)$$

$$+ \pi_N^{(y)} w(x,+1)\left(\frac{L_N'(y)}{N(N+1)} + \frac{L_{N-1}'(y)}{N(N-1)}\right).$$

La fonction w appartient à $H^1(\Lambda ; H_\beta^{1-\beta/2}(\Lambda))$, avec sa norme bornée par une constante fois celle de v. D'autre part, on peut facilement vérifier que $\|L_n'\|_{H_r^r(\Lambda)}$ est $\leqslant n^{r+1}$, et on déduit de ce qui précède que

$$\|\partial_x v - i_N^{(y)} \partial_x v\|_{L^2(\Sigma)} = \|\partial_x w - i_N^{(y)} \partial_x w\|_{L^2(\Sigma)}$$

$$\leqslant c(\|\partial_x w - \pi_N^{(y)} \partial_x w\|_{L^2(\Sigma)}$$

$$+ N^{-r}\|\partial_x w - \pi_N^{(y)} \partial_x w\|_{L^2(\Lambda ; H_r^r(\Lambda))}$$

$$+ N^{-1}\|\pi_N^{(y)} \partial_x w(x, \pm 1)\|_{L^2(\Lambda)}).$$

On utilise alors (2.13), avec $s = 1 - \frac{\beta}{2}$, pour majorer les deux premiers termes. Pour le dernier, on note que pour toute fonction $\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n L_n$ dans $H_s^s(\Lambda)$, $\quad s < 1$,

$$|\pi_N \varphi(\pm 1)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |\varphi_n| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{n+\frac{1}{2}}{n^s(n+1)^s}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^2 \frac{n^s(n+1)^s}{n+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c N^{1-s} \|\varphi\|_{H_s^s(\Lambda)},$$

ce qui donne le résultat cherché.

PROPOSITION 2.5 : *Soit β un paramètre, $0 < \beta < \frac{1}{2}$. On a pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ la majoration :*

$$\|(v - \Pi_\delta^{1,0} v)\, d^{-\beta/2}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\Big(\sum_{k=1}^{K} \tau_k^\beta\, h_k^{1-2\beta} N_k^{\beta/2-1}\Big)\, \|v - \Pi_\delta^{1,0} v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.14}$$

avec

$$\tau_k^\beta = \begin{cases} \sup\{1, h_k^{2\beta-1/3} N_k^{-\beta/2-1/3} (\log N_k)^{1/2}\} \\ 1 \end{cases}$$

si Ω_k contient un coin non convexe de Ω,
sinon.

Démonstration : Comme précédemment, on a la majoration

$$\|(v - \Pi_\delta^{1,0} v)\, d^{-\beta/2}\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqslant |v - \Pi_\delta^{1,0} v|_{H^1(\Omega)} \sup_{g \in L^2(\Omega)} \inf_{w_\delta \in X_\delta} \frac{\|T(gd^{-\beta/2}) - w_\delta\|_{H^1(\Omega)}}{\|g\|_{L^2(\Omega)}}.$$

1) On suppose tout d'abord l'ouvert Ω convexe. On choisit, comme dans la démonstration de la Proposition 2.1,

$$w_\delta = \mathcal{I}_\delta T(gd^{-\beta/2}) + \sum_{1 \leqslant k \neq k' \leqslant K} \sum_{\ell=1}^{L(k)} \alpha_{k,k',\ell} R_{N_k}^{k,\ell}\big((\mathcal{I}_\delta T(gd^{-\beta/2}))_{|\Omega_{k'}}$$
$$- (\mathcal{I}_\delta T(gd^{-\beta/2}))_{|\Omega_k}\big), \tag{2.15}$$

et on obtient le résultat désiré, à partir de la majoration améliorée du Lemme 2.4.

2) Lorsque l'ouvert Ω n'est pas convexe, on écrit la solution $T(gd^{-\beta})$ sous la forme d'une partie régulière pour laquelle on utilise l'approximation (2.15) et de fonctions singulières au voisinage des coins non convexes auxquelles on applique les mêmes arguments que dans la démonstration de la Proposition 2.2. On en déduit encore le résultat désiré.

On introduit ici le « squelette » $\mathscr{S}$ de la décomposition :

$$\mathscr{S} = \bigcup_{k=1}^{K} \bigcup_{\ell=1}^{L(k)} \overline{\Gamma}_{k,\ell}\,. \tag{2.16}$$

COROLLAIRE 2.6 : *On a pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ la majoration :*

$$\| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{L^2(\mathscr{S})} \leqslant c \left(\sum_{k=1}^{K} \tau_k h_k N_k^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{H^1(\Omega)}\,. \tag{2.17}$$

Démonstration : On note φ la trace de $v - \Pi_\delta^{1,0} v$ sur $\mathscr{S}$. Il est facile de vérifier, par passage au carré de référence Σ, l'existence d'une fonction w de $H_0^1(\Omega)$ dont la restriction w_k à chaque Ω_k a sa dérivée normale (extérieure à Ω_k) égale à φ, appartient à $H^2(\Omega_k)$ et vérifie

$$|w_k|_{H^2(\Omega_k)} \leqslant c (h_k^{-1} \| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{L^2(\Omega_k)} + | v - \Pi_\delta^{1,0} v |_{H^1(\Omega_k)})\,. \tag{2.18}$$

(en effet, les conditions de compatibilité aux coins des Ω_k [4, Thm 2.d.9] ne font intervenir que les dérivées premières de w, on peut donc rendre la fonction w continue sur $\overline{\Omega}$). Toutefois, lorsque $\overline{\Omega}_k$ contient un coin non convexe de Ω, on utilisera de préférence la majoration suivante, vraie dans l'union Δ des trois rectangles contenant ce coin :

$$|w|_{H^2(\Delta)} \leqslant c\, | v - \Pi_\delta^{1,0} v |_{H^1(\Delta)}\,,$$

de façon à éviter l'éventuelle perte de convergence due aux τ_k. On a alors

$$\int_{\mathscr{S}} (v - \Pi_\delta^{1,0} v) (\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial\Omega_k} (v - \Pi_\delta^{1,0} v) (\tau)\, (\partial_n w_k) (\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega_k} (\mathbf{grad}\, (v - \Pi_\delta^{1,0} v) \,.\, \mathbf{grad}\, (w_k - \Pi_\delta^{1,0} w_k)$$

$$+ (v - \Pi_\delta^{1,0} v) (\mathbf{x})\, (\Delta w_k) (\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} | v - \Pi_\delta^{1,0} v |_{H^1(\Omega_k)} | w_k - \Pi_\delta^{1,0} w_k |_{H^1(\Omega_k)}$$

$$+ \| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{L^2(\Omega_k)} | w_k |_{H^2(\Omega_k)}\,.$$

On peut alors conclure en utilisant les Propositions 2.1 et 2.2.

COROLLAIRE 2.7 : *Soit β un paramètre, $0 < \beta < \frac{1}{2}$. On a pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ la majoration :*

$$\left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{\ell=1}^{L(k)} \| (v - \Pi_\delta^{1,0} v)\, d_{k,\ell}^{-\beta/2} \|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{K} \tau_k^\beta h_k^{1-2\beta} N_k^{\beta/2-1} \right)^{\frac{1}{2}} \| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{H^1(\Omega)} . \quad (2.19)$$

Démonstration : Elle repose sur les mêmes arguments que la démonstration précédente : en effet, il est également prouvé dans [4, Thm 2.d.2] qu'il existe une fonction w de $H_0^1(\Omega)$ dont la restriction w_k à chaque Ω_k a sa dérivée normale égale à $(v - \Pi_\delta^{1,0} v)\, d_{k,\ell}^{-\beta}$, appartient à $H_\beta^2(\Omega_k)$ et vérifie

$$|w_k|_{H_\beta^2(\Omega_k)} \leqslant c(h_k^{-1} \| v - \Pi_\delta^{1,0} v \|_{L^2(\Omega_k)} + |v - \Pi_\delta^{1,0} v|_{H^1(\Omega_k)}) , \quad (2.20)$$

avec la même modification que précédemment si Ω_k contient un coin non convexe de Ω.

On est maintenant en mesure de démontrer la première inégalité concernant la famille d'indicateurs introduits en (2.9). Pour cela, on définit les sous-domaines Δ_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, comme l'intérieur de l'union des $\overline{\Omega}_{k'}$ dont l'intersection avec $\overline{\Omega}_k$ est non vide (il y en a au plus 9) ; on note aussi N_{k-} le plus petit des $N_{k'}$ pour $\Omega_{k'}$ inclus dans Δ_k et λ_{k-} le quotient de N_k par N_{k-}.

THÉORÈME 2.8 : *Soit α un paramètre, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Lorsque α est $< \frac{1}{2}$, il existe une constante c_1 indépendante de δ telle qu'on ait la majoration*

$$\| u - u_\delta \|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1 \left(\sum_{k=1}^{K} ((\tau_{k-}^\alpha\, \lambda_{k-}\, N_k^{\alpha/2}\, \eta_k^\alpha)^2 + \| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)}^2) \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (2.21)$$

avec

$$\tau_{k-}^\alpha = \begin{cases} \sup \{ 1, h_k^{2\alpha - 1/3} N_{k-}^{-\alpha/2 - 1/3} (\log N_{k-})^{1/2} \} \\ 1 \end{cases}$$

si Δ_k contient un coin non convexe de Ω,
sinon.

Lorsque α *est* $\geqslant \frac{1}{2}$, *il existe pour tout* $\varepsilon > 0$, *une constante* c_1 *indépendante de* δ *telle qu'on ait la majoration*

$$\|u - u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1 \left(\sum_{k=1}^{K} \left((\lambda_{k-} N_k^{2\alpha + \varepsilon - \frac{3}{4}} \eta_k^\alpha)^2 + \|f - \mathcal{I}_\delta f\|^2_{L^2(\Omega_k)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (2.22)$$

Démonstration : Soit β un réel quelconque, $0 \leqslant \beta < \frac{1}{2}$. Comme dans le cas de la dimension 1, on calcule

$$\|u - u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_\delta, v)}{|v|_{H^1(\Omega)}} .$$

On écrit alors que, pour tout v_δ dans $X_{\delta -}$ (avec la même notation qu'en dimension 1)

$$a(u - u_\delta, v) = \sum_{k=1}^{K} \left(\int_{\Omega_k} \mathbf{grad}\,(u - u_\delta) \,.\, \mathbf{grad}\,(v - v_\delta)\, d\mathbf{x} \right.$$

$$\left. + \int_{\Omega_k} (f - \mathcal{I}_\delta f)(\mathbf{x})\, v_\delta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \left(\int_{\Omega_k} (\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta)(\mathbf{x})\, (v - v_\delta)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right.$$

$$+ \int_{\Omega_k} (f - \mathcal{I}_\delta f)(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$\left. + \sum_{\ell=1}^{L(k)} \int_{\Gamma_{k,\ell}} \partial_n (u - u_\delta)(\tau)\, (v - v_\delta)(\tau)\, d\tau \right) .$$

L'idée de localisation est la suivante : on introduit une partition de l'unité par des fonctions ψ_k continuement dérivables sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans [0, 1] et à support contenu dans Δ_k. Puis on choisit

$$v_\delta = \sum_{k=1}^{K} \Pi_{\delta,k}^{1,0}(\psi_k v),$$

où $\Pi_{\delta,k}^{1,0}$ désigne l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Delta_k)$ sur le sous-espace de $H_0^1(\Delta_k)$ formé de restrictions de fonctions de X_δ. On obtient alors

$$a(u - u_\delta, v) \leqslant \sum_{k=1}^{K} \left(\|(\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta)\, d_k^{\beta/2}\|_{L^2(\Omega_k)} \, \|(v - v_\delta\, d_k^{-\beta/2})\|_{L^2(\Omega_k)} \right.$$

$$\left. + \|f - \mathcal{I}_\delta f\|_{L^2(\Omega_k)} + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{L(k)} \|[\partial_n u_\delta]\, d_{k,\ell}^{\beta/2}\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})} \|(v - v_\delta)\, d_{k,\ell}^{-\beta/2}\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})} \right).$$

On déduit le résultat cherché, pour $\alpha = \beta$, de la Proposition 2.5 et du Corollaire 2.7 (en notant que, si $\Omega_{k'}$ est inclus dans Δ_k, le rapport de $h_{k'}$ à h_k est majoré et minoré indépendamment de la décomposition). Lorsque α est $\geqslant \frac{1}{2}$, on utilise l'analogue à poids de l'inégalité (1.19), vraie pour tout $\gamma > -1$,

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_{-1}^{1} \varphi_N^2(\zeta)\,(1 - \zeta^2)^\gamma\, d\zeta \leqslant cN^2 \int_{-1}^{1} \varphi_N^2(\zeta)\,(1 - \zeta^2)^{\gamma+1}\, d\zeta, \tag{2.23}$$

dans chaque direction pour le premier terme de η_k^α et dans la direction tangentielle à chaque $\Gamma_{k,\ell}$ pour le second, de façon à majorer η_k^β en fonction de η_k^α ; on prend finalement β égal à $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\varepsilon$.

Supposons pour simplifier que le rapport λ_{k-} est borné indépendamment de k et de δ. Lorsque l'ouvert Ω est convexe, les σ_{k-}^α sont égaux à 1, de sorte qu'on a donc obtenu une majoration optimale pour l'indicateur η_k^0 (la démonstration étant d'ailleurs beaucoup plus simple que pour les autres valeurs de α). Ceci est encore vrai lorsque l'ouvert Ω est non convexe si les N_k

correspondant à des sous-domaines Ω_k contenant un coin non convexe de Ω sont suffisamment grands par rapport à h_k. La majoration n'est plus optimale pour $\alpha > 0$: en particulier, pour $\alpha = 1$, on perd une puissance de N_k de l'ordre de $\frac{5}{4}$.

Pour démontrer l'inégalité réciproque, on s'appuie encore sur une formule analogue à (1.16), vraie pour toute fonction w de $H_0^1(\Omega)$ (on note que la solution u du problème (0.4) a sa trace normale continue à travers les côtés des Ω_k contenus dans $\mathcal{S}$) :

$$\sum_{k=1}^{K} \left(\int_{\Omega_k} (\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta)(\mathbf{x})\, w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{L(k)} \int_{\Gamma_{k,\ell}} [\partial_n u_\delta](\tau)\, w(\tau)\, d\tau \right)$$
$$= a(u - u_\delta, w) - \int_\Omega (f - \mathcal{I}_\delta f)(\mathbf{x})\, w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,. \quad (2.24)$$

Ici, pour $1 \leq k \leq K$, on note ω_k l'union des sous-domaines $\Omega_{k'}$ qui partagent au moins un côté avec Ω_k, N_{k+} le plus grand des $N_{k'}$ tels que $\Omega_{k'}$ soit contenu dans ω_k et λ_{k+} le rapport de N_{k+} à N_k.

THÉORÈME 2.9 : *Soit α un paramètre, $0 \leq \alpha \leq 1$. Lorsque α est $> \frac{1}{2}$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, une constante c_2 indépendante de δ telle que, pour $1 \leq k \leq K$, on ait la majoration :*

$$\eta_k^\alpha \leq c_2\, \lambda_{k+} \left(N_{k+}^{1+\varepsilon-\alpha} \| u - u_\delta \|_{H^1(\omega_k)} + h_k N_k^{-1} \| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\omega_k)} \right) \quad (2.25)$$

(cette estimation est vraie avec $\varepsilon = 0$ pour $\alpha < 1$). Lorsque α est $\leq \frac{1}{2}$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, une constante c_2 indépendante de δ telle que, pour $1 \leq k \leq K$, on ait la majoration :

$$\eta_k^\alpha \leq c_2\, \lambda_{k+} \left(N_{k+}^{3/2+\varepsilon-2\alpha} \| u - u_\delta \|_{H^1(\omega_k)} + h_k N_k^{2\varepsilon-2\alpha} \| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\omega_k)} \right). \quad (2.26)$$

Démonstration : On majore successivement les deux termes de η_k^α.

1) Soit β un réel $> \frac{1}{2}$. On choisit dans (2.24) la fonction w égale à $(\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta)\, d_k^\beta$ sur Ω_k et nulle ailleurs, ce qui donne

$$\| (\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta)\, d_k^{\beta/2} \|_{L^2(\Omega_k)}^2 \leq | u - u_\delta |_{H^1(\Omega_k)}\, | w |_{H^1(\Omega_k)}$$
$$+ \| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)} \| w \|_{L^2(\Omega_k)}\,.$$

On calcule le gradient de la fonction w ; puis on combine l'inégalité inverse (1.18) avec l'inégalité standard [6, Thm 5.1]

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_{-1}^{1} \varphi_N'^2(\zeta)\, d\zeta \leqslant c N^4 \int_{-1}^{1} \varphi_N^2(\zeta)\, d\zeta ,$$

pour obtenir

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_{-1}^{1} \varphi_N'^2(\zeta)\,(1-\zeta^2)^{2\alpha}\, d\zeta \leqslant c N^{2(2-\alpha)} \int_{-1}^{1} \varphi_N^2(\zeta)\,(1-\zeta^2)^{\alpha}\, d\zeta ; \quad (2.27)$$

on utilise alors l'inégalité précédente ainsi que (2.23) pour déduire

$$\|(\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta)\, d_k^{\beta/2}\|_{L^2(\Omega_k)} \leqslant c h_k^{2\beta-1} N_k^{2-\beta} |u - u_\delta|_{H^1(\Omega_k)} + c' h_k^{2\beta} \|f - \mathcal{I}_\delta f\|_{L^2(\Omega_k)} . \quad (2.28)$$

Lorsque α est $> \frac{1}{2}$, on prend $\beta = \alpha$ et on conclut en multipliant par $h_k^{1-2\alpha} N_k^{-1}$. Pour traiter le cas $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, on prend $\beta = \frac{1}{2} + \varepsilon$ et on utilise encore une fois l'inégalité (2.23) dans chaque direction, ce qui donne :

$$\|(\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta)\, d_k^{\alpha/2}\|_{L^2(\Omega_k)} \leqslant c h_k^{2\alpha-1} N_k^{5/2+\varepsilon-2\alpha} |u - u_\delta|_{H^1(\Omega_k)} + c' h_k^{2\alpha} N_k^{1+2\varepsilon-2\alpha} \|f - \mathcal{I}_\delta f\|_{L^2(\Omega_k)} ,$$

puis on multiplie par $h_k^{1-2\alpha} N_k^{-1}$.

2) Soit de nouveau β un réel, $\frac{1}{2} < \beta < 1$. En supposant par exemple que $\Gamma_{k,\ell}$ est parallèle à l'axe des x et que $\Gamma_{k,\ell}$ est également un côté $\Gamma_{k',\ell'}$ de $\Omega_{k'}$, on utilise (2.24) avec :

$$w(x, y) = \frac{1}{2}\,[\partial_n u_\delta]\,(x)\, d_{k,\ell}^{\beta}(x)\, \varphi_{k,\ell}(y) ,$$

où $\varphi_{k,\ell}$ est une fonction continue égale à 1 sur l'ordonnée de $\Gamma_{k,\ell}$, définie séparément sur Ω_k et $\Omega_{k'}$ par homothétie dans chaque direction et translation à partir de fonctions φ_k et $\varphi_{k'}$ sur $]-1,1[$. On observe alors que $\| [\partial_n u_\delta] \, d_{k,\ell}^{\beta/2} \|^2_{L^2(\Gamma_{k,\ell})}$ se majore par une constante fois la somme des cinq termes suivants et de leurs analogues sur $\Omega_{k'}$:

$$\| (\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta) \, d_k^{\beta/2} \|_{L^2(\Omega_k)} \; \| [\partial_n u_\delta] \, d_{k,\ell}^{\beta} \, d_k^{-\beta/2} \, \varphi_{k,\ell} \|_{L^2(\Omega_k)}$$

$$| u - u_\delta |_{H^1(\Omega_k)} \| \partial_x [\partial_n u_\delta] \, d_{k,\ell}^{\beta} \, \varphi_{k,\ell} \|_{L^2(\Omega_k)}$$

$$| u - u_\delta |_{H^1(\Omega_k)} \| [\partial_n u_\delta] \, d_{k,\ell}^{\beta-1} \, d'_{k,\ell} \, \varphi_{k,\ell} \|_{L^2(\Omega_k)}$$

$$| u - u_\delta |_{H^1(\Omega_k)} \| [\partial_n u_\delta] \, d_{k,\ell}^{\beta} \, \varphi'_{k,\ell} \|_{L^2(\Omega_k)}$$

$$\| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)} \| [\partial_n u_\delta] \, d_{k,\ell}^{\beta} \|_{L^2(\Omega_k)} \, .$$

On évalue successivement ces termes, en particulier le second par l'inégalité inverse (2.27), et on obtient ainsi que $\| [\partial_n u_\delta] \, d_{k,\ell}^{\beta/2} \|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})}$ se majore par une constante fois la somme des quantités

$$h_k^{\frac{1}{2}-\beta} \| (\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta) \, d^{\beta/2} \|_{L^2(\Omega_k)} \| \varphi_k (1 - \xi^2)^{-\beta/2} \|_{L^2(-1,1)}$$

$$| u - u_\delta |_{H^1(\Omega_k)} (h_k^{\beta - 1/2} N_k^{2-\beta} \| \varphi_k \|_{L^2(-1,1)} + h_k^{\beta-1/2} \| \varphi'_k \|_{L^2(-1,1)})$$

$$h_k^{\beta+1/2} \| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)} \| \varphi_k \|_{L^2(-1,1)} \, ,$$

plus son analogue sur $\Omega_{k'}$. On utilise bien sûr (2.28) pour majorer le premier terme, la somme précédente est alors inférieure à

$$c \, | u - u_\delta |_{H^1(\Omega_k)} (h_k^{\beta-1/2} N_k^{2-\beta} \| \varphi_k (1 - \xi^2)^{-\beta/2} \|_{L^2(-1,1)} + h_k^{\beta-1/2} \| \varphi'_{k'} \|_{L^2(-1,1)}) + c' h_k^{\beta+1/2} \| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)} \| \varphi_k (1 - \xi^2)^{-\beta/2} \|_{L^2(-1,1)} \, .$$

Puis on choisit φ_k égal à

$$(-1)^{N_k} \left(\frac{L'_{N_k+1}}{(N_k+1)(N_k+2)} - \frac{L'_{N_k}}{N_k(N_k+1)} \right),$$

de sorte que la quantité ci-dessus se majore par

$$c h_k^{\beta-1/2} N_k | u - u_\delta |_{H^1(\Omega_k)} + c' h_k^{\beta+1/2} N_k^{\beta-1} \| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)} \, .$$

Dans le cas où α est $> \frac{1}{2}$ et < 1, on prend $\beta = \alpha$, on multiplie par $h_k^{1/2-\alpha} N_k^{-\alpha}$ et on compare avec (2.28) pour obtenir une majoration de η_k^α. Pour $\alpha = 1$, on conclut en observant que chaque η_k^1 est inférieur à $\eta_k^{1-\varepsilon}$. Lorsque α est $\leqslant \frac{1}{2}$, on utilise encore l'inégalité (2.23) pour obtenir la majoration (2.26).

Remarque : Dans les deux Théorèmes 2.8 et 2.9, en supposant tous les N_k bornés, on retrouve les majorations optimales de la méthode des éléments finis (voir [9], [18]).

Comme annoncé, et en dépit de l'introduction des poids $d_k^{\alpha/2}$, les majorations (2.25) et (2.26) ne sont pas optimales. Pour l'instant, on ne sait pas comment remédier à cet inconvénient, dû aux mauvaises inégalités inverses en méthodes spectrales. Le tableau suivant indique le comportement des constantes $c_{1\delta}$ et $c_{2\delta}$ mesurant le défaut d'optimalité des indicateurs η_k^α, ainsi que de leur produit, pour $\alpha = 0$, $\frac{1}{2}$ et 1 lorsque tous les entiers N_k sont supposés équivalents à un même entier N et les τ_k^α sont bornés (de plus, on néglige les N^ε).

	Constante $c_{1\delta}$	**Constante** $c_{2\delta}$	**Produit** $c_{1\delta}\, c_{2\delta}$
$\alpha = 0$	1	$N^{3/2}$	$N^{3/2}$
$\alpha = 1/2$	$N^{1/4}$	$N^{1/2}$	$N^{3/4}$
$\alpha = 1$	$N^{5/4}$	1	$N^{5/4}$

Comme l'indique ce tableau, on s'assure plus facilement de la convergence de la méthode en calculant les η_k^0, toutefois les $\eta_k^{1/2}$ fournissent vraisemblablement une meilleure évaluation de l'erreur locale.

Décomposition spectrale de l'indicateur

Les polynômes de Legendre sont orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ pour la mesure de Lebesgue $d\zeta$, leurs dérivées le sont pour la mesure $(1-\zeta^2)\,d\zeta$. Toutefois, au vu des poids d_k^α, on introduit les polynômes de Jacobi J_n^α, deux à deux orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ pour la mesure $(1-\zeta^2)^\alpha\,d\zeta$ et vérifiant de façon standard :

$$J_n^\alpha(1) = \Gamma(n+\alpha+1)/n\,!\,\Gamma(\alpha+1)$$

pour la fonction Γ d'Euler. Avec cette condition, on sait que

$$\frac{c}{n+\frac{1}{2}} \leqslant \int_{-1}^{1} (J_n^\alpha)^2(\zeta)\,(1-\zeta^2)^\alpha\,d\zeta \leqslant \frac{c'}{n+\frac{1}{2}}. \tag{2.29}$$

Par translation et homothétie des $J_n^\alpha(\zeta)$, on définit les polynômes $J_{kn}^\alpha(x)$ et $J_{kn}^\alpha(y)$ sur Ω_k. Sur les côtés $\Gamma_{k,\ell}$, on définit le polynôme $J_{k\ell mn}^\alpha$ défini par translation et homothétie à partir du polynôme J_m^α si $\Gamma_{k,\ell}$ est parallèle à l'axe des x, du polynôme J_n^α si $\Gamma_{k,\ell}$ est parallèle à l'axe des y ; on prend p_ℓ égal à m dans le premier cas, à n dans le second.

Puis on pose, pour $1 \leqslant k \leqslant K$ et pour $0 \leqslant m,\ n \leqslant N_k$:

$$\eta_{kmn}^\alpha = h_k^{-4\alpha} N_k^{-1}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_k} (\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta)(x,y)\, J_{km}^\alpha(x)\, J_{kn}^\alpha(y)\ d_k^\alpha(x,y)\,dx\,dy \tag{2.30}$$

$$+ \frac{1}{2} h_k^{-2\alpha} N^{-\sup\{1,\,1/2+\alpha\}} \sum_{\ell=1}^{L(k)} \left(p_\ell + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Gamma_{k,\ell}} [\partial_n u_\delta](\tau)\, J_{k\ell mn}^\alpha(\tau)\, d_{k,\ell}(\tau)\,d\tau\,.$$

Pour tout w_δ polynôme de degré $\leqslant N$ sur Ω_k ou sur $\Gamma_{k,\ell}$, on déduit de (2.29) les formules :

$$\|w_\delta\, d_k^{\alpha/2}\|_{L^2(\Omega_k)} \leqslant c h_k^{-2\alpha-1}$$

$$\left(\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\int_{\Omega_k} w_\delta(x,y)\, J_{km}^\alpha(x)\, J_{kn}^\alpha(y)\, d_k^\alpha(x,y)\,dx\,dy\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|w_\delta\, d_{k,\ell}^{\alpha/2}\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})} \leqslant c h_k^{-\alpha-1/2}$$

$$\left(\sum_{p_\ell=0}^{N}\left(p_\ell+\frac{1}{2}\right)\left(\int_{\Gamma_{k\ell}} w_\delta(\tau)\, J_{k\ell mn}^\alpha(\tau)\, d_{k,\ell}^\alpha(\tau)\,d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a par conséquent l'inégalité

$$\eta_k^\alpha \leqslant c\lambda_k \left(\sum_{m=0}^{N_{k+}}\sum_{n=0}^{N_{k+}} (\eta_{kmn}^\alpha)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.31}$$

Ceci permet de majorer l'erreur $\| u - u_\delta \|_{H^1(\Omega)}$ en fonction des η^α_{kmn} et de $\| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\Omega)}$ grâce au Théorème 2.8.

Pour énoncer le dernier résultat, on écrit la distance $d_k(x, y)$ sur Ω_k comme produit d'une distance $d_k(x)$ dans la direction des x et d'une distance $d_k(y)$ dans celle des y.

PROPOSITION 2.10 : *Soit α un paramètre, $0 < \alpha \leqslant 1$. Il existe une constante c_2' indépendante de δ telles qu'on ait la majoration*

$$\left| \int_{\Omega_k} (\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta)(x, y)\, J^\alpha_{km}(x)\, J^\alpha_{kn}(y)\, d^\alpha_k(x, y)\, dx\, dy \right|$$

$$\leqslant h_k(m+1) \left| \int_{\Omega_k} \partial_x (u - u_\delta)(x, y)\, J^{\alpha-1}_{k, m+1}(x)\, J^\alpha_{kn}(y)\, d^{\alpha-1}_k(x)\, d^\alpha_k(y)\, dx\, dy \right|$$

$$+ h_k(n+1) \left| \int_{\Omega_k} \partial_y (u - u_\delta)(x, y)\, J^\alpha_{km}(x)\, J^{\alpha-1}_{k, n+1}(y)\, d^\alpha_k(x)\, d^{\alpha-1}_k(y)\, dx\, dy \right|$$

$$+ c_2' h_k^{4\alpha+1} \left(m + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \| f - \mathcal{I}_\delta f \|_{L^2(\Omega_k)} . \qquad (2.32)$$

Démonstration : On utilise la formule (2.24) en prenant w égal à $J^\alpha_{km}(x)\, J^\alpha_{kn}(y)\, d^\alpha_k(x, y)$. On conclut en utilisant les propriétés suivantes des polynômes de Jacobi [6, § 19] :

$$(J^\alpha_n (1 - \zeta^2)^\alpha)' = \frac{2}{n + 2\alpha} ((J^{\alpha-1}_{n+1})' (1 - \zeta^2)^\alpha)'$$

$$= -2(n+1)\, J^{\alpha-1}_{n+1} (1 - \zeta^2)^{\alpha - 1} ,$$

et une inégalité de Cauchy-Schwarz pour le dernier terme.

On peut regarder le second terme de η^α_{kmn} comme le coefficient, à une constante près, de l'erreur $[\partial_n (u - u_\delta)]$ dans la base formée par les $J_{k\ell mn}$. Par conséquent, la Proposition 2.10 énonce une propriété de localisation simultanée dans les espaces physique et spectral : la quantité η^α_{kmn} représente un coefficient, essentiellement du même ordre (m, n), dans des bases orthogonales de polynômes de l'erreur sur Ω_k, plus un coefficient d'ordre m ou n de cette erreur sur les côtés de Ω_k. Même si ces bases sont un peu compliquées, le comportement de ces coefficients est un bon indice pour déterminer s'il est préférable de découper le domaine Ω_k ou d'augmenter le N_k.

Remarque : La propriété de localisation simultanée semble fausse pour $\alpha = 0$. Toutefois, dans ce cas, en prenant dans (2.24) w égal à

$$(L_{kN_k} - L_{k,N_k+2})(x)(L_{kN_k} - L_{k,N_k+2})(y),$$

on obtient une majoration similaire à (2.32) pour $m = n = N_k$.

Extension à la méthode d'éléments avec joints

Dans ce paragraphe, on considère encore une décomposition du domaine Ω en rectangles Ω_k, toutefois on relaxe l'hypothèse faite sur l'intersection de deux éléments Ω_k et $\Omega_{k'}$: on se contente de supposer que la frontière $\partial\Omega$ est l'union de côtés entiers des Ω_k. On note alors h_{k+} le sup des $h_{k'}$ pour tous les éléments $\Omega_{k'}$ contenus dans Δ_k c'est-à-dire dont la frontière intersecte $\partial\Omega_k$ (le nombre de ces éléments est ici indéterminé) et μ_k le rapport $\frac{h_{k+}}{h_k}$. On introduit aussi l'ensemble $\mathscr{V}$ formé par les coins des Ω_k qui n'appartiennent pas à $\partial\Omega$.

Remarque : La non conformité de la décomposition rend l'adaptativité de maillage très facile, puisqu'il suffit de découper les éléments devant être raffinés sans modifier leurs voisins ; ainsi, l'augmentation du nombre de degrés de liberté est minimal par rapport à l'efficacité du raffinement. On réfère à [7] pour l'application analogue de la méthode avec joints en éléments finis.

On décompose le squelette $\mathscr{S}$ en une union de côtés disjoints $\gamma_m = \Gamma_{k(m),\ell(m)}$ de rectangle $\Omega_{k(m)}$. L'espace discret X_δ est alors défini comme l'espace des fonctions v_δ :

(i) dont la restriction à chaque Ω_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, appartient à $\mathbb{P}_{N_k}(\Omega_k)$,

(ii) qui s'annulent sur $\partial\Omega$,

(iii) qui vérifient sur chaque $\Gamma_{k,\ell}$, $1 \leqslant k \leqslant K$, $1 \leqslant \ell \leqslant L(k)$,

$$\forall \psi \in \mathbb{P}_{N_k-2}(\Gamma_{k,\ell}), \quad \int_{\Gamma_{k,\ell}} (v_{\delta|\Omega_k} - \varphi)(\tau)\, d\tau = 0, \tag{2.33}$$

où la *fonction joint* φ est définie sur le squelette comme coïncidant avec la trace de $v_{\delta|\Omega_{k(m)}}$ sur chaque γ_m.
Bien entendu, cet espace n'est en général pas inclus dans $H^1(\Omega)$.

Avec cette nouvelle définition de l'espace X_δ, on peut encore donner un sens au problème discret (2.2). On réfère à [8] pour le résultat suivant : si chaque

N_k est supérieur au cardinal de $\mathcal{V} \cap \overline{\Gamma}_{k,\ell}$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant L(k)$, ce problème admet une solution unique u_δ. En ce qui concerne la majoration d'erreur, on doit maintenant travailler avec la norme brisée :

$$\|v\|_{H^1(\cup\Omega_k)} = \left(\sum_{k=1}^{K} \|v\|^2_{H^1(\Omega_k)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.34}$$

Un argument similaire à celui de [7, Prop. 2.1] permettant de prouver que la constante d'ellipticité du problème discret est bornée indépendamment de δ, l'erreur entre u et u_δ dans cette norme se majore par la somme d'une erreur d'approximation, d'une erreur d'interpolation sur la donnée f et d'une erreur de consistance, due à la non conformité de la discrétisation, qui se majore très facilement à partir de l'équation (2.33). La démonstration du résultat suivant s'effectue en combinant les arguments de la Proposition 2.1 avec ceux de [8, § III] : si $\Pi_\delta^{1,0}$ désigne maintenant l'opérateur de projection de $H_0^1(\Omega)$ sur X_δ pour la norme définie en (2.34), on a pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ dont la restriction à Ω_k est dans $H^{s_k}(\Omega_k)$, la majoration :

$$\|v - \Pi_\delta^{1,0} v\|_{H^1(\cup\Omega_k)} \leqslant c \sum_{k=1}^{K} h_k^{\inf\{s_k-1, N_k\}} N_k^{1-s_k} \|v\|_{H^{s_k}(\Omega_k)} . \tag{2.35}$$

Ceci permet de prouver que la majoration (2.8) reste valable dans ce cas, à condition de remplacer dans le premier membre la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ par la norme $\|\cdot\|_{H^1(\cup\Omega_k)}$.

Il est bien sûr encore possible de définir les indicateurs η_k^α pour $0 < \alpha < 1$ comme en (2.9). Toutefois, les résultats du Lemme 2.3 ne semblant pas pouvoir s'étendre au cas d'une décomposition non conforme, on se contentera ici d'énoncer les résultats concernant l'indicateur

$$\tilde{\eta}_k = h_k N_k^{-1} \|\mathcal{I}_\delta f + \Delta u_\delta\|_{L^2(\Omega_k)} + \frac{1}{2} h_k^{1/2} N_k^{-1/2} \sum_{\ell=1}^{L(k)} \|[\partial_n u_\delta]\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})} . \tag{2.36}$$

On peut aisément vérifier que la Proposition 2.2 et le Corollaire 2.6 sont encore vrais ici, avec la modification sur la norme. Toutefois, l'argument de localisation du Théorème 2.8 amène à introduire le nombre maximal ν_k de domaines $\Delta_{k'}$ contenant le même Ω_k. Ici, ω_k désigne l'union des éléments $\Omega_{k'}$ tels que l'intersection de $\partial\Omega_{k'}$ et de $\partial\Omega_k$ soit de mesure positive. On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 2.11 : *Il existe des constantes c_1 et c_2 indépendantes de δ telles qu'on ait les majorations*

$$\|u - u_\delta\|_{H^1(\cup \Omega_k)} \leqslant c \left(\sum_{k=1}^{K} \left((\tau_{k-} \lambda_{k-} \mu_k \nu_k \tilde{\eta}_k)^2 + \|f - \mathcal{I}_\delta f\|^2_{L^2(\Omega_k)} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.37}$$

avec

$$\tau_{k-} = \begin{cases} \sup \{1, (h_{k+} N_{k-})^{-1/3} (\log N_{k-})^{1/2}\} \\ 1 \end{cases}$$

si Δ_k contient un coin non convexe de Ω,
sinon,

et

$$\tilde{\eta}_k \leqslant c_2 \lambda_{k+} \mu_k (N_{k+}^{3/2+\varepsilon} \|u - u_\delta\|_{H^1((\cup \Omega_{k'}) \cap \omega_k)} + h_k N_k^{2\varepsilon} \|f - \mathcal{I}_\delta f\|_{L^2(\omega_k)}) . \tag{2.38}$$

On peut encore écrire la décomposition spectrale de chaque indicateur $\tilde{\eta}_k$ dans la base formée par les produits de polynômes de Legendre $L_{km}(x) L_{kn}(y)$, même si l'on ne connaît pas la propriété de localisation simultanée. Le calcul de ces coefficients est spécialement facile puisqu'on peut remplacer les intégrales par des formules de quadrature numérique aux nœuds desquelles les valeurs de la solution et de la donnée sont déjà connues.

RÉFÉRENCES

[1] M. AINSWORTH, J. T. ODEN, 1992, A procedure for *a posteriori* error estimation for $h - p$ finite element methods, *Comp. Methods in Applied Mech. and Eng.*, **101,** pp. 73-96.

[2] I. BABUŠKA, W. C. RHEINBOLDT, 1978, *A posteriori* error estimates for the finite element method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **12,** pp. 1597-1615.

[3] F. BEN BELGACEM, 1993, Thèse, Université Pierre et Marie Curie.

[4] C. BERNARDI, M. DAUGE, Y. MADAY, 1992, Polynomials in weighted Sobolev spaces : Basics and trace liftings, Rapport Interne **92039,** Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[5] C. BERNARDI, Y. MADAY, 1991, Polynomial approximation of some singular functions, *Applicable Analysis : an International Journal,* **42,** pp. 1-32.

[6] C. BERNARDI, Y. MADAY, 1996, *Spectral Methods,* à paraître dans le *Handbook of Numerical Analysis,* Vol. **V,** édité par P. G. Ciarlet et J.-L. Lions, North-Holland.

[7] C. BERNARDI, Y. MADAY, 1994, Mesh adaptivity in finite elements by the mortar method, Rapport Interne **94029,** Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[8] C. BERNARDI, Y. MADAY, A. T. PATERA, 1994, A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method, *Collège de France Seminar,* **XI,** édité par H. Brezis et J.-L. Lions, Pitman, pp. 13-51.

[9] C. BERNARDI, B. MÉTIVET, R. VERFÜRTH, 1993, Analyse numérique d'indicateurs d'erreur, Rapport Interne **93025,** Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[10] P. G. CIARLET, 1991, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems, Handbook of Numerical Analysis,* Vol. **II,** édité par P. G. Ciarlet et J.-L. Lions, North-Holland.

[11] P. GRISVARD, 1985, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains,* Pitman.

[12] V. A. KONDRATIEV, 1967, Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, *Trudy Moskovkogo Mat. Obschetsva,* **16,** pp. 209-212 (et *Trans. Moscow Mat. Soc.*, pp. 227-313).

[13] J. T. ODEN, L. DEMKOWICZ, W. RACHOWICZ, T. A. WESTERMANN, 1989, Toward a universal $h - p$ adaptive finite element strategy, Part II : *a posteriori* error estimation, *Comp. Methods Appl. Mech. and Eng.*, **77,** pp. 113-180.

[14] J. POUSIN, J. RAPPAZ, 1992, Consistency, stability, *a priori* and *a posteriori* errors for Petrov-Galerkin methods applied to nonlinear problems, Rapport Interne École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

[15] R. VERFÜRTH, 1994, *A posteriori* error estimation and adaptive mesh-refinement techniques, *J. Comput. Appl. Math.*, **50,** pp. 67-83.

[16] R. VERFÜRTH, 1993, *A posteriori* error estimators and adaptive mesh-refinement techniques for the Navier-Stokes equations, dans *Incompressible Computational Fluid Dynamics, Trends and Advances,* édité par M. D. Gunzburger et R. A. Nicolaides, Cambridge University Press, pp. 447-477.

[17] R. VERFÜRTH, 1994, *A posteriori* error estimates for nonlinear problems. Finite element discretizations of elliptic equations, *Math. Comput.,* **62,** pp. 445-475.

[18] R. VERFÜRTH, 1993, A review of *a posteriori* error estimation and adaptive mesh-refinement techniques, Rapport Interne, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Zürich.