M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

J.-L. GUERMOND

Perturbations singulières des problèmes de point selle et préconditionnement du problème de Stokes

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 28, nº 3 (1994), p. 357-374

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1994__28_3_357_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 28, n° 3, 1994, p. 357 à 374)

PERTURBATIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES DE POINT SELLE ET PRÉCONDITIONNEMENT DU PROBLÈME DE STOKES (*)

par J.-L. GUERMOND [1]

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — *On étudie un problème de perturbation singulière associé au problème de Stokes généralisé. Après reformulation du problème dans le cadre abstrait des problèmes de point selle, on étudie la convergence du couple vitesse-pression solution du problème perturbé vers la solution du problème non perturbé. On montre comment le résultat de convergence permet de justifier une technique de préconditionnement du problème de Stokes généralisé pour une approximation par éléments finis et pour une approximation spectrale.*

Abstract. — *A singular perturbation of the generalized Stokes problem is analysed. This problem is analysed in the framework of saddle point problems. Under suitable regularity hypotheses it is shown that the perturbed solution converges, in a appropriate sense, to the solution of the unperturbed problem. An application of this result in term of preconditionning of the generalized Stokes problem is given in the framework of a finite element approximation and a spectral approximation.*

1. INTRODUCTION

L'objet de ce travail concerne l'étude des perturbations singulières associées au problème de Stokes généralisé et plus généralement aux perturbations singulières des problèmes de point selle. On montre comment les résultats de convergence de la solution perturbée vers la solution non perturbée permettent de justifier une technique particulière de préconditionnement du problème de Stokes généralisé.

Considérons Ω un domaine ouvert borné connexe Lipschtizien de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. On s'intéresse à la formulation variationnelle du problème de Stokes généralisé. Étant donné $\varepsilon > 0$ et un terme source f dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, on cherche un champ de vitesse u_ε dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ et un champ de pression dans

(*) Manuscrit reçu le 18 janvier 1993, sous forme révisée le 26 août 1993.
[1] LIMSI-CNRS, BP 103, 91403 Orsay Cedex, France (guermond@Limsi.Fr).

$L_0^2(\Omega)$ tels que

$$(\mathscr{P}_{1\,\varepsilon})\quad \begin{cases} u_\varepsilon - \varepsilon\, \nabla^2 u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f & \text{dans} \quad \mathbb{H}^{-1}(\Omega)\,, \\ \qquad\qquad \nabla \,.\, u_\varepsilon = 0 & \text{dans} \quad L^2(\Omega) \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)^n$, $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ est le dual de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ et $L_0^2(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ (*cf.* Lions-Magenes [14] pour une revue sur les problèmes aux limites et les propriétés des espaces utilisés). Il est bien connu que le problème $(\mathscr{P}_{1\,\varepsilon})$ est bien posé pour tout $\varepsilon > 0$ (Brezzi [6], Girault-Raviart [10] ou Temam [15]).

Pratiquement $(\mathscr{P}_{1\,\varepsilon})$ correspond à l'étape de diffusion résultant de l'approximation des équations de Navier-Stokes instationnaires par un schéma temporel dont le pas de temps tend vers zéro. Dans ce cadre ε est une constante proportionnelle à $\nu\ \delta t$, où ν est la viscosité cinématique du fluide et δt est le pas de temps du schéma en question.

Généralement le calcul de la pression est la principale difficulté rencontrée lors de l'approximation d'une solution de $(\mathscr{P}_{1\,\varepsilon})$. En fait, une idée intuitive assez simple consiste à estimer qu'en première approximation, si ε est suffisamment petit, le terme $\varepsilon\, \nabla^2 u_\varepsilon$ est négligeable et la pression satisfait presque une équation du type

$$\begin{cases} \nabla^2 p = \nabla \,.\, f \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} \approx f \,.\, n\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Sous l'hypothèse d'une régularité suffisante, on peut espérer que la condition limite de Neumann soit approchée à l'ordre ε. C'est cette idée qui est parfois exploitée pour préconditionner le calcul de la pression par inversion itérative de l'opérateur $\nabla \,.\, (id - \varepsilon\nabla^2)^{-1}\, \nabla$ (voir Cahouet-Chabard [9], Labadie-Lasbleiz [12] ou Azaiez *et al.* [3]). C'est encore cette même idée qui est à la base des méthodes de projections introduites par Chorin [8] et Temam [16].

Dans la première partie de cet exposé on reformule le problème $(\mathscr{P}_{1\,\varepsilon})$ dans le cadre des problèmes de point selle. Cette reformulation permet de mieux saisir le mécanisme de la perturbation singulière et permet de généraliser les conclusions dans le cadre des approximations discrètes. Dans la seconde partie on s'intéresse aux limites de u_ε et p_ε quand ε tend vers zéro. Dans la dernière partie on montre comment les résultats de la seconde partie permettent de justifier la technique de préconditionnement du problème de Stokes évoquée plus haut. Le cas d'une approximation par éléments finis conformes et le cas d'une approximation spectrale $(\mathbb{P}_N, P_{N-2})$ sont examinés.

2. LE PROBLÈME DE POINT SELLE

2.1. Position du problème

Soient X, L et M trois espaces de Hilbert réels tels que $X \subset L$ avec injection continue et densité de X dans L. Par la suite on fait les identifications $X \subset L \equiv L' \subset X'$ et $M \equiv M'$. Pour un espace de Hilbert donné E, on note $(\cdot,\cdot)_E$ et $|\cdot|_E$ le produit scalaire et la norme de E.

On introduit la forme bilinéaire continue $b : X \times M \to \mathbb{R}$, et on lui associe à l'aide du théorème de Riesz l'opérateur linéaire continue $B : X \to M$ tel que pour tout couple (u, p) dans $X \times M$ on ait $\langle B^t p, u \rangle_{X', X} = b(u, p)$, où $\langle \cdot,\cdot \rangle_{X',X}$ désigne la dualité entre X et X'. On suppose aussi que B est surjectif. Les conséquences de cette hypothèse sont résumées par le résultat suivant bien connu (*cf.* Brezis [5], p. 29-30, Brezzi [6], ou Girault-Raviart [10], p. 58-59 par exemple).

LEMME 2.1 : *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $B : X \to M$ *est surjectif.*

(ii) $B^t : M \to X'$ *est injectif et* $B^t(M)$ *est fermé dans* X'.

(iii) $B : V^\perp \to M$ *est un isomorphisme et* $|Bv|_M \geq \beta\,|v|_X$, *pour tout* $v \in V^\perp$.

(iv) $B^t : M \to V^0$ *est un isomorphisme et* $|B^t p|_{X'} \geq \beta\,|p|_M$, *pour tout* $p \in M$.

Où $V^\perp$ *est l'orthogonal de* V *dans* X *et* V^0 *et l'orthogonal de* V *dans* X'.

Dans le cadre des problèmes de point selle la constante β apparaissant dans (iii) et (iv) est parfois appelée constante « inf-sup ». Le noyau de B étant appelé à jouer un rôle important dans la suite des développements, on note $V = \ker(B)$ et on équipe V de la topologie induite par celle de X. De même, on désigne par H le complété de V dans L, *i.e.* $H = \bar{V}^L$ et on équipe H de la topologie de L. V et H sont des espaces de Hilbert et l'injection de V dans H est continue avec densité.

On introduit maintenant deux autres formes bilinéaires continues $a_1 : L \times L \to \mathbb{R}$ et $a_2 : X \times X \to \mathbb{R}$. On suppose que a_1 est H-coercive et a_2 est X-coercive, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha_1 > 0,\ \forall u \in H \quad a_1(u, u) \geq \alpha_1 |u|_L^2 \tag{2.1}$$

$$\exists \alpha_2 > 0,\ \forall u \in X \quad a_2(u, u) \geq \alpha_2 |u|_X^2 . \tag{2.2}$$

En fait, pour la suite des développements, la V-coercivité de a_2 serait suffisante modulo quelques complications inutiles dans la présentation de l'exposé. Comme pour b on associe à a_1 et a_2 les opérateurs linéaires continus $A_1 : L \to L$ et $A_2 : X \to X'$ à l'aide du théorème de Riesz ; c'est-à-dire, pour $(u, v) \in L \times L$, $a_1(u, v) = (A_1 u, v)_L$ et pour $(u, v) \in X \times X$, $a_2(u, v) = \langle A_2 u, v \rangle_{X', X}$. La X-coercivité de a_2 implique que $A_2 : X \to X'$ est un isomorphisme. On désigne par A_2^t et A_2^{-t} les opérateurs transposés de A_2 et A_2^{-1}.

Dans le cadre défini ci-dessus le problème de Stokes généralisé se reformalise comme suit. Pour $f \in X'$ et $g \in M$ trouver $(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in X \times M$ tels que

$$(\mathscr{P}_{2\,\varepsilon}) \quad \begin{cases} A_1 u_\varepsilon + \varepsilon A_2 u_\varepsilon + B^t p_\varepsilon = f & \text{dans} \quad X', \\ Bu_\varepsilon = g & \text{dans} \quad M. \end{cases} \tag{2.3}$$

Par analogie avec le problème de Stokes, on entend par vitesse tout élément de X et par pression tout élément de M.

2.2. Décomposition du problème

Afin de découpler les problèmes portant respectivement sur la vitesse et la pression on utilise le résultat suivant :

LEMME 2.2 : *X se décompose sous la forme $X = V \oplus A_2^{-t} B^t(M)$.*

Démonstration : (a) V et $A_2^{-t} B^t(M)$ sont fermés. Le résultat pour V résulte de la continuité de B et de la définition $V = \ker(B)$. D'autre part $B^t(M)$ est fermé dans X' par hypothèse (*cf.* lemme 2.1) et A_2^{-t} est continue, donc $A_2^{-t} B^t(M)$ est fermé dans X.

(b) Existence et unicité de la décomposition. Soit $u \in X$; d'après la V-coercivité de A_2 et la surjectivité de B, l'opérateur $BA_2^{-t} B^t : M \to M$ est un isomorphisme continue. Il existe donc un unique $q \in M$ tel que $Bu = BA_2^{-t} B^t(q)$. Soit $v = u - A_2^{-t} B^t(q)$, d'après la définition de q on vérifie que $v \in \ker(B) = V$. Ainsi on a la décomposition unique $u = v + A_2^{-t} B^t(q)$ ■

Afin de se ramener à la recherche d'un champ de vitesse dans V on définit $(v_g, q_g) \in X \times M$ solution du problème

$$\begin{cases} A_2 v_g - B^t q_g = 0 & \text{dans} \quad X' \\ Bv_g = g & \text{dans} \quad M. \end{cases} \tag{2.4}$$

En posant $w_\varepsilon = u_\varepsilon - v_g$ on vérifie que $w_\varepsilon \in V$, et on reformule $(\mathscr{P}_{2\,\varepsilon})$ par

PROPOSITION 2.1 : *$(\mathscr{P}_{2\,\varepsilon})$ est équivalent à chercher $(w_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V \times M$ tels que*

$$\forall w \in V \quad a_1(w_\varepsilon, w) + \varepsilon a_2(w_\varepsilon, w) = \langle f - A_1 v_g, w \rangle_{X', X} \tag{2.5}$$

$$BA_2^{-1} B^t p_\varepsilon = BA_2^{-1}(f - A_1 u_\varepsilon) - \varepsilon g. \tag{2.6}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme 2.2.

(a) Noter dans un premier temps que les définitions de v_g et w_ε donnent

$$A_1 w_\varepsilon + \varepsilon A_2 w_\varepsilon + B^t p_\varepsilon = f - A_1 v_g - \varepsilon A_2 v_g \quad \text{dans} \quad X' .$$

Pour tout $w \in V$ on a donc

$$a_1(w_\varepsilon, w) + \varepsilon a_2(w_\varepsilon, w) = \langle f - A_1 v_g, w \rangle_{X', X} - \varepsilon \langle A_2 v_g, w \rangle_{X', X} .$$

Or la définition de v_g permet d'écrire $v_g = A_2^{-1} B^t(q_g)$, ce qui implique

$$\langle A_2 v_g, w \rangle_{X', X} = \langle A_2 A_2^{-1} B^t(q), w \rangle_{X', X} = (q, Bw)_M = 0$$

et (2.5) en résulte.

(b) D'autre part, pour tout $q \in M$ on a

$$(A_1 u_\varepsilon, A_2^{-t} B^t q)_L + \langle \varepsilon A_2 u_\varepsilon, A_2^{-t} B^t q \rangle_{X', X} + \\ + \langle B^t p_\varepsilon, A_2^{-t} B^t q \rangle_{X', X} = \langle f, A_2^{-t} B^t q \rangle_{X', X}$$

ce qui s'écrit encore

$$(BA_2^{-1} B^t p_\varepsilon, q)_M = (BA_2^{-1}(f - A_1 u_\varepsilon), q)_M - \varepsilon (Bu_\varepsilon, q)_M ,$$

d'où le résultat. ■

3. LE PROBLÈME DE PERTURBATION

3.1. Le problème non perturbé

Formellement on peut espérer que lorsque ε tend vers zéro la solution du problème $(\mathscr{P}_{2\,\varepsilon})$ tend vers celle du problème non perturbé

$$\begin{cases} A_1 u_0 + B^t p_0 = f , \\ \qquad Bu_0 = g . \end{cases} \tag{3.1}$$

Ceci ne sera vraisemblablement possible que si le terme source f est suffisamment régulier pour admettre une décomposition du type $f = A_1 u_0 + B^t p_0$.

On est ainsi conduit à introduire H_B le complété de X pour la norme du graphe de B. Les éléments de H_B sont en fait les limites dans L de suites $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telles que les suites (u_n) soient de Cauchy dans L et les suites $(B(u_n))$ soient de Cauchy dans M. Dans ces conditions B peut être prolongé sur H_B par densité et continuité uniforme. On note encore $B : H_B \to M$ et $b : H_B \times M \to \mathbb{R}$ les extensions en question de $B : X \times M$ et $b : X \to M \to \mathbb{R}$.

Par la suite on note $H_B = \{u \in L, Bu \in M\}$ avec $|u|_{H_B} = |u|_L + |Bu|_M$ pour tout $u \in H_B$.

Remarque 1 : X s'injecte densément et continuement dans H_B. En effet soit $u \in X$, on a $|u|_{H_B} = |u|_L + |Bu|_M \leq c\ |u|_X + |B|\ |u|_X = (c + |B|)\ |u|_X$, en vertu de la continuité de B et la continuité de l'injection de X dans L. La densité résulte de la définition de H_B. D'autre part H_B s'injecte densément et continuement dans L. En effet soit $u \in H_B$, on a $|u|_L \leq |u|_L + |Bu|_M = |u|_{H_B}$. De plus X est dense dans L et $X \in H_B$, donc H_B est dense dans L.

Il résulte de ce qui précède qu'on peut faire les identifications :

$$X \subset H_B \subset L \equiv L' \subset H'_B \subset X' . \tag{3.2}$$

Remarque 2 : Dans le cadre du problème de Stokes généralisé et avec la régularité annoncée sur Ω (*i.e.* Ω Lipschitzien) H_B s'identifie avec $H_0(\mathrm{div}, \Omega) = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega), \nabla . v \in L^2(\Omega), v . n = 0\}$ et H s'identifie avec

$$H_0(\mathrm{div}\ 0, \Omega) = \{v \in L_0^2(\Omega), \nabla . v = 0, v . n = 0\}$$

(voir Girault-Raviart [10] p. 26 et p. 30 pour les démonstrations). Noter que le dual de $H_0(\mathrm{div}, \Omega)$ est un espace de distributions alors que ce n'est pas le cas pour le dual de $H_0(\mathrm{div}\ 0, \Omega)$.

En supposant que $f \in H'_B$, on considère maintenant le problème $(\mathscr{P}_0)$ suivant : pour $f \in H'_B$ trouver $(u_0, p_0) \in H_B \times M$ tels que

$$(\mathscr{P}_0) \quad \begin{cases} A_1 u_0 + B^t p_0 = f \text{ dans } H'_B , \\ \qquad Bu_0 = g \text{ dans } M . \end{cases} \tag{3.3}$$

L'existence et l'unicité de (u_0, p_0) est donnée par

PROPOSITION 3.1 : *$(\mathscr{P}_0)$ est bien posé.*

Démonstration : Il suffit de vérifier que la forme bilinéaire $a_1 : H_B \times H_B \to \mathbb{R}$ continue et H-coercive et $B : H_B \to M$ est surjectif (*cf.* Brezzi [6]).

(a) Soit $u \in H_B$, $|A_1 u|_{H'_B} \leq |A_1|\ |u|_L \leq |A_1|\ |u|_{H_B}$ d'où la continuité de A_1 sur H_B et celle de a_1 sur $H_B \times H_B$.

(b) La forme a_1 est H-coercive par hypothèse.

(c) Soit $q \in M$, d'après la surjectivité de $B : X \to M$ il existe $v \in X$ tel que $Bv = q$, or $X \subset H_B$ d'où $v \in H_B$ et la surjectivité de $B : H_B \to M$ en résulte. ■

COROLLAIRE 3.1 : *Le dual de H_B est caractérisé par $H'_B = B^t(M) \oplus H$.*

Démonstration : Prendre $g = 0$ et $A_1 = id_L$. ■

Remarque 3 : D'après la remarque 2 et le corollaire précédent, on obtient une caractérisation du dual de $H_0(\text{div}, \Omega)$:

$$H_0'(\text{div}, \Omega) = H_0(\text{div } 0, \Omega) \oplus \nabla(L_0^2(\Omega)) . \tag{3.4}$$

Cette décomposition généralise celle bien connue de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (voir Girault-Raviart [10] ou Temam [15]) :

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = H_0(\text{div } 0, \Omega) \oplus \nabla(H^1(\Omega)/\mathbb{R}) . \tag{3.5}$$

Il semble donc qu'un cadre naturel de régularité du terme source pour l'étude de la perturbation singulière de notre problème de point selle soit $f \in H_B'$. Par la suite on se place dans ce cadre minimal.

3.2. Le problème de perturbation singulière.

L'introduction du relèvement v_g permet de se ramener à un champ de vitesse $w_\varepsilon = u_\varepsilon - v_g$ dans $\ker(B) = V$. On s'intéresse maintenant aux champs de vitesse dans V ou H, et on étudie les opérateurs associés à A_1 et A_2 agissant sur V ou H.

Dans un premier temps considérons l'ensemble

$$D(T_2) = \left\{ v \in V, \quad \sup_{w \in V - \{0\}} \frac{a_2(v, w)}{|w|_L} < \infty \right\} . \tag{3.6}$$

Pour tout $v \in D(T_2)$ la forme linéaire $a_2(v, .) : V \to \mathbb{R}$ peut être prolongée sur H par densité et continuité uniforme. A la forme linéaire $a_2(v, .) : H \to \mathbb{R}$ ainsi prolongée on associe le vecteur $T_2 v$ tel que pour tout $w \in H$, $a_2(v, w) = (T_2 v, w)_L$. L'existence de $T_2 v$ est assurée par le théorème de Riesz. On définit ainsi un opérateur linéaire $T_2 : D(T_2) \subset H \to H$.

En appliquant directement le théorème de Riesz, on définit l'opérateur $T_1 : H \to H$ tel que pour tout $w \in H$, $a_1(v, w) = (T_1 v, w)_L$.

L'introduction des opérateurs T_1 et T_2 permet de reformuler le problème $(\mathscr{P}_{2\varepsilon})$:

PROPOSITION 3.2 : *Si $f \in H_B'$, en posant $w_\varepsilon = u_\varepsilon - v_g$ et en introduisant $\Phi_0 \in H$ tel que*

$$\begin{cases} A_1 \Phi_0 + B^t p_0 = f - A_1 v_g \text{ dans } H_B' , \\ B \Phi_0 = 0 \text{ dans } M \end{cases} \tag{3.7}$$

le problème $(\mathscr{P}_{2\varepsilon})$ est équivalent à chercher $(w_\varepsilon, p_\varepsilon) \in D(T_2) \times M$ tel que

$$T_1 w_\varepsilon + \varepsilon T_2 w_\varepsilon = T_1 \Phi_0 \text{ dans } H , \tag{3.8}$$

$$B A_2^{-1} B^t p_\varepsilon = B A_2^{-1}(f - A_1 u_\varepsilon) - \varepsilon g . \tag{3.9}$$

Démonstration : D'après la définition de Φ_0 et la proposition 2.1 on a

$$\forall w \in V \quad a_1(w_\varepsilon, w) + \varepsilon a_2(w_\varepsilon, w) = a_1(\Phi_0, w) .$$

Il en résulte que

$$\sup_{w \in V - \{0\}} \frac{a_2(w_\varepsilon, w)}{|w|_L} \leq \frac{|A_1|}{\varepsilon} \left(1 + \frac{|A_1|}{\alpha_1}\right) |\Phi_0|_L ,$$

c'est-à-dire $w_\varepsilon \in D(T_2)$, et le résultat final se déduit des définitions de T_1 et T_2. ■

Un premier résultat de convergence est donné par

LEMME 3.1 : (i) $\forall \varepsilon > 0$, *l'opérateur* $T_1 + \varepsilon T_2 : D(T_2) \subset H \to H$ *est un isomorphisme, et* $|(T_1 + \varepsilon T_2)^{-1}| \leq 1/\alpha_1$.

(ii) $D(T_2)$ *est dense dans* H.

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \Phi \in D(T_2)$, $|\Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi|_L \leq \frac{\varepsilon}{\alpha_1} |T_2 \Phi|_L$.

(iv) $\lim_{\varepsilon \to 0} |\Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi|_L = 0$.

Démonstration : Les résultats ci-dessus résultent de la coercivité de T_1 et de la monotonie de T_2 (*cf.* Brezis [5] p. 100-103).

(a) Injectivité. Soit u dans le noyau de $T_1 + \varepsilon T_2$; la coercivité de T_1 et T_2 implique $\alpha_1 |u|_L \leq 0$. C'est-à-dire $u = 0$.

(b) Sujectivité. Soit $l \in H$, il existe $v \in V$ tel pour tout $w \in V$ on ait $a_1(v, w) + \varepsilon a_2(v, w) = (l, w)$. De plus

$$\sup_{w \in V - \{0\}} \frac{a_2(v, w)}{|w|_L} < \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{|A_1|}{\alpha_1}\right) |l|_L ,$$

d'où v est dans $D(T_2)$ et $T_1 + \varepsilon T_2$ est surjectif.

(c) Soit $l \in H$ et $u \in D(T_2)$ tel que $T_1 u + \varepsilon T_2 u = l$, en multipliant de part et d'autre par u et en utilisant la coercivité des opérateurs on obtient $|u|_L \leq |l|_L/\alpha_1$. D'où $|(T_1 + \varepsilon T_2)^{-1}| \leq 1/\alpha_1$.

(d) Densité de $D(T_2)$. Soit $l \in H$ tel que $(l, v) = 0$ pour tout $v \in D(T_2)$. Vérifions que $l = 0$. Soit $u \in D(T_2)$ tel que $T_1 u + \varepsilon T_2 u = l$, en multipliant de part et d'autre par u et en utilisant la coercivité des opérateurs on obtient $\alpha_1 |u|_L \leq 0$. Donc $u = 0$ et par suite $l = 0$. Un corollaire du théorème de Hahn-Banach permet de conclure.

(e) Montrons maintenant (iii). Soit $\Phi \in D(T_2)$. On a

$$\varepsilon T_2 \Phi = (T_1 + \varepsilon T_2) \Phi - T_1 \Phi = (T_1 + \varepsilon T_2) (\Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi) ,$$

c'est-à-dire

$$\Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi = \varepsilon (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_2 \Phi .$$

D'où

$$\left| \Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi \right|_L \leq \varepsilon \left| (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} \right| \left| T_2 \Phi \right|_L \leq \frac{\varepsilon}{\alpha_1} \left| T_2 \Phi \right|_L ,$$

et d'après (i), on a enfin :

$$\left| \Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi \right|_L \leq \frac{\varepsilon}{\alpha_1} \left| T_2 \Phi \right|_L .$$

(f) Soit $\Phi \in H$, on raisonne maintenant par densité de $D(T_2)$ dans H (*cf.* (ii)). Soit $\delta > 0$, il existe $u_\delta \in D(T_2)$ tel que $|u_\delta - \Phi|_L \leq \delta$. D'autre part

$$\left| \Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi \right|_L \leq \left| \Phi - u_\delta \right|_L + \left| u_\delta - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 u_\delta \right|_L + \\ + \left| (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 (u_\delta - \Phi) \right|_L .$$

En utilisant ce qui précède et sachant que $u_\delta \in D(T_2)$, on obtient

$$\left| \Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi \right|_L \leq \delta + \frac{\varepsilon}{\alpha_1} \left| T_2 u_\delta \right|_L + \frac{|A_1|}{\alpha_1} \left| u_\delta - \Phi \right|_L .$$

D'où

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left| \Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi \right|_L \leq \delta \left(1 + \frac{|A_1|}{\alpha_1} \right)$$

l'inégalité étant valable quel que soit δ on conclut

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \Phi - (T_1 + \varepsilon T_2)^{-1} T_1 \Phi \right|_L = 0 . \quad \blacksquare$$

On est maintenant en mesure d'établir le résultat cherché :

THÉORÈME 3.1 : *Soient $f \in H'_B$, $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ solution de $(\mathscr{P}_{2\varepsilon})$ et (u_0, p_0) solution de $(\mathscr{P}_0)$.*

(i) *Si $u_0 \in X$* et $\sup_{w \in V - \{0\}} a_2(u_0, w)/|w|_L < \infty$, *alors en notant conventionnellement $|A_2 u_0|_{H'}$ la borne supérieure en question on a :*

$$|u_\varepsilon - u_0|_L + |p_\varepsilon - p_0|_M \leq c\varepsilon \left(|A_2 u_0|_{H'} + |g|_L \right) . \tag{3.10}$$

(ii) *Dans le cas général on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |u_\varepsilon - u_0|_L + |p_\varepsilon - p_0|_M = 0 . \tag{3.11}$$

Démonstration : (a) Dans un premier temps on raisonne sur la vitesse et on observe que $u_\varepsilon - u_0 = w_\varepsilon + v_g - u_0 = w_\varepsilon - \Phi_0$, d'où

$$|u_\varepsilon - u_0|_L = |w_\varepsilon - \Phi_0|_L$$

ainsi la convergence de u_ε vers u_0 est contrôlée par la distance $|\omega_\varepsilon - \Phi_0|_L$.

(b) Ensuite on applique le lemme 3.1. Avec la régularité de u_0 définie en (i) vérifions que $\Phi_0 = u_0 - v_g$ est dans $D(T_2)$. D'une part $v_g \in X$ et $u_0 \in X$ donc $\Phi_0 \in X$, d'autre part $a_2(v_g, w) = 0$ pour tout $w \in V$ donc

$$\forall w \in V , \quad a_2(\Phi_0, w) = a_2(u_0, w) \leqslant |A_2 u_0|_{H'} |w|_L .$$

Il en résulte que $\Phi_0 \in D(T_2)$ et $|T_2 \Phi_0|_L \leqslant |A_2 u_0|_{H'}$. On peut donc appliquer le lemme 3.1 au problème (3.8), c'est-à-dire :

$$|u_\varepsilon - u_0|_L = |w_\varepsilon - \Phi_0|_L \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha_1} |A_2 u_0|_{H'} .$$

(c) Dans le cas général sans régularité particulière de u_0, le lemme 3.1 donne

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |u_\varepsilon - u_0|_L = \lim_{\varepsilon \to 0} |w_\varepsilon - \Phi_0|_L = 0 .$$

(d) Convergence sur la pression. Des relations (2.6) et (3.3) on déduit

$$BA_2^{-1} B^t(p_\varepsilon - p_0) = BA_2^{-1} A_1(u_0 - u_\varepsilon) - \varepsilon g$$

d'où

$$|BA_2^{-1} B^t(p_\varepsilon - p_0)|_M \leqslant |B| \; |A_2^{-1}| \; |A_1| \; |u_0 - u_\varepsilon|_L + \varepsilon |g|_M .$$

Or $BA_2^{-1} B^t : M \to M$ est un isomorphisme continue, il existe donc d'après un corollaire du théorème de l'application ouverte un réel $k > 0$ tel que

$$k|p_\varepsilon - p_0|_M \leqslant |BA_2^{-1} B^t(p_\varepsilon - p_0)|_L .$$

Les conclusions (i) et (ii) résultent de cette inégalité et celle qui précède et de (b) et (c). ■

Il peut être important d'avoir une minoration de la meilleure constante k dans l'inégalité ci-dessus en fonction de la constante « inf-sup » (*cf.* théorème 4.2). Une telle minoration est donnée par

PROPOSITION 3.3 : *La meilleure constante k est minorée par $c\beta^2$; plus précisément :*

$$\frac{\alpha_2}{|A_2| \ (\alpha_2 + |A_2|)} \beta^2 \leq \inf_{p \in M - \{0\}} \frac{|BA_2^{-1} B^t p|_M}{|p|_M}. \tag{3.12}$$

Démonstration : Soient $g \in M$ et $p \in M$ tels que $BA_2^{-1} B^t p = g$. Notons $u = A_2^{-1} B^t p$, alors $Bu = g$. Soit $V^{\perp}$ l'orthogonal de V dans X, d'après les hypothèses sur B, la restriction de B à $V^{\perp}$ est un isomorphisme continu tel que pour tout $v \in V^{\perp}$, $|Bv|_M \geq \beta \ |v|_X$. On définit alors $v \in V^{\perp}$ tel que $Bv = g$, on a donc la majoration $\beta |v|_X \leq |g|_M$. Le champ $u - v$ est dans V et satisfait :

$$- A_2(u - v) + B^t p = A_2 v$$

d'où on tire

$$|u|_X \leq \left(1 + \frac{|A_2|}{\alpha_2}\right) |v|_X$$

ce qui conduit à

$$|p|_M \leq \frac{|B^t p|_{X'}}{\beta} \leq \frac{|A_2|}{\beta^2} \left(1 + \frac{|A_2|}{\alpha_2}\right) |g|_M .$$

On obtient donc la minoration

$$\frac{\beta^2 \alpha_2}{|A_2| \ (\alpha_2 + |A_2|)} \leq \inf_{p \in M - \{0\}} \frac{|BA_2^{-1} B^t p|_M}{|p|_M}. \quad \blacksquare$$

Remarque : Le résultat (3.11) dans le contexte général des problèmes elliptiques n'est pas vraiment nouveau, il peut être aussi obtenu en utilisant la topologie faible de L (*cf.* Lions [13] p. 104-107). On obtient la convergence de u_ε dans L faible à partir des estimations a priori sur $|u_\varepsilon|_L$ et $|u_\varepsilon|_X$. La convergence forte résulte de majorations sur $\limsup a_1(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0)$. Pour une étude détaillée des problèmes de perturbations singulières des équations elliptiques voir Huet [11] et les travaux cités. L'étude dans le contexte des problèmes des points selle semble nouvelle. De plus, la technique présentée ici montre comment la régularité des termes sources, f et g, intervient sur la vitesse de convergence, *cf.* (3.10).

4. UN PROBLÈME DE PRÉCONDITIONNEMENT

4.1. Position du problème

Une technique communément utilisée pour résoudre $(\mathscr{P}_{2\varepsilon})$ consiste à éliminer la vitesse pour aboutir au problème :

$$B(A_1 + \varepsilon A_2)^{-1} B^t p_\varepsilon = B(A_1 + \varepsilon A_2)^{-1} f - g . \tag{4.1}$$

Par la suite on s'intéresse à la résolution des problèmes du type :

$$B(A_1 + \varepsilon A_2)^{-1} B^t p_\varepsilon = g \tag{4.2}$$

où $g \in M$.

Dans le cas du problème de Stokes l'opérateur $\nabla \,.\, (id - \varepsilon \nabla^2)^{-1} \nabla$ est appelé opérateur d'Uzawa par référence à l'algorithme d'Uzawa qui est parfois utilisé pour résoudre $(\mathscr{P}_{1\varepsilon})$ et qui fait intervenir $\nabla \,.\, (id - \varepsilon \nabla^2)^{-1} \nabla$ implicitement (*cf.* Temam [15] p. 139). Une des difficultés associée à cet opérateur est qu'il est non local ; en d'autres termes son équivalent discret est une matrice pleine. Lorsque la dimension de cette matrice devient très grande, son inversion par une méthode directe devient extrêmement coûteuse. On est ainsi conduit à chercher des approximations de la solution de (4.2) par des méthodes itératives du type gradient. En fait, les techniques itératives n'ont un avantage déterminant sur les techniques directes que si, et uniquement si, elles sont préconditionnées. Ainsi, la recherche d'une résolution peu coûteuse de (4.2) revient à trouver un préconditionneur de l'opérateur d'Uzawa.

4.2. Préconditionnement — Cadre général

Pour simplifier on note $U_\varepsilon = B(A_1 + \varepsilon A_2)^{-1} B^t$, et par la suite on cherche un préconditionneur de U_ε lorsque ε tend vers zéro. Rappelons qu'un préconditionneur de U_ε est un opérateur surjectif $C : M \to M$ tel que $|id - C^{-1} U_\varepsilon| < 1$, où C^{-1} désigne l'inverse à droite de C.

Lorsque ε est petit, un candidat naturel au préconditionnement de U_ε est obtenu en posant formellement $U_0 = BA_1^{-1} B^t$. Plus précisément notons $D(U_0) = \{q \in M,\ \exists u \in L,\ \exists g \in M,\ A_1 u + B^t q = 0,\ Bu = g\}$, alors d'après la proposition 3.1 l'opérateur $U_0 : D(U_0) \subset M \to M$ est un isomorphisme.

Exemple : Pour le problème de Stokes on a $U_0 = \nabla^2$ et $D(U_0) = \{q \in L_0^2(\Omega),\ \nabla q \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ \nabla^2 q \in L^2(\Omega),\ \partial q / \partial n = 0\}$. Pour $g \in L_0^2(\Omega)$ donné, le problème : trouver q tel que $U_0 q = g$ prend la forme d'une équation de Poisson avec condition de Neumann homogène :

$$\begin{cases} \nabla^2 q &= g \\ \dfrac{\partial q}{\partial n} &= 0 . \end{cases} \tag{4.3}$$

Mais de façon équivalente, ce problème se met sous la forme d'une équation de Darcy : trouver u et q tels que

$$\begin{cases} u + \nabla q = 0 \\ \nabla \cdot u \quad = g \\ \quad u \cdot n = 0 \,. \end{cases} \tag{4.4}$$

Bien que ces deux formulations continues soient équivalentes, leurs formulations discrètes ne le sont pas. En pratique les deux formulations sont utilisées [3], [9], [12]. Par la suite on s'intéresse uniquement au préconditionneur issu du problème de Darcy.

Dans le cadre général, une première mesure de l'aptitude de U_0 à être un préconditionneur de U_ε est donnée par

PROPOSITION 4.1 : *Pour tout $p \in M$ on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_0^{-1} U_\varepsilon p = p \,. \tag{4.5}$$

Démonstration : Posons $g = U_\varepsilon p$, et définissons $p_0 \in D(U_0)$ la solution de $U_0 p_0 = g$. D'après le théorème 3.1 on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |p - p_0|_M = 0 \,,$$

or par définition de p_0 et g on a

$$p_0 = U_0^{-1} g = U_0^{-1} U_\varepsilon p \,,$$

d'où le résultat. ■

Remarque : Si les normes de X et L ne sont pas équivalentes, ce qui est généralement le cas en dimension infinie, U_0 n'est pas un préconditionneur de U_ε. En effet, on a uniquement convergence simple de $U_0^{-1} U_\varepsilon p$ vers p dans M, et d'après le théorème de Banach-Steinhaus la convergence est uniforme sur tout compact de M. L'opérateur U_0 est donc un préconditionneur de U_ε pour ε suffisamment petit si la boule unité de M est compacte. Ainsi, pour obtenir des majorations uniformes il convient de se placer en dimension finie.

4.3. Approximation par éléments finis

On s'intéresse maintenant à l'approximation du problème de Stokes par des éléments finis. Soient X_h et M_h des espaces discrets d'approximation conformes de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ et $L_0^2(\Omega)$ où $h > 0$ est un paramètre caractérisant la finesse de l'approximation. On suppose de plus que X_h et M_h sont compatibles pour la forme bilinéaire b, en d'autres termes $\nabla_h \cdot (X_h) = M_h$. On suppose aussi que la constante « inf-sup » du lemme 2.1 (iii) est indépendante de h. Voir Girault-Raviart [10] pour une revue des espaces d'éléments finis conformes admissibles. On introduit $L_h = X_h$ l'espace des vitesses qu'on équipe de la norme induite par $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Les normes de L_h et X_h sont équivalentes ; plus précisément on a

LEMM 4.1 : (cf. *Girault-Raviart* [10], *p.* 103). *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de Ω. Pour une approximation par des éléments finis conformes on a :*

$$\forall v_h \in X_h , \quad |\nabla v_h|_0 \leq c h^{-1} |v_h|_0 . \tag{4.6}$$

Introduisons A_{1h}, A_{2h} et B_h^t les équivalents discrets de *id*, ∇^2 et ∇ aux espaces L_h, X_h et M_h, et notons V_h le noyau de B_h. On définit de plus, les opérateurs $U_{\varepsilon h} = B_h (A_{1h} + \varepsilon A_{2h})^{-1} B_h^t$ et $U_{0h} = B_h A_{1h}^{-1} B_h^t$. En pratique, pour $g_h \in L_h$ on obtient $p_{0h} = U_0^{-1}(g_h)$ en résolvant le problème suivant : trouver $u_{0h} \in L_h = X_h$ et $p_{0h} \in M_h$ tel que

$$\begin{cases} \forall v_h \in L_h = X_h , & (u_{0h}, v_h) + (p_{0h}, \nabla \cdot v_h) = 0 \\ \forall q_h \in M_h , & (\nabla \cdot u_{0h}, q_h) = (g_h, q_h) . \end{cases} \tag{4.7}$$

En pratique numérique, la matrice associée à U_{0h} est déduite de celle associée à $U_{\varepsilon h}$ en faisant simplement $\varepsilon = 0$.

D'après la proposition 4.1 et le théorème de Banach-Steinhaus, pour h fixé, il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, U_{0h} est un préconditionneur de $U_{\varepsilon h}$. Pour avoir une estimation optimale du ε_0 en question en fonction de h, on peut essayer d'utiliser l'estimation (3.10) en majorant le membre de droite. Cette façon de procéder est techniquement difficile car on ne dispose pas d'inégalité inverse du type (4.6) pour majorer le terme

$$\sup_{w_h \in V_h - \{0\}} (\nabla u_{0h}, \nabla w_h) / |w_h|_{L_h}$$

qui intervient dans (3.10). Par la suite on propose une autre technique, non optimale, pour estimer l'évolution de ε_0 en fonction de h. En fait on montre

THÉORÈME 4.1 : *Pour ε suffisamment petit et h fixé, U_{0h} est un préconditionneur de $U_{\varepsilon h}$, dont l'efficacité est donnée par :*

$$|id_h - U_{0h}^{-1} U_{\varepsilon h}| \leq c \frac{\varepsilon}{h^3} . \tag{4.8}$$

Démonstration : Soit $g_h \in L_h$ et définissons $p_{\varepsilon h} = U_{\varepsilon h}^{-1}$ et $p_{0h} = U_{0h}^{-1} g_h$. Par définition on a donc

$$\begin{cases} \forall v_h \in X_h , & (u_{\varepsilon h} - u_{0h}, v_h) + (p_{\varepsilon h} - p_{0h}, \nabla \cdot v_h) = - \varepsilon (\nabla u_{\varepsilon h}, \nabla v_h) \\ \forall q_h \in M_h , & (\nabla \cdot (u_{\varepsilon h} - u_{0h}), q_h) = 0 \end{cases}$$

d'où on déduit la majoration

$$|u_{\varepsilon h} - u_{0h}|_0^2 \leq \varepsilon \; |\nabla u_{\varepsilon h}|_0 \; |\nabla (u_{\varepsilon h} - u_{0h})|_0$$

et à l'aide de l'inégalité inverse (4.6) on obtient

$$|u_{\varepsilon h} - u_{0h}|_0 \leq c \frac{\varepsilon}{h^2} \, |u_{\varepsilon h}|_0 \, .$$

Il est alors clair que

$$\beta_D \; |p_{\varepsilon h} - p_{0h}|_0 \leq c \frac{\varepsilon}{h^2} \, |u_{\varepsilon h}|_0$$

où la constante β_D est définie par

$$\beta_D = \inf_{p \in M_h} \sup_{v \in X_h} \frac{(p, \nabla \, . \, v)}{|p|_0 \; |v|_0} \, .$$

On a bien sûr $\beta \leq \beta_D$ où rappelons que β est la constante « inf-sup » du problème de Stokes discret. Puisque β ne dépend pas de h, on peut minorer β_D par une constante indépendante de h. D'autre part, on obtient une majoration de $|u_{\varepsilon h}|_0$ en rappelant que

$$\forall v_h \in X_h \, , \quad (u_{\varepsilon h}, v_h) + \varepsilon (\nabla u_{\varepsilon h}, \nabla v_h) = - \, (p_{\varepsilon h}, \nabla \, . \, v_h) \, .$$

D'où on déduit

$$|u_{\varepsilon h}|_0 \leq \frac{c}{h} \, |p_{\varepsilon h}|_0$$

et finalement la majoration

$$|p_{\varepsilon h} - U_{0h}^{-1} \, U_{\varepsilon h} \, p_{\varepsilon h}|_0 \leq c \frac{\varepsilon}{h^3} \, |p_{\varepsilon h}|_0$$

qui permet de conclure. ■

Parmi les premières tentatives numériques de préconditionnement de $U_{\varepsilon h}$ par U_{0h} on peut citer celle de Labadie-Lasbleiz [12]. Une justification théorique de leur démarche a été donnée par Cahouet-Chabard [9] dans le cadre de conditions aux limites périodiques. Il semble, à la connaissance de l'auteur, qu'une justification théorique de la technique dans le cadre général n'avait pas encore été produite.

Notons toutefois que le résultat est assez pauvre. En effet, comme Cahouet-Chabard [9] l'avaient déjà justement remarqué cette technique de préconditionnement n'est pas uniforme en fonction de la finesse de la discrétisation. Lorsqu'on raffine le maillage en fixant ε, U_{0h} perd ses qualités de préconditionneur. En règle générale, pour pouvoir utiliser U_{0h} comme préconditionneur dans le cadre d'une approximation des équations de Navier-Stokes instationnaires par des éléments finis, le pas de temps doit satisfaire

$$\delta t < c \frac{h^3}{\nu}. \tag{4.9}$$

Remarquer que cette majoration n'est probablement pas optimale, en pratique (*cf.* Cahouet-Chabard [9]) il semble que U_{0h} peut être encore efficace pour $\delta t < ch^2/\nu$.

Pour palier les problèmes d'efficacité de U_{0h} apparaissant sur des maillages très fins ou pour des pas de temps trop grands, Cahaouet-Chabard [9] proposent d'utiliser plutôt $\tilde{U}_{0h} = (U_{0h}^{-1} - \varepsilon id_h)^{-1}$ et ils justifient leur choix par une analyse de Fourier. Les expériences numériques rapportées dans [9] semblent indiquer que $\tilde{U}_{0h}$ est un préconditionneur uniforme de $U_{\varepsilon h}$. A la connaissance de l'auteur une justification théorique dans le cadre général des conditions de Dirichlet n'a pas encore été produite. A la lumière du présent travail il semble toutefois qu'une telle justification ne peut pas résulter d'une étude asymptotique, car la perturbation associée au terme de diffusion visqueuse est singulière et de ce fait ne peut conduire à des estimations uniformes.

4.4. Approximation spectrale

La technique précédente peut aussi s'appliquer dans le cadre d'une approximation spectrale du problème de Stokes (*cf.* Azaiez *et al.* [3]). Considérons le domaine $\Omega =]-1, +1[^2$ et soient $N \geq K > 0$ deux entiers. On définit $X_N \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ l'espace des vitesses polynomiales sur Ω de degré partiel inférieur ou égal à N et nulles sur le bord de Ω. On note $M_K \subset L_0^2(\Omega)$ l'espace des pressions polynomiales sur Ω de degré partiel inférieur ou égal à K et compatibles avec l'espace des vitesses. On note β_{NK} la constante « inf-sup » associée aux espaces X_N et M_K (*cf.* Bernardi-Maday [4] pour une revue des approximations spectrales dans ce cadre).

Dans un premier temps on a l'inégalité inverse suivante :

LEMME 4.2 : *(cf. Canuto-Quarteroni* [7] *lemme* 2.1, *p.* 73*)*

$$\forall v_n \in X_N , \quad |\nabla v_n|_0 \leq cN^2 |v_n|_0 . \tag{4.10}$$

En notant $U_{\varepsilon NK}$ et U_{0NK} les opérateurs d'Uzawa discrets associés à U_ε et U_0 on est alors en mesure d'établir :

THÉORÈME 4.2 : *Pour ε suffisamment petit et N, K, fixés, U_{0NK} est un* *préconditionneur de $U_{\varepsilon NK}$, dont l'efficacité est donnée par :*

$$\left| id_K - U_{0NK}^{-1} U_{\varepsilon NK} \right| \leqslant c \frac{\varepsilon N^6}{\beta_D} . \tag{4.11}$$

Démonstration : Procéder comme pour le théorème 4.1 en utilisant le lemme 4.2. ■

Comme pour l'approximation par éléments finis conformes, l'utilisation de U_{0NK} comme préconditionneur n'est envisageable que si le pas de temps satisfait une contrainte du type :

$$\delta t < \frac{c\beta_D}{\nu N^6} . \tag{4.12}$$

Une difficulté inhérente aux méthodes spectrales est que la constante « inf-sup » β_{NK} dépend des entiers N et K. A titre d'exemple, dans le cas où $K = N - 2$ on a le résultat suivant (*cf.* Azaiez [1] p. 63 et Bernardi-Maday [4] p. 147) :

PROPOSITION 4.2 : *Pour l'approximation* $(\mathbb{P}_N, P_{N-2})$ *on a :*

$$\frac{c}{\sqrt{N}} \leqslant \beta_{N, N-2} \leqslant \frac{c'}{\sqrt{N}} . \tag{4.13}$$

Ainsi dans le cadre de l'approximation $(\mathbb{P}_N, P_{N-2})$ du problème de Stokes on a la minoration

$$\frac{c}{\sqrt{N}} \leqslant \beta_D . \tag{4.14}$$

Les expériences numériques semblent montrer que β_D serait d'ordre 1 et que la contrainte sur le pas de temps serait plutôt en $\delta t < c/\nu N^5$ (*cf.* [2]). De toutes façons, il semble que pour les approximations spectrales, la contrainte sur le pas de temps réduise sensiblement le domaine d'utilisation du préconditionnement en question. On peut même se demander comme dans [3] si les contraintes imposées sur le pas de temps par ce type de préconditionnement ne rendent pas compétitives les méthodes explicites ou les méthodes de projection [8], [16].

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier Mme V. Girault pour ses conseils et l'attention qu'elle a bien voulu lui accorder. Il remercie aussi M. Azaiez qui a attiré son attention sur les problèmes de préconditionnement et avec qui il a eu de nombreuses discussions fructueuses.

RÉFÉRENCES

[1] M. AZAIEZ, 1990, *Calcul de la pression dans le problème de Stokes pour les fluides visqueux incompressibles par une méthode spectrale de collocation,* Thèse, Université de Paris-Sud.

[2] M. AZAIEZ, *Preconditionning of Stokes problem,* en préparation.

[3] M. AZAIEZ, A. FIKRI, G. LABROSSE, 1992, *Direct simulation of 3-D driven cavity flow by collocation spectral method,* ICOSAHOM 92, Montpellier.

[4] C. BERNARDI, Y. MADAY, 1992, Approximations spectrales des problèmes aux limites elliptiques, *Mathématiques et Applications 10,* Springer-Verlag.

[5] H. BREZIS, 1983, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, Paris.

[6] F. BREZZI, 1974, On the existence uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, R.A.I.R.O., R. 2, 129-151.

[7] C. CANUTO, A. QUARTERONI, 1982, Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces, *Math. Comp., 38,* 67-86.

[8] A. CHORIN, 1968, Numerical simulation of the Navier-Stokes equations, *Math. Comp., 22,* 745-762.

[9] J. CAHOUET, J.-P. CHABARD, 1988, Some fast 3-D finite element solvers for generalized Stokes problem, *Int. J. Num. Meth. in Fluids, 8,* 269-295.

[10] V. GIRAULT, P.-A. RAVIART, 1986, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, *Springer Series in Computational Mathematics, 5,* Springer-Verlag.

[11] D. HUET, 1964, Perturbations singulières, *C. R. Acad. Sci. Paris, 258,* 6320-6322.

[12] G. LABADIE, P. LASBLEIZ, 1983, Quelques méthodes de résolution du problème de Stokes en éléments finis, *E.D.F. rapport HE41/83.01.*

[13] J.-L. LIONS, 1973, Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, *Lecture Notes in Mathematics, 323,* Springer-Verlag.

[14] J.-L. LIONS, E. MAGENES, 1968, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Dunod, Paris.

[15] R. TEMAM, 1977, Navier-Stokes Equations, *Studies in Mathematics and its Applications, 2,* North-Holland.

[16] R. TEMAM, 1968, Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes, *Bull. Soc. Math. France, 98,* 115-152.