

B.-E. AINSEBA

J.-P. KERNEVEZ

R. LUCE

**Application des sentinelles à l'identification
des pollutions dans une rivière**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome
28, n° 3 (1994), p. 297-312

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1994__28_3_297_0

© AFCET, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATION DES SENTINELLES À L'IDENTIFICATION DES POLLUTIONS DANS UNE RIVIÈRE (*)

par B.-E. AINSEBA ⁽¹⁾, J.-P. KERNEVEZ ⁽²⁾ et R. LUCE ⁽³⁾

Communiqué par J.-L. LIONS

Résumé. — On s'est intéressé dans cet article à l'identification de la pollution dans une rivière. Le modèle dont on dispose est incomplet dans le sens où l'on connaît mal les données initiales ainsi que certains termes manquants. Les pollutions se présentent comme des termes sources dont on connaît la position et la nature mais pas l'amplitude. Le but est d'estimer ces amplitudes, les termes manquants ne nous intéressant pas. Deux approches sont possibles, l'une classique utilisant les moindres carrés, l'autre mieux adaptée à notre problème est la méthode des sentinelles développée par J.-L. Lions [5], [6]. Dans la première partie, on applique les sentinelles sur un modèle régissant la concentration de la demande en oxygène biologique dans l'eau, notée D.B.O., dans le cas où la rivière est supposée monodimensionnelle. Dans une deuxième partie le cas bidimensionnel est examiné. Dans la troisième, le cas plus réaliste où l'on tient compte de la D.B.O., du déficit en oxygène et de la concentration en nitrates est également traité. Dans la dernière partie, la solution obtenue avec la méthode des moindres carrés est comparée à celle obtenue avec la méthode des sentinelles.

Abstract. — The aim of this paper is to look at the identification of pollutions in a river. The initial conditions and some boundary conditions are not well determined, thus the model used here is incomplete. The pollution sources can be considered as functionals whose position and nature are known, their amplitudes being however unknown. The goal is to estimate these amplitudes since the other missing terms are of no interest to us. There are two possible approaches of this problem, one is the more classical and uses the least square method, the other, more suited to our problem, is the Sentinel Method introduced by J. L. Lions [5], [6]. In the first part we apply the Sentinel Method to a model which governs the concentration of the biological oxygen demand in water, denoted here by D.B.O., with a river considered as monodimensional. The two-dimensional case is looked at the second part. In the third part we take into account not only the D.B.O. but also the oxygen deficit and the nitrate concentration, which is more realistic. In the last part, the solution computed by the least square method is compared with the one obtained with the Sentinel Method.

(*) Manuscrit reçu le 25 mai 1993.

(1) Université de Bordeaux 2, UFR, MI2S, BP 69, 33076 Bordeaux Cedex, France & U.R.A., CNRS 226 CeReMaB, Université de Bordeaux 1, France.

(2) Université de Technologie de Compiègne, BP 649, 60206 Compiègne, France.

(3) Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Pau & U.R.A., CNRS 1204, I.P.R.A., Av. de l'Université, 64000 Pau, France.

1. CAS MONODIMENSIONNEL

1.1. Présentation du problème

Le modèle adimensionnalisé (E.P.A. [4], L. C. Wrobel [11]) qui régit la D.B.O. dans la rivière notée par Ω ramenée à l'intervalle $[0, 1]$ est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + U \frac{\partial y}{\partial x} - D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Ky = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t) \delta(x - x_i) \\ y(x, 0) = y_0 + \tau_0 \bar{y}_0 \\ y(0, t) = g_1 + \tau_1 \bar{g}_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(1, t) = g_2 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où y représente la D.B.O., K , U , D sont respectivement le coefficient de réaction, la vitesse de transport et le coefficient de dispersion. Les x_i sont les positions des pollutions ordonnées d'une façon croissante. Les manières dont les pollutions sont déversées au cours du temps sont données par les f_i que l'on suppose connues. y_0 , g_1 , g_2 représentent des données initiales et aux bords et sont également connus. $\tau_0 \bar{y}_0$ et $\tau_1 \bar{g}_1$ représentent les incertitudes sur les données initiales et les données de bord avec \bar{y}_0 quelconque et \bar{g}_1 connue. Les τ_i sont des scalaires inconnus que l'on ne cherche pas à estimer. Et les λ_i sont les amplitudes des pollutions à déterminer.

1.2. Application de la méthode des Sentinelles

Nous disposons de mesures y_{obs} de la D.B.O. durant un temps T sur une portion de la rivière, notée ω , que l'on appelle observatoire. Il s'agit alors de déterminer les amplitudes λ_i des pollutions, sachant que les données initiales et de bord mal connues ne nous intéressent pas.

La méthode des sentinelles consiste à construire une fonctionnelle

$$S(\tau, \lambda) = \int_{(0, T) \times \omega} w y \, dx \, dt$$

où w est à déterminer pour que la sentinelle S soit sensible aux paramètres à identifier et insensible aux paramètres inintéressants.

Commençons par identifier le paramètre λ_1 . On cherche alors un w solution du problème suivant :

$$(P) \left| \left| \frac{\partial S}{\partial \tau_0} \right| \leq \varepsilon, \left| \frac{\partial S}{\partial \tau_1} \right| \leq \varepsilon, \left| \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right| \leq \varepsilon \text{ pour } i \neq 1, \left| \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} - \alpha_1 \right| \leq \varepsilon \right. \\ \left. w \text{ de norme minimale dans } L^2(\omega \times]0, T[) \right.$$

Une fois ω trouvé, on effectue un développement de Taylor de S au voisinage de $(0, 0)$.

$$S(\tau, \lambda) = S(0, 0) + \tau_0 \frac{\partial S}{\partial \tau_0} + \tau_1 \frac{\partial S}{\partial \tau_1} + \lambda_1 \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} + \sum_{i=2}^n \lambda_i \frac{\partial S}{\partial \lambda_i}$$

d'où une estimation de λ_1 quand $\varepsilon \rightarrow 0$, sachant que $S(0, 0)$ est calculable et

$$S(\tau, \lambda) = \int_{(0, T) \times \omega} w y_{\text{obs}} dx dt.$$

Pour identifier le paramètre λ_i , il suffit de refaire le même raisonnement en remplaçant l'indice 1 par l'indice i .

1.3. Calcul de ω

PROPOSITION 1.1 : Résoudre le problème P revient à trouver w de norme minimale qui mène le système (1.2) vers le système (1.3) (J.-L. Lions [5]).

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial t} - U \frac{\partial p}{\partial x} - D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + Kp = w \chi_{\omega \times (0, T)} \\ p(x, T) = 0 \\ p(0, t) = 0 \\ Up(1, t) + D \frac{\partial p}{\partial \nu}(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |p(x, 0)| \leq \varepsilon, \quad \left| \int_0^T \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) \bar{g}_1(t) dt \right| \leq \varepsilon \\ \left| \int_0^T f_1(t) p(x_1, t) dt - \alpha_1 \right| \leq \varepsilon \\ \left| \int_0^T f_i(t) p(x_i, t) dt \right| \leq \varepsilon \quad i = 2, n. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Preuve : On note par y_μ la dérivée de y , solution de (1.1), par rapport à μ où $\mu \in \{\tau_0, \tau_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

En multipliant (1.2) par y_μ et en intégrant par partie on obtient (1.3).

THÉORÈME 1.1 : Supposons que $n = 2$. Si $\omega =]a_1, a_2[$ est tel que $0 \leq a_1 \leq x_1 \leq a_2$ et $0 \leq a_1 \leq x_2$ alors l'espace

$$\mathcal{A} = \left\{ p(x, 0), \int_0^T \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) \bar{g}_1(t) dt, \int_0^T f_1(t) p(x_1, t) dt, \int_0^T f_2(t) p(x_2, t) dt / w \in L^2(\omega \times]0, T[) \right\}$$

est dense dans $L^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Démonstration : Pour démontrer la densité, il suffit d'utiliser le théorème de Hahn Banach et de remarquer que \mathcal{A}^\perp est réduit à zéro. Soit $(\rho_0, \beta, \zeta_1, \zeta_2) \in \mathcal{A}^\perp$ et ρ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + K\rho = \sum_{i=1}^2 \zeta_i f_i(t) \delta(x - x_i) \\ \rho(x, 0) = \rho_0 \\ \rho(0, t) = \beta \bar{g}_1 \\ \frac{\partial \rho}{\partial \nu}(1, t) = 0. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

En multipliant la première équation de (1.4) par p solution de (1.2) et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{\Omega} p(x, 0) \rho_0(x) dx + D\beta \int_0^T \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) \bar{g}_1(t) dt + \sum_{i=1}^2 \zeta_i \int_0^T f_i(t) p(x_i, t) dt = \int_{x \times]0, T[} \rho w dx dt$$

et donc
$$\int_{\omega \times]0, T[} \rho w dx dt = 0 \quad \forall w \in L^2(\omega \times]0, T[).$$

Alors $\rho = 0$ sur $(\omega \times]0, T[)$.

Or dans $]0, x_1[\times]0, T[$ on a $\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + K\rho = 0$. Donc en utilisant le théorème de Mizohata [9] on conclut que $\rho = 0$ dans $]0, x_1[\times]0, T[$ et par conséquent $\beta = 0$.

Notons par $\bar{\rho}$ la restriction de ρ à $]x_1, x_2[$, $\bar{\rho}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial x^2} + K\bar{\rho} = 0 \\ \bar{\rho}(x, 0) = \rho_0 \\ \bar{\rho}(x_1, t) = 0 \\ \bar{\rho} = 0 \text{ sur }]x_1, a_2[. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

A nouveau par Mizohata, on déduit que $\bar{\rho} = 0$.

Notons par $\bar{\bar{\rho}}$ la restriction de ρ à $]x_2, 1[$. L'équation vérifiée par $\bar{\bar{\rho}}$ est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\bar{\rho}}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{\bar{\rho}}}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \bar{\bar{\rho}}}{\partial x^2} + K\bar{\bar{\rho}} = 0 \\ \bar{\bar{\rho}}(x, 0) = \rho_0 \\ \bar{\bar{\rho}}(x_2, t) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\bar{\rho}}}{\partial \nu}(1, t) = 0. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

En x_2 , ρ vérifie

$$U \frac{\partial \rho}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \zeta_2 f_2(t) \delta(x - x_2)$$

et la formule des sauts donne en x_2

$$U \frac{\partial \rho}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = U \bar{\rho} \delta(x - x_2) - 2D \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \delta(x - x_2).$$

On en déduit donc

$$-2D \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}(x_2, t) = \zeta_2 f_2(t). \quad (1.7)$$

Si l'on suppose qu'il existe un petit intervalle de temps $]t_0, t_1[$ où $f_2(t)$ s'annule, alors par le théorème d'unicité de Cauchy, on conclut que $\bar{\rho} = 0$ sur $]x_2, 1[\times]t_0, t_1[$. Par le théorème d'unicité rétrograde [8], [3] $\bar{\rho}(x, t_0) = 0$ entraîne que $\bar{\rho} = 0$ sur $]x_2, 1[\times]0, t_0[$. Finalement par l'unicité de Cauchy $\bar{\rho}(x, t_1) = 0$ entraîne $\bar{\rho} = 0$ sur $]x_2, 1[\times]t_1, T[$. On conclut donc que ρ_0 est nul ainsi que ζ_1 et ζ_2 .

Remarques :

— Dans le cas de n pollutions, le théorème 1.1 est encore valide à condition de prendre $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ observatoires, selon que n soit pair ou pas, disposés de telle façon qu'il y ait au moins une source de pollution par observatoire et au plus une pollution entre deux observatoires.

— L'hypothèse $f_2 = 0$ sur $]t_0, t_1[$ n'est pas nécessaire, f_2 non régulière suffit car (1.6) et (1.7) n'est possible que si $\zeta_2 = 0$.

— On peut se restreindre à des observatoires ponctuels (B. E. Ainseba [1]). Par exemple, pour $n = 2$, il faut quatre points d'observations disposés comme suit :

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < x_1 < a_4 < x_2 < 1.$$

1.4. Résultats numériques

Pour la détermination de w , on utilise une méthode d'optimisation utilisant un algorithme de gradient conjugué, la fonction coût étant :

$$J(w) = \frac{1}{2} \left((p(x, 0))^2 + \left(\int_0^T \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) \bar{g}_1(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^T f_1(t) p(x_1, t) dt - \alpha_1 \right)^2 + \left(\int_0^T f_2(t) p(x_2, t) dt \right)^2 \right). \quad (1.8)$$

L'état (1.1) est discrétisé par un schéma implicite de différences finies, d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Le système d'optimalité est calculé à partir de l'équation d'état et de la fonction coût discrétisées.

Nous allons présenter quelques résultats numériques obtenus. On trouvera une étude plus complète dans la thèse de B. E. Ainseba [1].

Les C_i dans le tableau 1.1 représentent les différents termes de la fonction coût (1.8) ($J(w) = \frac{1}{2} \{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2\}$). Le $\bar{\alpha}$ représente la sensibilité de l'observation par rapport au paramètre λ_i quand $w \equiv 1$. La colonne C.E. indique si numériquement on obtient la contrôlabilité exacte. Nt et Nx représentent respectivement le pas de discrétisation en temps et en espace des équations.

Différents cas ont été étudiés :

Cas sans transport : $U = 0$; $D = 1$; $K = 0$; $\Omega =]0, 1[$; $\omega =]0.4, 0.7[$.

Cas 1 : $T = 1$; $Nx = Nt = 11$; $x_1 = 0.9$; $x_2 = 0.8$; $\alpha_1 = 0.1$.

Cas 2 : $T = 1$; $Nx = Nt = 21$; $x_1 = 0.9$; $x_2 = 0.8$; $\alpha_1 = 0.1$.

Cas 3 : $T = 1$; $Nx = Nt = 21$; $x_1 = 0.6$; $x_2 = 0.5$; $\alpha_1 = 0.1$.

Cas 4 : $T = 1$; $Nx = Nt = 11$; $x_1 = 0.3$; $x_2 = 0.2$; $\alpha_1 = 0.1$.

Cas 5 : $T = 0.01$; $Nx = Nt = 11$; $x_1 = 0.9$; $x_2 = 0.8$; $\alpha_1 = 0.1$.

Cas 6 : $T = 0.01$; $Nx = Nt = 11$; $x_1 = 0.9$; $x_2 = 0.8$; $\alpha_1 = 10^{-4}$.

Cas avec transport : $U = 1$; $D = 1$; $K = 0$; $\Omega =]0, 1[$; $\omega =]0.4, 0.7[$.

Cas 7 : $\Omega =]0, 1[$; $T = 1$; $Nx = Nt = 21$; $x_1 = 0.2$; $x_2 = 0.3$; $\alpha_2 = 0.1$.

Tableau 1.1.

Cas	$\bar{\alpha}$	C1	C2	C3	C4	$\ w\ $	C.E.
1	0,114	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$3,03 \cdot 10^{-5}$	$2,47 \cdot 10^{-5}$	$3,06 \cdot 10^{-6}$	5,48	oui
2	0,118	$1,32 \cdot 10^{-4}$	$3,44 \cdot 10^{-5}$	$2,75 \cdot 10^{-5}$	$3,70 \cdot 10^{-6}$	6,39	oui
3	0,141	$4,63 \cdot 10^{-5}$	$7,52 \cdot 10^{-6}$	$5,42 \cdot 10^{-6}$	$7,70 \cdot 10^{-7}$	2,98	oui
4	$8,04 \cdot 10^{-2}$	$2,91 \cdot 10^{-3}$	$7,67 \cdot 10^{-4}$	$4,09 \cdot 10^{-4}$	$4,12 \cdot 10^{-5}$	21,26	non
5	$2,13 \cdot 10^{-6}$	$4,54 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^{-4}$	$9,98 \cdot 10^{-2}$	$8,19 \cdot 10^{-9}$	10,71	non
6	$2,13 \cdot 10^{-6}$	$4,57 \cdot 10^{-7}$	$1,00 \cdot 10^{-7}$	$9,98 \cdot 10^{-5}$	$4,31 \cdot 10^{-12}$	0,0558	oui
7	$8,82 \cdot 10^{-2}$	$3,20 \cdot 10^{-4}$	$2,66 \cdot 10^{-4}$	$1,44 \cdot 10^{-4}$	$1,52 \cdot 10^{-5}$	15,39	non

Une norme élevée du contrôle w signifie une mauvaise identifiabilité pour la sensibilité imposée. Diminuer la sensibilité permet d'obtenir un contrôle de norme plus faible mais on augmente l'incertitude sur le paramètre à estimer. Numériquement, l'identifiabilité des paramètres λ_i dépend de la position de l'observatoire et de la sensibilité imposée. Les résultats sont meilleurs lorsque les pollutions sont à droite ou à l'intérieur de l'observatoire.

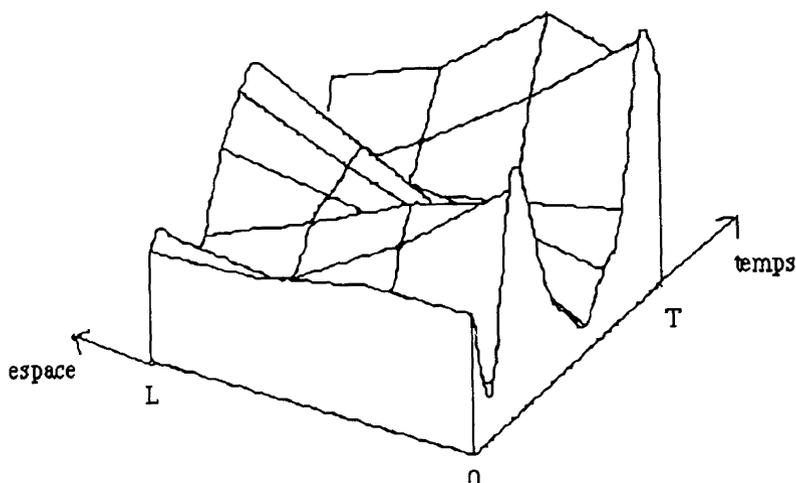


Figure 1.1. — Exemple de contrôles w obtenus (cas 1).

Dans le cas de pollutions situées à gauche de l'observatoire, on n'arrive pas à satisfaire toutes les contraintes et il n'y a pas d'identification des paramètres ; ceci s'explique par le fait que les informations provenant des pollueurs se mélangent avec ceux provenant de l'amont de la rivière. Lorsque T diminue, la norme du contrôle w augmente, et l'identifiabilité du paramètre diminue. Le fait de considérer un terme de transport ne change pas fondamentalement les résultats. Le Cas 7 (à comparer avec le Cas 4) montre que l'ajout du terme de transport améliore quelque peu le résultat puisque la norme de w diminue et les contraintes sont mieux satisfaites.

Le modèle (1.1) manque quelque peu de réalisme, du moins au début de la rivière, qu'on appelle souvent par zone de Taylor ou période convective et où la dispersion transversale ne s'est pas encore établie. Ceci étant les modèles utilisés en pratique ne tiennent pas compte de la période convective, les effets étant minimes quand on résoud le problème direct. Le problème inverse sera par contre affecté, vu la nature mal posée de ce type de problèmes.

Simuler la rivière par une ligne introduit donc des difficultés techniques artificielles principalement dues à la séparation de la rivière en des domaines non connexes, ce qui empêche les informations de se propager, en plus de l'existence de la période convective dont on ne tient pas compte. Ces difficultés se lèvent dès qu'on passe à un modèle bidimensionnel.

2. CAS BIDIMENSIONNEL

2.1. Présentation du problème

Le modèle bidimensionnel qui régit la D.B.O. est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + V \cdot \nabla y - D_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - D_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + Ky = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t) \delta(x - x_i) \\ y(x, 0) = y_0 + \tau_0 \bar{y}_0 \\ y = g_1 \quad \text{sur } S_1 \times]0, T[\\ \frac{\partial y}{\partial \nu_D} = g_2 \quad \text{sur } S_2 \times]0, T[. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Les paramètres et les variables ont les mêmes significations que dans le paragraphe 1.1. V est le vecteur vitesse de transport et D_1, D_2 sont les coefficients de dispersion. $\frac{\partial y}{\partial \nu_D}$ est la dérivée normale de y dans la direction de la dispersion. Dans le cas étudié, on suppose que les valeurs aux bords sont connues. Toutefois, ce qui suit reste valable dans le cas de conditions aux bords mal connues.

2.2. Existence d'une sentinelle

Soit ω l'observatoire sur la rivière Ω . Comme précédemment, on cherche une sentinelle S sensible au paramètre à identifier et insensible aux autres. Il s'agit alors de trouver w qui mène le système (2.2) vers le système (2.3).

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(V \cdot p) - D_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - D_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + Kp = w \chi_{\omega \times (0, T)} \\ p(x, T) = 0 \\ p = 0 \quad \text{sur } S_1 \times]0, T[\\ (V \cdot \nu_D)p + \frac{\partial p}{\partial \nu_D} = 0 \quad \text{sur } S_2 \times]0, T[\end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |p(x, 0)| \leq \varepsilon \\ \left| \int_0^T f_1(t) p(x_1, t) dt - \alpha_1 \right| \leq \varepsilon \\ \left| \int_0^T f_i(t) p(x_i, t) dt \right| \leq \varepsilon \quad i = 2, n . \end{array} \right. \quad (2.3)$$

THÉORÈME 2.1 : Quel que soit ω ouvert de Ω , l'espace \mathcal{A} définit par :

$$\mathcal{A} = \left\{ p(x, 0), \int_0^T f_i(t) p(x_i, t) dt (i = 1, n) / w \in L^2(\omega \times]0, T[) \right\}$$

est dense dans $L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^n$.

Preuve : Il suffit de montrer que $\mathcal{A}^\perp = 0$. Soit $(\rho_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{A}^\perp$ et ρ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \nabla \rho - D_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} - D_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} + K\rho = \sum_{i=1}^n \xi_i f_i(t) \delta(x - x_i) \\ \rho(x, 0) = \rho_0 \\ \rho = 0 \quad \text{sur } S_1 \times]0, T[\\ \frac{\partial \rho}{\partial \nu_D} = 0 \quad \text{sur } S_2 \times]0, T[. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

En multipliant (2.4) par p et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{\Omega} p(x, 0) \rho_0(x) dx + \sum_{i=1}^n \xi_i \int_0^T f_i(t) p(x_i, t) dt = \int_{\omega \times]0, T[} \rho w dx dt$$

donc

$$\int_{\omega \times]0, T[} \rho w dx dt = 0, \quad \forall w \in L^2(\omega)$$

d'où

$$\rho = 0 \quad \text{sur } \omega \times]0, T[.$$

Si on considère l'ouvert $\Omega - \{x_i\}_{i=1, n}$, alors par le théorème de Mizohata on conclut que $\rho = 0$ sur $\Omega - \{x_i\}_{i=1, n}$. On finit la démonstration en remarquant que ρ est continue.

2.3. Résultats numériques (B. E. Ainseba [1])

Pour le calcul de ω on utilise une méthode analogue à celle décrite au paragraphe 1.4, l'équation d'état étant discrétisée par une méthode d'éléments finis de type P_1 .

Comme exemple nous avons considéré un tronçon de rivière, dont la longueur est de 4 620 m et la largeur de 60 m (fig. 2.1). On suppose que le fluide est idéal et irrotationnel, la vitesse sera donc exprimée à partir du gradient de potentiel de vitesse.

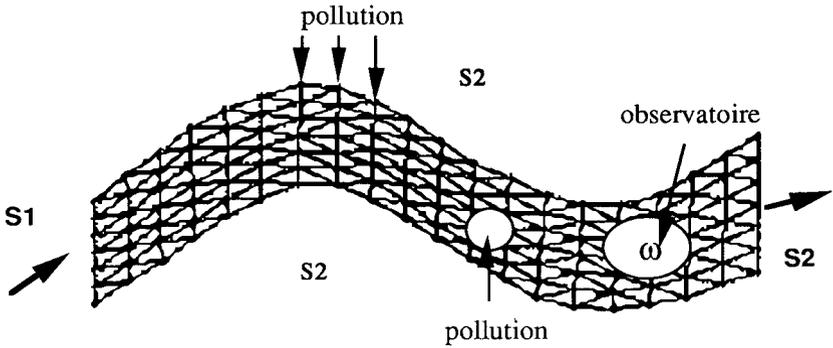


Figure 2.1. — Rivière polluée (Ω).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_D \Phi = 0 \\ \Phi = \Phi_d \text{ sur } S_1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_D} = \Phi_n \text{ sur } S_2. \end{array} \right. \quad \text{et } V = \nabla \phi$$

Φ_d et Φ_n sont données. La valeur maximale de la vitesse est 7 Km/j. Le coefficient de dispersion longitudinale D_1 est 8 m²/s. Nous supposons que la dispersion transversale D_2 est donnée par la loi d’Okubo [10].

$$\frac{D_2}{D_1} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{4/3}$$

où L_2 et L_1 représentent la largeur et la longueur de la rivière.

On cherche à estimer les λ_i exprimés en kg/j.

Plusieurs tests numériques sont présentés pour montrer l’influence des différents paramètres sur l’identifiabilité du paramètre λ_i . Dans certains cas, le paramètre est identifié mais au prix d’un contrôle ω de norme élevée (et d’un coût numérique important).

TEST 1 : Influence du temps d’observation T.

$$\omega = \Omega ; V = 0.$$

Tableau 2.1. — Influence du temps d’observation.

T	1,0	0,5	0,1	0,05	0,01
$\ w\ $	5,54	12,27	116,68	281,55	2 593,35
λ_1 identifié ?	oui	oui	oui	oui	oui

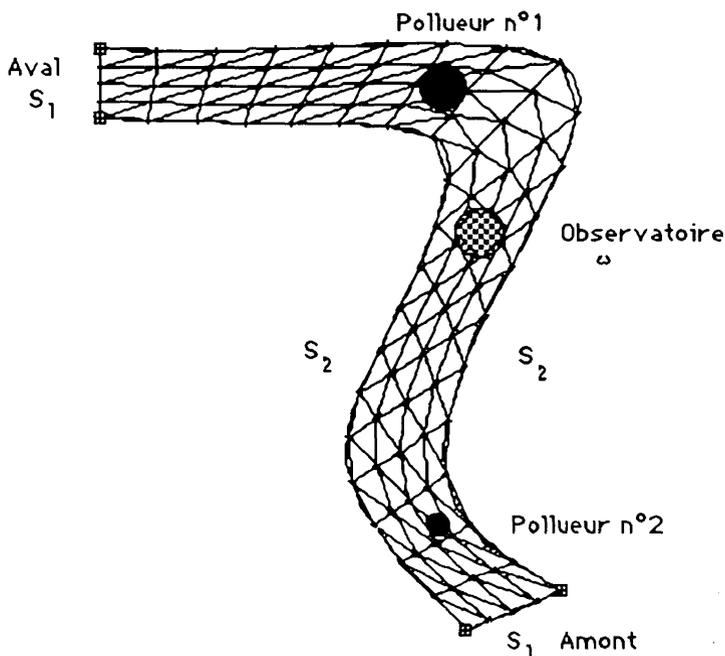


Figure 3.1. — Maillage du tronçon de rivière.

On remarque que lorsque T diminue, $\|w\|$ augmente, le paramètre λ_1 reste identifiable mais avec une précision moins importante.

TEST 2 : Influence de la taille de l'observatoire ω .

$T = 1$; $V = 0$.

Tableau 2.2. — Influence de la taille de l'observatoire.

ω	Ω	{1, ..., 9}	{1, ..., 7}	{1, 2, 3}	{1}
$\ w\ $	5,54	22,86	84,09	144,41	986,3
λ_1 identifié ?	oui	oui	oui	oui	oui

On remarque que plus la taille de l'observatoire diminue, plus la norme du contrôle augmente, ce qui perturbe également l'identification du paramètre.

TEST 3 : Influence du bruit de mesure.

$T = 1$; $V = 0$.

L'observation est bruitée suivant une loi uniforme centrée en 0.

Tableau 2.3. — Influence du bruit de mesure.

Bruit en %	0	1	5	10	50	100
$\omega = \Omega$	1,001	1,005	1,01	1,021	1,11	0,83
$\omega = \{1, \dots, 7\}$	0,999	1,005	0,89	1,11	1,18	0,37
$\omega = \{1\}$	0,999	0,942	1,28	-0,47	7,26	19,38

Plus la taille de l'observatoire est importante plus les sentinelles sont robustes aux perturbations sur les mesures. Si l'on considère un bruit non centré en 0, les résultats, en fonction de l'amplitude du bruit, se dégradent plus rapidement.

TEST 4 : Influence de la vitesse de convection.

$T = 1$; $\omega = \{1, 2, 3\}$; $\Phi_n = 0$; $\Phi_d = 7\,000$ en aval et $3\,500$ en amont. On pose $V = c \nabla \phi$.

Tableau 2.4. — Influence de la vitesse de convection.

c	0	1	14,2	142
$\ w\ $	71,95	72,27	79,22	387,13
λ_1	0,999	0,999	1,001	1,001

Comme la pollution à identifier est placée en aval de l'observatoire, seule l'information apportée par diffusion arrive sur l'observatoire et celle-ci est d'autant moins importante que la vitesse est grande. La dégradation de l'identifiabilité se traduit par le fait que la norme de w augmente.

Le test représenté par le tableau 2.6 est réalisé dans les mêmes conditions que précédemment avec une pollution à identifier placée en amont de l'observatoire.

Tableau 2.5. — Influence de la vitesse de convection.

c	0	0,1	1,0	1,42	14,2	142
$\ w\ $	153,205	152,662	143,78	139,88	97,47	58,83
λ_1	0,998	0,997	0,998	0,997	1,001	0,99

Comme la pollution est placée en amont de l'observatoire, plus la vitesse est élevée, plus l'information arrive vite à l'observatoire. L'identification du paramètre en est d'autant augmentée, ce qui se traduit par une baisse de la norme du contrôle.

Remarques

— Contrairement au cas particulier de la dimension 1, où le domaine n'était pas connexe, la position de l'observatoire n'est pas aussi cruciale et

on arrive toujours à satisfaire les contraintes mais parfois au prix d'un contrôle de norme importante.

— Si l'on note $\bar{\alpha}$ la sensibilité obtenue pour $w \equiv 1$, l'identifiabilité des paramètres sera d'autant meilleure que $\bar{\alpha}$ est importante.

3. SYSTÈME COMPLET : MODÈLE D.B.O., OXYGÈNE DISSOUT, NITRATES

3.1. Présentation du problème

Le modèle présenté ici est un modèle plus réaliste tenant compte de l'oxygène dissout, des nitrates en plus de la D.B.O. Le système obtenu est un système couplé de trois E.D.P.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_1}{\partial t} + V \cdot \nabla y_1 - D_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} - D_2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2} + K_1 y_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t) \delta(x - x_i) \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} + V \cdot \nabla y_2 - D_1 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} - D_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} + K_2 y_2 = K_1 y_1 \\ \frac{\partial y_3}{\partial t} + V \cdot \nabla y_3 - D_1 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_1^2} - D_2 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_2^2} + K_3 y_3 = \sum_{i=1}^{n'} \mu_i h_i(t) \delta(x - x'_i) \\ y_1(x, 0) = y_0^1 + \tau_0^1 \bar{y}_0^1 \\ y_2(x, 0) = y_0^2 + \tau_0^2 \bar{y}_0^2 \\ y_3(x, 0) = y_0^3 + \tau_0^3 \bar{y}_0^3 \\ y_1 = g_1, y_2 = g_2, y_3 = g_3 \quad \text{sur } S_1 \times]0, T[\\ \frac{\partial y_1}{\partial \nu_D} = \frac{\partial y_2}{\partial \nu_D} = \frac{\partial y_3}{\partial \nu_D} = 0 \quad \text{sur } S_2 \times]0, T[. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Dans la pratique la D.B.O. n'est pas mesurable, l'observation porte donc exclusivement sur y_2 et y_3 . Les paramètres à identifier sont les λ_i et les μ_j . La sentinelle se définit alors par :

$$S(\tau, \lambda, \mu) = \int_{\omega \times]0, T[} (w_2 y_2 + w_3 y_3) dx dt.$$

L'existence d'une sentinelle sensible au paramètre à identifier et insensible aux autres est liée, comme précédemment, au théorème d'unicité qui consiste à dire : si dans (3.1) avec des conditions aux bords homogènes $y_2 = y_3 = 0$ sur $\omega \times]0, T[$, alors les λ_i , les μ_j ainsi que les données initiales sont nuls. En effet si $y_2 = 0$ sur $\omega \times]0, T[$ et en considérant la deuxième équation, on déduit que y_1 est nul sur un ouvert contenu dans $\omega \times$

$]0, T[$ et on conclut que $y_1 \equiv 0$ comme dans le théorème 2.1. Le théorème de Mizohata appliqué à la seconde équation nous permet d'affirmer que $y_2 \equiv 0$. Pour y_3 on procède comme dans le théorème 2.1.

3.1. Résultats numériques

On reprend le cas du tronçon de rivière du numéro deux.

L'identification des μ_j ne pose aucun problème comme dans la partie 2. Par contre pour l'identification des λ_i on a les résultats suivants :

Tableau 3.1*

ω	Ω	$\{1, \dots, 9\}$	$\{1, \dots, 7\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1\}$
$\ w\ $	21,218	1 184,0	—	—	—
λ_1 calculé	1,016	0,85	non identifié	non identifié	non identifié

On remarque donc que pour identifier les λ_i il faut prendre des observatoires assez grands. Le coût des calculs est alors très élevé. Ceci provient du fait que la sensibilité par rapport aux paramètres à identifier est très faible. La différence par rapport aux cas précédents vient du fait que l'observation ne porte pas directement sur la variable de l'équation où interviennent les paramètres à identifier.

4. COMPARAISON SENTINELLES ET MOINDRES CARRÉS

Notons par C l'opérateur qui à $(\tau_0 \bar{y}_0, \lambda)$ associe $y|_{\omega \times]0, T[}$ dans l'équation (2.1) où l'on prend y_0, g_1, g_2 égaux à zéro pour simplifier les calculs.

La méthode classique pour l'identification des paramètres est la méthode des moindres carrés qui consiste à minimiser $J(\tau_0 \bar{y}_0, \lambda)$ donné par :

$$J(\tau_0 \bar{y}_0, \lambda) = \int_{\omega \times]0, T[} (y - y_{obs})^2 dx dt .$$

Le problème ainsi formulé consiste à identifier aussi bien les amplitudes de pollution que les perturbations de la donnée initiale qui ne nous intéressent nullement.

La solution du problème de moindres carrés est caractérisée par :

$$C^* C (\xi^*, \lambda^*) = C^* y_{obs}$$

(*) Contrairement à la théorie, numériquement on ne peut identifier les amplitudes de pollution dans le cas d'observatoires petits par rapport à la rivière.

où C^* est l'opérateur adjoint de C qui a w associée :

$$\left(p(x, 0), \int_0^T f_1(t) p(x_1, t) dt, \int_0^T f_i(t) p(x_i, t) dt \quad i = 2, n \right).$$

La méthode des sentinelles consiste à déterminer w satisfaisant

$$\|C^* w - (0, \alpha_1, 0, \dots, 0)\| \leq \varepsilon.$$

Le w caractérisé par la méthode H.U.M. (J. L. Lions [7]) est donné par $w = Cg$ où g vérifie l'équation $(C^* C + \varepsilon I)g = (0, \alpha_1, 0, \dots, 0)$.

On calcule ensuite λ_1 par :

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\omega \times]0, T[} w y_{\text{obs}} dx dt - S(0, 0)}{\alpha_1}.$$

Montrons que λ^* obtenu par moindres carrés est le même que celui obtenu par les sentinelles.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\langle g, C^* y_{\text{obs}} \rangle}{\alpha_1} = \frac{\langle g, C^* C(\xi^*, \lambda^*) \rangle}{\alpha_1} \\ &= \frac{\langle ((0, \alpha_1, 0, \dots, 0) - \varepsilon g), (\xi^*, \lambda^*) \rangle}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^* - \varepsilon \langle g, (\xi^*, \lambda^*) \rangle}{\alpha_1} \\ &= \lambda_1^* + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow \lambda_1^*$.

Des essais numériques, que l'on ne présente pas ici, montrent une parfaite compatibilité avec ce résultat.

CONCLUSIONS

Les sentinelles sont un bon outil pour l'identification de paramètres dans les systèmes linéaires à données incomplètes. Mêmes si les valeurs de paramètres calculées sont les mêmes que celles obtenues avec une méthode de moindres carrés, les sentinelles ont un avantage en coût de calcul lorsque l'on a plusieurs séries de mesures, ce qui est souvent le cas dans les expériences réelles. En effet, dès que le contrôle w est calculé, il suffit d'évaluer une intégrale pour identifier un paramètre et ceci pour chaque série de mesures. Alors que dans le cas des moindres carrés, il faut pour chaque série de mesures identifier tous les paramètres inconnus et donc refaire toute l'étape de minimisation de la fonction coût.

Les modèles que nous avons utilisé sont les plus usuels. Il existe des modèles où le terme de réaction est non linéaire, il n'y a alors aucune raison pour que les moindres carrés et les sentinelles fournissent le même résultat. Une étude comparative est faite dans (B. E. Ainseba [1], B. E. Ainseba, J. P. Kernevez, R. Luce [2]).

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient le Professeur J.-L. Lions pour les commentaires et aides qu'il leur a apportés.

RÉFÉRENCES

- [1] B. E. AINSEBA, 1992, *Contrôlabilité exacte, Identifiabilité, Sentinelles*, Thèse, Université de Technologie de Compiègne.
- [2] B. E. AINSEBA, J. P. KERNEVEZ, R. LUCE, *Identification de paramètres dans des problèmes non linéaires à données incomplètes*, à paraître.
- [3] C. BARDOS, L. TARTAR, 1973, Sur l'unicité rétrograde des équations paraboliques et quelques questions voisines, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **50**, Springer Verlag, 10-25.
- [4] E.P.A., 1985, Rates, Constants and Kinetics. Formations in Surface Water Quality Modeling (Second Edition) E.P.A./600/3-85/040.
- [5] J. L. LIONS, 1992, *Sentinelles pour les systèmes distribués*.
- [6] J. L. LIONS, 1988, Sur les sentinelles des systèmes distribués : cas des conditions initiales incomplètes. Conditions frontières, termes sources, coefficients incomplètement connus, *C.R.A.S.*, **307**, 819-823, 865-870.
- [7] J. L. LIONS, 1988, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, vols. 1 et 2, Masson.
- [8] J. L. LIONS, B. MALGRANGE, 1960, Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques, *Math. Scand.*, **8**, 277-286.
- [9] S. MIZOHATA, 1958, Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A*, **31**, 219-239.
- [10] A. OKUBO, 1980, *Diffusion and ecological problems : Mathematical models*, Springer Verlag.
- [11] L. C. WROBEL, C. A. BREBBIA, 1991, *Water pollution : Modelling, measuring and prediction*, Elsevier.