M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

D. SERRE

Sur le principe variationnel des équations de la mécanique des fluides parfaits

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, nº 6 (1993), p. 739-758

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_6_739_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 27, n° 6, 1993, p. 739 à 758)

SUR LE PRINCIPE VARIATIONNEL DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES PARFAITS (*)

par D. SERRE [1]

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — *On montre comment définir le principe variationnel* $\delta L = 0$ *où* L *est le Lagrangien usuel, soumis à des contraintes cinématiques, de façon à obtenir les équations d'Euler de la mécanique des fluides parfaits sous forme rigoureuse. Le calcul n'introduit pas de multiplicateur de Lagrange des contraintes. Il est valide pour des écoulements avec ondes de choc ; en particulier, les équations sont obtenues naturellement sous la forme de lois de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. Enfin, on interprète de manière variationnelle la croissance de l'entropie.*

En appliquant ce calcul au cas d'un fluide capillaire, nous trouvons une nouvelle forme des équations, qui n'est équivalente à la forme connue qu'en l'absence de chocs.

Notre méthode couvre tous les aspects des fluides parfaits, compressible ou non, stationnaire ou non, et même les écoulements avec axisymétrie.

Lorsque l'écoulement admet une fonction de courant, le principe variationnel est susceptible de conduire à un vrai problème d'extremum, comme dans [Mo].

Abstract. — On the variational principle for the equations of perfect fluid dynamics. *One gives a new version of the variational principe* $\delta L = 0$, *L being the usual Lagrangian, for the perfect fluid mechanics. It is formally equivalent to the well-known principle, as described in Serrin's Handbuch* [Sn], *but it gives the first rigorous derivation of the conservation laws (momentum and energy), including the discontinuous case (shock waves, contact discontinuities). Thanks to a new formulation of the constraints, we do not involve any Lagrange multiplier, which in previous works were neither physically relevant, since they do not appear in the Euler equations, nor mathematically relevant. We even give a variational interpretation of the entropy inequality when shock waves occur.*

Our method covers all aspects of the perfect fluids, including stationary and unstationary motion, compressible and incompressible fluids, axisymmetric case.

When the velocity field admits a stream function, the variational principle gives rise to extremal points of the Lagrangian on various infinite dimensional manifolds. For a suitable choice of this manifold, the flow is itself periodic, that is all the fluid particles have a periodic motion with the same period. Thus, following [*EM*], *the flow describes a closed geodesic on some group of diffeomorphisms.*

(*) Manuscrit reçu le 22 septembre 1992

Une partie de ce travail a été réalisée lorsque l'auteur était à l'université de Saint-Etienne.

[1] Unité de Mathématiques Pures et Appliquées CNRS UMR 128, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France.

1 INTRODUCTION

Nous considérons l'écoulement d'un fluide parfait dans un domaine $Q = (0, T) \times \Omega$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ ou 3, à bord régulier Pour fixer les idées, le bord de Ω sera constitué d'une paroi imperméable sur laquelle on imposera la condition de glissement

L'état du fluide est donné, en représentation Eulérienne, par $d + 2$ champs scalaires $(x, t) \mapsto (\rho, u, S) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, respectivement la densité de masse du fluide, son champ de vitesses et son entropie spécifique (par unité de masse) La nature du fluide impose une loi d'état $E = E(\rho, S)$ qui détermine l'énergie interne en fonction de la densité et de l'entropie , on récupère la pression par la formule $p = \rho \dfrac{\partial E}{\partial \rho} - E$

Le champ (ρ, u, S) correspond à un mouvement du fluide lorsque les $d + 2$ équations suivantes sont satisfaites

— loi de conservation de la masse

$$\rho_t + \operatorname{div} (\rho u) = 0 , \tag{1 1}$$

— loi de conservation de la quantité de mouvement

$$(\rho u)_t + \operatorname{div} (\rho u \otimes u) + \nabla p = 0 , \tag{1 2}$$

— loi de conservation de l'énergie

$$\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + E \right)_t + \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + E + p \right) u \right) = 0 \tag{1 3}$$

Pour un écoulement réversible, où (ρ, u, S) sont continus, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, les trois lois ci-dessus entraînent $(\rho S)_t + \operatorname{div} (\rho S u) = 0$ Il n'en est plus de même pour les écoulements irréversibles, où le second principe de la thermodynamique pose l'inégalité ci-dessous comme condition d'admissibilité

$$(\rho S)_t + \operatorname{div} (\rho S u) \geqslant 0 , \tag{1 4}$$

inégalité qui s'entend au sens des distributions

Pour simplifier, nous supposerons que (ρ, u, S) sont mesurables bornés En particulier, cette attitude est compatible avec le développement d'ondes de chocs

Un point de vue, très différent à première vue du précédent, consiste à dire que (ρ, u, S) décrit le mouvement d'un fluide, d'équation d'état E, dans Q s'il satisfait les conditions cinématiques 1 1 et 1 4 et si la variation

δL du Lagrangien est nulle pour toute variation $(\delta\rho, \delta u, \delta S)$ qui préserve 1.1 et 1.4. Le Lagrangien est défini par

$$L[\rho, u, S] =: \int_0^T (\text{énergie cinétique} - \text{énergie interne})\, dt\,,$$
$$= \int_Q \left(\frac{1}{2}\rho\,|u|^2 - E(\rho, S)\right) dx\, dt\,.$$

Cette formulation s'appelle le principe variationnel ou principe de moindre action. On pourra consulter à ce sujet [Sn].

Notre objectif est de donner un sens clair et rigoureux au principe variationnel. Tout d'abord, les contraintes 1.1 et 1.4 n'étant pas linéaires, la détermination des variations $(\delta\rho, \delta u, \delta S)$ est délicate, d'autant que les contraintes ne définissent ni une variété ni un ensemble de « dimension » finie. Les calculs décrits dans [Sn] sont donc seulement formels : ils introduisent des multiplicateurs de Lagrange qui ne peuvent être rigoureusement justifiés et dont le sens physique n'est pas évident puisqu'on ne les retrouve pas dans les équations du mouvement 1.1 à 1.4. Une autre critique essentielle concernant les calculs de [Sn] est l'absence d'intérêt pour les ondes de choc ; on n'y cherche pas les conditions de Rankine-Hugoniot, et les équations du mouvement sont obtenues sous forme non conservative. Enfin, [Sn] ne donne pas d'interprétation variationnelle de l'inégalité 1.4.

Nous remédions ici à ces trois critiques avec l'idée suivante. Pour tout champ test $v \in \mathscr{V}$ (ici $\mathscr{V} = \mathscr{D}(Q)^{d+1}$), et tout champ (ρ, u, S) mesurable borné satisfaisant 1.1 et 1.4, nous construisons une courbe $s \mapsto (\rho^s, u^s, S^s)$ de champs satisfaisant 1.1 pour tout s, et 1.4 dès que $sv_0 \geq 0$. Nous montrons alors que l'application $s \mapsto L[\rho^s, u^s, S^s]$ est dérivable (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$ malgré la faible régularité de ρ, u et S). Nous écrivons le principe variationnel sous la forme

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} L(\rho^s, u^s, S^s) = 0\,, \quad \forall v \in \mathscr{V}\,. \tag{1.5}$$

Nous montrons, en calculant cette dérivée, que ce principe équivaut à

$$\langle T, v\rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}} = 0\,, \quad \forall v \in \mathscr{V}\,,$$

où $T = (T_1, \ldots, T_{d+1})$, les T_j étant les premiers membres des équations 1.2 et 1.3. On en déduit que, sous des conditions de régularité très faibles, la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie sont bien des conséquences de notre principe variationnel 1.5. On peut aussi retrouver la loi de conservation de la masse à partir de

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} M = 0\,, \quad \forall v \in \mathscr{V}\,, \tag{1.6}$$

où $M[\rho, u, S] = \int_Q \rho \, dx \, dt$ De même 1 4 découle du principe

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} I \geqslant 0 , \quad \forall v \in \mathscr{V}^{+} = \{v \in \mathscr{V}, v_0 \geqslant 0\} , \tag{1 7}$$

où $I[\rho, u, S] = \int_Q \rho S \, dx \, dt$

Ce principe variationel a déjà été utilisé par Casal et Gouin [CG], sans que le cadre mathématique soit rigoureux Par exemple, les auteurs invoquent encore un multiplicateur de Lagrange et n'affirment qu'en passant, sans calcul, que leur méthode pourrait permettre de retrouver les conditions de Rankine-Hugoniot dans les chocs

Les autres configurations sont traitées par la même méthode Dans le cas incompressible, 1 1 est remplacé par

$$\operatorname{div} u = 0 , \tag{1 8}$$

tandis que $E =$ constante et

$$\mathscr{V} = \left\{ v \in \mathscr{D}(Q)^{d+1} , \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \right\}$$

La pression vient alors comme une conséquence du théorème de De Rham Dans le cas stationnaire, on impose naturellement l'égalité, si Ω est borné,

$$\operatorname{div} (\rho S u) = 0 \tag{1 9}$$

L'espace $\mathscr{V}$ est alors modifié comme suit

$$\mathscr{V} = \mathscr{D}(\Omega)^d, \text{ cas compressible ,}$$

$$\mathscr{V} = \{ v \in \mathscr{D}(\Omega)^d , \operatorname{div} v = 0 \} , \text{ cas incompressible}$$

La perte de la variable de temps nous empêche bien sûr d'obtenir la conservation de l'énergie Celle-ci devient une conséquence (un peu formelle ici) de $\operatorname{div} (\rho u) = 0$, de 1 9 et de $\operatorname{div} (\rho u \otimes u) + \nabla p = 0$, puisqu'on ne doit pas avoir d'onde de choc à cause de la réversibilité d'un écoulement stationnaire dans une enceinte isolée

Lorsqu'enfin l'écoulement stationnaire admet une fonction de courant ϕ (cas $d = 2$ ou $d = 3$ avec axisymétrie), on obtient des analogues algébriques des contraintes 1 1 et 1 4, puisque par construction, $\frac{d}{ds} \int_\Omega \rho f(\phi) \, dx = 0$ le long de toute courbe utilisée dans 1 5 Le principe variationnel exprime donc qu'un Lagrangien sur une variété (de dimension infinie) est stationnaire. Dans le cas incompressible, il atteint en fait un minimum sur ces variétés. L'une de ces variétés permet même de construire un écoulement non trivial dont le flot est périodique : toutes les particules reviennent à leur point de depart au même instant.

D'autres principes variationnels dans des contextes parfois différents ou très formels sont dus à Arnol'd [Ar], Garabedian [Ga], Korshiya, Lyubimov et Favorskii [KLF]. En fait [Ga] et [KLF] utilisent le formalisme des variables de Clebsch, qui ne peuvent pas en général être définies de manière globale en espace, tandis qu'Arnold pose les contraintes sur le rotationnel du champ des vitesses, conduisant ainsi à des écoulements très réguliers. Voir [Ro] pour une étude 3-d de la formulation d'Arnold.

2. LE PRINCIPE POUR UN FLUIDE COMPRESSIBLE INSTATIONNAIRE

Comme on l'a expliqué dans l'introduction, la principale difficulté est de paramétrer les écoulements virtuels, c'est-à-dire les solutions de 1.1 et 1.4. C'est un problème de géométrie différentielle pour lequel nous ne prétendons pas à l'originalité.

2.1. Ecoulements virtuels

Dans un écoulement virtuel, le $(d+1)$ uplet $(\rho, \rho u)$ peut être considéré comme une forme differentielle ω de degré d, l'equation 1.1 s'ecrivant $d\omega = 0$. Si g appartient a $Diff_0(Q)$, le groupe des difféomorphismes de classe $\mathscr{C}^\infty$, égaux a l'identité près du bord ∂Q, alors $d(g^* \omega) = g^*(d\omega) = 0$. On note $(\rho^g, \rho^g u^g)$ le champ qui correspond à la forme $g^* \omega$. On définit aussi $S^g = S \circ g$ de sorte que $g^*(S\omega) = S^g \omega^g$ et donc 1.4 implique $(\rho^g S^g)_t + \operatorname{div}(\rho^g S^g u^g) \geq 0$ pourvu que g^* preserve l'ordre sur les formes volumes, ce qui est vrai puisque le Jacobien J_g est strictement positif.

Si $h = g^{-1}$ et $a = (\rho, \rho u)$, on a

$$a^g = J_g((a \cdot \nabla_{x,t}) h) \circ g = J_g(\rho(\partial_t h + (u \cdot \nabla_x) h)) \circ g \tag{2.10}$$

On constate que, pour préserver la signification de la densité, on doit imposer

$$\partial_t h_0 + u \cdot \nabla_x h_0 > 0 \tag{2.11}$$

On paramètre maintenant le groupe $Diff_0(Q)$ localement à l'aide de son algèbre de Lie $\mathscr{V} = \mathscr{D}(Q)^{d+1}$. Si $v \in \mathscr{V}$, on définit $g(s, x)$ par

$$\frac{dg}{ds} = v \circ g, \quad g(0, .) = id_Q$$

On note enfin (ρ_s, u_s, S_s) le champ obtenu pour $g_s =: g(s\,;\,.)$. Le principe variationnel s'écrit

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} L[\rho_s, u_s, S_s] = 0\,, \quad \forall v \in \mathscr{V}\,,$$

où
$$L[\rho, u, S] =: \int_Q \left(\frac{1}{2}\rho\,|u|^2 - E(\rho, S)\right) dx\,dt\,.$$

2.2. Le résultat principal

Il reste à montrer que $s \mapsto L[\rho_s, u_s, S_s]$ est dérivable dès que $(\rho, u, S) \in L^\infty(Q)^{d+2}$, puis à calculer sa dérivée à l'origine.

PROPOSITION 2.1 : *Soit* $(\rho, u, S) \in L^\infty(Q)^{d+2}$ *et soit* $v \in \mathscr{V}$. *L'application* $s \mapsto L[\rho_s, u_s, S_s]$ *est dérivable au voisinage de* $s = 0$ *et sa dérivée en* $s = 0$ *vaut, en notant* $v = (v_0, w)$, $w(x, t) \in \mathbb{R}^d$:

$$\int_Q \left\{\frac{1}{2}\rho\,|u|^2 D_t v_0 - \rho u\,.\,D_t w - \rho\,\frac{\partial E}{\partial \rho}\,(\operatorname{div}_x w - u\,.\,\nabla_x v_0) + \right.$$
$$\left. + E(\partial_t v_0 + \operatorname{div}_x w)\right\} dx\,dt\,,$$

où $D_t = \partial_t + u\,.\,\nabla_x$.

Comme corollaire, nous avons le

THÉORÈME 2.2 : *Le principe variationnel* 1.5, *appliqué à un écoulement* (ρ, u, S) *satisfaisant* 1.1 *et* 1.4, *implique les lois de conservation* 1.2 *et* 1.3, *au sens des distributions.*

Preuve : D'après la proposition 2.1, l'écoulement satisfait, pour tout $y \in \mathscr{D}(Q)$:

$$\int_Q \left\{\frac{1}{2}\rho\,|u|^2 D_t y + E\,\partial_t y + \rho\,\frac{\partial E}{\partial \rho}\,u\,.\,\nabla_x y\right\} dx\,dt = 0\,, \tag{2.12}$$

$$\int_Q (\rho u_i\, D_t y + p\,\partial_{x_i} y)\,dx\,dt = 0\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant d\,. \tag{2.13}$$

Les égalités ci-dessus expriment la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. □

2.3. Preuve de la proposition 2.1

On a $a_s = A(s, x, t)(a \circ g_s)$, où A est une matrice à coefficients de classe $\mathscr{C}^\infty$. En effectuant le changement de variables $(t, x) \mapsto g_s(t, x)$ dans le Lagrangien, on a donc

$$L[\rho_s, u_s, S_s] = \int_Q F(s, x, t, \rho, u, S)\,dx\,dt\,,$$

où F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ pourvu que $D_t h_0$ ne s'annule pas. Or, pour $s = 0$, on a $D_t h_0 \equiv 1$; comme u est borné, il s'ensuit que $\min_Q D_t h_0 > 0$ pour s assez petit. Ceci prouve la dérivabilité dans un voisinage de $s = 0$. Le calcul de la dérivée en $s = 0$ se fait au moyen d'un développement limité. On a uniformément sur Q

$$\begin{aligned}
&g_s(t, x) = (t + s v_0(t, x), x + s w(t, x)) + \mathcal{O}(s^2)\,, \\
&h = (g_s)^{-1} = g_{-s}\,, \\
&J_g = 1 + s(\partial_t v_0 + \operatorname{div}_x w) + \mathcal{O}(s^2)\,, \\
&J_g \circ g_s^{-1} = J_g + \mathcal{O}(s^2)\,.
\end{aligned}$$

Puis en utilisant 2.10,

$$\begin{aligned}
\rho_s = J_g(\rho D_t h_0) \circ g &= (J_g\, \rho(1 - s D_t v_0) + \mathcal{O}(s^2)) \circ g \\
&= [\rho(1 + s(\operatorname{div}_x w - u \,.\, \nabla_x v_0) + \mathcal{O}(s^2))] \circ g\,.
\end{aligned}$$

Dans cette formule et les suivantes, les $\mathcal{O}(s^2)$ sont uniformes sur Q, ce qui justifiera le développement limité de l'intégrale. De même,

$$u_s = [u - s D_t w + s(D_t v_0)\, u + \mathcal{O}(s^2)] \circ g\,.$$

Ainsi, après le changement de variables :

$$\begin{aligned}
&L[\rho_s, u_s, S_s] = \\
&= \int_Q \left\{ \frac{1}{2} \rho(1 + s(- u \,.\, \nabla_x v_0 + \operatorname{div}_x w))(|u|^2(1 + 2 s D_t v_0) - 2 s u \,.\, D_t w) \right. \\
&\qquad \left. - E(\rho(1 + s(\operatorname{div}_x w - u \,.\, \nabla_x v_0)), S) \right\} \frac{dx\, dt}{J_g \circ g_s^{-1}} + \mathcal{O}(s^2) \\
&= \int_Q \left\{ \frac{1}{2} \rho |u|^2 - E + s\rho |u|^2 D_t v_0 - s\rho u \,.\, D_t w \right. \\
&\qquad \left. + s\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right)(\operatorname{div}_x w - u \,.\, \nabla_x v_0) \right\} \\
&\qquad \times (1 - s(\partial_t v_0 + \operatorname{div}_x w))\, dx\, dt + \mathcal{O}(s^2) \\
&= L[\rho, u, S] + s \int_Q \left\{ \rho |u|^2 D_t v_0 - \rho u \,.\, D_t w \right. \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right)(\operatorname{div}_x w - u \,.\, \nabla_x v_0) \\
&\qquad \left. + \left(E - \frac{1}{2} \rho |u|^2 \right)(\partial_t v_0 + \operatorname{div}_x w) \right\} dx\, dt + \mathcal{O}(s^2)\,.
\end{aligned}$$

Ceci prouve la proposition. □

2.4. Commentaires

A aucun moment la définition du principe variationnel ni la démonstration de la proposition 2.1 n'utilisent plus que la régularité L^∞ de l'écoulement. On peut donc l'appliquer à un écoulement continu par morceaux. L'obtention des lois de conservation 1.2 et 1.3 au sens des distributions montre donc qu'à travers une discontinuité le long d'une hypersurface $\Sigma(t)$ de normale ν, de vitesse normale σ, le principe variationnel implique les conditions de Rankine-Hugoniot :

$$[\rho u \,.\, \nu u + p\nu] = \sigma[\rho u]\,,$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + E + p\right) u \,.\, \nu\right] = \sigma\left[\frac{1}{2}\rho|u|^2 + E\right].$$

Et bien entendu, (ρ, u, S) satisfaisant a priori 1.1 et 1.4, on a aussi

$$[\rho u \,.\, \nu] = \sigma[\rho]\,, \quad [\rho S u \,.\, \nu] \geqslant \sigma[\rho S]\,.$$

En fait, le même calcul qu'à la section précédente montre que, pour $M[\rho, u, S] = \int_Q \rho\, dx\, dt$ et $I[\rho, u, S] = \int_Q \rho S\, dx\, dt$, on a

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} M[\rho_s, u_s, S_s] = -\int_Q \rho D_t v_0\, dx\, dt\,,$$

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} I[\rho_s, u_s, S_s] = -\int_Q \rho S D_t v_0\, dx\, dt\,.$$

On en déduit que la conservation de la masse équivaut à imposer $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} M = 0$ pour tout $v \in \mathscr{V}$, tandis que le second principe de la thermodynamique s'écrit $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} I \geqslant 0$ pour tout

$$v \in \mathscr{V}^+ = \{v \in \mathscr{V}\,;\, v_0 \geqslant 0\}\,.$$

La dernière remarque est pour noter qu'il est illusoire de chercher un principe variationnel aussi rigoureux que ci-dessus pour un gaz barotrope (i.e. qui n'a pas d'entropie, $E = E(\rho)$ seulement). En effet, la conservation de l'énergie arrive naturellement comme conséquence de la dépendance de g ou de v par rapport au temps. Cette dépendance est nécessaire pour récupérer des équations locales dans Q, et non des moyennes par rapport au temps. Or la conservation de l'énergie pour un gaz barotrope est incompatible avec la présence des ondes de choc.

3. AUTRES CAS

3.1. Cas incompressible, instationnaire

C'est le cas le moins bien compris. En effet, on doit choisir, parmi les écoulements virtuels (ρ^g, u^g) associés à (ρ, u), ceux qui satisfont $\rho^g \equiv \rho$, ρ étant a priori supposé constant. Avec les notations des sections précédentes, $h = g^{-1}$ doit satisfaire l'équation non linéaire

$$(\partial_t + u \,.\, \nabla_x)\, h_0 = J_h \,. \tag{3.14}$$

Comme u est donné dans $L^\infty(Q)^d$, avec $\operatorname{div}_x u = 0$, on ne peut trouver h_0 de classe $\mathscr{C}^\infty$ en général qu'avec le choix $h_0 = \alpha(t)$, $h = (\alpha(t), H(x, t))$ où le Jacobien de H par rapport à x vaut 1. Dans les autres cas, le calcul de la dérivée δL ne sera pas correct. A cause de cette perte de généralité (h_0 ne dépend pas de x) on n'obtiendra pas la conservation de l'énergie comme conséquence du principe variationnel, mais seulement celle de l'intégrale de l'énergie sur tout le domaine Ω.

Ici, les fonctions H sont engendrées localement par $\mathscr{V} = \{v \in \mathscr{D}(Q)^d \,;\, \operatorname{div}_x v = 0\}$, suivant l'équation différentielle, paramétrée par le temps :

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{ds} = v(t, H) \\ H(0\,; t, x) = x \,. \end{cases} \tag{3.15}$$

Par ailleurs, on prend $\alpha(t) = t - s\sigma(t)$, $\sigma \in \mathscr{D}(]0, T[)$. Comme précédemment, on note $u_s = u^g$. Le Lagrangien est maintenant, puisqu'il n'y a pas d'énergie interne,

$$L[u] =: \int_Q \frac{1}{2} |u|^2 \, dx \, dt \,.$$

Le même calcul qu'au § 2 montre que $s \mapsto L[u_s]$ est dérivable, pour tout s cette fois-ci, avec

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L[u] = \int_Q \left(\frac{1}{2} |u|^2 \sigma' - u \,.\, D_t v \right) dx \, dt \,.$$

Le principe variationnel étant défini par

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L[u] = 0 \,, \quad \forall \sigma \in \mathscr{D}(]0, T[) \,, \quad \forall v \in \mathscr{V} \,, \tag{3.16}$$

il entraîne d'une part

$$\int_\Omega \frac{1}{2} |u|^2 \, dx = \text{constante} \,, \tag{3.17}$$

et d'autre part

$$\langle \partial_t u + \mathrm{div}_x(u \otimes u), v \rangle_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}} = 0 , \quad \forall v \in \mathscr{V} .$$

Le théorème de De Rham assure alors l'existence d'une distribution p sur Q telle que

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x(u \otimes u) + \nabla p = 0 , \tag{3.18}$$

qui est bien sûr l'équation cherchée.

3.2. Cas stationnaire compressible

On travaille maintenant dans Ω au lieu de Q. Les écoulements virtuels sont définis *via* des difféomorphismes de Ω égaux à l'identité au voisinage du bord. Autrement dit, dans le formalisme de la section 2, $h_0 \equiv t$. On a donc, pour $g \in Diff_0(\Omega)$, $\rho^g = J_g \rho \circ g$ car $D_t h_0 \equiv 1$, et $u^g = ((u \,.\, \nabla) h) \circ g$, où $h =: g^{-1}$; enfin $S^g = S \circ g$ comme précédemment. Le Lagrangien ne diffère du cas d'évolution que par le domaine d'intégration :

$$L[\rho, u, S] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 - E(\rho, S) \right) dx .$$

On notera que, pour toute fonction continue K d'une variable réelle, et pour ρ, $S \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \rho^g K(S^g)\, dx = \int_\Omega \rho K(S)\, dx .$$

En particulier, la masse est conservée par l'action de $Diff_0(\Omega)$.

Supposons maintenant que Ω soit borné. Alors la condition de glissement impose $\int_\Omega \mathrm{div}\,(\rho S u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \rho S u \,.\, \nu\, dx = 0$. L'inégalité 1.4 doit donc être une égalité :

$$\mathrm{div}\,(\rho S u) = 0 , \tag{3.19}$$

ce qui traduit le fait que, dans une enceinte isolée, un écoulement stationnaire est réversible, en particulier n'a pas d'onde de choc. Comme on le verra bientôt, il est nécessaire de partir de 3.19 et non de la version stationnaire de 1.4 pour obtenir toutes les lois de conservation comme conséquence de $\delta L = 0$. Bien entendu, on impose aussi à (ρ, u, S) la loi de conservation de la masse

$$\mathrm{div}\,(\rho u) = 0 . \tag{3.20}$$

Le principe est toujours $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L[\rho_s, u_s, S_s] = 0$, où $g = g_s$ est donné par

$$\frac{dg_s}{ds} = v \circ g_s, \quad g_0 = id_\Omega,$$

pour $v \in \mathscr{V} = \mathscr{D}(\Omega)^d$. On vérifie sans peine que la dérivée existe et vaut

$$-\int_\Omega \{\rho u\,.\,(u\,.\,\nabla) v + p \operatorname{div} v\}\, dx\,. \tag{3.21}$$

En fait les conditions sur (ρ, u) peuvent être affaiblies en $\rho \in L^p(\Omega)$, $\rho|u|^2 \in L^1(\Omega)$, pourvu que $|E| \leqslant C(1+\rho^p)$, $\left|\frac{\partial E}{\partial \rho}\right| \leqslant C(1+\rho^{p-1})$ et $\left|\frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2}\right| \leqslant C(1+\rho^{p-2})$ pour un nombre réel $p \geqslant 2$, la constante C ne dépendant que de S (on conserve l'hypothèse $S \in L^\infty(\Omega)$). D'après la formule 3.21, le principe variationnel se traduit par

$$\operatorname{div}(\rho u_i\, u) + \partial_{x_i} p(\rho, S) = 0\,, \tag{3.22}$$

qui est la conservation de la quantité de mouvement. On n'obtient celle de l'énergie qu'en combinant 3.19, 3.20 et 3.22, sachant que l'écoulement est réversible (mais la validité de ce dernier calcul reste à prouver en toute rigueur).

Notons que, contrairement au cas instationnaire, on peut considérer un principe variationnel pour un fluide barotrope, puisque 3.19 n'a plus lieu d'être, et donc on n'obtiendra pas de loi de conservation d'énergie. Cependant il ne semble pas qu'ici l'action de $Diff_0(\Omega)$ préserve en général l'inégalité $\operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + E + p\right) u\right) \leqslant 0$ qui sert de critère de sélection des solutions faibles.

3.3. Cas stationnaire incompressible

C'est le cas le plus simple, déjà étudié par J.-J. Moreau [Mo]. L'action est celle du groupe $Diff_0^0(\Omega) =: \{g \in Diff_0(\Omega)\,;\, J_g \equiv 1\}$. On a $u^g = ((u\,.\,\nabla)h) \circ g$ où $h = g^{-1}$. Les courbes $s \mapsto u_s$ sont construites à l'aide de $\mathscr{V} = \{v \in \mathscr{D}(\Omega)^d\,;\, \operatorname{div} v = 0\}$ par

$$\frac{d}{ds} g_s = v \circ g_s, \quad g_0 = id_\Omega\,.$$

Le Lagrangien est

$$L[u] =: \int_\Omega \frac{1}{2}|u|^2\, dx\,,$$

et le principe variationnel s'écrit toujours

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L[u_s] = 0\,, \quad \forall v \in \mathscr{V}$$

Ici, il est suffisant de supposer que $u \in L^2(\Omega)^d$ La dérivée en $s = 0$ vaut

$$-\int_\Omega u\,.\,(u\,.\,\nabla)\,v\,dx \tag{3 23}$$

Le principe se traduit donc par

$$\langle \operatorname{div}\,(u \otimes u),\, v\rangle_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}} = 0\,, \quad \forall v \in \mathscr{V}\,,$$

et le théorème de De Rham fournit une distribution p sur Ω telle que

$$\operatorname{div}\,(u_i\, u) + \partial_{x_i}\, p = 0 \tag{3 24}$$

En théorie, les écoulements incompressibles sont reversibles et on s'attend, en tout cas si $u \in L^3(\Omega)^d$, à l'égalité d'énergie

$$\operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{2}\,|u|^2 + p\right) u\right) = 0\,, \tag{3 25}$$

mais le fait que cette égalite découle du principe variationnel reste une question ouverte

4. ECOULEMENTS AYANT UNE FONCTION DE COURANT

Lorsqu'un champ $a \in L^2(\Omega)^2$ d'un domaine plan satisfait $\operatorname{div} a = 0$ et $\gamma_\nu\, a = 0$ (trace normale de a sur le bord), il est donné par une fonction de courant $\phi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ dont la trace est constante sur chaque composante connexe du bord

$$a = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)$$

En appliquant cette idée aux écoulements plans, stationnaires, compressibles ou incompressibles, on parvient à construire des variétés invariantes sous l'action de $Diff_0(\Omega)$ ou de $Diff_0^0(\Omega)$ selon le cas Des écoulements peuvent donc être cherchés en rendant extrémal le Lagrangien, dans un sens à préciser

4.1. Cas plan, stationnaire et incompressible

Ici, $a = u$ et $L = V(\phi) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{2}\,|\nabla\phi\,|^2\,dx$ On a $u^g = (\partial_{x_2}\phi^g, -\partial_{x_1}\phi^g)$ où $\phi^g = \phi \circ g$ On obtient donc des écoulements (plus stables que les écoulements généraux ?) en minimisant V sur les variétés

$$M =: \left\{ \phi \in H^1(\Omega) ; \gamma_0 \phi \in F \text{ et } \forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}), \int_\Omega f(\phi)\, dx \leqslant c(f) \right\} .$$

La variété M est déterminée par le choix d'un fermé F de $\mathbb{R}^q$ où q est le nombre de composantes connexes du bord, et des nombres $c(f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Les deux choix les plus intéressants sont, ν étant une mesure bornée sur $\mathbb{R}$ à support compact, positive et de masse $|\Omega|$,

$$M_+(\vec{\alpha}, \nu) = \\ = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) ; \gamma_0 \phi = \vec{\alpha} \text{ et } \forall f \text{ convexe}, \int_\Omega f(\phi)\, dx \leqslant \langle \nu, f \rangle \right\} .$$

$$M_0(\vec{\alpha}, \nu) = \\ = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) ; \gamma_0 \phi = \vec{\alpha} \text{ et } \forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}), \int_\Omega f(\phi)\, dx = \langle \nu, f \rangle \right\} .$$

Le choix de M_+ conduit à la minimisation d'une fonctionnelle convexe continue coercive sur un convexe fermé de $H^1(\Omega)$; ce problème possède une et une seule solution. Un calcul formel conduit à la relation d'extrémalité

$$\exists f \text{ convexe} ; \quad -\Delta\phi + \partial f(\phi) \ni 0 . \tag{4.26}$$

La justification de 4.26 fait l'objet d'un travail à paraître, en collaboration avec J.-M. Rakotoson [RS].

Le choix M_0 est lui aussi très intéressant lorsque la topologie de Ω (celle d'un disque ou d'une couronne) permet aux courbes de niveaux de ϕ d'être connexes. Si on suppose alors que ϕ est assez régulier, on peut déterminer le temps de parcours des trajectoires par les particules de fluides en fonction de ν. Chaque particule a un mouvement périodique le long d'une courbe de niveau, et sur une même courbe $\{\phi = c\}$ toutes les particules ont la même période $T(c)$. On a

$$\begin{aligned} T(c) &= \int_0^{T(c)} dt = \int_{\{\phi = c\}} \frac{dl}{|u|} \\ &= \int_{\{\phi = c\}} \frac{dl}{|\nabla\phi|} = \frac{d}{dc} \int_{\{\phi \leqslant c\}} dx \\ &= \frac{d}{dc} \langle \nu, \chi(]-\infty, c]) \rangle . \end{aligned}$$

En particulier le flot lui-même est périodique, c'est-à-dire que $T(c) = T$ est indépendant de c, lorsque $\vec{\alpha} = (a, b)$ et $\langle \nu, f \rangle = \dfrac{\text{mes } \Omega}{b - a} \displaystyle\int_a^b f(c)\, dc$.

On obtient ainsi un moyen de calcul d'une géodesique fermée dans une classe d'homotopie non triviale pour le groupe $Diff^0(\Omega)$ des diffeomorphismes de Ω qui préservent la mesure, cf [EM] Ici, puisque l'écoulement est stationnaire, il s'agit aussi d'un groupe à un paramètre

4.2. Cas plan, stationnaire et compressible

Ici, $a = (\rho u)$, de sorte que $\rho u = (\partial_{x_2}\phi, -\partial_{x_1}\phi)$ Le Lagrangien s'ecrit

$$W_r[\rho, \phi] = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2\rho} |\nabla\phi|^2 - E(\rho, r(\phi)) \right\} dx ,$$

où on a introduit une fonction r arbitraire pour traduire le fait, formel, que 3 19 implique $S = r(\phi)$ si les courbes de niveau de ϕ sont connexes A nouveau, nous avons $\rho^g = J_g \rho \circ g$ et $\phi^g = \phi \circ g$

On considère les mêmes difféomorphismes g_s qu'en 3 2 On vérifie sans peine que si $\rho \in L^\infty(\Omega)$ avec $\inf_\Omega \rho > 0$ et si ϕ est Lipschitzienne, alors $s \mapsto W_r(\rho_s, \phi_s)$ est dérivable et la loi 3 22 a lieu si et seulement si

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} W_r[\rho_s, \phi_s] = 0 , \quad \forall v \in \mathscr{D}(\Omega)^2$$

Comme dans l'alinéa précédent, on peut construire des variétés invariantes par l'action de $Diff_0(\Omega)$ en prescrivant la trace $\gamma_0 \phi$, localement constante, et des intégrales de la forme

$$\int_\Omega \rho f(\phi)\, dx$$

Cependant, le Lagrangien W_r n'ayant pas de borne supérieure ni inférieure, on ne doit pas chercher de minimum sur ces variétés, mais plutôt des points selles

4.3. Cas 3 − *d* axisymétrique, stationnaire et incompressible

Supposons que $d = 3$ et $\Omega = D \times S^1$, où D est un domaine du demi-plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ On note r, z, θ les coordonnées cylindriques et u_r, u_z, u_θ les composantes du champ des vitesses dans ce système de coordonnees Le domaine et les équations étant invariants par les rotations $\theta \mapsto \theta +$ constante, cela a un sens de chercher les solutions invariantes par rotation, c'est-à-dire pour lesquels $\frac{\partial}{\partial\theta}$ s'annule sur u_r, u_z, u_θ et p (mais pas sur u_x ni sur u_y) Les lois de conservation s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t u_r + \dfrac{1}{r}\,\partial_r(r u_r^2) + \partial_z(u_r\,u_z) - \dfrac{1}{r}\,u_\theta^2 + \partial_r p = 0\,, \\ \partial_t u_z + \dfrac{1}{r}\,\partial_r(r u_r\,u_z) + \partial_z(u_z^2) + \partial_z p \qquad\quad = 0\,, \\ \partial_t u_\theta + \dfrac{1}{r}\,\partial_r(r u_r\,u_\theta) + \partial_z(u_z\,u_\theta) + \dfrac{1}{r}\,u_r\,u_\theta \;= 0\,, \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\frac{1}{r}\,\partial_r(r u_r) + \partial_z u_z = 0\,. \tag{4.28}$$

On laisse au lecteur le soin de montrer que 4.27 équivaut au principe variationnel

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L[u_s] = 0\,, \quad \forall v \in \mathscr{V}\,,$$

où $L[u] =: \displaystyle\int_D \frac{1}{2}\,(u_r^2 + u_z^2 + u_\theta^2)\,r\,dr\,dz$ et où les difféomorphismes de $\Omega = D \times S^1$ sont engendrés par ceux des champs de vecteurs tests qui vérifient 4.28 et $\partial_\theta(v_r, v_z, v_\theta) = 0$. Il suffit d'utiliser 3.23 et de savoir ce que $(u\,.\,\nabla)\,v$ veut dire en coordonnées cylindriques ! On notera que ces difféomorphismes sont ceux qui commutent aux rotations. La pression vient comme d'habitude du théorème de De Rham puisque la contrainte 4.28 sur les fonctions test s'écrit $\operatorname{div}_{r,z}(r\bar{v}) = 0$, avec $\bar{v} = (v_r, v_z)$.

Si on introduit la fonction de courant ϕ par $r\bar{u} = (\partial_z\phi, -\partial_r\phi)$, le Lagrangien prend la forme

$$L[u] = Z[\phi, u_\theta] = \frac{1}{2}\int_D \left(\frac{1}{r}\,|\nabla\phi|^2 + r u_\theta^2\right) dr\,dz\,.$$

Par ailleurs, pour les difféomorphismes mis en cause, on a

$$\frac{1}{r}\,u_\theta^g = \left(\frac{1}{r}\,u_\theta\right) \circ g \quad \text{et} \quad r\bar{u}^g = (\partial_z\phi^g, -\partial_r\phi^g)$$

où $\phi^g = \phi \circ g$. On obtient donc des écoulements axisymétriques en minimisant Z sur une variété définie en prescrivant les valeurs de ϕ sur les composantes connexes de ∂D, et certaines intégrales de la forme

$$\int_D r f(\phi)\,dr\,dz \quad \text{ou} \quad \int_D u_\theta\, f(\phi)\,dr\,dz\,,$$

puisque les difféomorphismes construits ci-dessus préservent la mesure $r\,dr\,dz$. Le problème de minimisation est bien posé dès que le domaine est séparé de son axe : $\inf_D r > 0$. Pour un tel écoulement, les trajectoires des particules sont tracées sur des surfaces de niveau de ϕ dans Ω. En les supposant connexes, ces surfaces sont des tores. Le mouvement azimuthal $t \mapsto (r(t), z(t))$ d'une particule est périodique, de période $T(c)$ ne dépendant que du niveau c de ϕ. On a encore

$$T(c) = \frac{d}{dc} \langle \nu, \chi(]-\infty, c]) \rangle ,$$

où ν est la mesure de répartition de ϕ :

$$\int_D rf(\phi)\, dr\, dz = \langle \nu, f \rangle , \quad \forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}) .$$

Pendant un intervalle de temps $(\tau, \tau + T(c))$, la même particule passe du plan $\theta = \theta_0$ au plan $\theta = \theta_0 + \Theta(c)$, où l'angle $\Theta(c)$ à nouveau ne dépend que de c. On a

$$\begin{aligned} \Theta(c) &= \int_\tau^{\tau + T(c)} \frac{d\theta}{dt}\, dt = \int_\tau^{\tau + T(c)} \frac{1}{r} u_\theta\, dt \\ &= \int_{\{\phi = c\}} \frac{u_\theta\, dl}{r|\bar{u}|} = \int_{\{\phi = c\}} \frac{u_\theta\, dl}{|\nabla \phi|} \\ &= \frac{d}{dc} \langle \mu, \chi(]-\infty, c]) \rangle , \end{aligned}$$

où la mesure μ est définie par

$$\int_D u_\theta f(\phi)\, dr\, dz = \langle \mu, f \rangle , \quad \forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}) .$$

Le mouvement de chaque particule est donc presque-périodique et les presque-périodes ne dépendent que du tore sur lequel le mouvement a lieu. Le flot obtenu est lui-même périodique lorsqu'on choisit pour μ et ν des mesures uniformes sur un intervalle $[a, b]$, la densité de μ étant un facteur rationnel de 2π. Si ce facteur est irrationnel, alors le flot est presque-périodique. Pour des mesures non uniformes, le flot n'est plus presque-périodique, bien que sa restriction à chaque tore le soit.

On notera, dans le cas général que les particules du tore $\{\phi = c\}$, initialement dans un même plan vertical $\theta = 0$, ne sont pas en général coplanaires pour $t \notin T(c)\,\mathbb{Z}$. Par ailleurs, dans le cas du flot périodique, le choix de la densité $\frac{2p\pi}{q}$ de μ détermine les nombres de tours p et q qu'une particule fait dans les sens poloidal et azimuthal sur le tore $\{\phi = c\}$ pendant sa période $qT(c)$.

4.4. Cas 3 – *d* axisymétrique, stationnaire et compressible

Ici, le Lagrangien et la fonction de courant sont donnés par

$$\rho r \bar{u} = (\partial_z \phi, -\partial_r \phi),$$

$$L[\rho, \bar{u}, u_\theta] = Y[\rho, \phi, u_\theta] = \int_D \left\{\frac{1}{2\,r\rho} |\nabla\phi|^2 + \frac{r\rho}{2} u_\theta^2 - rF(\rho, \phi)\right\} dr\,dz.$$

Les écoulements virtuels correspondent aux difféomorphismes $g \in Diff_0(D)$ par

$$r\rho^g = J_g(r\rho) \circ g, \quad \phi^g = \phi \circ g, \quad \frac{1}{r} u_\theta^g = \left(\frac{1}{r} u_\theta\right) \circ g.$$

On vérifie sans peine que cette action de $Diff_0(D)$ préserve les intégrales de la forme

$$\int_D r\rho f(\phi)\,dr\,dz \quad \text{et} \quad \int_D r u_\theta f(\phi)\,dr\,dz.$$

Lorsque les ensembles de niveau de ϕ sont connexes, la donnée de ces intégrales pour toute $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ contrôle les presque-périodes du flot sur chaque tore $\{\phi = c\}$, par les mêmes formules qu'au paragraphe précédent. Par exemple,

$$\begin{aligned} T(c) = \int_0^{T(c)} dt &= \int_{\{\phi = c\}} \frac{dl}{|\bar{u}|} \\ = \int_{\{\phi = c\}} r\rho \frac{dl}{|\nabla\phi|} &= \frac{d}{dc} \int_{\{\phi \leq c\}} r\rho\,dr\,dz. \end{aligned}$$

5. FLUIDES THERMO-CAPILLAIRES

Les fluides thermo-capillaires sont les fluides dont l'énergie interne est de la forme $E(\rho, S, \nabla_x \rho, \nabla_x S)$, où la fonction $(\rho, S, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \to E(\rho, S, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ est régulière. Le modèle a été introduit par Korteweg [K] lorsque E ne dépend pas de $\mathbf{q}$ (modèle capillaire) et par Casal et Gouin [CG] dans le cas général. D'ordinaire, la fonction E est convexe par rapport à $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Par analogie avec les cas précédents, nous allons établir les équations du mouvement d'un tel fluide en écrivant le principe variationnel. Nous les obtiendrons sous forme conservative, une forme que nous admettrons comme correcte en présence de discontinuité des variables (chocs). Cependant, les variables discontinues ne seront plus (ρ, u, S) mais certaines de leurs dérivées, puisque déjà $\nabla_x \rho$ est dans un certain espace de Lebesgue, car l'énergie est toujours supposée localement intégrable.

La définition du Lagrangien est inchangée :

$$L[\rho, u, S] = \int_Q \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 - E(\rho, S, \nabla_x \rho, \nabla_x S) \right) dx\, dt .$$

L'espace des champs tests reste $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)^{d+1}$. Dans la suite apparaîtront diverses quantités utilisant les dérivées premières de ρ et S. Nous les supposerons intégrables, à commencer par E, en n'oubliant pas que les dérivées de S ne sont pas présentes dans le modèle purement capillaire.

5.1. Ecoulements virtuels

Il n'y a pas de modification par rapport au paragraphe 2. Nous avons seulement besoin, à cause du changement de variables dans l'intégrale, de calculer les développements limités de $(\nabla_x \rho_s) \circ h$ et $(\nabla_x S) \circ h$. On a d'abord :

$$\nabla_x S_s = \nabla_x (S \circ g) = \nabla_x g \,(\nabla_{x,t} S) \circ g .$$

Or, en notant v_0 la première composante de v et w les autres,

$$\nabla_x g = (s \nabla_x v_0, I_d + s \nabla_x w) + \mathcal{O}(s^2) ,$$

et la même formule vaut pour $\nabla_x g \circ h$, où $h = g^{-1}$. On a donc

$$(\nabla_x S_s) \circ h = s \frac{\partial S}{\partial t} \nabla_x v_0 + \nabla_x S + s \nabla_x w \,.\, \nabla_x S + \mathcal{O}(s^2) . \tag{5.29}$$

Le même calcul, un peu plus long, à partir de la formule $\rho_s = J_g(\rho D_t h_0) \circ g$, donne le résultat suivant :

$$(\nabla_x \rho_s) \circ h = \nabla_x \rho + s \Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla_x v_0 + \nabla_x w \,.\, \nabla_x \rho$$
$$+ \nabla_x(\rho(\operatorname{div}_x w - (u \,.\, \nabla_x) v_0))\Big) + \mathcal{O}(s^2) . \tag{5.30}$$

5.2. Les équations du mouvement

On développe donc le Lagrangien après changement de variables :

$$L[\rho_s, u_s, S_s] =$$
$$= \int_Q \left\{ \frac{1}{2} \rho_s \circ h |u_s \circ h|^2 - E(\rho_s \circ h, S_s \circ h, (\nabla_x \rho_s) \circ h, (\nabla_x S_s) \circ h) \right\} \frac{dx\, dt}{J_g \circ h} .$$

Avec les formules 5.29 et 5.30, on obtient :

$$L[\rho_s, u_s, S_s] = \text{termes usuels} - s \int_Q \nabla_{\mathbf{p}} E \,.\, \{\partial_t \rho \, \nabla_x v_0 + \nabla_x w \,.\, \nabla_x \rho +$$
$$+ \nabla_x(\rho(\operatorname{div}_x w - u \,.\, \nabla_x v_0))\} \, dx\, dt -$$
$$- s \int_Q \nabla_{\mathbf{q}} E \,.\, \{\partial_t S \, \nabla_x v_0 + \nabla_x w \,.\, \nabla_x S\} \, dx\, dt .$$

Ainsi,

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} L[\rho_s, u_s, S_s] = \int_Q \left\{ \frac{1}{2}\rho\,|u|^2 D_t v_0 - \rho u \,.\, D_t w - \right.$$

$$- \rho \frac{\partial E}{\partial \rho}(\mathrm{div}_x w - u \,.\, \nabla_x v_0)$$

$$+ E(\partial_t v_0 + \mathrm{div}_x w) - \nabla_{\mathbf{p}} E \,.\, \{\partial_t \rho \, \nabla_x v_0 + \nabla_x w \,.\, \nabla_x \rho$$

$$\left. + \nabla_x(\rho(\mathrm{div}_x w - u \,.\, \nabla_x v_0))\} - \nabla_{\mathbf{q}} E \,.\, \{\partial_t S \, \nabla_x v_0 + \nabla_x w \,.\, \nabla_x S\} \right\} dx\, dt \,.$$

Finalement, les équations du mouvement sont :

Conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x p + \mathrm{div}_x(\nabla_{\mathbf{q}} E \otimes \nabla_x S) +$$

$$+ \mathrm{div}_x(\nabla_{\mathbf{p}} E \otimes \nabla_x \rho) - \nabla_x(\rho \, \mathrm{div}_x \nabla_{\mathbf{p}} E) = 0 \,, \quad (5.31)$$

Conservation de l'énergie

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho\,|u|^2 + E\right) + \mathrm{div}_x\left(\left(\frac{1}{2}\rho\,|u|^2 + E + p\right)u\right) - \mathrm{div}_x(\rho\,(\mathrm{div}_x \nabla_{\mathbf{p}} E)u) -$$

$$- \mathrm{div}_x\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\nabla_{\mathbf{p}} E + \frac{\partial S}{\partial t}\nabla_{\mathbf{q}} E\right) = O \,, \quad (5.32)$$

où p désigne toujours $\rho \frac{\partial E}{\partial \rho} - E$.

On notera, aussi bien dans 5.31 que dans 5.32, la présence de termes d'ordre trois, qui requièrent que $\nabla_{\mathbf{p}} E \,.\, \nabla_x \rho$ et $\nabla_{\mathbf{p}} E \,.\, \nabla_x(\rho u)$ soient localement intégrables. En particulier, $\partial_t \rho$ est une fonction, qu'on a le droit de remplacer par $-\mathrm{div}_x(\rho u)$ dans 5.32. Si $\nabla_{\mathbf{q}} E \equiv 0$ (cas purement capillaire), la définition de $\frac{\partial S}{\partial t}$ est sans importance. Dans le cas thermo-capillaire, l'écoulement est suffisamment régulier pour être réversible. L'entropie doit alors satisfaire la contrainte $\partial_t S + u \,.\, \nabla_x S = 0$ et on remplace $\frac{\partial S}{\partial t}$ par $-u \,.\, \nabla_x S$ dans (5.32).

REFERENCES

[Ar] V. I. ARNOL'D, 1966, Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaire, *J. de Mécanique* 5, 29-43.

[CG] P. CASAL, H. GOUIN, 1988, Sur les interfaces liquide-vapeur non isothermes, *J. de Mécanique Th. et Appl.* 7.

[EM] D. EBIN, J. MARSDEN, 1970, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, *Annals of Math.* 92, 102-163.

[Ga] P. R. GARABEDIAN, 1983, Non-parametric solution of the Euler equations for steady flows, *Comm. Pure and Applied Math.* 36, 529-535.

[K] D. J. KORTEWEG, 1901, *Archives Néerlandaises,* 28, 1-24.

[KLF] T. K. KORSHIYA, B. Y. LYUBIMOV, A. P. FAVPORSKII, 1982, Hamilton's principle for a liquid in Euler coordinates, *Diff. Equ.* 18.

[Mo] J.-J. MOREAU, 1979, Séminaire d'Analyse convexe de Montpellier 9, exposé 8, On nonlinear problems of analysis and geometry (1979), *Pitman Lecture notes in Maths,* 46.

[RS] J.-M. RAKOTOSON, D. SERRE, *Sur un problème d'optimisation lié aux équations de Navier-Stokes,* Soumis pour publication.

[Ro] P. ROUCHON, 1990, *On the Arnol'd stability criterion for steady-state flows of an ideal fluid,* Preprint Ecole des Mines de Paris.

[Sn] J. SERRIN, 1959, Mathematical principles of classical fluid mechanics, *Handbuch der Physik VIII,* 1.