M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique

M. Lenczner

Méthode de calcul du coefficient de singularité pour la solution du problème de Laplace dans un domaine diédral

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, n° 4 (1993), p. 395-420

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_4_395_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 27, n° 4, 1993, p. 395 à 420)

MÉTHODE DE CALCUL DU COEFFICIENT DE SINGULARITÉ POUR LA SOLUTION DU PROBLÈME DE LAPLACE DANS UN DOMAINE DIÉDRAL (*)

par M. LENCZNER ([1])

Communiqué par E. SANCHEZ-PALENCIA

Résumé. — *Dans ce travail, on étudie la solution de l'équation de Laplace posée dans un domaine diédral de* $\mathbb{R}^3$. *La frontière du domaine est régulière sauf le long d'une arête. On suppose que le second membre est dans* $L^2(\Omega)$. *On caractérise les fonctions singulières duales c'est-à-dire le noyau de l'opérateur adjoint, puis l'espace des singularités. Contrairement au cas des polygones, ces deux espaces sont de dimension infinie. Nous les caractérisons sous forme d'espaces de Sobolev. Ensuite, on en déduit la formulation variationnelle dont le coefficient de singularité est solution.*

1. INTRODUCTION

On considère la solution de l'équation de Laplace avec second membre dans $L^2(\Omega)$ posée dans un domaine cylindrique infini, dont la section contient un angle de mesure supérieure à π. Au sommet de l'angle, la solution est singulière. L'objet de cet article est d'introduire une méthode de calcul du coefficient de singularité. Le principe de la méthode est une extension de celui utilisé par P. Grisvard [1] dans le cas bidimensionnel. On caractérise d'abord l'espace vectoriel des fonctions singulières duales, puis la partie singulière de la solution, enfin on introduit la formule de calcul du coefficient de singularité. Le coefficient de singularité est l'unique solution d'une formulation variationnelle qui fait intervenir seulement les fonctions singulières duales et les seconds membres de l'équation, ce qui est une

(*) Manuscrit reçu le 25 mai 1992.

([1]) Laboratoire d'Analyse numérique, Couloir 55-65, 5e étage, Université Pierre et Marie Curie, 75252 Paris Cedex 05.

extension du résultat de Moussaoui M. [1] relatif aux domaines de $\mathbb{R}^2$.

Une caractérisation des singularités avait déjà été construite par M. Dauge [1], P. Grisvard [3] et Mazy'a et Rossman [1]. En outre, ces derniers auteurs ont aussi établi une formule de calcul des coefficients de singularités utilisant des intégrales singulières. L'approche que nous avons ici est différente de celles des références ci-dessus. Chez ces quatre auteurs, l'essentiel de leur travail concerne la caractérisation des singularités. Ici, au contraire, l'étape principale se trouve dans la caractérisation des fonctions singulières duales. Ensuite, les fonctions singulières en sont déduites assez facilement. Notre approche fait apparaître l'existence d'un isomorphisme entre l'espace des fonctions singulières duales et un espace de trace. C'est ainsi, qu'elle apporte une première caractérisation des fonctions singulières duales. Par ailleurs, la représentation des singularités utilisées ici n'emploie pas explicitement de produit de convolution avec des noyaux singuliers comme c'était le cas dans les travaux précédents. Enfin, la formulation variationnelle vérifiée par le coefficient de singularité est nouvelle, et ouvre des perspectives pour le calcul numérique du coefficient de singularité.

Cette méthode a été introduite pour des domaines fissurés bornés ou non dans la thèse de l'auteur, et annoncé dans la note [2]. Le présent article constitue une extension de ces travaux.

2. POSITION DU PROBLÈME ET PLAN DE LA MÉTHODE

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notations et les équations. Puis, nous présentons rapidement le principe de la méthode d'étude des singularités.

Soit Ω un dièdre infini dont la section ω est dans le plan (x, y). On suppose que :

HYPOTHÈSES 1 :

— *l'axe du dièdre est parallèle à l'axe Oz,*
— *la section ω contient un et un seul angle de mesure $\alpha > \pi$,*
— *les arêtes de cet angle sont droites au voisinage de la pointe de l'angle,*
— *le reste de la frontière de ω est de classe C^1.*

□

On note U la solution du problème de Laplace avec condition aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta U = g \in L^2(\Omega) \\ U = U_0 \in H^{3/2}(\partial\Omega) \quad \text{et} \quad U \in H^1(\Omega)\,. \end{cases} \tag{1}$$

Dans la suite du paragraphe, on note A l'opérateur Δ muni des conditions aux limites. Du fait de la présence de l'angle, la solution U n'appartient pas en général à $H^2(\Omega)$. On décompose généralement U en partie singulière $U^S \in H^1(\Omega)$ et en partie régulière $U^R \in H^2(\Omega)$:

$$U = U^S + U^R .$$

L'objet de la méthode est de caractériser complètement U^S. Le problème étant posé, dans la suite, nous présentons le plan de la méthode.

On considère d'abord l'équation aux dérivées partielles avec des conditions aux limites homogènes, c'est-à-dire dont la seule donnée non nulle est $g \in L^2(\Omega)$.

Au paragraphe 3, on montre que A est un isomorphisme entre l'ensemble M des fonctions régulières admissibles et son image $A(M)$.

Au paragraphe 4, on montre que la caractérisation de S^* se ramène à celle d'un espace de conditions aux limites compatibles avec l'espace des solutions d'une équation aux dérivées partielles. On notera ϕ^* l'opérateur défini sur cet espace de conditions aux limites, et à valeur dans l'espace de solutions de l'équation aux dérivées partielles.

Au paragraphe 5, il est établi que ϕ^* est un isomorphisme en montrant que son adjoint en est un.

Au paragraphe 6, un noyau singulier est introduit. Il permet de construire les éléments de S^*. Cela établit un lien avec les travaux de P. Grisvard et de M. Dauge.

Le paragraphe 7 fait le bilan des isomorphismes existant entre les espaces introduits.

La formule de calcul du coefficient de singularité est introduite au paragraphe 8. Sa forme discrétisée est énoncée au paragraphe 9.

3. ISOMORPHISME ENTRE *M* ET SON IMAGE

Dans ce paragraphe, nous montrons que l'opérateur A est un isomorphisme de M l'espace des fonctions régulières dans son image.

THÉORÈME 1 : *L'opérateur Δ est un isomorphisme de :*

$$M = \{u \in H^2(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

dans son image $\Delta(M)$.

Preuve : La continuité, la surjectivité et l'injectivité de A sont évidentes. Pour montrer que A est d'inverse continue, on utilise le théorème de Banach. Pour cela, il faut montrer que A opère d'un espace de Banach dans un Banach, et donc que $A(M)$ est un espace de Banach. Pour cela, il suffit de montrer que $A(M)$ est fermé dans $L^2(\Omega)$, en vérifiant la majoration *a priori* suivante : pour tout $u \in M$:

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C\,(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega)})\,, \tag{2}$$

donc :

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C\,(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}) \leq C\,\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)},$$

dont on déduit immédiatement que l'image de M est fermée.

Puis, pour montrer (2), on utilise la proposition 19.4 et la remarque 19.5.3 de M. Dauge [1] dont on déduit ce résultat d'image fermée relative aux domaines bornés.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit Ω_i et Ω_i', les restrictions de Ω à $z \in \,]i-2, i+2[$ et $z \in \,]i-3, i+3[$. Alors d'après M. Dauge :

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega_i)} \leq C\,(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega_i')} + \|u\|^2_{H^1(\Omega_i')}) \tag{3}$$

et en sommant sur $i \in Z$, on obtient (2). □

4. CARACTÉRISATION DE S^* L'ESPACE DES SINGULARITÉS DUALES

Dans ce paragraphe, on caractérise S^* à l'aide de l'isomorphisme existant entre l'ensemble S^* des fonctions singulières duales et H^* un espace de fonctions définies sur l'arête.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que ω est le secteur d'ouverture α et de rayon R : $\omega = \{(r, \theta) \in \,]0, R[\, \times \,]0, \alpha[\}$. Ce choix permet d'effectuer une séparation de la variable θ dans les éléments de S^*.

Rappelons que l'ensemble S^* des fonctions singulières duales est l'orthogonal de $A(M)$ dans $L^2(\Omega)$. Comme $A(M)$ est fermée, c'est aussi le noyau de l'opérateur adjoint A^*. Comme l'opérateur de A est formellement auto-adjoint, les éléments U^* de S^* (appelés fonctions singulières duales) sont solutions de :

$$U^* \in L^2(\Omega)\ \Delta U^* = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } U^* = 0 \text{ sur } \partial\Omega\,. \tag{4}$$

Ce qui s'écrit en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} U^* + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} U^* + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U^* + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U^* = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } U^* = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

Pour simplifier, on commence par réduire l'équation en utilisant la décomposition spectrale de U^* par rapport à θ.

L'opérateur non borné :

$$\Phi : L^2(]0, \alpha[) \to L^2(]0, \alpha[)$$
$$w \to \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

de domaine $D(\Phi) = \{u \in H^2(]0, \alpha[)/u(0) = u(\alpha) = 0\}$ est auto-adjoint d'inverse compact. Par conséquent, il admet un spectre ponctuel, et l'ensemble de ses vecteurs propres :

$$(w_k = \sin(k\lambda\theta))_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{\pi}{\alpha}$$

forme une base hilbertienne de $L^2(]0, \alpha[)$ (*cf.* par exemple Dautray R. et Lions J. L. [1] chapitre 8, § 2, théorème 7). Les fonctions singulières duales U^* peuvent être projetées sur cette base. Dans la suite, on montre que les projections des fonctions singulières duales sur les vecteurs w_k de cette base sont toutes nulles sauf la première. C'est une propriété spécifique au Laplacien posé dans un secteur. Plus précisément :

LEMME 1 : *Toute solution U^* de (4) s'écrit :*

$$U^*(r, z, \theta) = U_1^*(r, z)\, w_1(\theta)\,.$$

Preuve : Pour démontrer le lemme 1, on établit les équations satisfaites par chacun des U_k^*, puis, celles vérifiées par $\hat{U}_k^*$ leur image par la transformation de Fourier dans la direction z. Chaque $\hat{U}_k^*$ est la solution d'une équation de type Fuchs en r. Par application du théorème de Fuchs, on détermine la forme des solutions. Pour montrer que les $\hat{U}_k^*$ sont nuls, on constate qu'ils ne sont pas dans l'espace fonctionnel souhaité.

Les U_k^* sont solutions de :

$$\begin{cases} \text{pour} \quad (r, z) \in \,]0, R[\, \times \mathbb{R} : \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial U_k^*}{\partial r}\right) - \dfrac{(k\lambda)^2}{r^2} U_k^* + \dfrac{\partial^2 U_k^*}{\partial z^2} = 0 \\ U_k^* = 0 \quad \text{pour} \quad (r, z) \in \{0, R\} \times \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{5}$$

Maintenant qu'on a obtenu les équations vérifiées par U_k^*, nous cherchons leur régularité au voisinage de 0. On utilise le fait que $U^* \in L^2(\Omega)$.

Comme :

$$\|U^*\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} U_k^* \,.\, w_k\right)^2 r\, dr\, d\theta\, dz < \infty$$

du fait que les w_k forment une base hilbertienne il vient :

$$\|U^*\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{\alpha}{2}\int_{]0, R[\, \times \mathbb{R}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} U_k^*\right)^2 r\, dr\, dz < \infty$$

a fortiori :

$$\int_{]0, R[\, \times \mathbb{R}} (U_k^*)^2\, r\, dr\, dz < \infty \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{6}$$

La fin de la démonstration du lemme 1 résulte du fait que pour $k \neq 1$, la seule solution vérifiant (5) et (6) est $U_k^* = 0$. Admettons-le pour un temps.

Puisque les U_k^* sont nuls pour $k \neq 1$, c'est que $U^* = U_1^*(r, z)\, w_1(\theta)$.

Dans la suite, on montre que les U_k^* sont nuls pour $k \neq 1$. Supposons $k \geqslant 2$.

Notons $\hat{U}_k^*$ l'image de U_k^* par la transformation de Fourier. $\hat{U}_k^*$ est solution de :

$$\begin{cases} \hat{U}_k^* \in L^2(]0, R[\times \mathbb{R}) \\ \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r \dfrac{\partial U_k^*}{\partial r} \right) - \dfrac{(k\lambda)^2}{r^2} \hat{U}_k^* - \xi^2 \hat{U}_k^* = 0 \\ U_k^* = 0 \quad \text{en} \quad r = R\,. \end{cases}$$

Rappelons le théorème de Fuchs relatif aux équations différentielles ordinaires (*cf.* Reinhard H. [1], théorème II.1.4) :

Pour r variable complexe, on considère l'équation :

$$r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + rP(r) \frac{\partial v}{\partial r} + Q(r)\, v = 0 \tag{E}$$

où P et Q sont analytiques dans le disque $|r| < R_0$. *Soit l'équation indicielle :*

$$\mu(\mu - 1) + P(0)\,\mu + Q(0) = 0\,.$$

a) *Si les deux racines de cette équation* μ_1 *et* μ_2 *sont distinctes, et telles que leur différence n'est pas un entier, alors l'espace des solutions de* (E) *est de dimension 2, et est engendré par :*

$$v_1 = r^{\mu_1} f_1(r) \quad \text{et} \quad v_2 = r^{\mu_2} f_2(r)$$

où $f_1(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots$ *et* $f_2(r) = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + \dots$, f_1 *et* f_2 *étant analytiques dans* $|r| < R_0$.

b) *Dans le cas où* $\mu_1 = \mu_2 + n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *(on suppose que* μ_1 *est la plus grande des deux racines), alors* v_1 *est solution de* (E) *et il existe une seconde solution* v_2 *indépendante de* v_1 *de la forme :*

$$v_2(r) = c v_1(r) \,.\, \log r + r^{\mu_2} \psi(r)$$

où $\psi(r) = c_0 + c_1 r + \dots$ *est une fonction analytique.*

Ici, l'équation indicielle est :

$$\mu^2 = (k\lambda)^2 \quad \text{donc} \quad \mu_1 = k\lambda \quad \text{et} \quad \mu_2 = -k\lambda\,.$$

Il vient pour $\mu_1 - \mu_2$ non entier (notamment α différent de 2π) :

$$\hat{U}_k^*(r, \xi) = A \,.\, r^{\mu_1} f_1(r, \xi) + B \,.\, r^{\mu_2} f_2(r, \xi)\,.$$

$\hat{U}_k^*(R) = 0$ entraîne que

$$\hat{U}_k^*(r, \xi) = A \cdot \left(\frac{r^{\mu_1} f_1(r, \xi)}{R^{\mu_1} f_1(R, \xi)} - \frac{r^{\mu_2} f_2(r, \xi)}{R^{\mu_2} f_2(R, \xi)} \right).$$

Enfin $\int_{\mathbb{R}} \int_{]0, R[} (\hat{U}_k^*)^2 \, r \, dr \, d\xi < \infty$ entraîne que $2\mu_2 + 1 > -1$. Or $\alpha < 2\pi$, si bien que $\lambda > \frac{1}{2}$ et donc $k < 2$.

En conclusion, $\hat{U}_k^*$ est nul pour tout $k \geqslant 2$.

Dans le cas où $\mu_1 - \mu_2 = 2k\lambda$ est entier, (en particulier pour $\alpha = 2\pi$), il existe une première solution :

$$v_1(r, \xi) = r^{-k\lambda} f_1(r, \xi)$$

et la deuxième solution est :

$$v_2(r, \xi) = C v_1(r, \xi) \log r + r^{k\lambda} \psi(r, \xi)$$

avec $\psi(r, \xi)$ fonction analytique en r.

La solution générale est donc :

$$\hat{U}_r^*(r, \xi) = A v_1(r, \xi) + B v_2(r, \xi)\,.$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, cette solution est nécessairement nulle pour $k \neq 1$. Lorsque $k = 1$ alors $\alpha = 2\pi$, on va vérifier que le terme en log dans v_2 est nul, si bien que :

$$\hat{U}_k^*(r, \xi) = A \,.\, r^{\mu_1} f_1(r, \xi) + B \,.\, r^{\mu_2} f_2(r, \xi)\,.$$

Pour déterminer ψ dans l'expression de v_2, il suffit d'introduire l'expression de la solution dans l'équation vérifiée par $\hat{U}_k^*$. On trouve que ψ est solution de :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2C}{r} \left(-\frac{1}{2} r^{-3/2} \psi + r^{-1/2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0\,.$$

Ce qui est impossible si $C \neq 0$ puisque ψ est analytique. Si bien que C est nécessairement nul. Ce qui achève la démonstration du lemme 1. □

Le principe de la méthode consiste à introduire la fonction v^* définie par :

$$v^*(r, z) = r^{\lambda^*} U_1^*(r, z) \quad \text{où} \quad \lambda^* = -\lambda = -\frac{\pi}{\alpha}.$$

D'après le théorème de Fuchs ci-dessus, la transformée de Fourier de v^* admet une trace en $r = 0$ donc, il en va de même pour v^*. Ainsi, v^* est solution d'un problème aux limites classique. Après substitution de U_1^* par $r^{\lambda^*} . v^*(r, z)$ dans les équations (5) et (6) avec $k = 1$, on trouve que v^* est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} + \dfrac{1 + 2\lambda^*}{r} \dfrac{\partial v^*}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dans} \quad C =]0, R[\times \mathbb{R} \\ v^*(R, z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathbb{R} \\ v^* \in L^2_{1+2\lambda^*}(C). \end{cases} \tag{7}$$

Ici, $L^2_\mu(C)$ désigne l'espace à poids dont la norme est :

$$\|v\|^2_{L^2_\mu(C)} = \int_C v^2 r^\mu \, dr.$$

Remarques 1 :

(i) Du fait que $v^* \in L^2_{1+2\lambda^*}(C)$, il n'est pas possible d'écrire une formulation variationnelle de cette équation autrement qu'au sens d'une dualité.

(ii) Dans le cas de la fissure $\lambda^* = -\frac{1}{2}$, donc v^* est solution du problème non dégénéré :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 v^*}{\partial z} = \Delta v^* = 0 \quad \text{dans} \quad C =]0, R[\times \mathbb{R} \\ v^*(R, z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathbb{R} \\ v^* \in L^2(C). \end{cases}$$

Pour résumer :

LEMME 2 : *L'ensemble S^* des solutions U^* de (4) est l'ensemble des :*

$$U^*(r, \theta, z) = r^{\lambda^*} v^*(r, z) . \sin(\lambda^* \theta)$$

où v^* décrit l'ensemble des solutions de (7).

Dorénavant, on note :

— V^* l'ensemble des solutions de (7) (V^* est isomorphe à S^*)

— H^* l'ensemble des traces sur la frontière $r = 0$ des solutions de (7).

DÉFINITION 1 : *On a vu que les fonctions v^* ont des traces sur la frontière $r = 0$, on note ϕ^* l'opérateur de relèvement défini de l'ensemble H^* de ces traces dans V^* :*

$$\phi^* : \begin{array}{l} H^* \to V^* \\ h^* \to \phi^*(h^*) = v^*_{h^*} \end{array}$$

où $v^*_{h^*}$ *est la solution de (7) qui vérifie les conditions aux limites* $v^* = h^*$ *sur le côté* $r = 0$. *Par construction,* ϕ^* *est une application (tout élément de* H^* *a au moins une image dans* V^**).* □

5. ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR ϕ^*

Dans ce paragraphe, nous montrons que ϕ^* est un isomorphisme.

THÉORÈME 2 : *L'opérateur* ϕ^* *est un isomorphisme de* $H^* = H^{-1-\lambda^*}(\mathbb{R})$ *dans* $V^* = L^2_{1+2\lambda^*}(C)$. *Donc,* S^* *est isomorphe à* H^*.

Preuve : Posons $\mu = -1 - 2\lambda^* < 1$, μ est supposé être positif. Le cas $\mu = 0$ correspondant au cas de la fissure ($\alpha = 2\pi$) sera étudié à la fin de cette démonstration.

On sera amené à introduire le problème adjoint de (7) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 rv}{\partial r^2} + \mu \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 rv}{\partial z^2} = f \quad \text{dans} \quad C \\ tr_{|r=R} \quad v = g \,, \quad tr_{|r=0}\left(\dfrac{\partial rv}{\partial r} + \mu v\right) = h \,. \end{cases} \tag{8}$$

Ainsi qu'une condition de compatibilité entre f et h :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h \,.\, tr_{|r=0}\, v^* \, dz + \int_C f \,.\, v^* \, dr\, dz = 0 \\ \text{pour tout } v^* \in \mathcal{D}(\bar{C}) \cap L^2_{-\mu}(C) \text{ solution de (7).} \end{cases} \tag{9}$$

La démonstration comprend quatre étapes :

(i) Définition des espaces de Sobolev $\tilde{H}^k_\mu(C)$ nécessaires pour l'étude de (8).

(ii) Soit $X = \left\{v \in \tilde{H}^2_\mu(C) \text{ tel que } tr_{|r=R}\, v = 0\right\}$ et B l'opérateur :

$$\begin{aligned} B : X &\to L^2_\mu(C) \times H^{1+\lambda^*}(\mathbb{R}) \\ v &\mapsto \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} + \mu \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2},\ tr_{|r=0}\left(\frac{\partial rv}{\partial r} + \mu v\right)\right). \end{aligned}$$

On montrera que B est un isomorphisme sous la condition de compatibilité (9) qui assure la surjectivité de B.

(iii) Soit $V = \left\{v \in L^2_\mu(C) \text{ tel que } v = r^{-\mu} v^* \text{ où } v^* \in V^*\right\}$ et ϕ l'opérateur :

$$\begin{aligned} \phi : V &\to H^{1+\lambda^*}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto tr\Big|_{r=0}\left(\frac{\partial rv}{\partial r} + \mu v\right) = \phi(f) \end{aligned}$$

où v est l'unique solution de (8) dans lequel on a supprimé la condition aux limites, en $r = 0$, c'est-à-dire que v est l'unique solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 rv}{\partial r^2} + \mu \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 rv}{\partial z^2} = f \\ tr\big|_{r=R} \quad v = 0 \,. \end{array}\right. \tag{10}$$

On montrera que ϕ est un isomorphisme.

(iv) Enfin, on vérifiera que ϕ^* est l'adjoint de ϕ, et que ϕ^* est un isomorphisme.

(i) Soit $H^k_\mu(C)$ les espaces de Sobolev avec poids, définis pour $k \in \mathbb{N}$ et $\mu \in \,]0, 1[$ par récurrence :

$$H^0_\mu(C) = L^2_\mu(C)$$

pour $k \geqslant 1$, $H^k_\mu(C) = \left\{ v \in H^{k-1}_\mu(C) \text{ tel que } \dfrac{\partial^k v}{\partial r^{k_1}\, \partial z^{k_2}} \in L^2_\mu(C) \text{ où } k_1, k_2 \in \mathbb{N} \text{ et } k_1 + k_2 = k \right\}$.

On note $\overset{\circ}{H}{}^k_\mu(C) = \overline{\mathscr{D}(C)}^{H^k_\mu(C)}$.

Pour $k \geqslant 1$, on définit les espaces $\tilde{H}^k_\mu(C)$:

$$\tilde{H}^k_\mu(C) = \left\{ v \in H^{k-1}_\mu(C) \text{ tels que } rv \in H^k_\mu(C) \right\} .$$

et

$$\overset{\circ}{\tilde{H}}{}^k_\mu(C) = \overline{\mathscr{D}(C)}^{\tilde{H}^k_\mu(C)} .$$

Les espaces $H^k_\mu(C)$, $\tilde{H}^k_\mu(C)$ et $\overset{\circ}{\tilde{H}}{}^k_\mu(C)$ vérifient les propriétés suivantes :

(α) Les $H^k_\mu(C)$ sont des espaces de Banach, on note : $\|\cdot\|_{H^k_\mu(C)}$ leur norme. De même les $\tilde{H}^k_\mu(C)$ sont aussi des espaces de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{\tilde{H}^k(C)} = \left(\|v\|^2_{H^{k-1}_\mu(C)} + \|rv\|^2_{H^k_\mu(C)} \right)^{1/2} .$$

(β) D'après P. Grisvard [2] :

$$\overset{\circ}{H}{}^k_\mu(C) = \left\{ v \in H^k_\mu(C) \text{ tel que } \nu_i\, v = 0 \text{ sur } \partial C \text{ pour } i = 0, \ldots, k-1 \right\}$$

où $\nu_i\, v$ désigne la trace d'ordre i de v sur ∂C.

On en déduit facilement que :

$\overset{\circ}{\tilde{H}}{}^k_\mu(C) = \left\{ v \in \tilde{H}^k_\mu(C) \text{ tel que } \nu_i\, v = 0 \text{ sur } \partial C \text{ pour } i = 0, \ldots, k-2 \text{ et } \nu_{k-1}(rv) = 0 \text{ sur } \partial C \right\}$.

(γ) Enfin, d'après J. L. Lions [1], la restriction $\nu_i\big|_{r=0}$ de l'opérateur trace d'ordre i à la frontière $r = 0$ est surjectif et continu de $H^k_\mu(C)$ dans

$H_\mu^{k-i-\frac{\mu+1}{2}}(\mathbb{R})$ pour $i \leqslant k-1$. On en déduit que $\nu_i|_{r=0}$ est surjectif et continu de $\tilde{H}^k_\mu(C)$ dans $H^{k-i-\frac{\mu-1}{2}}(\mathbb{R})$ pour $i < k-1$.

(ii) Pour montrer que B est un isomorphisme, on procède en deux étapes.

(ii$_1$) L'opérateur B' :

$$\begin{aligned} B' &: X \to L^2_\mu(C) \\ v &\mapsto \frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} + \mu\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

(ii$_2$) B est un isomorphisme, la condition (9) assure la surjectivité de B.

La propriété (ii$_1$) résulte des deux lemmes suivants :

LEMME 3 : *Soit* $0 < \mu < 1$. *Pour tout* $f \in L^2_\mu(C)$ *le problème* (10) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial rv}{\partial r^2} + \mu\,\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 rv}{\partial z^2} = f \text{ dans } C \\ tr|_{r=R}\ v = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique $v \in \tilde{H}^1_{\mu,0}(C) = \{v \in \tilde{H}^1_\mu(C)$ *tel que* $tr|_{r=R}\ v = 0\}$.

Preuve : On montre d'abord qu'il existe une formulation variationnelle associée à (10), et que sa solution v est dans $\tilde{H}^1_{\mu,0}(C)$.

On multiplie (11) par $rw\,.\,r^\mu$ avec $w \in \tilde{H}^1_{\mu,0}(C)$ et on l'intègre sur C :

$$\int_C \frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} w + \mu\,\frac{\partial v}{\partial r} w + \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} rw \quad r^\mu\,dr\,dz = \int_C f w r^{\mu+1}\,dr\,dz\,.$$

En intégrant par parties les premier et troisième termes, et comme $rw = 0$ sur ∂C on obtient :

$$\int_C -\frac{\partial rv}{\partial r}\frac{\partial rw}{\partial r} - \mu wv - \frac{\partial rv}{\partial z}\frac{\partial\, rw}{\partial z} \quad r^\mu\,dr\,dz = \int_C f w r^{\mu+1}\,dr\,dz\,.$$

Si bien qu'on peut montrer par les méthodes classiques que le problème (11) équivaut à la formulation variationnelle ci-dessus où w est un élément quelconque de $\tilde{H}^1_{\mu,0}(C)$. Le lemme de Lax-Milgram s'applique à cette formulation variationnelle. On en déduit que pour tout $f \in L^2_\mu(C)$ (c'est-à-dire $fr^\mu \in L^2_{-\mu}(C) \subset (\tilde{H}^1_{\mu,0}(C))'$ il existe une solution unique $v \in \tilde{H}^1_{\mu,0}(C)$ de cette formulation variationnelle. □

LEMME 4 : *Pour tout* $v \in X$,

$$\|B' v\|_{L^2_\mu(C)} \leq C \|v\|_{\tilde{H}^2_\mu(C)} .$$

Preuve du lemme 4 : On intègre le carré $(B' v)^2$ sur C. On note γ la frontière $\{r = R\}$.

$$\int_C \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} + \mu \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} \right)^2 r^\mu \, dr \, dz = \int_C f^2 r^\mu \, dr \, dz = \|f\|^2_{L^2_\mu(C)} =$$

$$= \int_C \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} \right)^2 + \mu^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} \right)^2 + 2 \mu \frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} + 2 \mu \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} r^\mu \, dr \, dz .$$

Les trois premiers termes sont bien adaptés pour obtenir la majoration *a priori*. Par contre, on effectue des intégrations par parties pour modifier les trois autres termes.

Traitement du cinquième terme :

$$2 \int_C \frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} \, dr \, dz = - 2 \int_C \frac{\partial rv}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} r^\mu \right) dr \, dz + + 2 \int_{\partial C} \frac{\partial rv}{\partial r} \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} n_r \, r^\mu \, ds .$$

Or le terme de bord est nul car $rv = 0$ sur le bord, et donc $\dfrac{\partial^2 rv}{\partial z^2} = 0$ aussi.

$$= 2 \int_C \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r \, \partial z} \right)^2 r^\mu \, dr \, dz - 2 \mu \int_C \frac{\partial rv}{\partial r} \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} r^\mu \, dr \, dz$$

$$= 2 \int_C \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r \, \partial z} \right)^2 r^\mu - 2 \mu \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} r^\mu - 2 \mu v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} r^\mu \, dr \, dz$$

$$= 2 \int_C \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r \, \partial z} \right)^2 r^\mu - 2 \mu \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} r^\mu + 2 \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 r^\mu \, dr \, dz .$$

La somme des cinquième et sixième termes vaut :

$$\int_C 2 \frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} + 2 \mu \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} r^\mu dr \, dz =$$

$$= \int_C 2 \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r \, \partial z} \right)^2 + 2 \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 r^\mu \, dr \, dz .$$

Traitement du quatrième terme :

$$2\,\mu \int_C \frac{\partial^2 rv}{\partial r^2}\frac{\partial v}{\partial r} r^\mu\, dr\, dz = 2\,\mu \int_C \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\frac{\partial v}{\partial r} r^\mu\, dr\, dz\,.$$

Or :

$$2\,\mu \int_C \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\frac{\partial v}{\partial r} r^\mu\, dr\, dz = -\,2\,\mu \int_C r\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right) dr\, dz +$$

$$+\,2\,\mu \int_{\partial C}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r^{\mu+1} n_r\, dr\, dz$$

$$= -\,2\,\mu \int_C \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\delta r}\right) r^\mu + (\mu-1)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r^\mu\, dr\, dz$$

$$+\,2\,\mu \int_\gamma \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r^{\mu+1}\, ds\,.$$

Si bien que :

$$2\,\mu \int_C \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\frac{\partial v}{\partial r} r^\mu\, dr\, dz =$$

$$= \mu\,(1-\mu)\int_C \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r^\mu dr\, dz + \mu \int_\gamma \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r^{\mu+1}\, ds\,.$$

Donc le quatrième terme vaut :

$$2\,\mu \int_C \frac{\partial^2 rv}{\partial r^2}\frac{\partial v}{\partial r} r^\mu\, dr\, dz =$$

$$= \mu\,(3-\mu)\int_C \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r^\mu dr\, dz + \mu \int_\gamma \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r^{\mu+1}\, ds\,.$$

La somme des six termes vaut :

$$\|B'\,v\|_{L^2_\mu(C)} = \int_C \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r^2}\right)^2 + 3\,\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 rv}{\partial z^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r\,\partial z}\right)^2 + 2\,\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 r^\mu\, dr\, dz$$

$$+\,\mu \int_\gamma \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r^{\mu+1} n_r\, ds\,.$$

Or l'opérateur $tr_{|r=R}\dfrac{\partial v}{\partial r}$ est continu de $\tilde{H}^2_\mu(C)$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$, donc on obtient :

$$\|B'\,v\|_{L^2_\mu(C)} \leqslant C\;\|v\|_{\tilde{H}^2_\mu(C)}\,.$$

C'est le lemme 4.

Les lemmes 3 et 4 montrent que B' est continu et qu'il est bijectif. Donc, d'après le théorème de Banach, c'est un isomorphisme. Ce qui achève la démonstration (ii_1).

Montrons (ii_2). L'opérateur trace :

$$tr_{|r=0} : \quad X \subset \tilde{H}^2_\mu(C) \to H^{1+\lambda^*}(\mathbb{R})$$
$$v \mapsto tr_{|r=0}\, v$$

est continu, donc pour toute solution de (10), il existe $h \in H^{1+\lambda^*}(\mathbb{R})$ tel que $h = tr_{|r=0}\, v$ avec :

$$\|h\|_{H^{1+\lambda^*}(\mathbb{R})} \leq C \quad \|v\|_{\tilde{H}^2_\mu(C)} .$$

Donc, B est continu sur $\tilde{H}^2_\mu(C)$, est à image fermée dans $L^2_\mu(C) \times H^{1+\lambda^*}(\mathbb{R})$ et il est surjectif de X dans son image $B(X)$. C'est-à-dire qu'il est orthogonal à l'espace vectoriel des v^* vérifiant :

$$\langle Bv, v^* \rangle = 0 \qquad \forall v \in X ,$$

où le produit de dualité est : $L^2_\mu(C) \times H^{1+\lambda^*}(\mathbb{R})$, $L^2_{-\mu}(C) \times H^{-1-\lambda^*}(\mathbb{R})$. Si on applique la formule de Green pour $v \in \tilde{H}^2_\mu(C)$ et $v^* \in \mathcal{D}(C) \cap L^2_{-\mu}(C)$:

$$\int_C \left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} + \mu \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 rv}{\partial z^2} \right) v^* \, dr \, dz -$$
$$- \int_C \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial v^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} \right) \cdot rv \, dr \, dz -$$
$$- \int_{\partial C} \left(\frac{\partial rv}{\partial r} + \mu v \right) \cdot v^* - \frac{\partial v^*}{\partial r} rv \, ds = 0 . \quad (11)$$

Or $rv = 0$ sur ∂C, donc le terme de bord est $\left(\frac{\partial rv}{\partial r} + \mu v \right) v^*$ en $r = 0$ et $\frac{\partial rv}{\partial r} \cdot v^*$ en $r = R$. De plus $\langle Bv, v^* \rangle = 0$, si bien que (11) s'écrit encore :

$$- \int_C \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} - \mu \frac{\partial v^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} \right) rv \, dr \, dz - \int_{r=R} \frac{\partial rv}{\partial r} \cdot v^* \, dz = 0 .$$

Pour identifier les équations vérifiées par v^*, on choisit d'abord v quelconque dans $\mathcal{D}(C)$, ce qui implique :

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial v^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} = 0 . \qquad (12_1)$$

Enfin, l'opérateur :

$$\tilde{H}^2_\mu(C) \to H^{1+\lambda^*}(\mathbb{R})$$
$$v \mapsto \frac{\partial}{\partial r} rv$$

est surjectif, si bien qu'en choisissant $\frac{\partial rv}{\partial r}$ quelconque dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ on obtient que :

$$tr_{|r=R}\, v^* = 0\,. \tag{12$_2$}$$

Si bien que v^* est solution de (12_1) et (12_2), c'est-à-dire de (7), et donc que la condition (9) est équivalente à la surjectivité de B. Ce qui démontre (ii_2).

Montrons (iii). L'opérateur ϕ est surjectif, continu comme composé de deux surjections continues :

$$B'^{-1} : \quad L^2_\mu(C) \to \tilde{H}^2_\mu(C)$$
$$f \mapsto v$$

et

$$\tilde{H}^2_\mu(C) \to H^{1+\lambda^*}(\mathbb{R})$$
$$v \mapsto tr_{|r=0}\left(\frac{\partial rv}{\partial r} + \mu v\right)\,.$$

En plus, ϕ est injectif car si $f \in \ker \phi$, d'après la relation de compatibilité (9) :

$$\int_C f \,.\, v^*\, dr\, dz = 0 \quad \forall v^* \in V^*$$

c'est-à-dire que $f \neq 0$ ne peut pas être de la forme $r^{-\mu}\, \bar{v}^*$ avec $\bar{v}^* \in V^*$, donc $f \notin V$ et alors $\ker \phi = \{0\}$.

Ce qui achève de démontrer (iii).

Montrons (iv). Vérifions déjà que ϕ^* est l'opérateur adjoint de ϕ. D'après la formule de Green (11), si $f \in V \subset L^2_\mu(C)$, et si v^* est une solution de (7) telle que $v^* \in \mathscr{D}(\bar{C}) \cap L^2_{-\mu}(C)$, alors :

$$\int_C f v^*\, dr\, dz - \int_{\{r=0\}} tr_{|r=0}\, v^* \,.\, \phi(f)\, dz = 0\,.$$

Or par définition l'adjoint de ϕ noté provisoirement $\bar{\phi}^*$ vérifie :

$$\langle f, \bar{\phi}^*(h^*)\rangle = \langle \phi(f), h^*\rangle$$

pour tout $h^* \in H^{-1-\lambda^*}(\mathbb{R})$ et $f \in V$. En particulier pour $h^* \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \cap H^{-1-\lambda^*}(\mathbb{R})$, si bien que $\bar{\phi}^*(h^*) = v^*$ et $h^* = tr_{|r=0}\, v^*$.

C'est bien la définition de ϕ^*, donc $\bar{\phi}^* = \phi^*$ et ϕ^* est l'adjoint de ϕ. Bien entendu, l'identification entre $\bar{\phi}^*$ et ϕ^* peut être étendue aux $h^* \in H^{-1-\lambda^*}(\mathbb{R})$ par densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ dans $H^{-1-\lambda^*}(\mathbb{R})$.

Enfin, ϕ étant un isomorphisme, son adjoint ϕ^* en est aussi un. Ceci achève la preuve du théorème 2 dans le cas $\mu > 0$.

Dans le cas $\mu = 0$, V^* est l'ensemble des solutions $v^* \in L^2(C)$ de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} = 0 \\ tr_{|r=R}\, v^* = 0\,. \end{cases}$$

Cette fois-ci, la théorie de J. L. Lions & E. Magenes [1] est directement applicable puisqu'il ne s'agit pas d'un problème de type dégénéré. L'opérateur ϕ est ici :

$$\begin{aligned} \phi : \quad V \subset L^2(C) &\to H^{1/2}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto tr_{|r=0} \frac{\partial v}{\partial r} \end{aligned}$$

où v est l'unique solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\delta r^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = f \in L^2(C) \\ tr\, v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial C \end{cases}$$

ϕ est encore un isomorphisme, ainsi que l'opérateur ϕ^* :

$$\begin{aligned} \phi^* : \quad H^{-1/2}(\mathbb{R}) &\to V^* \subset L^2(C) \\ h &\mapsto v_{h^*}^* = \phi^*(h^*) \end{aligned}$$

où $v_{h^*}^*$ est la solution de (7) avec en plus $tr_{|r=0}\, v^* = h^* \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$. Ce qui achève complètement la démonstration du théorème 2. □

Le lemme suivant établit la relation existante entre les solutions rv de (10) et les singularités du problème de Laplace (1) dans laquelle $g = U^* \in S^*$ et $U_0 = 0$. Ce résultat est à comparer avec la décomposition des fonctions singulières duales U^* en fonction des solutions v^* de (7).

LEMME 5. — *Si* $g \in S^*$ et $U_0 = 0$, *la solution de* (1) *s'écrit :*

$$U(r, \theta, z) = r^\lambda \sin(\lambda\theta)\, v(r, z)$$

où v *est solution de* (10) *avec* $f = r^{\lambda^*+1} g$, *et* $\lambda = -\lambda^*$. *Donc, l'espace* $S = \Delta^{-1}(S^*)$ *est caractérisé par l'ensemble des solutions de* (10).

Preuve : Soit U solution de (1) :

$$\begin{cases} \Delta U = g \quad \text{dans} \quad \Omega \\ U \;\;= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad \text{et} \quad U \in H^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

On a vu que $U^* = r^{\lambda^*} w_1(\theta) v^*(r, z)$. Dans la suite, on décompose U sur la base des vecteurs propres w_k de $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ déjà introduits au début du paragraphe :

$$U = \sum_{k \in \mathbb{N}} U_k(r, z) w_k(\theta) .$$

En introduisant cette décomposition de U dans l'équation ci-dessus, puis en la projetant sur w et enfin en y appliquant la transformation de Fourier dans la direction z, on déduit que $U_j = 0$ pour $j \neq 1$. Si bien que :

$$U(r, \theta, z) = U_1(r, z) . w(\theta) .$$

U_1 est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial U_1}{\partial r} - \dfrac{\lambda^2}{r^2} U_1 + \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = r^{\lambda^*} v^* \\ U_1 = 0 \quad \text{en} \quad r = 0 \quad \text{et} \quad r = R \end{cases}$$

avec $\lambda = -\lambda^* = \frac{\pi}{\alpha}$. Pour conclure, on pose $U_1 = r^{\lambda} v(r, z)$, on vérifie alors que $v(r, z)$ vérifie l'équation (10).

Remarque 2 : Le lemme précédent est une caractérisation de l'espace des singularités : puisqu'on y a caractérisé les images réciproques des fonctions singulières duales par l'opérateur de Laplace. Ces fonctions singulières sont caractérisées par :

(i) la singularité $r^{\lambda} \sin \lambda \theta$ du problème bidimensionnel associé,

(ii) l'équation (10) vérifiée par v,

(iii) le second membre f de l'équation (10). □

6. NOYAUX SINGULIERS

Dans ce paragraphe, on tire parti du fait que le domaine Ω est infini dans la direction z pour introduire la caractérisation des solutions v et v^* en fonction de noyaux singuliers. Dans le cas particulier de la fissure ($\alpha = 2\pi$), on peut calculer explicitement la partie singulière du noyau de v^*.

Comme Ω est un dièdre infini, on peut calculer le noyau des équations (7), (10). Il suffit pour cela d'étudier formellement les solutions K^* et K de (7) et de (10) avec :

$$K^* = \delta \quad \text{en} \quad r = 0 \quad \text{et} \quad f = K^* r^{1 + 2\lambda^*}$$

où δ représente la distribution de Dirac.

Les solutions générales de (7), (10) sont alors :

$$v^* = h^* * K^* \quad \text{avec} \quad h^* \in H^{-1-\lambda^*}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad v = v^* * K$$

la convolution étant relative à z, et donc :

$$U^* = r^{\lambda^*} w_1(\theta) h^* * K^*(r, z) \quad \text{et} \quad U = r^{\lambda} w_1(\theta) K * v^* .$$

□

Dans le cas de la fissure, on peut calculer explicitement le noyau K^* :

LEMME 6 : *Si $\alpha = 2\pi$, l'expression analytique de $\hat{K}^*$ est :*

$$\hat{K}^* = \frac{e^{R|\xi|} e^{-r|\xi|} - e^{r|\xi|} e^{-R|\xi|}}{e^{R|\xi|} - e^{-R|\xi|}} .$$

□

Preuve : Il suffit de vérifier que $\hat{K}^*$ est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \hat{K}^*}{\partial r^2} - \xi^2 \hat{K}^* = 0 \quad \text{pour} \quad r \in]0, R[\\ \hat{K}^* = 0 \quad \text{en} \quad r = R \quad \text{et} \quad \hat{K}^* = 1 \quad \text{en} \quad r = 0 . \end{cases}$$

Dans le cas de la fissure, on a calculé explicitement le noyau $\hat{K}^*$. Néanmoins, son expression est trop compliquée pour qu'on puisse espérer en calculer la transformée de Fourier inverse. Par contre, on peut décomposer K^* en une partie régulière élément de $H^1(\Omega)$ et une partie singulière élément de $L^2(\Omega)$. C'est ce que nous faisons dans la suite.

THÉORÈME 3 : *La partie singulière $K_0 \in L^2(\Omega)$ du noyau des fonctions singulières duales est calculable analytiquement :*

$$K_0(r, z) = \frac{2r}{r^2 + z^2} \tag{13}$$

si bien que :

$$U^*(r, \theta, z) = h^* * \left(r^{-\frac{1}{2}} w_1 K_0 + U^{*R} \right)$$

avec :

$$h^* \in H^{-1-\lambda^*}(\mathbb{R}) \quad et \quad U^{*R} \in H^1(\Omega) .$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \hat{K}^* &= \frac{e^{R|\xi|} e^{-r|\xi|} - e^{r|\xi|} e^{-R|\xi|}}{e^{R|\xi|} - e^{-R|\xi|}} \\ &= \frac{e^{-r|\xi|}(e^{R|\xi|} - e^{-R|\xi|}) + e^{-R|\xi|}(e^{-r|\xi|} - e^{r|\xi|})}{e^{R|\xi|} - e^{-R|\xi|}} \\ &= e^{-r|\xi|} + e^{-R|\xi|} \cdot \frac{e^{-r|\xi|} - e^{r|\xi|}}{e^{R|\xi|} - e^{-R|\xi|}} . \end{aligned}$$

Comme $K^0(r, z)$ est la transformée de Fourier inverse de $(e^{-r|\xi|})$, posons :

$$K^1 = F^{-1}\left(e^{-R|\xi|} \cdot \frac{e^{-r|\xi|} - e^{r|\xi|}}{e^{R|\xi|} - e^{-R|\xi|}}\right)$$

ainsi

$$K^* = K^0 + K^1 . \tag{14}$$

Il suffit de montrer que :

$$h^* * K^1 r^{\lambda^*} w_1 \in H^1(\Omega) \tag{15}$$

c'est-à-dire en notant $\hat{h}^*$ la transformée de Fourier de h^* par rapport à z :

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{h}^*)^2 \left\|\hat{K}^1 \cdot r^{\lambda^*} w_1\right\|^2_{L^2(\omega)}(1 + \xi^2) + (\hat{h}^*)^2 \left\|\hat{K}^1 \cdot r^{\lambda^*} w_1\right\|^2_{H^1(\omega)} d\xi < \infty .$$

Or $\hat{K}^1 < C \cdot e^{-R|\xi|}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, ce qui permet de majorer le premier terme :

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{h}^*)^2 \left\|\hat{K}^1 \cdot r^{\lambda^*} w_1\right\|^2_{L^2(\omega)}(1 + \xi^2)\, d\xi \leq$$
$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{h}^*)^2 e^{-2R|\xi|}(1 + \xi^2)\, d\xi \left\|r^{\lambda^*} w_1\right\|^2_{L^2(\omega)} < \infty .$$

Majoration du second terme :

$$\left\|\hat{K}^1 \cdot r^{\lambda^*} w_1\right\|^2_{H^1(\omega)} \leq C\left(\left\|\frac{\partial}{\partial r}\hat{K}^1 \cdot r^{\lambda^*} w_1\right\|^2_{L^2(\omega)} + \right.$$
$$\left. + \left\|\frac{\partial}{\partial r} r^{\lambda^*} w_1 \cdot \hat{K}^1\right\|^2_{L^2(\omega)} + \left\|\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} r^{\lambda^*} w_1\right\|^2_{L^2(\omega)}\right) .$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{K}^1 = -e^{-R|\xi|}|\xi| \frac{e^{-r|\xi|} + e^{r|\xi|}}{e^{R|\xi|} - e^{-R|\xi|}} \leq C e^{-\frac{R|\xi|}{2}} .$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \left\|\frac{\partial}{\partial r}\hat{K}^1 \cdot r^{\lambda^*} w_1\right\|^2_{L^2(\omega)} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{R|\xi|}{2}} \left\|r^{\lambda^*} w_1\right\|^2_{L^2(\omega)} d\xi < \infty ,$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial}{\partial r} r^{\lambda^*} w_1 = \lambda^* \frac{r^{\lambda^*} w_1}{r}$$

mais comme :

$$\frac{\hat{K}^1}{r} = \frac{e^{-R|\xi|}}{e^{R|\xi|} - e^{-R|\xi|}} \cdot \frac{e^{-r|\xi|} - e^{r|\xi|}}{r}$$

et

$$\left| \frac{e^{-r|\xi|} - e^{r|\xi|}}{r} \right| < C e^{r|\xi|} |\xi| \quad \text{et} \quad \frac{e^{-R|\xi|}}{e^{R|\xi|} - e^{-R|\xi|}} \leqslant C \,.\, e^{-2R|\xi|}$$

donc :

$$\frac{\hat{K}^1}{r} \leqslant C \,.\, e^{-R|\xi|}$$

et alors :

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{h}^*)^2 \left\| \frac{\partial}{\partial r} r^{\lambda^*} w_1 \cdot \hat{K}^1 \right\|^2_{L^2(\omega)} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \int_{\mathbb{R}} (\hat{h}^*)^2 \, e^{-2R|\xi|} \, d\xi \cdot \left\| r^{\lambda^*} w_1 \right\|^2_{L^2(\omega)} < \infty \,.$$

Majoration du troisième terme :

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} r^{\lambda^*} w_1 \,.\, \hat{K}^1 \right\|^2_{L^2(\omega)} < \int_{\mathbb{R}} C \,.\, e^{-2R|\xi|} \, d\xi \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} r^{\lambda^*} w_1 \right\|^2_{L^2(\omega)} < \infty \,.$$

□

7. BILAN DES ISOMORPHISMES

Dans ce paragraphe, on fait le bilan des isomorphismes qui existent entre les espaces S, S^*, V, V^*, H, H^* et l'espace des solutions de (10).

(i) D'après le théorème 2, ϕ^* est un isomorphisme entre H^* et V^*,

(ii) donc ϕ est un isomorphisme entre V et H,

(iii) d'après le lemme 2, S^* et V^* sont isomorphes,

(iv) par construction, V^* et V sont isomorphes,

(v) d'après le lemme 5, l'espace des solutions de (10) est isomorphe à S,

(vi) l'opérateur Δ est un isomorphisme entre S et S^* pour la norme du graphe.

8. PROBLÈME NON HOMOGÈNE. FORMULE DE CALCUL DU COEFFICIENT DE SINGULARITÉ

Maintenant que les espaces de fonctions singulières et singulières duales sont bien déterminés, on effectue la dernière étape de la méthode. On montre que l'ensemble des singularités des solutions de (1) avec conditions aux limites non homogènes est celui qu'on a trouvé au paragraphe précédent. Enfin, on établit l'équation vérifiée par le coefficient de singularité h.

On considère U la solution de l'équation (1) avec les conditions aux limites non homogènes. On fera toujours l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 2 : *On suppose qu'il existe un relèvement* $\tilde{U} \in H^2(\Omega)$ *de* U_0.

THÉORÈME 4 :

(i) *Sous l'hypothèse 2, la solution* U *de (1) admet la décomposition suivante :*

$$U = r^\lambda\, w_1(\theta)\, v_h + U^R \tag{16}$$

où $U^R \in H^2(\Omega)$ *et* v_h *est la solution d'un problème (10).*

(ii) *La fonction* $h \in H = H^{(1+\lambda^*)}(\mathbb{R})$ *de la solution de (16) est la solution unique de la formulation variationnelle suivante :*

$$\langle h, h^* \rangle_{H, H^*} = \pi \left(\int_\Omega g \,.\, U^*_{h^*}\, dx - \int_{\partial\Omega} U_0 \,.\, \operatorname{grad} U^*_{h^*} \,.\, n\, ds \right) \tag{17}$$

pour tout $h^* \in H^* = H^{-(1+\lambda^*)}(\mathbb{R})$.

Preuve : (i) Soit $\tilde{U} \in H^2(\Omega)$ le relèvement des conditions aux limites U_0 de (1), alors $U - \tilde{U}$ est solution de (1) avec les conditions aux limites homogènes. Le second membre g de cette nouvelle équation est un élément de $L^2(\Omega)$, il admet donc une décomposition :

$$g = g^S + g^R$$

où $g^S \in S^*$ et $g^R \in \Delta(M)$. Par application du lemme 5 et du théorème 1 :

$$U - \tilde{U} = r^\lambda\, w_1(\theta)\, v_h + U^R$$

où $U^R \in M$ et v_h est la solution de (10) associée à g^S.

(ii) Cette formule résulte de la décomposition de $L^2(\Omega)$ en S^* et en son orthogonal $\Delta(M)$, ainsi que de la formule de Green déjà introduite pour la formulation du problème adjoint.

On sait que :

$$U = \tilde{U} = U^S + U^R \quad \text{où} \quad U^S = -\Delta^{-1} U^*_{h^*}$$

avec $U^*_{h^*} \in S^*$ et $U^R \in M$. Or $\Delta(U^R)$ est contenu dans l'orthogonal de S^*. Si bien que pour tout $U^*_{h^*} \in S^*$:

$$\int_\Omega \Delta U\, U^*_{h^*}\, dx = \int_\Omega \Delta(U - \tilde{U})\, U^*_{h^*}\, dx + \int_\Omega \Delta\tilde{U}\, U^*_{h^*}\, dx =$$

$$= \int_\Omega \Delta U^S\, U^*_{h^*}\, dx + \int_\Omega \Delta\tilde{U}\, U^*_{h^*}\, dx$$

donc :

$$\int_\Omega U_{h^*}^* U_{h^*}^* dx = \int_\Omega g \,.\, U_{h^*}^* + \int_\Omega \Delta\tilde{U}\, U_{h^*}^* dx\,. \tag{18}$$

Par ailleurs, d'après le paragraphe précédent :

$$U^S(h) = r^\lambda\, w_1(\theta)\, v_h(r, z) \quad \text{et} \quad U_{h^*}^* = r^{\lambda^*}\, w_1(\theta)\, v_{h^*}^*(r, z)$$

v_h et $v_{h^*}^*$ étant respectivement solution de (10) et (7). D'après la formule de Green utilisée au cours de la formulation du problème adjoint, v_h et $v_{h^*}^*$ vérifient :

$$0 = \int_C v_{h^*}^* \cdot \left(\frac{\partial^2 r v_h}{\partial r^2} - (1 + 2\,\lambda^*) \frac{\partial v_h}{\partial r} + \frac{\partial^2 r v_h}{\partial z^2} \right) dr\, dz + \\ + \left\langle 2\,\lambda^*(v_h)|_{r=0},\, (v_{h^*}^*)|_{r=0} \right\rangle_{H, H^*}\,.$$

Et en notant $h = (v_h)|_{r=0}$:

$$-2\,\lambda^* \langle h, h^* \rangle_{H, H^*} = \int_C v_{h^*}^*\, v_{h^*}^*\, r^{1+2\lambda^*}\, dr\, dz$$

c'est-à-dire :

$$\int_\Omega U_{h^*}^* U_{h^*}^* dx = -2\,\lambda^* \int_0^\alpha w_1^2(\theta)\, d\theta\, \langle h, h^* \rangle_{H, H^*} = \pi\, \langle h, h^* \rangle_{H, H^*}\,. \tag{19}$$

Par ailleurs, on montre facilement que :

$$\int_\Omega \Delta\tilde{U}\, U_{h^*}^* dx = -\int_{\partial\Omega} U_0 \,.\, \mathrm{grad}\, U_{h^*}^* \,.\, n\, ds \tag{20}$$

en appliquant la formule de Green classique sur un domaine $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{(r, \theta, z) \text{ tel que } r > \varepsilon\}$, puis en faisant tendre $\varepsilon \to 0$. Le (ii) du théorème résulte de (18), (19) et (20). □

9. MÉTHODE DE GALERKIN

Dans ce paragraphe, on introduit une méthode de Galerkin pour l'approximation de la solution de (12).

Rappelons les équations à discrétiser. Tout d'abord, l'équation vérifiée par $v_{h^*}^*$ écrite au sens de la dualité :

$$v_{h^*}^* \in L_{-\mu}^2(C) \quad \text{telle que} \quad \forall v \in X\,,$$

$$\langle Bv, v^* \rangle = 0$$

où encore en posant :

$$\psi : \begin{array}{l} \tilde{H}^2_\mu(C) \to H = H^{1-\lambda}(\mathbb{R}) \\ v \mapsto tr_{|r=0}\left(\dfrac{\partial}{\partial r} rv + \mu v\right) \end{array}$$

$$\langle B' v, v^* \rangle_{V, V^*} + \langle h^*, \psi(v) \rangle_{H^*, H} = 0 \tag{21}$$

et h est solution de :

$$\langle h, h^* \rangle_{H, H^*} = \pi \left(\int_\Omega g U^*_{h^*} \, dx - \int_{\partial C} U_0 \,.\, \nabla U^*_{h^*} \,.\, n \, ds \right) \tag{22}$$

pour tout $h^* \in H^*$.
Le reste du paragraphe est consacré à la définition d'une base permettant de construire une solution approchée de (21) et (22).

Commençons par définir un isomorphisme :

$$\begin{array}{l} J : H \to H' \\ \quad h \mapsto J(h) \end{array}$$

permettant de remplacer le produit de dualité $\langle h, h^* \rangle_{H, H^*}$ par un produit scalaire dans H : $(h, J^{-1}(h^*))_H$.

Ainsi, (22) s'écrit de façon équivalente :

$$\begin{cases} h \in H \\ (h, \bar{h})_H = \pi \left(\displaystyle\int_\Omega g U^*_{J(\bar{h})} \, dx - \int_{\partial \Omega} U_0 \, \nabla U^*_{J(\bar{h})} \cdot n \, ds \right) \\ \text{pour tout } \bar{h} \in H \,. \end{cases}$$

Un choix possible de J serait :

$$J(h) = tr_{|r=0}\left(r^\mu \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

où w est l'unique solution de la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_C \left(\frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + w \cdot v \right) r^\mu \, dr \, dz = 0 \\ \text{pour tout } v \in W \text{ et avec } w \in W(h) \,, \\ \text{où } W(h) = \left\{ v \in H^1_\mu(C) \text{ telle que } tr_{|r=R} \, v = 0 \text{ et } tr_{|r=0} = h \right\} \end{cases} \tag{23}$$

LEMME 7 : *J est un isomorphisme de H dans H^*.*

Preuve : Montrons que J est la composition de deux isomorphismes I et K^{-1} où :

$$I : \begin{array}{l} H \to W \\ h \to I(h) = w \end{array}$$

$w \in W(h)$ étant la solution de (21) et

$$K: \begin{array}{l} H^* \to W \\ g \ \to K(g) = w \end{array}$$

$w \in W$ étant solution de la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_C \left(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + wv \right) r^\mu \, dr \, dz = \langle g, v \rangle_{H^*, H} \\ \text{pour tout } v \in W . \end{cases} \tag{24}$$

Admettons d'abord que I et K sont des isomorphismes, alors l'interprétation de (22) sous forme de problèmes aux limites est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{\mu}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dans} \quad C \\ tr_{|r=0}\, r^\mu \dfrac{\partial w}{\partial r} = g \quad \text{sur} \quad \gamma \quad \text{et} \quad tr_{|r=R}\, w = 0 . \end{cases} \tag{25}$$

C'est-à-dire que $K^{-1}(w) = r^\mu \dfrac{\partial w}{\partial r}(r = 0)$, donc $J = K^{-1} \circ I$.

Il reste à vérifier que I et K sont des isomorphismes. La surjectivité de I et la continuité de I^{-1} résultent du théorème 7.1 de P. Grisvard [2], son injectivité est évidente et la formulation variationnelle (23) implique sa continuité. Cela suffit pour affirmer que I est un isomorphisme. Par ailleurs, l'application du théorème de Lax-Milgram entraîne que K est un isomorphisme. Ce qui achève la démonstration.

Le produit scalaire sur H est défini pour tous $h, h' \in H$ par :

$$(h, h')_H = \langle h', J(h) \rangle_{H, H^*} . \tag{26}$$

Notons $w \in W(h)$ et $w' \in W(h')$ les solutions de (21). Le produit scalaire (24) peut être exprimé en fonction de w et de w' :

$$(h, h')_H = (w, w')_W = \int_C \left(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial z} + ww' \right) r^\mu \, dr \, dz . \tag{27}$$

En effet, $J(h) = r^\mu \dfrac{\partial w}{\partial r}$, or d'après les conditions aux limites de (25) et la formulation variationnelle (24), il vient :

$$\langle w', J(h) \rangle_{H, H^*} = \int_C \left(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial z} + ww' \right) r^\mu \, dr \, dz . \qquad \square$$

Remarque 5 : Les définitions de J et du produit scalaire utilisent la solution d'un problème aux limites posé sur C. On peut faire la même construction sur n'importe quel domaine contenant un voisinage de l'arête γ. $\square$

A présent, on peut effectuer le choix de la base.

(i) Soit $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base de X,

(ii) alors $(\varphi_k^*)_{k \in \mathbb{N}} = (B' \ \varphi_k r^{\mu})_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $L^2_{-\mu}(C)$ donc, une base de V^*,

(iii) $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\psi(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de H (car ψ est surjectif),

(iv) $(\psi_k^*)_{k \in \mathbb{N}} = (J(\psi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ forment une base de H' puisque J est un isomorphisme.

Avec cette base, et en posant :

$$v^* \simeq \sum_{k=0}^{N} v_k^* \cdot \varphi_k^* \qquad h \simeq \sum_{k=0}^{N} h_k \, \psi_k$$

$$h^* \simeq \sum_{k=0}^{N} h_k^* \, \psi_k^* \qquad v \simeq \sum_{k=0}^{N} v_k \, \varphi_k$$

(21) s'écrit :

$\sum_{k,\ell=0}^{N} v_k \, v_\ell^* \, \langle B\varphi_k, \varphi_\ell^* \rangle = \sum_{k,\ell=0}^{N} v_k \, h_\ell^* \, \langle \psi_\ell^*, \psi_k \rangle$ pour tous $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ce qui équivaut à :

$$\sum_{\ell=0}^{N} (\varphi_k^*, \varphi_\ell^*)_{V^*} \, v_\ell^* = \sum_{\ell=0}^{N} (\psi_\ell, \psi_k)_H \, h_\ell^* \tag{28}$$

et (22) s'écrit :

$$\sum_{k,\ell=0}^{N} h_k \, h_\ell^* \, \langle \psi_k, \psi_\ell^* \rangle_{H,H'} = \sum_{k=0}^{N} h_k^* \, \pi \left(\int_\Omega g \cdot U^*_{\psi_k^*} \, dx - \int_{\partial\Omega} U^0 \, \nabla U^*_{\psi_k^*} \cdot n \, ds \right)$$

donc

$$\sum_{\ell=0}^{N} (\psi_k, \psi_\ell)_H \, h_k = \sum_{k=0}^{N} \pi \left(\int_\Omega g \cdot U^*_{\psi_k^*} \, dx - \int_{\partial\Omega} U^0 \, \nabla U^*_{\psi_k^*} \cdot n \, ds \right) . \tag{29}$$

La résolution numérique consiste alors à résoudre (28) et (29).

CONCLUSION.

On a caractérisé l'ensemble S^* des seconds membres g de (1) qui engendrent une partie singulière dans la solution U, ainsi que l'ensemble S de ces singularités. Pour cela, on a mis à jour des isomorphismes existant entre les ensembles H et H^* des coefficients de singularités et S^*. On en a déduit une formule de représentation du coefficient de singularité — fonction distribuée sur l'arête —, puis une méthode d'approximation de cette formule.

Les résultats obtenus dans cet article peuvent être étendus à des domaines comprenant des arêtes courbes formant des lacets fermés, ainsi qu'à la classe des opérateurs d'ordre 2 vérifiant la propriété de V-ellipticité.

RÉFÉRENCES

[1] M. DAUGE, *Elliptic boundary value problems in corner domains. Smoothness and asymptotics of solutions.* L.N.M. 1341, Springer Verlag 1988.

[1] R. DAUTRAY, J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique.* Masson 1984-1985.

[1] P. GRISVARD, *Elliptics problems in non smooth domains.* Pitman 1985.

[2] Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids, *Annali de la scuola superiore di Pisa, Série 3, vol. 17,* 1963, pp. 255-296.

[3] Edge behavior of the solution of an elliptic problem, *Mathematische Nachrichten, 132,* pp. 281-299, 1987.

[1] M. LENCZNER, Caractérisation des fonctions singulières duales, et calcul du coefficient de la solution de l'équation de singularité de Laplace 3D dans un domaine fissuré, *C.R. Acad. Sc. Paris, t. 314,* p. 265-270, 1992.

[2] Thèse de l'Université P. M. Curie Paris VI. Juillet 1992.

[1] J. L. LIONS, Théorème de trace et d'interpolation (IV), *Mathematische Annalen 151,* pp. 42-56, 1963.

[1] Théorème de trace et d'intrapolation (IV), *Mathematische Annalen 151,* pp. 42-56, 1963.

[1] V. G. MAZY'A, J. ROSSMAN, Über die Asymptotik der Losungen elliptisher Randwertaufgaben im der umgebung von Kanten, *Math. Nachrichten 138,* 1988, pp. 27-53.

[1] M. MOUSSAOUI, Singularities and constructives methods for their treatment. *Lect. Not. in Math. 1121,* Editor : Grisvard P. Wendland W. and Whiteman J. R.

[1] H. REINHARD, *Equations différentielles,* Gauthier-Villars, 1982.