

J. LEMORDANT

PHAM DINH TAO

H. ZOUAKI

**Modélisation et optimisation numérique pour  
la reconstruction d'un polyèdre à partir de  
son image gaussienne généralisée**

*M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome  
27, n° 3 (1993), p. 349-374

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1993\\_\\_27\\_3\\_349\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_3_349_0)

© AFCET, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



**MODÉLISATION ET OPTIMISATION NUMÉRIQUE  
POUR LA RECONSTRUCTION D'UN POLYÈDRE  
À PARTIR DE SON IMAGE GAUSSIENNE GÉNÉRALISÉE (\*)**

par J. LEMORDANT <sup>(1)</sup>, Pham Dinh TAO <sup>(2)</sup> et H. ZOUAKI <sup>(3)</sup>

Communiqué par P. J. LAURENT

---

*Résumé. — La représentation d'un objet à partir de son Image Gaussienne Généralisée notée EGI, apparaît dans plusieurs problèmes de vision par ordinateur. Cette représentation détermine de façon unique un objet convexe.*

*On présente un algorithme efficace pour retrouver la représentation surfacique d'un polyèdre convexe à partir de la donnée de son E.G.I. Cette reconstruction se fera via la résolution d'un problème d'optimisation convexe.*

*Abstract. — Modelling and numerical optimization for the reconstruction of a polyhedron through its generalized Gaussian image. The representation of an object by means of its extended Gaussian image, which we write E.G.I., occurs in many computer vision problems. A convex object is fully specified by its E.G.I.*

*In this work, we present an effective algorithm to reconstruct the surface shape of a convex polyhedron from its extended Gaussian image. This reconstruction is done by solving a convex optimization problem. The general scheme of the algorithm is given along with some comments on numerical aspects.*

## INTRODUCTION

Une bonne partie des objets fabriqués dans l'industrie ont comme structure de base un polyèdre. Le dessin assisté par ordinateur des polyèdres peut donc être une première étape dans la conception d'un objet au *design* plus complexe et plusieurs systèmes de CAO exploitent cette propriété. Les

---

(\*) Reçu pour publication en avril 1992.

(1) Équipe visualisation et synthèse d'image, LAB ARTEMIS, IMAG, B.P. 53X, 38041 Grenoble Cedex, France.

(2) Équipe modélisation et optimisation appliquée, LAB LMAI. INSA de Rouen, B.P. n° 8, 76131 Mont Saint Aignan.

(3) Équipe de géométrie algorithmique, LAB LMC, IMAG, B.P. 53X, 38041 Grenoble Cedex, France.

opérateurs d'Euler permettent de construire pas à pas un polyèdre tout en assurant son intégrité topologique. De manière interne, les structures du type *winged-edge* ou *half-edge* sont utilisées pour représenter la topologie, c'est-à-dire les relations d'appartenance ou d'adjacences. Cependant l'utilisation des opérateurs d'Euler reste difficile pour un utilisateur non averti et peu de systèmes les proposent au concepteur. L'entrée des polyèdres simples, se fait face par face en donnant la liste des sommets, *i.e.* leurs numéros et leurs coordonnées euclidiennes. Reste le délicat problème de la mesure de ces coordonnées si l'on travaille à partir d'une maquette ou de l'estimation de ces valeurs lorsque le concepteur crée son objet *ab nihilo*.

Une méthode pour s'affranchir de tout système de coordonnées est d'utiliser l'image gaussienne généralisée du polyèdre. Le principe d'une telle représentation est de définir sur la sphère unité, une fonction poids qui permet de rendre compte de la variation de l'aire sur la surface d'un objet, en fonction de la variation de son orientation. Dans le cas d'un polyèdre, son image gaussienne généralisée est définie par la donnée des normales et des aires de ses faces.

L'orientation et l'aire d'une face peuvent se mesurer dans le cas d'une maquette à l'aide d'une caméra vidéo en mesurant la réflectance des faces dans des conditions d'éclairage précises. Cette méthode est utilisée dans des systèmes de vision industriels.

Ces données caractérisent d'une manière unique un polyèdre convexe.

En effet, les travaux de Minkowski, à la fin des années 1890, ont montré qu'un polyèdre convexe est complètement déterminé par la donnée de l'aire et l'orientation de ses faces. Ce résultat est un cas particulier du problème, communément appelé problème de Minkowski, concernant les surfaces convexes.

Dans le cas de création interactive, l'orientation et l'aire des faces sont des paramètres très intuitifs qui permettent de simuler les techniques de sculpture.

Dans ce travail on s'intéresse essentiellement au problème de retrouver la représentation surfacique d'un polyèdre convexe à partir de la donnée de son E.G.I. En 1983, J. J. Little [14] présenta un algorithme, inspiré de la preuve de Minkowski, qui consiste, pour la reconstruction du polyèdre, à résoudre un problème d'optimisation et dont on peut énoncer le principe : Soit  $(N_i, S_i) \ i = 1, \dots, k$  l'E.G.I. d'un polyèdre  $P$ , dont on cherche la représentation surfacique. A tout  $l \in \mathbb{R}^k$ , on peut associer le polyèdre  $P(l) = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle N_i, x \rangle \leq l_i \ i = 1, \dots, k\}$ . On note  $V(l)$  le volume du polyèdre  $P(l)$ . Le vecteur des distances de l'origine aux faces du polyèdre cherché est la solution du problème  $(P)$  :  $\text{Min} \sum_{i=1}^k l_i S_i$  sous la contrainte

$V(l) \geq 1$  et  $l \geq 0$ .

Ce papier est consacré à l'étude qualitative et quantitative de ce problème.

Il est composé de cinq paragraphes. Au premier paragraphe on donne la définition de l'E.G.I.

Dans le second paragraphe, on présente certains résultats qui permettront d'introduire la méthode de reconstruction. On étudie les propriétés géométriques et différentielles de la fonction convexe  $-V^{1/d}(l)$ . Les expressions obtenues du gradient (ou d'un sous-gradient) et du Hessien (ou la matrice des dérivées partielles secondes) de  $-V^{1/d}(l)$  sont particulièrement simples, leur calcul s'obtient en même temps que celui de la fonction elle-même. Ces résultats constituent un avantage considérable dans l'application des méthodes du premier et second ordre à la résolution du problème d'optimisation en question. Ils évitent ainsi de recourir à des techniques de type quasi-Newton, qui sont moins performantes dans ce cadre d'optimisation. Enfin on établit la transformation de  $(P)$  en un problème  $(P')$  plus facile à traiter numériquement.

Au paragraphe trois, sont abordées les étapes de reconstruction : on présente une méthode pour construire, en dimension trois, le polyèdre  $P(l)$ . Cette construction se fera à travers la dualité et par utilisation d'un algorithme performant pour le calcul de l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Le calcul de  $V(l)$  se fera suivant que l'on considère le cas de la dimension 3 ou le cas général. Afin de pouvoir utiliser des méthodes d'optimisation du second ordre, on fournit un moyen pour le calcul du Hessien de  $V$ .

Au paragraphe quatre, deux schémas pour l'algorithme général de reconstruction sont présentés.

Le dernier paragraphe est consacré à l'expérimentation numérique.

## 1. IMAGE GAUSSIENNE GÉNÉRALISÉE

### 1.1. Cas de surfaces régulières

Une représentation paramétrique de classe  $C^k$  d'un carreau de surface est la donnée d'une injection de classe  $C^k$   $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Une représentation paramétrique de classe  $C^k$  d'une surface est la donnée d'une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  où  $U$  est une partie admettant un recouvrement ouvert  $U = \bigcup_{k \in K} U_k$ , tel que  $f$  restreinte à chaque  $U_k$  soit une représentation paramétrique d'un carreau de surface.

Une représentation paramétrique d'une surface  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dite régulière, si elle est de classe  $C^1$  et si en tout point  $(u, v) \in U$   $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$  sont linéairement indépendants.

A chaque point d'une surface régulière, on fait correspondre un point de la sphère unité où l'orientation est parallèle à celle de la normale de la surface au point considéré.

On définit ainsi une correspondance appelée **application de Gauss**

$$\begin{aligned} N : \quad F &\rightarrow W \\ f(u, v) &\rightarrow \vec{n}(u, v) \end{aligned}$$

entre  $F$  le carreau de surface régulière représenté par  $f$ , et  $\Omega$  la sphère unité que l'on appelle aussi « **Sphère de Gauss** ».

$N(F)$  est par définition l'image gaussienne de  $F$ .

Dans cette représentation, un point de la sphère correspond à plusieurs points de la surface, si et seulement si, il existe des normales parallèles ayant le même sens.

Gauss définit la courbure totale de la surface en un point  $P \in F$  comme la limite :

$$K(P) = \lim_{\substack{P \in V \subset F \\ \text{aire}(V) \rightarrow 0}} \pm \frac{\text{Aire } N(v)}{\text{Aire } v}$$

où le signe  $\pm$  est choisi selon que  $N$  préserve ou non l'orientation.

Gauss prouva que la courbure totale ainsi définie est égale au produit des deux courbures principales (cf. [4]).

Une propriété importante de la courbure gaussienne est qu'elle reste invariante par isométrie, c'est-à-dire toute transformation respectant la longueur des arcs de courbes et l'angle entre les arcs de courbes.

#### **Définition de l'image gaussienne généralisée (E.G.I.)**

Soient  $u$  et  $v$  les paramètres permettant de décrire la surface de l'objet,  $\xi$  et  $\eta$  sont respectivement la longitude et la latitude d'un point de la sphère.

On définit sur la sphère l'image gaussienne généralisée par :

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{K(u, v)}.$$

$(\xi, \eta)$  est le point sur la sphère ayant la même normale que le point  $(u, v)$  de la surface de l'objet,  $K(u, v)$  étant la courbure gaussienne au point  $(u, v)$ .

Cette définition n'est valable que pour les surfaces convexes où deux points ne peuvent avoir la même normale (courbure positive).

Néanmoins, la définition peut être étendue au cas d'objets non convexes (Horn 1984, cf. [9]).

Soit maintenant  $W$  une partie de la sphère  $\Omega$ , et soit  $V$  une partie de la surface  $F$  telle que  $N(V) = W$ . L'aire de  $V$  est bien définie et sera notée  $\sigma(W)$ .

On définit ainsi, une mesure sur  $\Omega$ .

$$\sigma(W) = \int_W \frac{1}{K(n)} d\omega(n) = \int_W G(n) d\omega = \text{aire}(V).$$

On peut voir  $G$  comme une densité de la mesure  $\sigma$ .

## 1.2. Cas discret

Dans le cas d'un polyèdre convexe, l'image gaussienne est définie par un nombre fini de points correspondants aux normales des différentes facettes du polyèdre.

L'image gaussienne généralisée est obtenue en plaçant en chacun des points de l'image gaussienne, des masses correspondant aux aires des différentes facettes.

Soit  $P$  un polyèdre convexe borné, et soient  $F_1, \dots, F_k$  ses  $k$  facettes.

$N_i, S_i$  désigneront respectivement la normale (orientée vers l'extérieur et de norme 1) à la facette  $F_i$  ainsi que son aire.

Pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  on définit  $U_i = S_i \cdot N_i$ .

Ces vecteurs vérifient l'équation :

$$\sum_{i=1}^k u_i = 0. \quad (1)$$

Le système de vecteurs  $(U_i)_{i=1, \dots, k}$  ainsi défini est appelé image gaussienne généralisée du polyèdre  $P$  et noté **E. G. I.**

La condition (1) exprime le fait que le centre de masse de l'image gaussienne généralisée est confondu avec l'origine.

Inversement cette représentation détermine de façon unique un polyèdre convexe borné.

Ce résultat est dû à Minkowski [7, 19, 22].

## 2. PROBLÈME DE RECONSTRUCTION

La reconstruction d'un polyèdre convexe à partir de son image gaussienne généralisée, consiste dans un premier temps à localiser toutes ses facettes, en d'autres termes à calculer les distances de ses dernières à l'origine.

Donc ayant pour information le système  $(N_i, S_i)_{i=1, \dots, k}$ , où

$N_i$  est un vecteur unitaire

$S_i$  est un nombre positif avec

$$\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0$$

on se propose d'évaluer la représentation surfacique du polyèdre  $P$ , dont chaque facette a pour normale le vecteur  $N_i$  et pour aire  $S_i$ .

*On aura besoin pour la suite des définitions et propriétés suivantes :*

- On appelle polyèdre convexe, toute intersection finie de demi-espaces.
- Un polytope est un polyèdre convexe borné.
- On appelle polyèdre convexe, toute intersection finie de demi-espaces.
- Une face d'un polytope  $P$  est l'intersection de  $P$  avec un hyperplan d'appui.

Soit  $P$  un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^d$ .

—  $P$  est dit non dégénéré si sa dimension est égale à celle de l'espace entier.

- On appelle  $k$ -face de  $P$  une face de  $P$  de dimension  $k$ .
- Il conviendra d'appeler facette, une face de dimension  $d - 1$ .
- Un sommet est une face de dimension 0.

— *Fonction support :*

Soit  $C$  un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^d$ .

Alors, on définit pour tout  $w \in \mathbb{R}^d$  la fonction support de  $C$  par :

$$H(w) = \sup_{x \in C} \langle x, w \rangle .$$

La fonction  $H(w)$  est positivement homogène et convexe ; ce qui signifie, pour tous  $\lambda, \mu \geq 0$  et tous  $x, y \in \mathbb{R}^d$  :  $H(\lambda x + \mu y) \leq \lambda H(x) + \mu H(y)$ .

Inversement, toute fonction convexe  $H$  positivement homogène est la fonction support d'un certain convexe  $C$ .

**THÉORÈME 1** (théorème de Minkowski [22]) : *Soient  $N_1, \dots, N_k$   $k$  vecteurs unitaires qui engendrent positivement l'espace  $\mathbb{R}^d$  et soient  $S_1, \dots, S_k$  des nombres positifs tels que :*

$$\sum_{i=1}^k S_i \cdot N_i = 0 .$$

*Alors il existe un polyèdre convexe fermé borné  $P$ , unique à une translation près, dont les facettes ont pour vecteurs normaux  $N_i$  et pour aires les  $S_i$ .*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du problème de Minkowski concernant les surfaces convexes fermées, et qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Soit  $K(n)$  une fonction définie sur  $\Omega$  la sphère unité, positive continue et vérifiant

$$\int_{\Omega} \frac{n}{K(n)} d\omega = 0$$

alors il existe une surface convexe, unique à une translation près, dont la courbure gaussienne en un point ayant pour normale  $n$  n'est autre que  $K(n)$ .

Dans le cas particulier d'un tétraèdre, où les relations d'adjacence sont connues d'avance, il est possible d'obtenir et de façon explicite les distances à l'origine des différentes facettes en fonction des normales à ces dernières ainsi que leurs aires (Horn [9]).

Dans le cas général, le problème de reconstruction devient plus difficile, puisque les relations d'adjacence liant les éléments du polyèdre  $P$  cherché sont inconnues et doivent faire partie de la solution.

On présente d'abord quelques résultats qui vont permettre d'introduire la méthode de reconstruction.

### Volume mixte

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  polytopes de  $\mathbb{R}^d$ , à  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  réels positifs on associe l'ensemble  $X = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ .

$X$  est un polytope et les sommets de  $X$  s'expriment comme combinaisons linéaires des sommets des  $X_i$ .

On peut exprimer le volume de  $X$  en fonction de  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  comme le montre le théorème suivant :

**THÉORÈME 2** (Eggleston [6]) : *Le volume de  $X$  est un polynôme homogène de degré  $d$  en  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$*

$$V(X) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_d=1}^n V(X_{i_1}, \dots, X_{i_d}) l_{i_1} \dots l_{i_d}. \quad (2)$$

*Les coefficients  $V(X_{i_1}, \dots, X_{i_d})$  sont invariants par permutation de leurs arguments.*

Les coefficients  $V(X_{i_1}, \dots, X_{i_d})$  sont appelés « volumes mixtes » de  $X$  et sont positifs.

**THÉORÈME 3** (théorème de Brunn-Minkowski) : *Soient  $K_0, K_1$  deux compacts de  $\mathbb{R}^d$ , à  $\lambda \in [0, 1]$  on associe l'ensemble*

$$K_\lambda = \lambda K_0 + (1 - \lambda) K_1 = \{ \lambda x_0 + (1 - \lambda) x_1 / x_0 \in K_0, x_1 \in K_1 \}.$$

*Alors la fonction*

$$\begin{aligned} [0, 1] &\mapsto \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto V_d(K_\lambda)^{1/d} \end{aligned}$$

*est concave, c'est-à-dire :*

$$V_d(K_\lambda)^{1/d} \geq \lambda V_d(K_0)^{1/d} + (1 - \lambda) V_d(K_1)^{1/d}. \quad (3)$$



On a égalité si et seulement si  $K_0$  et  $K_1$  sont de dimension  $d$  et homothétiques, ou se trouvent dans des hyperplans parallèles.

Considérons maintenant  $K_0, K_1$  deux convexes compacts de  $\mathbb{R}^d$ .

En utilisant le théorème de Brunn-Minkowski et la définition du volume mixte (2), on montre le résultat suivant ou **inégalité de Minkowski** :

$$V^d(K_0, \dots, K_0, K_1) \geq V^{d-1}(K_0) \cdot V(K_1). \quad (4)$$

L'égalité a lieu si et seulement si  $K_0$  et  $K_1$  sont homothétiques.

$V(K_0, \dots, K_0, K_1)$  désigne le volume mixte où  $K_0$  apparaît  $d - 1$  fois.

Comme conséquence directe de l'inégalité de Minkowski on a :

**COROLLAIRE :** *Le volume mixte  $V(K_0, \dots, K_0, K_1)$  est minimal si  $K_0$  et  $K_1$  sont homothétiques.*

« Parmi la classe des convexes  $K$ , dont le volume est égal à 1, celui qui réalise le minimum de  $V(K_0, \dots, K_0, K)$  est nécessairement homothétique à  $K_0$ . »

Le théorème qui suit fournit l'expression de  $V(K_0, \dots, K_0, K)$  dans le cas où  $K_0$  est un polytope de  $\mathbb{R}^d$  et  $K$  un convexe compact de  $\mathbb{R}^d$ .

**THÉORÈME 4 :** *Soit  $K$  un convexe de  $\mathbb{R}^d$ , et soit  $P$  un polytope dont les facettes  $F_i$  ont pour normales  $N_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Si  $H_k$  est la fonction support de  $K$ , alors :*

$$V(P, \dots, P, K) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k H_K(N_i) V_{d-1}(F_i). \quad (5)$$

Tout ce qui précède, nous permet maintenant d'introduire une méthode pratique, basée sur la minimisation du volume mixte pour reconstruire un polyèdre convexe à partir de la donnée de son E.G.I. Soit  $d$  la dimension de l'espace, et soit  $l = (l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{R}^k$ . On associe à  $l$  le polyèdre  $P(l)$  défini par :  $P(l) = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle N_i, x \rangle \leq l_i, i = 1, \dots, k\}$ . On note par  $V(l)$  le volume du polyèdre  $P(l)$ .  $l^*$  le vecteur des distances de l'origine aux facettes du polyèdre  $P$  cherché est celui qui réalise le minimum de la fonction  $\sum_{i=1}^k l_i S_i$ , qui n'est autre que le volume mixte de  $P(l)$  avec le polyèdre  $P$  (les  $S_i$  étant les aires des facettes de  $P$ ), sous la contrainte  $V(l) \geq 1$ . A notre connaissance, cette approche de reconstruction d'un polyèdre à partir de son E.G.I., par la résolution du problème

$$\text{Min} \sum_{i=1}^k l_i S_i$$

d'optimisation (P) :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{l}) &\geq 1 \\ \mathbf{l} &\geq 0 \end{aligned}$$

a été étudiée pour la première fois par (J. J. Little [14]).

**2.2. Propriétés géométriques et différentielles de la fonction V(I)**

(P1) V est positivement homogène

Soit r un réel positif et l ∈ ℝ<sup>k</sup> alors :

$$V(r \cdot l) = V_d(P(r \cdot l)) = V_d(r \cdot P(l)) = r^d V(l).$$

(P2) Continuité de V

La fonction V est continue sur l'ensemble {l ∈ ℝ<sup>k</sup> + / V(l) > 0} (cf. [28]).

(P3) La fonction V<sup>1/d</sup>(l) est concave sur ℝ<sup>k</sup><sub>+</sub>

Soient l<sub>1</sub>, l<sub>2</sub> ∈ ℝ<sup>k</sup><sub>+</sub> et soit λ ∈ [0, 1].

On a

$$\lambda P(l_1) + (1 - \lambda)P(l_2) \subset P(\lambda l_1 + (1 - \lambda) l_2).$$

Donc

$$V_d(\lambda P(l_1) + (1 - \lambda) P(l_2)) \leq V_d(P(\lambda l_1 + (1 - \lambda) l_2))$$

ou

$$V_d^{1/d}(\lambda P(l_1) + (1 - \lambda) P(l_2)) \leq V_d^{1/d}(P(\lambda l_1 + (1 - \lambda) l_2)).$$

Or d'après le théorème de Brunn-Minkowski (P(l<sub>1</sub>) et P(l<sub>2</sub>) étant non vides) :

$$V_d^{1/d}(\lambda P(l_1) + (1 - \lambda) P(l_2)) \geq \lambda V_d^{1/d}(P(l_1)) + (1 - \lambda) V_d^{1/d}(P(l_2))$$

ce qui montre la concavité de V<sup>1/d</sup>(l).

Il s'ensuit de manière directe que l'ensemble {l ∈ ℝ<sup>k</sup><sub>+</sub> / V(l) ≥ 1} est convexe.

$$V^{1/d}(\lambda l_1 + (1 - \lambda) l_2) \geq \lambda V^{1/d}(l_1) + (1 - \lambda) V^{1/d}(l_2).$$

L'égalité a lieu si l<sub>1</sub> = ml<sub>2</sub> avec m réel positif.

**2.3. Étude de la dérivabilité de V<sup>1/d</sup>(1)**

On définit sur ℝ<sup>k</sup> la fonction f de la manière suivante :

$$f(l) = \begin{cases} -V^{1/d}(l) & \text{si } l \in \mathbb{R}_+^k \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition

$$\text{dom } f = \{l \in \mathbb{R}^k / f(l) < \infty\} .$$

$f$  est convexe, propre et semi-continue inférieurement.

Il en découle, d'après un résultat classique (cf. Rockafellar [24]) que :  
 $f$  est deux fois presque partout différentiable, au sens d'Alexandroff, sur l'intérieur de  $\text{dom } f$ , autrement dit sur l'ensemble  $\{l \in \mathbb{R}_+^k / l_i > 0, i = 1, \dots, k\}$ .

La  $i$ -ième facette du polyèdre  $P(l)$  est définie par le système :

$$\begin{aligned} N_i \cdot x &= l_i \\ N_j \cdot x &\leq l_j \quad j \neq i . \end{aligned}$$

Notons par  $S_i(l)$  l'aire de la  $i$ -ième facette de  $P(l)$ .

PROPOSITION 1 (cf. [12]) : *Sous les hypothèses :*

- i)  $V(l) \neq 0$ ,
- ii)  $S_i(l) \neq 0 \quad i = 1, \dots, k$ .

Alors  $V(l)$  est différentiable en  $l$  et

$$\frac{\partial V}{\partial l_i}(l) = \frac{1}{|N_i|} S_i(l) .$$

*Remarque :* Au voisinage de la solution du problème ( $P$ ), où les facettes du polyèdre associé existent effectivement, la fonction  $V$  est différentiable.

#### Calcul d'un sous-gradient dans le cas non différentiable

Soit  $f$  une fonction convexe sur  $\mathbb{R}^k$ .  
 $y$  est dit sous-gradient de  $f$  en  $l_0$  si :

$$f(l) \geq f(l_0) + \langle l - l_0, y \rangle \text{ pour tout } l \in \mathbb{R}^k .$$

PROPOSITION 2 : Soit  $l_0 \in \mathbb{R}_+^k$ , et soit  $y^0 = -\frac{1}{d} S(l_0) V^{\frac{1-d}{d}}(l_0)$ , où  $S(l_0)$  est le vecteur des aires des facettes du polyèdre  $P(l_0)$ .

Alors, le vecteur  $y^0$  ainsi défini est un sous-gradient de  $f$  en  $l_0$ .

Preuve :

Cela revient à montrer que pour tout  $l \in \mathbb{R}_+^k$  on a :

$$\begin{aligned} -V^{1/d}(l) &\geq -V^{1/d}(l_0) + \langle l - l_0, y^0 \rangle \\ -V^{1/d}(l) &\geq -V^{1/d}(l_0) + \langle l, y^0 \rangle + \frac{1}{d} \langle S(l_0), l_0 \rangle V^{1-d/d}(l_0) \end{aligned}$$

or  $V(l_0) = \frac{1}{d} \langle S(l_0), l_0 \rangle$  donc, en remplaçant  $y^0$  par son expression, montrer que  $y^0$  est un sous-gradient de  $f$  en  $l_0$  est équivalent à montrer l'inégalité :

$$\frac{1}{d} \langle S(l_0), l \rangle \geq V^{1/d}(l) V^{d-1/d}(l_0)$$

qui n'est autre que l'inégalité de Minkowski (cf. (4)).

En effet, d'après le théorème 4 de ce chapitre, le terme de gauche de l'inégalité ci-dessus n'est autre que le volume mixte  $V(P(l_0), \dots, P(l_0), P(l))$ .

**2.4. Transformation du problème d'optimisation**

PROPOSITION 3 : *Considérons les deux problèmes d'optimisation :*

$$(1) : \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ g(x) = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2) : \begin{cases} \text{Max } g(x) \\ f(x) = 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

*Avec les hypothèses :*

$$f, g \text{ homogènes, pour } x \geq 0 \quad f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0 ;$$

*en plus*  $(x \geq 0 \quad f(x) = 0) \Leftrightarrow x = 0 .$

*Alors les programmes (1) et (2) sont équivalents.*

Pour la preuve (cf. [28]).

En appliquant ce qui précède aux fonctions :

$$f(x) = \langle x, S \rangle \quad \text{avec } S > 0 \quad \text{et} \quad g(x) = V(x)^{1/d},$$

on voit que le problème :

$$(P) : \begin{cases} \text{Min } \langle l, S \rangle \\ V(l) \geq 1 \\ l \geq 0 \end{cases}$$

est équivalent au problème  $(P')$  :

$$(P') : \begin{cases} \text{Max } V^{1/d}(l) \\ \langle l, S \rangle = 1 \\ l \geq 0. \end{cases}$$

On est donc en présence d'un problème d'optimisation convexe avec contraintes linéaires.

### 3. ÉTAPES DE RÉOLUTION

La résolution de façon efficace du problème ( $P'$ ), passe par l'utilisation d'une méthode adéquate d'optimisation et par le choix d'un algorithme performant pour le calcul du volume d'un polyèdre. On présentera deux schémas de reconstruction suivant que l'on traite le cas général ( $d$  quelconque) ou le cas particulier de la dimension trois, directement lié aux problèmes de vision artificielle.

#### 3.1. Expression du volume

Soit  $P$  un polytope non dégénéré.

Si  $F_1, \dots, F_k$  sont les facettes de  $P$  et  $d$  sa dimension, alors :

$$V_d(P) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k l_i V_{d-1}(F_i)$$

où  $l_i = H_P(N_i)$ ,  $N_i$  étant la normale à  $F_i$ .

#### 3.2. Notions de dualité

Soit  $P$  un polyèdre de  $\mathbb{R}^d$ , on définit son polaire et on le note  $P^0$  l'ensemble :

$$P^0 = \{y \in \mathbb{R}^d / \langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall x \in P\} .$$

A toute face  $F$  de  $P$ , on associe sa face duale  $F^\wedge$  définie par :

$$F^\wedge = \{y \in P^0 / \langle x, y \rangle = 1 \quad \forall x \in F\} .$$

Il existe une correspondance biunivoque inversant le sens de l'inclusion entre l'ensemble des faces de  $P$  et l'ensemble des faces de son polaire  $P^0$ .

On a les propriétés importantes suivantes :

- $P^0$  est un polytope et 0 est dans son intérieur.
- Soient  $P_1, P_2$  deux polytopes de  $\mathbb{R}^d$  tels que  $P_1 \subset P_2$  alors  $P_2^0 \subset P_1^0$ .
- $F^\wedge$  est une face de  $P^0$ .
- $P^{\circ \circ} = P$  et  $F^{\wedge \wedge} = F$ .
- Si  $d$  est la dimension de  $P$ , et  $F$  une face de  $P$  alors :

$$\dim F + \dim F^\wedge = d - 1 .$$

**3.3. Construction de P(l)**

$$P(l) = \{x \in \mathbb{R}^3 / \langle N_i, x \rangle \leq l_i \quad i = 1, \dots, k\} \quad (l_i > 0 \quad i = 1, \dots, k).$$

En normalisant les vecteurs  $N_i$ , c'est-à-dire en introduisant les vecteurs  $N'_i = \frac{1}{l_i} N_i$  on peut écrire

$$P(l) = \{x \in \mathbb{R}^3 / \langle N'_i, x \rangle \leq l_i \quad i = 1, \dots, k\}.$$

$P(l)$  est donc le polaire de l'ensemble  $D$ , où  $D$  est l'enveloppe convexe des  $N'_i$ .

$$D = \text{co} \{N'_1, \dots, N'_k\}.$$

On construit le polyèdre  $D$  (ses sommets, arêtes et faces) en utilisant l'algorithme beneath-beyond method (cf. [5]) pour le calcul de l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points en dimension trois.

On montrera ci-dessous comment à partir de la connaissance de la structure faciale de  $D$ , on peut construire son polaire  $P(l)$ .

Soient  $F_1, \dots, F_m$  les facettes de  $D$ , chaque facette est définie comme enveloppe convexe de ses sommets :

$$F_i = \text{co} \{y_1^i, \dots, y_{m_i}^i\}.$$

A chacune de ces facettes correspond un sommet du primal  $P(l)$ .

Plus précisément si  $g_i$  est un point de l'intérieur relatif de  $F_i$  on aura

$$F_i^\wedge = F_i^\wedge(P, g_i) = \{x \in P / \langle x, g_i \rangle = 1\} = \{x_i\} \quad \text{sommet de } P.$$

De même à chaque sommet  $y$  de  $D$  correspond et d'une façon unique une facette de  $P$  que l'on notera  $F(P, y)$ .

$$F(P, y) = \{x \in P / \langle x, y \rangle = 1\}.$$

Lorsque  $y$  parcourt tous les sommets de  $D$ ,  $F(P, y)$  décrit toutes les facettes de son dual  $P$ .

Pour la détermination explicite de tous les sommets de  $F(P, y)$  il nous suffit de connaître toutes les facettes de  $D$  contenant le sommet  $y$ .

On peut schématiser ceci de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} y & \leftrightarrow F(P, y) \\ \text{sommet de } D & \text{facette de } P \\ [F_1, \dots, F_p] & \leftrightarrow [x_1, \dots, x_p] \\ \text{facettes de } D \text{ contenant } y & \text{sommets de } F(P, y) : (F_i \dots x_i). \end{array}$$

On dispose de la liste des facettes du polyèdre  $D$ , c'est-à-dire de l'enveloppe convexe des vecteurs  $N'_i$ , ainsi que la liste de ses sommets.

Chaque sommet est donné par ses coordonnées ainsi que les facettes qui le contiennent.

On en déduit les composantes du polyèdre  $P$ .

\* Pour  $y$  sommet de  $D$ , sa face duale  $F$  a pour normale  $N_F = \frac{y}{\|y\|}$ .

\* A chaque facette  $F_i$  de  $D$  de normale  $N_i$  correspond le sommet  $X_i$  de  $P$  tel que :

$$X_i = \frac{N_i}{\langle N_i, S_i \rangle} \quad \text{où } S_i \text{ est un sommet de } F_i .$$

\* A chaque arête de  $D$  correspond une arête de  $P$ .

Soit  $E$  une arête de  $D$  donnée par ses deux sommets  $y_1$  et  $y_2$ .

Alors son arête duale  $E^\wedge$  est obtenue comme intersection de deux facettes  $F_1$  et  $F_2$  de  $P$ .

$$E^\wedge = F_1 \cap F_2 \quad \text{où } F_1 = F(P, y_1) \quad \text{et} \quad F_2 = F(P, y_2) .$$

La connaissance de la structure faciale de  $P(l)$ , nous permet d'avoir l'aire des différentes facettes connaissant la liste et les coordonnées de leurs sommets.

Le calcul du volume du polyèdre  $P(l)$  s'effectue alors de façon directe.

### 3.4. Algorithme pour le calcul du volume d'un polyèdre en dimension $d$

On présente ci-dessous un algorithme récursif dû à (J. B. Lasserre [12]) pour le calcul du volume d'un polyèdre défini par un système d'inégalités en dimension  $d$  ( $d \geq 2$ ).

Cet algorithme ne nécessite pas la connaissance des sommets du polyèdre ni son partitionnement en éléments simpliciaux.

En plus, il nous offre la possibilité d'avoir une expression analytique du volume d'un polyèdre en fonction de son second membre par utilisation d'outils de calcul formel.

Ceci peut être intéressant dans notre cas et permettrait d'économiser les calculs : dans notre problème d'optimisation seul le second membre  $l$  du polyèdre varie.

#### Notations et définitions

On considère le polyèdre convexe  $P(l)$  défini par le système d'inégalités :  $N \cdot x \leq l$ ,

où

$N$  est une matrice  $(m, d)$ ,  
 $l$  vecteur à  $m$  composantes,  
 $x$  vecteur à  $d$  composantes.

La  $i$ -ième facette du polyèdre est définie par le système :

$$\begin{aligned} \langle N_i, x \rangle &= l_i \\ \langle N_j, x \rangle &\leq l_j \quad j \neq i, \end{aligned}$$

où

$N_i$  est la  $i$ -ième ligne de la matrice  $N$ .  
 $l_i$  est la  $i$ -ième composante du vecteur  $l$ .

On notera  $V(d, N, l)$  le volume dans un espace de dimension  $d$  de  $P(l)$ ,

On notera  $V_i(d - 1, N, l)$  le volume en dimension  $d - 1$  de la facette  $i$  de  $P(l)$ .

Hypothèse :

On suppose qu'une contrainte n'apparaît qu'une fois dans la définition de  $P(l)$ .

On sait que :

$$V(d, N, l) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^m \frac{l_i}{\|N_i\|} V_i(d - 1, N, l).$$

C'est l'expression du volume du polyèdre à partir du volume de ses facettes.

Supposons  $N_{ik(i)} \neq 0$ , alors en considérant l'équation  $\langle N_i, x \rangle = l_i$ , on peut éliminer  $x_{k(i)}$  et on obtient le système d'inégalités :

$$\sum_{k \neq k(i)} \left( N_{jk} - \frac{N_{jk(i)}}{N_{ik(i)}} N_{ik} \right) x_k \leq l_j - \frac{N_{jk(i)}}{N_{ik(i)}} l_i \quad j = 1, \dots, m \quad j \neq i \quad (6)$$

qui définit un polyèdre convexe dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ .

Le système ci-dessus peut s'écrire :  $N(i) \cdot x \leq l(i)$ ,

où

$N(i)$  est la matrice  $(m - 1, d - 1)$  des contraintes

$l(i)$  le second membre.

On notera  $V(d - 1, N(i), l(i))$  le volume du polyèdre ainsi défini.

On a la propriété suivante :

$$V_i(d - 1, N, l) = \frac{\|N_i\|}{|N_{ik(i)}|} V(d - 1, N(i), l(i)).$$



Donc le volume s'écrit :

$$V(d, N, l) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^m \frac{l_i}{|N_{ik(i)}|} V(d-1, N(i), l(i)) \quad (7)$$

où  $N_{ik(i)}$  est le coefficient dans l'équation  $\langle N_i, x \rangle = l_i$  de la variable que l'on élimine pour définir la projection de la facette  $i$ .

Si  $N_{ij} = 0$  pour tout  $j$ , alors si  $l_i < 0$   $P(l)$  est vide et  $V(d, N, l) = 0$ , si  $l_i \geq 0$  on a une contrainte redondante et la facette  $i$  n'existe pas.

A l'aide de l'écriture (7) on peut exprimer de façon récursive le volume d'un polyèdre défini par un système d'inégalités dans un espace de dimension  $d$ , à l'aide de volumes de polyèdres définis par des systèmes d'inégalités dans un espace de dimension  $d-1$ .

En réutilisant (7) pour chaque  $V(d-1, N(i), l(i))$  et en répétant l'opération, on obtient  $V(d, N, l)$  à partir de volumes de polyèdres dans  $\mathbb{R}^c$  c'est-à-dire à partir de volumes d'intervalles triviaux à calculer.

Cet algorithme est très simple à implémenter. Néanmoins, les calculs croissent de façon exponentielle avec la dimension de l'espace. Dans notre cas où la dimension  $d = 3$  l'algorithme est efficace.

### 3.5. Choix des méthodes numériques d'optimisation

On a vu au travers des paragraphes précédents que la reconstruction d'un polyèdre à partir de son image gaussienne généralisée, se ramène à la résolution d'un problème d'optimisation ( $P'$ ), où il s'agit de maximiser une fonction concave sous contraintes linéaires.

Les algorithmes d'optimisation sont en général basés sur un procédé itératif, où il s'agit de construire une suite de points  $l^1, \dots, l^k$  qui, on l'espère, converge vers la solution.

Pour la résolution de ( $P'$ ), et vu les propriétés que possède la fonction  $V$  (dérivabilité au voisinage de l'optimum, calcul d'un sous-gradient dans le cas non différentiable), nous avons utilisé, dans un premier lieu, la méthode du gradient réduit (cf. [20, 27]) qui est une méthode du premier ordre. Après implémentation de la méthode, on remarque que la convergence devient lente à l'approche de l'optimum, d'où l'idée d'utiliser des techniques d'accélération de convergence.

Après un certain nombre de tests, nous avons opté pour une méthode de diagonalisation.

Ces tests d'accélération de convergence n'ont pas été probants. On a pu pour un certain nombre d'exemples améliorer la vitesse de convergence, sans toutefois atteindre l'efficacité espérée.

D'où l'idée d'utiliser une méthode d'optimisation du second ordre, en l'occurrence la méthode de Newton. Dans ce but on donne dans le

paragraphe suivant un moyen pour le calcul du Hessien (lorsqu'il existe) de  $V(l)$ . Ce calcul se fera suivant que l'on utilise l'un ou l'autre des algorithmes pour le calcul de  $V$ .

**3.6. Calcul du Hessien de  $V$**

La fonction  $V(l)$  est deux fois presque partout différentiable.

On se propose dans ce qui suit de donner l'expression des dérivées secondes partielles de  $V$ .

Dans le cas général où  $V(l) = V_d(P(l))$  avec  $d \geq 3$ , on va donner, à travers l'utilisation de l'algorithme de Lasserre un moyen pour le calcul du Hessien de  $V$ . Le polyèdre  $P(l)$  étant considéré sous sa forme analytique ( $N \cdot x \leq l$ ).

Dans le cas tridimensionnel, où le calcul du volume du polyèdre passe par la construction de ce dernier, un raisonnement géométrique direct permet le calcul du Hessien de  $V$ .

**a) Cas général**

Soit  $i \in \{1, \dots, m\}$  ; on a en vertu de la proposition 1

$$\frac{\partial V}{\partial l_i}(d, N, l) = \frac{1}{\|N_i\|} V_i(d-1, N, l)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_i}(d, N, l) = \frac{1}{|N_{ik(i)}|} V(d-1, N(i), l(i)),$$

où  $V(d-1, N(i), l(i))$  désigne le volume en dimension  $d-1$  du polyèdre.  $N(i) \cdot x \leq l(i)$  défini explicitement par :

$$\sum_{k \neq k(i)} \left( N_{jk} - \frac{N_{jk(i)}}{N_{ik(i)}} N_{ik} \right) x_k \leq l_j - \frac{N_{jk(i)}}{N_{ik(i)}} l_i \quad j = 1, \dots, m \quad j \neq i.$$

Pour le calcul de la dérivée seconde il suffit de connaître la dérivée de la fonction :

$$l \rightarrow V(d-1, N(i), l(i)).$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial l_j \partial l_i} = \frac{1}{|N_{ik(i)}|} \frac{\partial}{\partial l_j} V(d-1, N(i), l(i)).$$

$$\frac{\partial}{\partial l_j} V(d-1, N(i), l) = \left\langle \nabla V(d-1, N(i), l(i)), \frac{\partial l(i)}{\partial l_j} \right\rangle,$$

où

$$l(i) = \left( l_k - \frac{N_{kk(i)}}{N_{ik(i)}} l_i \right)_{k=1, \dots, m \quad k \neq i}$$

On dispose, par utilisation de l'algorithme récursif et sans calcul supplémentaire du vecteur  $\nabla V(d-1, N(i), l(i))$ .

**b) Cas de la dimension 3**

$$\frac{\partial^2 V}{\partial l_i \partial l_i} = \frac{1}{\|N_i\|} \frac{\partial S_i}{\partial l_j} \quad \text{où } S_i \text{ est l'aire de la facette } F_i .$$

Pour  $j \neq i$  et à une variation  $dl_j$  de  $l = (l_1, \dots, l_m)$  dans la direction de la normale  $N_j$ , il correspond un déplacement  $\frac{dl_j}{\|N_j\|^2} N_j$  et une variation  $dS_i$  de l'aire de  $F_i$  égale à  $dS_i = h_j S_{ij}$  où  $S_{ij}$  est la longueur de l'arête  $F_{ij}$  intersection de  $F_i$  et de  $F_j$ , et  $h_j$  le déplacement dans  $F_i$  de  $F_{ij}$ .

Si  $\alpha$  est l'angle entre  $h_j$  et  $N_j$  on a :

$$\frac{dl_j}{\|N_j\|} = h_j \cdot \sin \alpha = h_j \left( 1 - \frac{\langle N_i, N_j \rangle}{\|N_i\| \|N_j\|} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Il s'ensuit finalement que :

$$\text{Pour } j \neq i \quad \frac{\partial^2 V}{\partial l_j \partial l_i} = \frac{S_{ij}}{\|N_i\| \|N_j\|} \left( 1 - \frac{\langle N_i, N_j \rangle^2}{\|N_i\|^2 \|N_j\|^2} \right)^{\frac{-1}{2}} .$$

Pour le calcul du terme diagonal on utilise l'homogénéité de la fonction  $V(l)$  (formule d'Euler) :

$$V(l) = \frac{1}{3} \sum_j l_j \frac{\partial V}{\partial l_j}(l) .$$

donc

$$l_i \frac{\partial V}{\partial l_i}(l) = 3 \cdot V(l) - \sum_{j \neq i} l_j \frac{\partial V}{\partial l_j}(l) .$$

En dérivant les deux membres par rapport à  $l_i$ , on trouve :

$$\frac{\partial V}{\partial l_i}(l) + l_i \frac{\partial^2 V}{\partial l_i^2}(l) = 3 \frac{\partial V}{\partial l_i}(l) - \sum_{j \neq i} l_j \frac{\partial^2 V}{\partial l_i \partial l_j}(l)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial l_i^2}(l) = \frac{l}{l_i} \left[ 2 \frac{\partial V}{\partial l_i}(l) - \sum_{j \neq i} l_j \frac{\partial^2 V}{\partial l_i \partial l_j}(l) \right] .$$

*Remarque :*

Dans le cas où  $V$  n'est pas deux fois différentiable les deux expressions a) et b) seront considérées.

### 3.7. Principe de la méthode de Newton

On résout le problème d'optimisation ( $P$ ) moyennant le schéma itératif :  $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$  où la direction de déplacement  $d^k = \bar{x}^k - x^k$ .

$\bar{x}^k$  est solution du problème d'optimisation quadratique :

$$\begin{aligned} \text{Max } \langle \nabla V(x_k), (x - x^k) \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 V(x_k) \cdot (x - x^k), (x - x^k) \rangle \\ (P_k) \quad \langle S, x \rangle = 1 \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

( $P_k$ ) admet une solution si  $\nabla^2 V(x_k)$  est définie négative.

Le pas  $t_k$  est le résultat d'une recherche linéaire dans la direction  $d^k$ , sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Comme test d'arrêt  $\|d^k\| < \varepsilon$ .

Dans des conditions de convergence bien connues (cf. [21]) la méthode de Newton est soit superlinéaire soit quadratique.

En pratique, on a choisi la direction  $d^k$  comme solution du programme quadratique ( $P'_k$ )

$$\begin{aligned} (P'_k) \quad \text{Max } \langle \nabla f(x_k), d \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 V(x_k) \cdot d, d \rangle \\ \langle S, \cdot d \rangle = 0. \end{aligned}$$

Les contraintes de positivité n'interviennent que lors de la recherche du pas de déplacement.

( $P'_k$ ) est résolu de façon efficace par utilisation de la méthode du gradient conjugué [21].

On recherche  $t_k$  sur l'intervalle  $[0, t_{\max}]$  où  $t_{\max} = \min \left\{ \frac{x_j}{d_j} : d_j < 0 \right\}$ .

Pour le calcul du pas  $t_k$  on peut utiliser des méthodes de recherche linéaire dites « recherche économique » qui permettent de donner une bonne approximation de l'optimum avec un nombre limité d'évaluations de la fonction. Nous avons opté pour la méthode de Wolfe (cf. [20]).

L'utilisation de la méthode de Wolfe est motivée par le fait qu'on dispose du gradient en même temps que la fonction  $V$  et sans calculs supplémentaires.

## 4. ALGORITHME DE RECONSTRUCTION

### Schéma 1

Données : les normales  $N_i$   $i = 1, \dots, k$ ; les aires  $S_i$   $i = 1, \dots, k$

avec 
$$\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0$$

(1) on résout :

$$(P') : \begin{cases} \text{Max } V(l) \\ \langle l, S \rangle = 1 \\ l \geq 0 \end{cases}$$

par la méthode du gradient réduit ou Newton. Soit  $l^*$  sa solution.

A chaque itération  $k$  du processus d'optimisation  $V(l^k)$  est calculé en utilisant l'algorithme de calcul du volume (cf. § 3.4). On n'a pas à construire  $P(l^k)$ .

(2) Construction de  $P(l^*)$  :

a) On transforme les vecteurs normaux :

$$N'_i = \frac{1}{l_i} \cdot N_i \quad i = 1, \dots, k.$$

b) On calcule le polytope dual  $D = \text{co} \{N'_1, \dots, N'_k\}$  : utilisation de l'algorithme point par point (cf. § 3.3).

c) Passage par dualité et construction du polytope  $P(l^*)$  cherché :  $P(l^*) = D^0$ .

### Schéma 2

Le schéma ci-dessus est modifié si le calcul de  $V(l)$  se fait *via* la construction de  $P(l)$ , c'est-à-dire la connaissance de sa topologie et les coordonnées de ses sommets.

L'étape 2 du schéma précédant intervient alors à chaque appel de la fonction  $V$ .

A chaque itération principale  $k$  du programme d'optimisation, l'appel de la fonction  $V$  intervient une fois pour le calcul de la direction  $d^k$  et plusieurs fois dans la recherche linéaire pour le calcul du pas de déplacement. Dans ce dernier schéma, on peut voir évoluer au cours des itérations, la topologie du polyèdre, ce qui pourrait inspirer une méthode interactive de reconstruction.

## 5. EXPÉRIMENTATIONS NUMÉRIQUES

Au cours des tests effectués, à l'aide de l'algorithme qui met en œuvre l'algorithme de reconstruction on a constaté :

1) La méthode est très sensible à la réalisation de la condition  $\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0$  (\*).

Lorsque le calcul des normales  $N_i$  et des aires  $S_i$  est entaché d'erreurs, la condition (\*) n'est pas forcément réalisée. Dans ce cas la convergence de l'algorithme d'optimisation n'est plus assurée. Pour remédier à cela, on peut envisager de régulariser les données avant d'entamer le processus de reconstruction :

Soit  $N$  la matrice des normales, et soit  $\hat{S}$  le vecteur des aires des différentes facettes. On cherche  $S$  proche de  $\hat{S}$  et qui vérifie  $\sum_{i=1}^k S_i N_i = 0$ .

$S$  peut être calculé comme solution du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \text{Min } & \frac{1}{2} \|S - \hat{S}\|^2 \\ & N^t \cdot S = 0 \\ & S > 0 \end{aligned}$$

ou de façon équivalente, comme solution du problème de régularisation :

$$\begin{aligned} \text{Min } & \frac{1}{2} \|N^t \cdot S\|^2 + \frac{1}{2} \|S - \hat{S}\|^2 \\ & S > 0. \end{aligned}$$

De même, des erreurs dans le calcul du volume influent sur la vitesse de convergence.

2) La topologie du polyèdre se stabilise après un certain nombre d'itérations.

Cette propriété peut être exploitée afin de rendre l'algorithme suffisamment efficace :

On suppose qu'à partir d'un rang  $k_0$  la topologie de  $P(l^k)$  est la même pour  $k \geq k_0$ .

Connaissant le type combinatoire du polyèdre  $P(l^k)$  ainsi que les normales  $N_i$ , il est possible (cf. [28]) d'exprimer l'aire des différentes facettes comme fonction explicite de  $l$ , ce qui évitera de passer par la construction effective, dans le schéma 2, du polyèdre  $P(l^k)$  à chaque itération et contribuera à économiser les calculs.

3) L'existence de petites faces ralentit de façon notable la vitesse de convergence de l'algorithme.

4) Le choix de l'algorithme de Lasserre pour le calcul du volume d'un polyèdre a été motivé par deux raisons :

— La facilité d'implémentation.

— Il offre la possibilité d'obtenir le volume de  $P(l)$  comme une forme analytique (une formule) en fonction de  $l$ , par utilisation d'outils du calcul formel.

5) Lors de la mise en œuvre des algorithmes intervenant dans cette méthode, on rencontre un certain nombre de problèmes propres à l'algorithme géométrique, tels l'apparition d'arêtes de longueur faible ou de faces d'aire petite. Ce qui rend l'implémentation assez délicate : il faut d'une part que la représentation de la topologie soit adaptée aux différentes étapes de l'algorithme, d'autre part des tolérances doivent être définies aux niveaux des composantes du polyèdre.

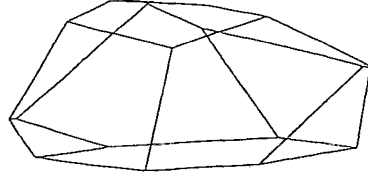
**Exemple 1 : Polyèdre à 25 faces**  
**Convergence après 11 itérations**

**Polyèdre de départ :**

```

16 15 14 13
18 17 16 13 12
14 15 9
15 16 17 19 20 10 9
8 11 12 13 14 9 10 7
5 20 19 6
4 7 10 20 5
3 8 7 4
2 11 8 3
1 2 3 4 5 6
6 19 17 18 1
18 12 11 2 1

```



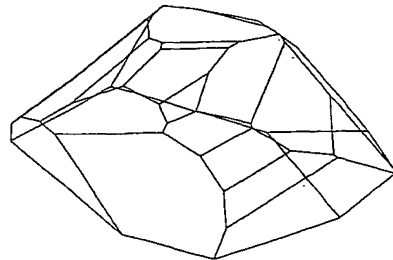
*(Adjacence : Faces comme listes de leurs sommets)*

**Polyèdre à la 4<sup>e</sup> itération :**

```

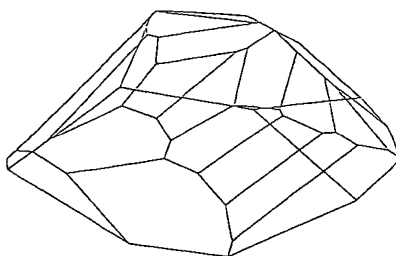
36 37 34
41 42 32 30 29
40 41 29 28
30 32 33 31 27
38 39 40 28 26 25
35 36 34 23 22
26 28 29 30 27 21
27 31 43 35 22 21
25 26 21 22 23 24 20 19
38 25 19 18
20 24 17 16
18 19 20 16 15
44 39 38 18 15 14 13
14 15 16 17 12
7 8 9 10 11
11 13 14 12 7
12 17 24 23 34 37 8 7
33 32 42 6 5
4 43 31 33 5
3 9 8 37 36 35 43 4
2 10 9 3
1 2 3 4 5 6
6 42 41 40 39 44 1
1 44 13 11 10 2

```



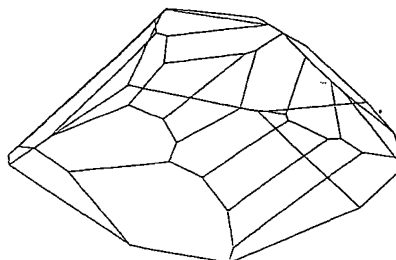
**Polyèdre à la 7<sup>e</sup> itération :**

32 34 33 30  
 42 43 31 29 26  
 41 42 28 27  
 29 31 32 30 26  
 39 40 41 27 25 24  
 36 37 35 22  
 22 23 24 25 21  
 25 27 28 29 26 21  
 26 30 33 44 36 22 21  
 39 24 23 20 19  
 20 23 22 35 38 18 17  
 19 20 17 16  
 16 17 18 15 14  
 45 40 39 19 16 14 13  
 38 35 37 12 11  
 15 18 38 11 10  
 13 14 15 10 9  
 7 8 9 10 11 12  
 34 32 31 43 6 5  
 4 44 33 34 5  
 3 7 12 37 36 44 4  
 2 8 7 3  
 1 2 3 4 5 6  
 6 43 42 41 40 45 1  
 1 45 13 9 8 2

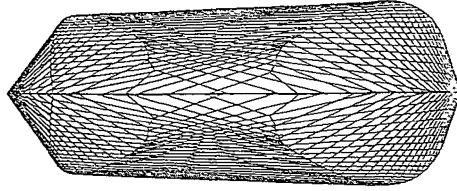


**Polyèdre final (après 11 itérations)**

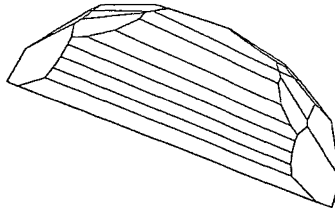
37 38 35 36  
 32 34 33 30  
 29 28 43 44 31  
 43 28 27 42  
 29 31 32 30 26  
 25 24 40 41 42 27  
 22 23 24 25 21  
 21 25 27 28 29 26  
 22 21 26 30 33 45 37 36  
 20 19 40 24 23  
 35 39 18 17 20 23 22 36  
 19 20 17 16  
 15 14 16 17 18  
 19 16 14 13 46 41 40  
 12 11 39 35 38  
 15 18 39 11 10  
 9 13 14 15 10  
 7 8 9 10 11 12  
 34 32 31 44 6 5  
 5 4 45 33 34  
 4 3 7 12 38 37 45  
 3 2 8 7  
 1 2 3 4 5 6  
 44 43 42 41 46 1 6  
 8 2 1 46 13 9







**Polyèdre ayant 200 faces et 393 sommets et présentant une bonne symétrie. Obtenu après 9 itérations.**



**Polyèdre à 23 faces et 42 sommets, obtenu en choisissant des normales inscrites sur une partie d'ellipse et en y ajoutant des normales qui correspondent à des coupes par des demi espaces. Convergence après 10 itérations. Le même exemple, mais en choisissant deux faces petites par rapport aux autres et en ne prenant aucune précaution pour le choix du point de départ, converge après 45 itérations.**

## CONCLUSION

Nous avons réalisé un travail, allant de la modélisation à l'implémentation, concernant un problème actuel qui intervient dans le domaine de vision 3D, dont des applications sont abordées dans l'introduction.

Les outils mathématiques nécessaires sont introduits et développés.

Ce travail complète celui de J. J. Little qui utilise une méthode du premier ordre. Les simulations numériques montrent que la méthode du second ordre est de loin la plus rapide.

Sur un grand nombre de tests, on remarque que la topologie du polyèdre se stabilise après un petit nombre d'itérations. L'exploitation de cette propriété nous a permis de réduire le volume des calculs. De même l'utilisation du calcul formel pour le calcul du volume d'un polyèdre, nous paraît un moyen intéressant dans le sens d'améliorer les performances de l'algorithme.

L'E.G.I. peut être un moyen très souple pour la création d'objets intéressants, et il est envisagé d'incorporer cette méthode de reconstruction dans un système de sculpture par ordinateur.

## RÉFÉRENCES

- [1] M. BERGER, *Géométrie volume 3, convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes*, Nathan, Paris, 1978.
- [2] P. BROUX, Using the Gaussian image to find the orientation of objects, *Int. J. Robotics Res.*, vol. 3, n° 4, 1984.
- [3] D. R. CHAND and S. S. KAPUR, An algorithm for convex polytopes, *JACM*, vol. 17, n° 1, January 1970, pp. 78-86.
- [4] M. P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [5] H. EDELSBRUNNER, Algorithms in combinatorial geometry, *EATCS Monogr. Theoret. Comput. Sci.*, vol. 10, Springer Verlag, 1987.
- [6] H. G. EGGLESTON, *Convexity*, Cambridge University Press, 1958.
- [7] B. GRÜNBAUM, *Convex Polytopes*, John Wiley and Sons Ltd, London and New York, 1967.
- [8] D. HILBERT and S. COHN-VOSSEN, *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing company, New York, .
- [9] B. K. P. HORN, Extended Gaussian images, *Proceeding of IEEE*, pp. 1671-1686, December 1984.
- [10] B. K. P. HORN and K. I. IKEUCHI, The Mechanical manipulation of randomly oriented parts, *Scientific American*, August 1984.
- [11] K. I. IKEUCHI, Recognition of 3D objects using the extended Gaussian image, *Proceedings of the seventh I.J.C.A.I.*, pp. 595-600, 1981.
- [12] J. B. LASSERRE, An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyedron in  $\mathbb{R}^n$ , *J.O.T.A.*, vol. 39, n° 3, March 1983.
- [13] J. LEMORDANT, Pham. Dinh. TAO and H. ZOUAKI, Reconstitution d'un polyèdre à partir de son image gaussienne généralisée, *Journée de géométrie algorithmique*, INRIA Sophia-Antipolis, 18-20 juin 1990.
- [14] J. J. LITTLE, An iterative method for reconstructing convex polyedra from extended Gaussian image, *Proceedings of A.A.A.I.* 83, pp. 247-250, 1983.
- [15] J. J. LITTLE, *Recovering shape and determining attitude from extended Gaussian images*, Technical report TN 85-2, April 1985. University of British Columbia, Vancouver.
- [16] D. G. LUENBERGER, *Introduction to linear and non linear programming*, Addison-Wesley, 1973.
- [17] L. A. LYUSTERNIK, *Convex figures and polyedra*, Dover publications, New York, 1963.
- [18] P. McMULLEN and G. C. SHEPARD, *Convex polytopes and the upper bound conjecture*, Cambridge University Press, 1971.
- [19] H. MINKOWSKI, Volumen und oberfläch, *Math. Ann.*, 57, 1903.
- [20] M. MINOUX, *Programmation mathématiques, tome I*, Dunod, Paris, 1983.
- [21] B. PCHENITCHNY and Y. DANILINE, *Méthodes numériques dans les problèmes d'extremum*, Mir, 1977.

- [22] A. V. POGORELOV, *The Minkowski multidimensional problem*, Winston and Sons, 1978.
- [23] F. P. PREPARATA and S. J. HONG, Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions, *C.A.C.M.*, vol. 20, pp. 87-93, 1977.
- [24] R. T. ROCKAFELLAR, *The theory of subgradients and its applications to problems of optimization. Convex and nonconvex functions*, Heldermann Verlag, Berlin.
- [25] S. USELTON, Surface reconstruction from limited information, *U.M.I. Dissertation information service*, 1981.
- [26] K. WEILER, Edge-based data structure for solid modelling in curved surface environments, *IEEE Computer Graphics and Applications*, January, 1985, pp. 21-24.
- [27] P. FAURE and P. HUARD, Résolution de programmes mathématiques avec la méthode du gradient réduit, *R.F.R.O.*, n° 36, 1965, pp. 167-206.
- [28] H. ZOUAKI, *Modélisation et optimisation numérique pour la reconstruction d'un polyèdre à partir de son image gaussienne généralisée*, Thèse de l'université Joseph Fourier, juillet 1991.