

C. ATAMIAN

P. JOLY

**Une analyse de la méthode des domaines fictifs
pour le problème de Helmholtz extérieur**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome
27, n° 3 (1993), p. 251-288

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_3_251_0

© AFCET, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



UNE ANALYSE DE LA MÉTHODE DES DOMAINES FICTIFS POUR LE PROBLÈME DE HELMHOLTZ EXTÉRIEUR (*)

par C. ATAMIAN ⁽¹⁾ et P. JOLY ⁽²⁾

Communiqué par R. GLOWINSKI

Résumé. — La méthode des domaines fictifs a été conçue pour la résolution d'équations aux dérivées partielles dans un domaine extérieur. Elle consiste à prolonger l'équation à l'intérieur de l'obstacle en remplaçant celui-ci par un second membre, à support contenu dans l'obstacle, qui devient un contrôle que l'on cherche à ajuster pour satisfaire la condition aux limites. Nous appliquons cette approche à un problème de diffraction d'une onde harmonique. Le problème est formulé sous la forme d'un problème de contrôle avec contraintes que nous analysons par le biais de la théorie des multiplicateurs de Lagrange. Un lien avec la théorie classique du potentiel est établi. Nous montrons ensuite la convergence d'une méthode de pénalisation-régularisation du problème que nous illustrons numériquement.

Abstract. — The fictitious domain method has been conceived in order to solve partial differential equations in exterior domains. It consists in extending the equation in the interior domain by replacing the obstacle by a right hand side, with support contained in the interior domain, which becomes a control that we try to adjust in order to satisfy the boundary condition. We apply this approach to a diffraction problem for a harmonic wave. The problem is formulated as an optimal control problem that we analyse with the help of the Lagrange multiplier's theory. A link with the classical potential theory is established. We then show the convergence of a regularisation-penalisation method that we illustrate numerically.

1. INTRODUCTION. POSITION DU PROBLÈME

Les méthodes de domaines fictifs ont été introduites il y a maintenant une vingtaine d'années dans la littérature soviétique (cf. [Ast1] [Ast2], [FK], [MKM]) et américaine (cf. [BDGG], [BW], [OW], [PW1], [PW2]) ; une brève discussion de leurs principes peut être trouvée dans [At]. Ici, nous allons analyser l'approche que nous avons proposée et étudiée en détail dans [At] ; cet article est en fait la publication d'une partie de ce travail.

(*) Reçu en juillet 1991, révisé en février 1992.

⁽¹⁾ Dassault Aviation, 78 Quai Marcel Dassault, 92210 St Cloud, France.

⁽²⁾ INRIA, Domaine de Voluceau-Rocquencour, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France.

Notre méthode peut être considérée comme une méthode générale pour résoudre une équation ou un système d'équations aux dérivées partielles dans un domaine extérieur, c'est-à-dire dans un domaine Ω_e de \mathbb{R}^n qui est le complémentaire d'un obstacle $\bar{\Omega}_i$, où Ω_i est un ouvert borné de \mathbb{R}^n . L'idée consiste à substituer à la présence de l'obstacle un second membre, l'équation initiale étant prolongée à tout \mathbb{R}^n et le second membre additionnel ayant son support inclus dans $\bar{\Omega}_i$. Ce terme devient alors un contrôle que l'on cherche à ajuster de façon à ce que la (ou les) condition(s) aux limites initialement prescrite(s) sur la frontière Γ de l'obstacle soit (soient) satisfaite(s). Le nouveau problème est alors en général formulé sous la forme d'un problème de moindres carrés. Numériquement, les avantages et les inconvénients d'une telle approche sont, au moins intuitivement, clairs :

- En se ramenant à la résolution de problèmes dans tout l'espace on s'affranchit de tous les problèmes de géométrie et de maillage. Mieux, dans les cas simples, on dispose d'une solution analytique pour le problème dans tout l'espace, auquel cas les seules approximations portent sur la convergence de l'algorithme de minimisation utilisé pour résoudre le problème de moindres carrés.

- Comme on ne peut espérer trouver du premier coup sur le bon contrôle et il faut itérer pour obtenir une solution satisfaisante. On remplace la résolution d'un problème « compliqué » (car posé dans le domaine extérieur Ω_e) par celles de plusieurs problèmes « simples » (car posés dans tout l'espace).

Notre but est d'examiner ce que donne une approche par domaines fictifs d'un problème de diffraction d'une onde acoustique par un obstacle. Ce problème se ramène mathématiquement, lorsque l'on s'intéresse au régime harmonique de pulsation $\omega > 0$, à la résolution d'un problème extérieur pour l'équation de Helmholtz (cf. [Ben], [Ned], [W]).

Considérons par exemple, ce sera notre problème modèle, la condition de Dirichlet homogène sur Γ ($U(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, est une fonction scalaire) :

$$U|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Nous cherchons une solution de l'équation des ondes (de vitesse 1) dans le domaine Ω_e :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0, \quad (2)$$

sous la forme (nous considérons ici des solutions à valeurs complexes) :

$$U(x, t) = u^{\text{inc}}(x) e^{-i\omega t} + u(x) e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

où :

- $u^{inc}(x) e^{-i\omega t}$ est l'onde harmonique incidente : elle est la restriction à Ω_e d'une solution dans tout l'espace ;
- $u(x) e^{-i\omega t}$ est le champ harmonique diffracté.

Physiquement le champ diffracté s'interprète comme la perturbation de l'onde incidente due à la présence de l'obstacle Ω_i .

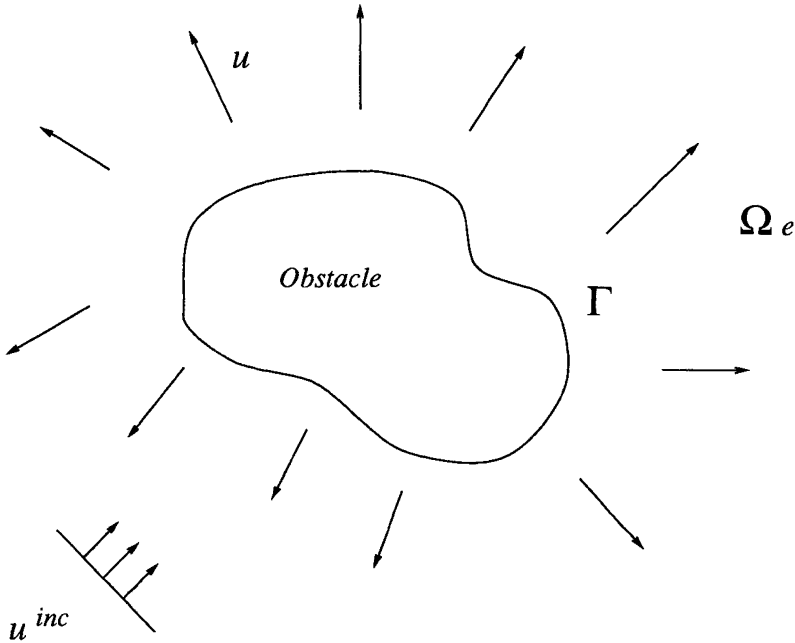


Figure 1. — Diffraction par un obstacle.

Mathématiquement, la fonction $u(x)$ est caractérisée comme étant la solution du système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ u = g & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u = 0 \left(r^{\frac{1-n}{2}} \right) & r \rightarrow +\infty \text{ (C.R.)} . \end{array} \right. \quad (4)$$

La condition à l'infini (C.R.) porte le nom de condition de radiation de Sommerfeld (cf. [So]) : elle exprime le fait que l'on s'intéresse à la solution physique. C'est une condition d'onde sortante à l'infini, compte tenu du fait que nous cherchons des solutions dont la dépendance temporelle est en $e^{-i\omega t}$.

La condition sur Γ est non homogène. Elle exprime que l'onde diffractée est réémise à partir du bord Γ . Le second membre g est calculé à partir de l'onde incidente :

$$g = -u^{\text{inc}}|_{\Gamma}. \quad (5)$$

La condition de Dirichlet homogène initiale (1) est alors satisfaite par le champ total U .

La théorie du problème (4) est bien connue. Pour des raisons purement techniques, nous ferons dans toute la suite les hypothèses suivantes :

- la frontière Γ est de classe C^∞ .
- n (dimension d'espace) = 2 ou 3.

Le lecteur se rendra compte que la plupart de nos résultats restent vrais sous des conditions moins restrictives sur la régularité de Γ .

Énonçons le résultat d'existence et d'unicité relatif à (4) qui nous sera utile pour la suite (cf. [Ned], [R], [W]).

THÉORÈME 1.1 : *Pour tout $g \in H^{3/2}(\Gamma)$, le problème (4) admet une unique solution $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega_e)$.*

Nous pouvons maintenant décrire notre méthode de domaines fictifs spécialisée à l'équation de Helmholtz. Précisons tout d'abord l'espace V dans lequel nous ferons varier notre contrôle :

$$V = L^2(\Omega_i). \quad (6)$$

Par abus de notation nous confondrons dans toute la suite l'espace V avec le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^n)$ des fonctions à support dans Ω_i , et toute fonction v de V à son prolongement par 0 dans Ω_e en une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Conformément aux principes énoncés plus haut, nous désirons remplacer la résolution du problème extérieur (4) par celle d'un problème du type :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} - \omega^2 \tilde{u} = v & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - i\omega \tilde{u} = 0 \left(r^{\frac{1-n}{2}} \right) & r \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (7)$$

Pour le problème (7), le pendant du théorème 1.1 est le suivant :

THÉORÈME 1.2 : *Pour tout v dans V , le problème (7) admet une solution et une seule, \tilde{u} , dans $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$. Cette solution est donnée par :*

$$\tilde{u}(x) = \int_{\Omega_i} G(\omega, x-y) v(y) dy, \quad (8)$$

où $G(\omega, x)$ désigne la fonction de Green (ou solution élémentaire) sortante de l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} G(\omega, x) &= \frac{e^{i\omega|x|}}{4\pi|x|} & \text{si } n = 3, \\ G(\omega, x) &= H_0^{(1)}(\omega|x|) & \text{si } n = 2, \end{aligned}$$

où $H_0^{(1)}$ est la première fonction de Hankel d'ordre 0 (cf. [AS], [O]).

Compte tenu de la simplicité de (7) (cf. formule (8)) toute la difficulté du problème est reportée sur la détermination d'un « bon » contrôle v . Ce contrôle doit assurer que, en résolvant (7) on « résout » également (4), c'est-à-dire que :

$$\tilde{u}|_{\Omega_e} = u. \quad (9)$$

Posé tel quel le problème reste entier puisque l'on ne connaît pas u . Mais comme v est à support dans Ω_i , \tilde{u} est solution de l'équation de Helmholtz homogène dans Ω_e avec condition de radiation sortante à l'infini. Compte tenu du résultat d'unicité énoncé au théorème 1 il suffit (et c'est aussi nécessaire) d'assurer que $\tilde{u}|_{\Gamma} = g$, ce qui devient raisonnable puisque g , en tant que donnée du problème, est à notre disposition. Le problème de contrôle à résoudre est maintenant clair : pour un contrôle donné v dans V , observons la trace de la solution \tilde{u} , comparons-la à g et cherchons à ajuster v pour que ces deux fonctions coïncident sur Γ . Ce problème peut s'énoncer sous les deux formes suivantes :

(1) Trouver $v \in V$ tel que $\tilde{u}|_{\Gamma} = g$.

(2) Trouver $v \in V$ qui minimise l'erreur : $E(v) = \int_{\Gamma} |\tilde{u} - g|^2 d\sigma$.

(Rappelons que \tilde{u} est entièrement déterminée à partir de v).

Pour être plus précis sur le plan mathématique, nous devons maintenant introduire le formalisme abstrait de notre problème.

Introduisons tout d'abord l'opérateur A :

$$\begin{cases} A : V \rightarrow H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \\ v \rightarrow \tilde{u} \text{ (solution de (7))} \end{cases} \quad (10)$$

A est linéaire et continu au sens où, pour tout ouvert borné Ω , il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que :

$$\forall v \in V \quad \|Av\|_{2, \Omega} \leq C \|v\|_{0, \Omega},$$

où $\|\cdot\|_{m, \Omega}$ désigne la norme usuelle de $H^m(\Omega)$. Si nous désignons par γ_0 l'opérateur de trace usuel sur Γ , rappelons que γ_0 applique continûment

$H^m(\Omega_i)$ dans $H^{m-1/2}(\Gamma)$ pour $m > \frac{1}{2}$ (cf. [LM], [Nec]). Introduisons alors l'opérateur :

$$L = \gamma_0 \circ A. \quad (11)$$

Il vérifie :

$$L \in \mathcal{L}(V, H^{3/2}(\Gamma)).$$

Avec ces notations, l'énoncé (1) de notre problème se traduit par :

(1)' Trouver $v \in V$ tel que $Lv = g$ dans $H^{3/2}(\Gamma)$.

alors que l'énoncé (2) est équivalent à :

(2)' Trouver $v \in V$ tel que $E(v) \leq E(w) \forall w \in V$, où $E(w) = |Lw - g|_{0, \Gamma}^2$ ($|\cdot|_{0, \Gamma}$ norme dans $L^2(\Gamma)$).

Nous le verrons plus loin, les problèmes (1)' et (2)' sont équivalents mais, indépendamment de ce fait aucun de ces problèmes n'est bien posé au sens où chacun admet une infinité de solutions. Ce fait correspond aux deux assertions mathématiques suivantes :

(i) L'opérateur L n'est pas injectif.

(ii) La fonctionnelle E n'est pas coercive.

(i) rend (1)' « mal posé » alors que (ii) rend (2)' « mal posé ». L'intuition fait comprendre ce phénomène. En effet on essaie d'ajuster la condition aux limites sur la frontière à l'aide d'une fonction variant dans tout le domaine intérieur délimité par cette frontière. Il y a « trop d'information » dans v pour contrôler \tilde{u} sur Γ : le problème est sous-déterminé. Ceci devient encore plus clair si on pense à la version discrète de notre problème qui permet de raisonner en dimension finie. Pensons à un maillage type éléments finis du domaine intérieur Ω_i et désignons par N le nombre total de nœuds du maillage et par $N_f < N$ le nombre de nœuds situés sur la frontière. Il est bien entendu naturel d'assurer un degré de liberté par nœud au contrôle v et un degré de liberté par nœud frontière à la donnée g . La version discrète du problème (1)' équivaut à chercher à résoudre un système linéaire rectangulaire de N_f équations à N inconnues alors que la version discrète du problème (2)' revient à chercher à minimiser une fonctionnelle quadratique convexe mais non définie positive. Il est clair que l'on aboutit dans chaque cas à un problème « mal posé », situation qui se prolonge au problème continu. Avant de décrire brièvement la façon que nous avons choisie pour contourner cette difficulté, faisons deux remarques :

Remarque 1.1 : Nous verrons que l'opérateur L , s'il n'est pas injectif, est surjectif dans $H^{3/2}(\Gamma)$. C'est ce qui rend les problèmes (1)' et (2)' équivalents puisque $Lv = g$ équivaut à $E(v) = 0$.

Remarque 1.2 : Le problème extérieur (4) reste bien posé, mais dans $H_{\text{loc}}^1(\Omega_e)$ cette fois, si on suppose seulement que g appartient à $H^{1/2}(\Gamma)$. Pour conserver le caractère surjectif de l'opérateur L il faut alors élargir l'espace V des contrôles. Ceci nous conduit à travailler dans $V = H^{-1}(\Omega_i)$. Ce n'est pas gênant sur le plan théorique si ce n'est techniquement. C'est plus délicat et coûteux sur le plan numérique, car travailler numériquement dans un espace de type $H^{-1}(\Omega_i)$ suppose la résolution de problèmes auxiliaires.

Nous allons appliquer à (1)' (ou (2)') une technique classique, notamment pour la résolution des systèmes linéaires sous-déterminés, qui consiste, parmi toutes les solutions du problème, à rechercher la solution de norme minimale. On est alors ramené à un problème de contrôle optimal ou encore de minimisation sous contraintes :

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } v \in V \text{ tel que :} \\ Lv & = g \\ J(v) & \leq J(w) \quad \forall w \in \{w \in V / Lw = g\} \\ J(w) & = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |w|^2 dx = \frac{1}{2} \|w\|_{0, \Omega_i}^2. \end{cases} \quad (12)$$

Notons que nous avons affaire à une contrainte de type égalité. Il y a deux approches classiques pour aborder ce type de problèmes :

- Approche par multiplicateur de Lagrange et théorie de la dualité (cf. [Fa], [Lu]).
- Approche par régularisation-pénalisation (cf. [Ce], [Ci], [TA]).

Ce sont ces deux approches que nous étudierons d'un point de vue théorique. Cette étude aura essentiellement pour but de donner une légitimité mathématique à la méthode des domaines fictifs. Notre objectif n'est pas ici de répondre à la question : cette méthode est-elle compétitive vis-à-vis d'autres méthodes classiques de résolution de l'équation de Helmholtz ? Pour cela, nous renvoyons le lecteur à la thèse de C. Atamian [At].

L'organisation du reste de l'article est la suivante. Dans la section 2 nous plaçons notre problème de contrôle optimal dans le cadre fonctionnel adapté et démontrons l'existence et l'unicité de la solution. Dans la section 3, nous étudions une caractérisation de cette solution à l'aide de l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange. Nous montrons que l'écriture des conditions d'optimalité mène à la résolution d'une équation intégrale, nouvelle à notre connaissance, que nous comparons à celle issue de la théorie du potentiel. La section 4 est consacrée à l'approche du problème par pénalisation de la contrainte. En particulier nous étudierons mathématiquement l'influence du paramètre de pénalisation. Enfin nous présentons dans la section 5 des résultats numériques obtenus à l'aide de cette dernière méthode.

2. PROPRIÉTÉS DU PROBLÈME DE CONTRÔLE (P)

Démontrons d'abord les propriétés de l'opérateur L annoncées en section 1 :

LEMME 2.1 :

- (i) L opérateur L est surjectif de V dans $H^{3/2}(\Gamma)$.
- (ii) $\text{Ker}(L)$ est isomorphe à $H_0^2(\Omega_1)$.

Démonstration :

- (i) Surjectivité de L .

Soit g dans $H^{3/2}(\Gamma)$ et u dans $H_{\text{loc}}^2(\Omega_e)$ la solution unique du problème (4). La frontière Γ étant régulière, l'ouvert Ω_e possède la propriété de H^2 -prolongement (cf. [Ad], [Ag], [Br]). Il existe donc une fonction \tilde{u} dans $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ dont la restriction à Ω_e est égale à u . Posons alors $v = -\Delta\tilde{u} - \omega^2\tilde{u}$ (que nous confondons avec sa restriction à Ω_1), il est immédiat de vérifier que :

$$\begin{cases} v \in V \\ Lv = g. \end{cases}$$

- (ii) Caractérisation du noyau de L

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} -(\Delta + \omega^2) : H_0^2(\Omega_1) &\rightarrow V \\ u &\rightarrow v = -\Delta u - \omega^2 u. \end{aligned}$$

1) Vérifions que l'image de cette application est le noyau L .

a) Montrons que $u \in H_0^2(\Omega_1) \Rightarrow -\Delta u - \omega^2 u \in \text{Ker}(L)$.

En effet si nous désignons par \tilde{u} le prolongement de u à \mathbb{R}^n par 0 dans Ω_e , comme u est dans $H_0^2(\Omega_1)$, \tilde{u} appartient à $H^2(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs :

$$-\Delta\tilde{u} - \omega^2\tilde{u} = v, \tag{13}$$

et \tilde{u} vérifie bien entendu la condition de radiation (C.R.) puisque \tilde{u} est identiquement nulle dans Ω_e . Grâce au résultat d'unicité du théorème 1.2 nous avons :

$$\tilde{u} = Av.$$

Par conséquent par définition de $L = \gamma_0 \circ A$, il vient :

$$Lv = \gamma_0 \circ \tilde{u} = \gamma_0 \circ u = 0 \quad (u \in H_0^2(\Omega_1)),$$

ce qui montre que $v \in \text{Ker}(L)$.

b) Montrons que $v \in \text{Ker}(L) \Rightarrow \exists u \in H_0^2(\Omega_i) / v = -\Delta u - \omega^2 u$.

En effet soit v dans $\text{Ker}(L)$ et soit $\tilde{u} = Av$, nous avons en particulier :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u} - \omega^2 \tilde{u} = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ (car } Lv = 0) \\ \tilde{u} \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) & \end{array} \right. \quad (14)$$

\tilde{u} vérifie la condition de radiation sortante .

En vertu du théorème d'unicité, nous en déduisons que $\tilde{u}|_{\Omega_e}$ est identiquement nul. Mais comme \tilde{u} est dans $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ nous en déduisons :

$$\tilde{u}|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = 0 .$$

Par conséquent, en désignant par u la restriction de \tilde{u} à Ω_i nous avons démontré que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^2(\Omega_i) \\ v = -\Delta u - \omega^2 u \text{ (par définition de } A) . \end{array} \right.$$

2) Il reste à vérifier que $-\Delta - \omega^2$ réalise une bijection entre $H_0^2(\Omega_i)$ et $\text{Ker}(L)$. Il suffit de montrer que $-\Delta - \omega^2$ est injective sur $H_0^2(\Omega_i)$. Or cela est évident car :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (15)$$

entraîne $u = 0$ dans Ω_i , d'après un résultat de prolongement unique (cf. [H], [RS]).

Remarque 2.1 : Rappelons que la surjectivité de L correspond à l'existence d'un « bon contrôle » alors que sa non-injectivité entraîne l'existence d'une infinité de ces bons contrôles.

Remarque 2.2 : Si $L^{-1}(g) = \{v / Lv = g\}$, pour $g \in H^{3/2}(\Gamma)$, $L^{-1}(g)$ n'est autre qu'un sous-espace affine fermé de dimension infinie de V , parallèle au sous-espace vectoriel fermé $\text{Ker}(L)$.

Étant donné g dans $H^{3/2}(\Gamma)$, nous sélectionnons la solution de norme minimale en résolvant le problème :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in L^{-1}(g) \text{ tel que :} \\ J(v) \leq J(w) \quad \forall w \in L^{-1}(g) \\ J(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{0, \Omega_i}^2 \end{array} \right. \quad (16)$$

$L^{-1}(g)$ étant un sous-espace affine fermé de V , nous avons immédiatement :

THÉORÈME 2.1 : *Pour tout g dans $H^{3/2}(\Gamma)$, le problème de contrôle optimal (P) admet une unique solution v dans V qui est la projection orthogonale de l'origine sur l'espace affine $L^{-1}(g)$.*

3. APPROCHE PAR MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE DU PROBLÈME (P)

Cette section s'organise comme suit. Au paragraphe 3.1 nous menons les calculs formels qui aboutissent aux conditions d'optimalité associées au problème (P) . Nous définissons un cadre mathématique et fonctionnel rigoureux au paragraphe 3.2. Nous montrons l'existence et l'unicité du multiplicateur de Lagrange que nous calculons en inversant un opérateur intégral autoadjoint K de type Hilbert-Schmidt (Théorème 3.1 et Lemme 3.2). Le paragraphe 3.3 est consacré à l'obtention des résultats techniques qui seront utilisés dans la section 4 pour l'analyse de la méthode de pénalisation. Ces résultats caractérisent les espaces de Sobolev $H^s(\Gamma)$ à l'aide de éléments propres de l'opérateur K . Enfin, au paragraphe 3.4, nous établissons un parallèle intéressant entre la théorie du potentiel et notre approche.

3.1. Justification formelle

Il nous a paru instructif, avant d'énoncer les théorèmes, de mener les calculs formellement. Nous omettons donc ici volontairement de préciser les espaces fonctionnels dans lesquels nous opérons. Toutefois il est important de préciser que nous munissons \mathbb{C} de sa structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} et du produit scalaire (dans tout ce qui suit \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué de z) :

$$(z, z') = \Re(z\bar{z}') \quad (17)$$

de telle sorte que tous les espaces de Hilbert que nous considérerons dans la suite, l'espace $L^2(\Omega)$ en particulier, seront des espaces de Hilbert réels. Notons également que l'on a la propriété :

$$\forall (z, z', \lambda) \in \mathbb{C}^3 \quad (\lambda z, z') = (z, \bar{\lambda} z') \quad (18)$$

ce qui éclairera les calculs qui vont suivre. Introduisons le lagrangien :

$$\mathcal{L}(w, \mu) = \frac{1}{2} \|w\|_{0, \Omega_i}^2 - \int_{\Gamma} ((Lw - g)(x), \mu(x)) d\sigma(x), \quad (19)$$

où le multiplicateur de Lagrange μ est a priori une fonction définie sur Γ . Les conditions d'optimalité, formelles, s'obtiennent en écrivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(v, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}(v, \lambda) = 0. \end{cases}$$

La première équation nous redonne bien entendu :

$$Lv = g ,$$

ce que, grâce au théorème 1.2, nous pouvons réécrire :

$$g(x) = \int_{\Omega_i} G(\omega, x - y) v(y) dy \text{ p.p. } x \in \Gamma . \quad (20)$$

La deuxième équation équivaut à :

$$\int_{\Omega_i} (v(y), w(y)) dy - \int_{\Gamma} (Lw(x), \lambda(x)) d\sigma(x) = 0 \quad \forall w \in V . \quad (21)$$

Comme $Lw(x) = \int_{\Omega_i} (G(\omega, x - y)) w(y) dy$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (Lw(x), \lambda(x)) d\sigma(x) &= \int_{\Gamma} \int_{\Omega_i} (G(\omega, x - y) w(y), \lambda(x)) d\sigma(x) dy \\ &= \int_{\Omega_i} \left(w(y), \int_{\Gamma} \bar{G}(\omega, x - y) \lambda(x) d\sigma(x) \right) dy . \end{aligned}$$

En reportant dans (21), nous obtenons la deuxième condition d'optimalité qui s'écrit :

$$v(y) = \int_{\Gamma} \bar{G}(\omega, x - y) \lambda(x) d\sigma(x) \text{ p.p. } y \in \Omega_i . \quad (22)$$

Il reste maintenant à établir rigoureusement la validité des équations (20) et (22). Toutefois, ces équations appellent d'ores et déjà quelques commentaires :

- L'égalité (22) prouve que pour trouver le contrôle de norme minimale, il faut le chercher sous la forme d'un potentiel de simple couche. Cela signifie en particulier que ce contrôle vérifiera l'équation de Helmholtz dans Ω_i . Il sera donc plus régulier qu'on ne le cherche a priori puisque de classe C^∞ dans l'ouvert Ω_i .

- Nous pouvons éliminer v entre les équations (20) et (22). Ceci nous mène à l'équation intégrale en λ :

$$\int_{\Gamma} F(\omega, x, \xi) \lambda(\xi) d\sigma(\xi) = g(x) \text{ p.p. } x \in \Gamma , \quad (23)$$

où le noyau $F(\omega, x, \xi)$ est défini par :

$$F(\omega, x, \xi) = \int_{\Omega_i} G(\omega, x - y) \bar{G}(\omega, \xi - y) dy . \quad (24)$$

Nous verrons plus loin que l'équation intégrale (23) admet une solution unique. Par conséquent ce processus nous conduit à remplacer l'équation intégrale sous-déterminée (20) dont l'inconnue v est définie dans tout Ω_i , par une équation intégrale bien posée (23) dont l'inconnue λ est simplement définie sur Γ .

- Notons que une fois v trouvé, la solution u du problème est donnée par :

$$u(x) = \int_{\Omega_i} G(\omega, x - y) v(y) dy, \quad (25)$$

c'est-à-dire en fonction de λ par :

$$u(x) = \int_{\Omega_i} \int_{\Gamma} G(\omega, x - y) \bar{G}(\omega, \xi - y) \lambda(\xi) d\sigma(\xi) dy,$$

ce que nous pouvons encore écrire sous la forme :

$$u(x) = \int_{\Gamma} F(\omega, x, \xi) \lambda(\xi) d\sigma(\xi). \quad (26)$$

3.2. Existence, unicité et caractérisation du multiplicateur de Lagrange

Le problème est rendu particulièrement simple par le caractère quadratique de la fonctionnelle à minimiser. La seule difficulté réside dans la vérification de l'hypothèse de qualification de la contrainte. Ceci nécessite, en dimension infinie, de trouver le bon espace pour le multiplicateur. Nous avons choisi ici de faire une démonstration directe de l'existence et l'unicité du multiplicateur. Toutefois les résultats que nous allons établir peuvent se démontrer en utilisant les références classiques en contrôle optimal (cf. [Li]).

Notons tout d'abord que la solution unique v du problème (P) est caractérisée par :

$$\|v\|_{0, \Omega_i}^2 \leq \|v + w\|_{0, \Omega_i}^2 \quad \forall w \in \text{Ker}(L),$$

ce qui équivaut à :

$$(v, w)_{0, \Omega_i} = 0 \quad \forall w \in \text{Ker}(L),$$

où encore à :

$$v \in (\text{Ker}(L))^\perp.$$

Autrement dit v est caractérisé par :

$$v \in (\text{Ker}(L))^\perp \cap L^{-1}(g).$$

Introduisons maintenant l'opérateur adjoint de L :

$$L^* : H^{-3/2}(\Gamma) \rightarrow V ,$$

défini par :

$$\forall (\mu, w) \in H^{-3/2}(\Gamma) \times V \quad (L^* \mu, w)_{0, \Omega_i} = \langle Lw, \mu \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} ,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma}$ désigne le produit de dualité entre les espaces $H^{3/2}(\Gamma)$ et $H^{-3/2}(\Gamma)$.

Résumons les propriétés de l'opérateur L^* dans le lemme suivant :

LEMME 3.1 : (i) L^* est linéaire continu de $H^{-3/2}(\Gamma)$ dans V .

(ii) (Lien avec la partie formelle 3.1). Pour μ dans $L^2(\Gamma)$, on a simplement :

$$(L^* \mu)(x) = \int_{\Gamma} \bar{G}(\omega, \xi - x) \mu(\xi) d\sigma(\xi) \quad p.p. \quad x \in \Omega_i , \quad (27)$$

et $q = L^* \mu$ se caractérise comme la restriction à Ω_i de l'unique solution entrante (à cause de la condition à l'infini) $q \in H_{loc}^{3/2}(\Omega_i \cup \Omega_e)$ du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta q - \omega^2 q = 0 & \text{dans } \Omega_i \cup \Omega_e \\ [q] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \left[\frac{\partial q}{\partial n} \right] = \mu & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial q}{\partial r} + i\omega q = o\left(r^{\frac{1-n}{2}}\right) & r \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (28)$$

où $[q]$ représente le saut de q à travers Γ et $\left[\frac{\partial q}{\partial n} \right]$ le saut de sa dérivée normale.

(iii) L'opérateur L^* est injectif et $(\text{Ker}(L))^{\perp} = \text{Im}(L^*)$.

Démonstration : Le point (i) est immédiat. Pour (ii), notons que si $\mu \in L^2(\Gamma)$ on a pour tout w dans V :

$$\begin{aligned} \langle Lw, \mu \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} &= \int_{\Gamma} Lw(x) \cdot \mu(x) d\sigma(x) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Omega_i} G(\omega, x-y) w(y) \cdot \mu(x) dy d\sigma(x) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Omega_i} \bar{G}(\omega, x-y) \mu(x) \cdot w(y) dy d\sigma(x) . \end{aligned}$$

Le résultat est alors une conséquence du théorème de Fubini. Pour la caractérisation (28) de la fonction $q = L^* \mu$, nous renvoyons le lecteur aux références classiques de la théorie du potentiel (cf. [DL], [Ned], [R]).

Le point (iii) est une conséquence de la surjectivité de L . D'après Brezis [Br] :

$$\begin{aligned} L \text{ linéaire continu} &\Rightarrow \text{Ker } (L) = (\text{Im } (L^*))^\perp \\ L \text{ surjectif} &\Leftrightarrow L^* \text{ injectif et Im } (L^*) \text{ fermé .} \end{aligned}$$

Une conséquence directe de ce lemme est :

THÉORÈME 3.1 :

(i) v désignant l'unique solution du problème (P), il existe un unique élément λ dans $H^{-3/2}(\Gamma)$ (c'est le multiplicateur de Lagrange) tel que :

$$v = L^* \lambda .$$

(ii) Réciproquement, si λ désigne l'unique solution dans $H^{-3/2}(\Gamma)$ de l'équation :

$$(LL^*) \lambda = g , \tag{29}$$

alors la solution v de (P) est donnée par :

$$v = L^* \lambda .$$

Démonstration : (i) Sachant que $v \in (\text{Ker } (L))^\perp$, l'existence d'au moins un multiplicateur λ vérifiant $L^* \lambda = v$ vient de l'égalité $(\text{Ker } (L))^\perp = \text{Im } (L^*)$ établie au point (iii) du lemme 3.1 alors que l'unicité de λ se déduit de l'injectivité de L^* .

(ii) Si $v = L^* \lambda$, l'égalité $Lv = g$ entraîne $LL^* \lambda = g$. Cette dernière équation admet bien une solution unique puisque :

$$\begin{aligned} LL^* \mu = 0 &\Rightarrow \langle LL^* \mu, \mu \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} = 0 \\ &\Rightarrow \|L^* \mu\|_{0, \Omega_i} = 0 \\ (\text{injectivité de } L^*) &\Rightarrow \mu = 0 . \end{aligned}$$

Remarque 3.1 : Les deux égalités $v = L^* \lambda$ et $Lv = g$ ne sont autres que les écritures abstraites des deux conditions d'optimalité formelles établies à la sous-section 3.1 et l'équation $LL^* \lambda = g$ n'est autre que l'équation intégrale (23).

Le théorème 3.1 montre que l'opérateur :

$$K = LL^* : H^{-3/2}(\Gamma) \rightarrow H^{3/2}(\Gamma) ,$$

joue un rôle important. Nous résumons l'ensemble des propriétés de cet opérateur :

LEMME 3.2 : (i) K est un isomorphisme de $H^{-3/2}(\Gamma)$ dans $H^{3/2}(\Gamma)$, symétrique et positif.

(ii) Pour tout $s \geq -\frac{3}{2}$, K réalise un isomorphisme de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+3}(\Gamma)$.

(iii) (Lien avec les calculs formels). Lorsque μ est dans $L^2(\Gamma)$, $K\mu$ est défini par :

$$K\mu(x) = \int_{\Gamma} F(\omega, x, \xi) \mu(\xi) d\xi \quad p.p. \quad x \in \Gamma, \quad (30)$$

où $F(\omega, x, \xi)$, donné par la formule (24), appartient à $L^2(\Gamma \times \Gamma)$. $K\mu$ est encore défini par :

$$K\mu = u|_{\Gamma}, \quad (31)$$

où u est l'unique solution sortante de :

$$-\Delta u - \omega^2 u = q|_{\Omega}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n,$$

q étant l'unique solution rentrante du problème (28).

(iv) Considéré comme opérateur sur $L^2(\Gamma)$, K est un opérateur autoadjoint positif compact de type Hilbert-Schmidt. Il existe donc une base orthonormée $\{e_n, n = 1, 2, \dots\}$ de $L^2(\Gamma)$ telle que :

$$Ke_n = \lambda_n e_n,$$

où la suite $\lambda_n, n \geq 0$ des valeurs propres de K satisfait :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 \leq +\infty \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots > 0. \end{cases}$$

Démonstration : (i) Notons que pour tout couple (μ, ν) de $H^{-3/2}(\Gamma)^2$ nous avons :

$$\langle K\mu, \nu \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} = (L^* \mu, L^* \nu)_{0, \Omega}, \quad (32)$$

ce qui prouve que l'opérateur K est symétrique et positif.

L'égalité $\langle K\mu, \mu \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} = \|L^* \mu\|_{0, \Omega}^2$ établit l'injectivité de K comme conséquence de celle de L^* alors que le point (ii) du théorème 3.1 démontre la surjectivité de K .

(ii) Vérifions tout d'abord que K envoie $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+3}(\Gamma)$ pour tout $s \geq -\frac{3}{2}$, c'est-à-dire que l'opérateur K est trois fois régularisant. Il nous

suffit d'établir ce résultat pour $s = m - \frac{3}{2}$ où $m \in \mathbb{N}^*$, puis de raisonner par interpolation (cf. [LM]). Nous savons déjà (voir la section 1) que l'opérateur A applique continûment $L^2(\Omega_i)$ dans $H^2(\Omega_i)$. Nous allons étendre cette propriété. Soit $v \in H^1(\Omega_i)$, nous avons :

$$Av(x) = \int_{\Omega_i} G(\omega, x - y) v(y) dy. \quad (33)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (Av)(x) &= \int_{\Omega_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}(\omega, x - y) v(y) dy \\ &= - \int_{\Omega_i} G(\omega, x - y) \frac{\partial v}{\partial x_j}(y) dy + \\ &+ \int_{\Gamma} G(\omega, x - y) v(y) n_j(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Cette identité peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (Av) = -A \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + \overline{L^*(vn_j)}. \quad (34)$$

Mais, d'après les propriétés classiques de l'opérateur de simple couche L^* , il est bien connu que (cf. [R] par exemple) :

$$L^* \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma), H^{s+3/2}(\Omega_i)). \quad (35)$$

Par conséquent, si v est dans $H^1(\Omega_i)$ nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^2(\Omega_i) \Rightarrow A \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \in H^2(\Omega_i) \\ \overline{vn_j} \in H^{1/2}(\Gamma) \Rightarrow \overline{L^*(vn_j)} \in H^2(\Omega_i). \end{cases}$$

Nous en déduisons que $\frac{\partial(Av)}{\partial x_j} \in H^2(\Omega_i)$ et donc que A envoie $H^1(\Omega_i)$ dans $H^3(\Omega_i)$. Par récurrence, il est clair que A envoie continûment $H^m(\Omega_i)$ dans $H^{m+2}(\Omega_i)$. Grâce au théorème de trace, L envoie continûment $H^m(\Omega_i)$ dans $H^{m+3/2}(\Gamma)$ pour tout entier $m \geq 0$.

Soit alors $m \geq 1$, nous savons que L^* envoie $H^{m-3/2}(\Gamma)$ dans $H^m(\Omega_i)$ et que L envoie $H^m(\Omega_i)$ dans $H^{m+3/2}(\Gamma)$ donc par composition K envoie continûment $H^{m-3/2}(\Gamma)$ dans $H^{m+3/2}(\Gamma)$, ce que nous voulions démontrer.

Soit ν un élément quelconque de $H^{s+3}(\Gamma)$, $s \geq -\frac{3}{2}$, alors ν est en particulier dans $H^{3/2}(\Gamma)$. Or, d'après le point (i) nous savons qu'il existe μ dans $H^{-3/2}(\Gamma)$ tel que $\nu = K\mu$. Pour démontrer que K est un isomorphisme entre $H^s(\Gamma)$ et $H^{s+3}(\Gamma)$ il va nous suffire d'établir que :

$$K\mu \in H^{s+3}(\Gamma) \Rightarrow \mu \in H^s(\Gamma).$$

Pour cela, nous allons utiliser le fait que le passage de μ à $K\mu$ s'effectue par la chaîne :

$$\mu \rightarrow q \rightarrow u \rightarrow K\mu = u|_{\Gamma}, \quad (36)$$

où q et u sont les solutions respectives de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta q - \omega^2 q = 0 & \text{dans } \Omega_e \cup \Omega_i \\ [q] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \left[\frac{\partial q}{\partial n} \right] = \mu & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial q}{\partial r} + i\omega q = o\left(r^{\frac{1-n}{2}}\right) & r \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (37)$$

et de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - \omega^2 u = q|_{\Omega_i} & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u = o\left(r^{\frac{1-n}{2}}\right) & r \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (38)$$

et nous allons établir la chaîne d'implications :

$$K\mu \in H^{s+3}(\Gamma) \Rightarrow u \in H^{s+7/2}(\Omega_i) \Rightarrow q \in H^{s+3/2}(\Omega_i) \Rightarrow \mu \in H^s(\Gamma).$$

Notons que, quitte à conclure par interpolation, nous pouvons supposer s assez grand.

a) Montrons que :

$$K\mu \in H^{s+3}(\Gamma) \Rightarrow u \in H^{s+7/2}(\Omega_i). \quad (39)$$

De (36) et (38) nous déduisons que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ u|_{\partial\Omega_e} = K\mu & \in H^{s+3}(\Gamma). \end{array} \right. \quad (40)$$

Par les résultats standards sur les problèmes elliptiques (cf. [DL], [LM]) nous en déduisons :

$$u|_{\Omega_e} \in H_{\text{loc}}^{s+7/2}(\Omega_e). \quad (41)$$

Mais comme $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, en tant que solution de (38), nous avons :

$$[u] = \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0. \tag{42}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_i} \in H^{s+3}(\Gamma) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega_i} \in H^{s+2}(\Gamma) \\ u \in H^2(\Omega_i). \end{array} \right. \tag{43}$$

Maintenant nous remarquons que comme $-\Delta q - \omega^2 q = 0$ dans Ω_i , nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta^2 u = 2\omega^2 \Delta u + \omega^4 u \text{ dans } \Omega_i \\ u|_{\partial\Omega_i} \in H^{s+3}(\Gamma) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega_i} \in H^{s+2}(\Gamma). \end{array} \right. \tag{44}$$

Nous utilisons un résultat de régularité classique relatif au bilaplacien (cf. [LM]) :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta^2 u \in H^m(\Omega_i) \\ u|_{\partial\Omega_i} \in H^{s+3}(\Gamma) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega_i} \in H^{s+2}(\Gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow u \in H^k(\Omega_i), \quad k = \inf \left(m + 4, s + \frac{7}{2} \right). \tag{45}$$

En appliquant de façon itérative le résultat (45) à (44), nous déduisons que :

$$u \in H^{s+7/2}(\Omega_i). \tag{46}$$

b) L'implication :

$$u \in H^{s+7/2}(\Omega_i) \Rightarrow q = \Delta u + \omega^2 u \in H^{s+3/2}(\Omega_i), \tag{47}$$

est évidente.

c) Il reste à montrer que :

$$q \in H^{s+3/2}(\Omega_i) \Rightarrow \mu \varepsilon H^s(\Gamma). \tag{48}$$

Nous supposons que $s \geq 0$. Le théorème de traces nous dit que :

$$q \in H^{s+3/2}(\Omega_i) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q|_{\partial\Omega_i} \in H^{s+1}(\Gamma) \\ \left(\frac{\partial q}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega_i} \in H^s(\Gamma). \end{array} \right. \tag{49}$$

Comme $[q] = 0$, $q|_{\partial\Omega_e} \in H^{s+1}(\Gamma)$ et donc dans le domaine Ω_e , q vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta q - \omega^2 q = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ q|_{\partial\Omega_e} \in H^{s+1}(\Gamma). \end{cases} \tag{50}$$

Par les résultats de régularité elliptique, il vient :

$$q \in H_{\text{loc}}^{s+3/2}(\Omega_e), \tag{51}$$

et par le théorème de traces :

$$\left(\frac{\partial q}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega_e} \in H^s(\Gamma). \tag{52}$$

Par suite, compte tenu de (49) et (52), nous déduisons :

$$\mu = \left(\frac{\partial q}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega_i} - \left(\frac{\partial q}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega_e} \in H^s(\Gamma). \tag{53}$$

Pour conclure introduisons l'opérateur $S = K^{-1}$ qui, d'après (i) réalise un isomorphisme de $H^{3/2}(\Gamma)$ dans $H^{-3/2}(\Gamma)$. Le résultat que nous venons d'établir montre que, au moins pour s assez grand, S applique $H^{s+3}(\Gamma)$ dans $H^s(\Gamma)$. Comme $K = S^{-1}$ est continu de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+3}(\Gamma)$, le théorème de Banach nous permet d'affirmer que $S \in \mathcal{L}(H^{s+3}(\Gamma), H^s(\Gamma))$ pour s assez grand. Comme on sait déjà que $S \in \mathcal{L}(H^{3/2}(\Gamma), H^{-3/2}(\Gamma))$, nous en déduisons par interpolation que S applique continûment $H^{s+3}(\Gamma)$ dans $H^s(\Gamma)$ pour tout $s \geq -\frac{3}{2}$.

(iii) Supposons que μ appartienne à $L^2(\Gamma)$ alors par le lemme 3.1 il vient :

$$(L^* \mu)(y) = \int_{\Gamma} \bar{G}(\omega, \xi - y) \mu(\xi) d\sigma(\xi). \tag{54}$$

Par définition de K il vient :

$$K\mu(x) = \int_{\Omega_i} G(\omega, x - y) L^* \mu(y) dy. \tag{55}$$

En combinant (54) et (55) puis en appliquant le théorème de Fubini nous obtenons :

$$K\mu(x) = \int_{\Gamma} \left(\int_{\Omega_i} G(\omega, x - y) \bar{G}(\omega, \xi - y) dy \right) \mu(\xi) d\sigma(\xi), \tag{56}$$

qui est bien le résultat annoncé. La deuxième partie de (iii) est, compte tenu du lemme 3.1, immédiate.

(iv) Pour vérifier qu'un opérateur intégral du type (30) est de Hilbert-Schmidt il suffit de vérifier que le noyau $F(\omega, x, \xi)$ appartient à $L^2(\Gamma \times \Gamma)$ (cf. [Br], [DS]). Or :

$$F(\omega, x, \xi) = \int_{\Omega_i} G(\omega, x - y) \bar{G}(\omega, \xi - y) dy .$$

Remarquons que, compte tenu de la singularité de la fonction de Green $G(\omega, x)$ à l'origine (en $\text{Log } |x|$ en dimension 2, en $\frac{1}{|x|}$ en dimension 3), les fonctions :

$$\begin{aligned} y &\rightarrow G(\omega, x - y) \\ y &\rightarrow \bar{G}(\omega, \xi - y) \end{aligned}$$

sont, pour tout (x, ξ) dans $\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i$, dans $L^2(\Omega_i)$. Donc, par Cauchy-Schwarz :

$$|F(\omega, x, \xi)|^2 \leq \left(\int_{\Omega_i} |G(\omega, x - y)|^2 dy \right) \left(\int_{\Omega_i} |\bar{G}(\omega, \xi - y)|^2 dy \right) . \tag{57}$$

La frontière Γ étant bornée, la fonction :

$$(x, y) \in \Gamma \times \Omega_i \rightarrow \mathcal{G}(\omega, x, y) = G(\omega, x - y) ,$$

est dans $L^2(\Gamma \times \Omega_i)$ et donc nous obtenons après intégration sur $\Gamma \times \Gamma$ de (57)

$$\|F(\omega, \dots)\|_{L^2(\Gamma \times \Gamma)} \leq \|\mathcal{G}(\omega, \dots)\|_{L^2(\Gamma \times \Omega_i)} ,$$

ce que nous voulions démontrer. Le caractère autoadjoint de K vient du fait que, si μ et ν sont dans $L^2(\Gamma)$, l'égalité (32) se réécrit :

$$(K\mu, \nu)_{0, \Omega_i} = (L^* \mu, L^* \nu)_{0, \Omega_i} ,$$

et l'existence de la base de vecteurs propres e_n et de la suite de valeurs propres λ_n est une conséquence des propriétés des opérateurs autoadjoints de type Hilbert-Schmidt.

3.3. Résultats techniques

Du précédent résultat nous déduisons le :

COROLLAIRE 3.1 : Soit $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n e_n$ un élément de $L^2(\Gamma)$, on a l'équivalence :

$$g \in H^s(\Gamma), s \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^{2s/3}} < +\infty ,$$

et la norme :

$$|g|_{s, \Gamma}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^{2s/3}}, \quad (58)$$

est une norme équivalente à la norme $H^s(\Gamma)$.

Démonstration : Une conséquence du lemme 3.2 est que l'opérateur non borné S sur $L^2(\Gamma)$ apparaît comme un opérateur autoadjoint positif de domaine :

$$D(S) = H^3(\Gamma).$$

Par conséquent, par la théorie de l'interpolation (cf. [LM]), nous avons :

$$D(S^\theta) = H^{3\theta}(\Gamma) \quad \forall \theta \in [0, 1],$$

et la norme $g \rightarrow |S^\theta g|_{0, \Gamma}$ est une norme sur $H^{3\theta}(\Gamma)$ équivalente à la norme $H^{3\theta}(\Gamma)$. Ceci nous fournit le corollaire pour $s \leq 3$ puisque :

$$|S^\theta g|_{0, \Gamma}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^{2\theta}}.$$

Le résultat s'étend à tout $s > 0$ si on remarque que pour tout entier m , $D(S^m) = H^{3m}(\Gamma)$.

Nous allons étendre ce résultat à $-\frac{3}{2} \leq s < 0$. Notons tout d'abord que pour $g \in H^{-3/2}(\Gamma)$ nous pouvons toujours définir :

$$g_n = \langle e_n, g \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma},$$

puisque $e_n \in H^{3/2}(\Gamma)$. Nous avons alors le deuxième corollaire :

COROLLAIRE 3.2 : Soit $g \in H^s(\Gamma)$, $-\frac{3}{2} \leq s < 0$, on a l'égalité dans $H^s(\Gamma)$:

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle e_n, g \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n.$$

De plus, on a l'équivalence :

$$g \in H^s(\Gamma) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-2s/3} \left| \langle e_n, g \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} \right|^2 < +\infty,$$

et la norme :

$$|g|_{s, \Gamma}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-2s/3} \left| \langle e_n, g \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} \right|^2, \quad (59)$$

est une norme équivalente à la norme $H^s(\Gamma)$.

Démonstration : Nous supposons $s = -\frac{3}{2}$, le résultat est alors obtenu par interpolation (cf. [LM]).

1) Montrons que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left| \langle e_n, g \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} \right|^2,$$

est une norme équivalente à la norme $H^{-3/2}(\Gamma)$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left| \langle e_n, g \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} \right|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-1} \left| \langle Ke_n, g \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-1} \left| \langle e_n, Kg \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} \right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-1} \left| (e_n, Kg)_{0, \Omega_i} \right|^2. \end{aligned}$$

Or, d'après le corollaire 3.1 qui caractérise la norme $H^s(\Gamma)$ pour $s \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-1} \left| (e_n, Kg)_{0, \Omega_i} \right|^2 \sim |Kg|_{3/2, \Gamma}^2.$$

Mais, puisque K est un isomorphisme de $H^{-3/2}(\Gamma)$ dans $H^{3/2}(\Gamma)$ nous avons aussi :

$$|Kg|_{3/2, \Gamma} \sim |g|_{-3/2, \Gamma},$$

d'où le résultat.

2) Montrons que $g = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle e_n, g \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n$ dans $H^{-3/2}(\Gamma)$.

Soit la suite $\{g_N\}$ définie par :

$$g_N = \sum_{n=1}^N \langle e_n, g \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n,$$

g_N est en particulier un élément de $H^{-3/2}(\Gamma)$, et nous avons :

$$g_N \rightarrow g \text{ dans } H^{-3/2}(\Gamma).$$

En effet, soit $\eta > 0$, $L^2(\Gamma)$ étant dense dans $H^{-3/2}(\Gamma)$, il existe g_η dans $L^2(\Gamma)$ tel que :

$$|g_\eta - g|_{-3/2, \Gamma} \leq \frac{\eta}{3}.$$

Comme $g_\eta \in L^2(\Gamma)$, nous pouvons écrire :

$$g_\eta = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle e_n, g_\eta \rangle_{0, \Gamma} e_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle e_n, g_\eta \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n.$$

D'où :

$$\begin{aligned} g_N - g &= (g_N - g_\eta) + (g_\eta - g) \\ &= \sum_{n=1}^N \langle e_n, g - g_\eta \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \langle e_n, g_\eta \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n + (g_\eta - g). \end{aligned}$$

Il est évident que pour N assez grand :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \langle e_n, g_\eta \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n \right| < \frac{\eta}{3},$$

puisque les e_n forment une base de $L^2(\Gamma)$ et $g_\eta \in L^2(\Gamma)$. De plus, d'après 1) :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N \langle e_n, g - g_\eta \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n \right|_{-3/2, \Gamma}^2 &\sim \\ &\sim \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_p \left\langle e_p, \sum_{n=1}^N \langle e_n, g - g_\eta \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n \right\rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} \\ &= \sum_{n=1}^N \lambda_n \left| \langle e_n, g - g_\eta \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left| \langle e_n, g - g_\eta \rangle_{3/2, -3/2, \Gamma} e_n \right|^2 \\ &\sim |g - g_\eta|_{-3/2, \Gamma}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $\eta > 0$ nous avons donc pour N assez grand :

$$|g_N - g|_{-3/2, \Gamma} \leq \eta,$$

ce qui prouve la convergence de g_N vers g dans $H^{-3/2}(\Gamma)$.

3.4. Lien avec la théorie du potentiel classique

Il est intéressant de noter que l'approche par multiplicateurs de Lagrange de la méthode des domaines fictifs appliquée au problème de Dirichlet extérieur pour le problème de Helmholtz fait le lien avec la théorie du potentiel et les équations intégrales. Toutefois, l'équation intégrale sur laquelle on tombe n'est pas classique : on obtient une nouvelle équation intégrale définie sur la frontière Γ .

Rappelons que la méthode classique pour résoudre le problème extérieur (4) par potentiel de simple couche consiste à écrire la solution u de ce problème sous la forme :

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(\omega, x - y) q(y) d\sigma(y) \quad x \in \Omega_e, \quad (60)$$

où l'inconnue q est solution de l'équation intégrale :

$$\int_{\Gamma} G(\omega, x - y) q(y) d\sigma(y) = g(x) \quad x \in \Gamma. \quad (61)$$

Ces deux équations sont ici à comparer avec les équations suivantes :

$$u(x) = \int_{\Gamma} F(\omega, x, y) \lambda(y) d\sigma(y), \quad (62)$$

$$\int_{\Gamma} F(\omega, x, y) \lambda(y) d\sigma(y) = g(x). \quad (63)$$

Le couple d'équations (62), (63) a la même structure que (60), (61) si on remplace le noyau $G(\omega, x - y)$ par $F(\omega, x, y)$. Ce dernier noyau $F(\omega, x, y)$ est plus compliqué que $G(\omega, x - y)$ car lui-même défini par une intégrale. D'un autre côté, le noyau $F(\omega, x, y)$ est plus régulier que $G(\omega, x - y)$ et en outre l'équation (63) est autoadjointe alors que (61) ne l'est pas.

Il est évidemment naturel de chercher s'il n'y aurait pas un lien entre λ et q . Cette question ne semble pas a priori évidente et nous n'avons pu y apporter une réponse satisfaisante. Il est par ailleurs intéressant de mettre l'accent sur le point suivant, qui distingue d'un point de vue mathématique les équations (61) et (63). En effet, il est bien connu (cf. [G], [Ned]) que l'équation (61) est bien posée sauf pour une infinité dénombrable de fréquences $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \rightarrow +\infty\}$ appelées fréquences irrégulières où les ω_n^2 sont les valeurs propres du problème intérieur pour le laplacien avec condition de Dirichlet homogène. En revanche, comme nous l'avons vu, le problème (63) est bien posé quelle que soit la valeur de ω . La formulation (63) supprime donc le problème des fréquences irrégulières.

4. ÉTUDE DU PROBLÈME PAR RÉGULARISATION-PÉNALISATION

Notre but est ici de définir $\varepsilon > 0$ désignant un petit paramètre destiné à tendre vers 0, un problème approché (P_ε) posé dans l'espace des contrôles V dont la solution convergera, lorsque $\varepsilon \searrow 0$, vers la solution v du problème (P). Nous allons tout d'abord voir que deux façons d'aborder le problème, mènent en fait au même problème approché (P_ε) :

(i) Régularisation du problème « mal posé » :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v \text{ qui minimise sur } V \text{ la fonctionnelle :} \\ E(w) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |Lw - g|^2 d\sigma = \frac{1}{2} |Lw - g|_{0, \Gamma}^2. \end{array} \right. \quad (64)$$

La fonctionnelle $E(v)$ n'étant pas coercive sur V , on la rend coercive en ajoutant un « petit » terme coercif : c'est une régularisation de type Tychonov

(cf. [TA]), classique pour ce genre de problème. On résout alors le problème approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_\varepsilon \text{ qui minimise sur } V \text{ la fonctionnelle :} \\ E_\varepsilon(w) = E(w) + \frac{\varepsilon}{2} \|w\|_{0, \Omega_i}^2. \end{array} \right. \quad (65)$$

(ii) Pénalisation du problème sous contrainte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v \text{ qui minimise } J(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{0, \Omega_i}^2 \text{ dans l'ensemble :} \\ \nu_{\text{ad}} = \{w \in V / Lw = g\}. \end{array} \right. \quad (66)$$

Pour se ramener à un problème sans contrainte, nous pénalisons la contrainte égalité $Lw = g$ (cf. [Ce], [Ci]) et résolvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_\varepsilon \text{ qui minimise sur } V \text{ la fonctionnelle :} \\ J_\varepsilon(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{0, \Omega_i}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |Lw - g|_{0, \Gamma}^2. \end{array} \right. \quad (67)$$

Comme on constate que $E_\varepsilon(w) = \varepsilon J_\varepsilon(w)$ pour tout w ans V , on s'aperçoit que (65) et (67) ne forment qu'un seul et même problème que nous appellerons (P_ε) :

$$(P_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_\varepsilon \in V \text{ tel que :} \\ J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(w) \quad \forall w \in V \\ J_\varepsilon(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{0, \Omega_i}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |Lw - g|_{0, \Gamma}^2. \end{array} \right. \quad (68)$$

Remarquons au passage que pour (65) le choix du terme de régularisation $\frac{\varepsilon}{2} \|w\|_{0, \Omega_i}^2$ « sélectionne » automatiquement la solution de norme minimale.

$J_\varepsilon(\cdot)$ étant continue et coercive sur V nous avons immédiatement :

THÉORÈME 4.1 : *Pour tout g dans $H^{3/2}(\Gamma)$ et tout $\varepsilon > 0$, le problème (P_ε) admet une unique solution v_ε dans V .*

Pour caractériser v_ε écrivons la condition d'optimalité du problème (P_ε) :

$$\nabla J_\varepsilon(v_\varepsilon) = 0.$$

Or, par définition, nous avons :

$$(\nabla J_\varepsilon(v_\varepsilon), w)_{0, \Omega_i} = (v_\varepsilon, w)_{0, \Omega_i} + \frac{1}{\varepsilon} (Lv_\varepsilon - g, Lw)_{0, \Gamma}.$$

D'où nous déduisons que :

$$\nabla J_\varepsilon(v_\varepsilon) = v_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} L^* L v_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} L^* g .$$

En d'autres termes la fonction v_ε vérifie :

$$(C + \varepsilon I) v_\varepsilon = L^* g , \quad (69)$$

où remarquant que comme l'opérateur L^* envoie continûment $H^{3/2}(\Gamma)$ dans $H^3(\Omega_i)$, l'opérateur $C = L^* L$ envoie continûment $L^2(\Omega_i)$ dans $H^3(\Omega_i)$, l'égalité (69) a lieu dans $H^3(\Omega_i)$. Résumons les propriétés de l'opérateur C :

LEMME 4.1 : (i) *L'opérateur C est un opérateur autoadjoint positif de Hilbert-Schmidt dans V .*

(ii) *C est caractérisé par :*

$$C w(x) = \int_{\Omega_i} H(\omega, x, y) w(y) dy , \quad (70)$$

où la fonction $H(\omega, x, y)$ est définie par :

$$H(\omega, x, y) = \int_{\Gamma} G(\omega, \xi - y) \bar{G}(\omega, \xi - x) d\sigma(\xi) . \quad (71)$$

$C w$ est encore caractérisé par $C w = q|_{\Omega_i}$, où q est l'unique solution rentrante de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta q - \omega^2 q = 0 & \text{dans } \Omega_e \cup \Omega_i \\ [q] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \left[\frac{\partial q}{\partial n} \right] = \varphi & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial q}{\partial r} + i\omega q = o\left(r^{\frac{1-n}{2}}\right) & r \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (72)$$

avec $\varphi = \tilde{u}|_{\Gamma}$ où \tilde{u} est l'unique solution sortante de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u} - \omega^2 \tilde{u} = w & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - i\omega \tilde{u} = o\left(r^{\frac{1-n}{2}}\right) & r \rightarrow +\infty . \end{array} \right. \quad (73)$$

(iii) *Le spectre de C , purement ponctuel, est donné par :*

$$\sigma(C) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\} ,$$

où les λ_n sont les valeurs propres de K . Plus précisément :

$$\text{Ker}(C) = \text{Ker}(L) ,$$

et si $\{e_n\}$ est une base orthonormée de $L^2(\Gamma)$ de vecteurs propres de K , $\left\{w_n = L^* \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$ est une base orthonormée de $\text{Im}(L^*)$ de vecteurs propres de C .

(iv) Pour tout $s > 0$, C envoie $H^s(\Omega_i)$ dans $H^{s+3}(\Omega_i)$.

Démonstration : (i) Le caractère autoadjoint positif de C est évident. Le fait qu'il soit de Hilbert-Schmidt est une conséquence du point (ii).

(ii)

$$Lw(\xi) = \int_{\Omega_i} G(\omega, \xi - y) w(y) dy.$$

Comme $Lw(\xi) \in H^{3/2}(\Gamma)$, le lemme (3.1) nous dit que :

$$L^*(Lw)(x) = \int_{\Gamma} \bar{G}(\omega, \xi - x) Lw(\xi) d\sigma(\xi).$$

Le théorème de Fubini permet de conclure. On remarque que $H(\omega, x, y) \in L^2(\Omega_i \times \Omega_i)$ entraîne que C est de Hilbert-Schmidt.

(iii) L'égalité $(Cw, w)_{0, \Omega_i} = |Lw|_{0, \Gamma}^2$ montre que les noyaux de C et L coïncident. D'autre part, soit e_n un vecteur propre de K , on a :

$$\begin{aligned} LL^* e_n &= \lambda_n e_n \\ \Rightarrow L^* L(L^* e_n) &= \lambda_n L^* e_n, \end{aligned}$$

ce qui montre que $L^* e_n$ est vecteur propre de C associé à la valeur propre λ_n . Le fait que C n'admet pas d'autres valeurs propres vient de la décomposition orthogonale :

$$V = \text{Ker}(L) \oplus \text{Im}(L^*).$$

En effet, comme $\{e_n\}$ est une base orthonormée de $L^2(\Gamma)$, il est facile de voir que $\{w_n\}$ est une base orthonormée de $\text{Im}(L^*)$ (c'est une conséquence de l'injectivité de L^*).

(iv) Cette propriété de C vient des propriétés régularisantes des opérateurs L et L^* .

Commentaires :

1) L'opérateur C étant positif, pour tout $\varepsilon > 0$, l'opérateur $(C + \varepsilon I)$ est un isomorphisme dans V qui vérifie ($\|\cdot\|$ désigne ici la norme de $\mathcal{L}(V, V)$) :

$$\|(C + \varepsilon I)^{-1}\| = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Comme par ailleurs l'opérateur C est borné, nous avons :

$$\|C + \varepsilon I\| = \lambda_1 + \varepsilon$$

(rappelons que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \lambda_n \searrow 0$).

Le conditionnement de l'opérateur $C + \varepsilon I$ qui est donc donné par :

$$\text{Cond}(C + \varepsilon I) = \frac{\lambda_1 + \varepsilon}{\varepsilon},$$

est fini pour tout $\varepsilon > 0$, mais explose lorsque $\varepsilon = 0$.

2) Comme la solution du problème (P) vérifie en particulier $Lv = g$, elle vérifie :

$$Cv = L^*g, \quad (74)$$

mais cette équation, puisque $\text{Ker}(C)$ est de dimension infinie, ne caractérise pas v . En revanche l'équation :

$$(C + \varepsilon I)v_\varepsilon = L^*g, \quad (75)$$

caractérise entièrement v_ε . Ainsi (75) apparaît bien comme une approximation régularisée de l'équation (74) puisqu'on a remplacé l'opérateur singulier C par l'opérateur inversible $C + \varepsilon I$.

Remarquons maintenant que l'égalité (75) entraîne :

$$\begin{cases} v_\varepsilon = L^* \lambda_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (g - Lv_\varepsilon). \end{cases} \quad (76)$$

Ceci entraîne que, tout comme la solution v du problème (P) , la solution v_ε du problème (P_ε) s'exprime sous la forme d'un potentiel de simple couche. Énonçons ce résultat sous la forme d'un lemme :

LEMME 4.2 : La solution v_ε de (P_ε) est donnée par $v_\varepsilon = L^* \lambda_\varepsilon$ où λ_ε est l'unique solution de l'équation :

$$(K + \varepsilon I) \lambda_\varepsilon = g. \quad (77)$$

Remarque 4.1 : En passant de (74) à (77) on est passé d'une inconnue volumique v_ε à une inconnue surfacique λ_ε et on a remplacé l'équation intégrale de volume :

$$\varepsilon v_\varepsilon(x) + \int_{\Omega_i} H(\omega, x, y) v_\varepsilon(y) dy = \int_{\Gamma} \bar{G}(\omega, \xi - x) g(\xi) d\sigma(\xi), \quad (78)$$

par l'équation intégrale de surface :

$$\varepsilon \lambda_\varepsilon(x) + \int_{\Gamma} F(\omega, x, \xi) \lambda_\varepsilon(\xi) d\sigma(\xi) = g(x). \quad (79)$$

Remarque 4.2 : En écrivant les équations sous la forme :

$$\begin{cases} v_\varepsilon - L^* \lambda_\varepsilon = 0 \\ Lv_\varepsilon + \varepsilon \lambda_\varepsilon = g \end{cases}$$

on reconnaît sous forme abstraite la formulation mixte d'un problème de point selle dont :

$$(C + \varepsilon I) v_\varepsilon = L^* g ,$$

constitue le problème primal alors que :

$$(K + \varepsilon I) \lambda_\varepsilon = g ,$$

est le problème dual (cf. [Ber], [RT]).

Le lemme 4.2 nous permet d'établir un résultat de convergence et une estimation d'erreur :

THÉORÈME 4.2 : *Supposons que g appartienne à $H^s(\Gamma)$, $s \geq \frac{3}{2}$ nous avons alors les résultats suivants :*

$$\begin{cases} \lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda & \text{dans } H^{s-3}(\Gamma) \\ v_\varepsilon \rightarrow v & \text{dans } H^{s-3/2}(\Omega_1) \end{cases} \quad \text{quand } \varepsilon \searrow 0 \quad (80)$$

et dans les espaces de Sobolev d'ordre inférieur :

$$\begin{cases} |\lambda_\varepsilon - \lambda|_{s-3, \alpha-3, \Gamma} \leq \varepsilon^\alpha |g|_{s, \Gamma} \\ \|v_\varepsilon - v\|_{s-3, \alpha-3/2, \Omega_1} \leq C \varepsilon^\alpha |g|_{s, \Gamma} \end{cases} \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (81)$$

où la constante C ne dépend que de Ω_1 , s et α .

Démonstration : Il nous suffit d'établir les estimations d'erreur (81). Le résultat de convergence (80) s'en déduit par un procédé standard.

Notons que l'on peut supposer dans un premier temps que la suite $\{g_n\}$ ne comporte qu'un nombre fini de termes, quitte à conclure par densité.

Si g appartient à $L^2(\Gamma)$, nous avons la décomposition :

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n e_n .$$

Supposons maintenant que $g \in H^s(\Gamma)$, $s \geq \frac{3}{2}$, la solution λ_ε de (77) s'écrit bien entendu :

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n}{\lambda_n + \varepsilon} e_n ,$$

alors que la solution λ de (29) s'écrit :

$$\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n}{\lambda_n} e_n.$$

Par différence nous avons :

$$\lambda - \lambda_\varepsilon = \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n}{\lambda_n(\lambda_n + \varepsilon)} e_n. \quad (82)$$

D'après le corollaire (3.1) qui caractérise la norme $H^q(\Gamma)$ nous avons :

$$\begin{aligned} |\lambda_\varepsilon - \lambda|_{q, \Gamma}^2 &= \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|g_n|}{\lambda_n(\lambda_n + \varepsilon)} \right)^2 \frac{1}{\lambda_n^{2q/3}} \\ &\leq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^{4+2q/3}} \\ &\leq \varepsilon^2 |g|_{q+6, \Gamma}^2. \end{aligned}$$

De même, pour obtenir un résultat intermédiaire, nous avons pour $0 < \alpha < 1$:

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda|_{q, \Gamma}^2 = \varepsilon^{2\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_n + \varepsilon} \right)^{2-2\alpha} \left(\frac{|g_n|}{\lambda_n(\lambda_n + \varepsilon)^\alpha} \right)^2 \frac{1}{\lambda_n^{2q/3}}.$$

Comme $\frac{\varepsilon}{\lambda_n + \varepsilon} \leq 1$, il vient :

$$\begin{aligned} |\lambda_\varepsilon - \lambda|_{q, \Gamma}^2 &\leq \varepsilon^{2\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^{2+2\alpha+2q/3}} \\ &\leq \varepsilon^{2\alpha} |g|_{q+3+3\alpha, \Gamma}^2. \end{aligned}$$

Si nous supposons donc que $g \in H^s(\Gamma)$, $s \geq \frac{3}{2}$, nous avons l'estimation d'erreur :

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda|_{s-3\alpha-3, \Gamma} \leq \varepsilon^\alpha |g|_{s, \Gamma} \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Pour obtenir les estimations relatives à v_ε , il suffit de remarquer que $v_\varepsilon - v = L^*(\lambda_\varepsilon - \lambda)$ où L^* est un opérateur linéaire continu de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+3/2}(\Omega_1)$.

Remarque 4.3 : Nous voyons que dès que g appartient à $H^{3/2}(\Gamma)$ on a convergence de v_ε vers v dans l'espace V , c'est-à-dire dans $L^2(\Omega_1)$. Pour avoir l'ordre de convergence optimal $O(\varepsilon)$ dans l'espace V , il faut avoir g dans $H^{3/2}(\Gamma)$, auquel cas on à l'estimation d'erreur :

$$\|v_\varepsilon - v\|_{0, \Omega_1} \leq C \varepsilon |g|_{3/2, \Gamma}.$$

Remarque 4.4 : Les résultats du théorème 4.2 sont optimaux dans la mesure où si nous choisissons $\varepsilon_k = \lambda_k$ (qui est bien une suite qui tend vers 0) et $g = e_k$, en vertu de la formule (82) si λ^k et $\lambda_{\varepsilon_k}^k$ résolvent respectivement (29) et (77) pour $g = e_k$:

$$\lambda^k - \lambda_{\varepsilon_k}^k = \frac{e_k}{2 \lambda_k}.$$

Alors on vérifie aisément que :

$$\frac{|\lambda_{\varepsilon_k}^k - \lambda^k|_{s-3\alpha-3, \Gamma}}{\varepsilon_k^\alpha |e_k|_{s, \Gamma}} = \text{Cte}.$$

Désignons maintenant par u_ε la solution du problème extérieur, obtenue à partir du problème régularisé. Cette solution est bien entendu donnée par :

$$u_\varepsilon = (Av_\varepsilon)|_{\Omega_\varepsilon} \in H_{\text{loc}}^2(\Omega_\varepsilon),$$

c'est-à-dire par :

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega_1} G(\omega, x-y) v_\varepsilon(y) dy,$$

alors, compte tenu des propriétés de continuité de A , nous déduisons :

THÉORÈME 4.3. — *Supposons que g appartienne à $H^{3/2}(\Gamma)$ alors :*

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } H_{\text{loc}}^2(\Omega_\varepsilon),$$

où u est la solution du problème initial (4) et pour tout $s \geq \frac{3}{2}$, tout R suffisamment grand pour que $\Omega_\varepsilon \subset B_R = \{|x| < R\}$, il existe une constante $C = C(R, q) > 0$, telle que pour tout $q > 0$:

$$\|u_\varepsilon - u\|_{q+2, \Omega_\varepsilon \cup B_R} \leq C(R, q) \|v_\varepsilon - v\|_{q, \Omega_1},$$

ce qui montre que u_ε converge vers u dans $H_{\text{loc}}^2(\Omega_\varepsilon)$.

Si de plus $g \in H^s(\Gamma)$, nous avons l'estimation d'erreur :

$$\|u - u_\varepsilon\|_{s-3\alpha+1/2, \Omega_\varepsilon \cup B_R} \leq C(R, s) \varepsilon^\alpha |g|_{s, \Gamma} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Démonstration. — Nous avons $u_\varepsilon - u = (A(v_\varepsilon - v))|_{\Omega_\varepsilon}$ et l'opérateur A est linéaire continu de $H^q(\Omega_1)$ dans $H_{\text{loc}}^{q+2}(\Omega_\varepsilon)$ pour tout q réel. Nous avons donc :

$$\|u - u_\varepsilon\|_{q+2, \Omega_\varepsilon \cup B_R} \leq C(R, q) \|v_\varepsilon - v\|_{q, \Omega_1}.$$

Pour conclure il suffit d'utiliser les résultats du théorème 4.2.

Remarque 4.5 : Pour l'approximation de la condition aux limites $u|_{\Gamma} = g$, remarquons qu'on a l'estimation d'erreur :

$$|u_{\varepsilon} - g|_{s-3\alpha, \Gamma} \leq C(s) \varepsilon^{\alpha} |g|_{s, \Gamma} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 .$$

5. APPLICATION NUMÉRIQUE

Nous illustrons maintenant numériquement l'influence de la pénalisation sur la convergence et la précision de la solution.

L'expérience physique consiste à envoyer une onde incidente plane sur un disque circulaire parfaitement réfléchissant :

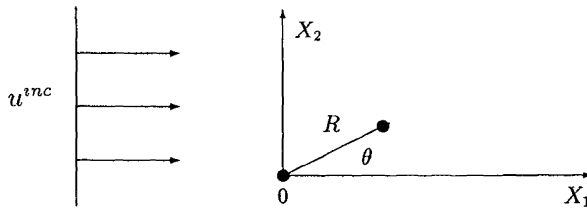


Figure 2. — Cas de calcul.

L'onde incidente se propage suivant l'axe $\overrightarrow{OX_1}$ dans le sens $x_1 > 0$, elle s'écrit :

$$u^{inc}(x, t) = e^{-i\omega t} e^{-i\omega x_1} .$$

Nous prenons la condition de Dirichlet sur la frontière Γ du corps, la donnée g peut alors s'exprimer par :

$$g(\theta) = e^{-i\omega \cos \theta} .$$

(Remarquons que $g \in H^s(\Gamma)$ pour tout s .)

Conformément à la méthode exposée à la section 4, nous recherchons la solution du problème de diffraction *via* la résolution de (P_{ε}) qui est un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique. Ceci la prédispose naturellement à être minimisée par une méthode de gradient. Nous avons choisi d'utiliser l'algorithme très robuste GMRES (*cf.* [SS]). Cet algorithme itératif demande de résoudre à chaque itération des problèmes du type (7) posés dans l'espace entier. Compte tenu de la simplicité de ces problèmes (du moins dans leur principe) nous avons choisi de les résoudre par une méthode de différences finies sur un maillage régulier, cartésien, de pas constant. Pour borner le domaine de calcul nous avons remplacé la condition de radiation de Sommerfeld par la condition aux limites absorbante d'ordre 2 due à Joly-Mercier ([JM]) sur une frontière artificielle placée à distance finie du corps.

Le cas test est un disque de rayon $R = 0,25$ m, la longueur d'onde est de 0,5 m (ce qui correspond à une fréquence de 0,6 GHz), le maillage différences finies est en 15 points par longueur d'onde et la frontière artificielle est placée à 0,5 longueurs d'onde du corps.

Nous avons représenté sur la figure 3 la convergence du résidu (lié au système linéaire à résoudre) en fonction du nombre d'itérations pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ε , tandis que la figure 4 représente la convergence du critère $|u(v) - g|_{0,r}$. (Rappelons que

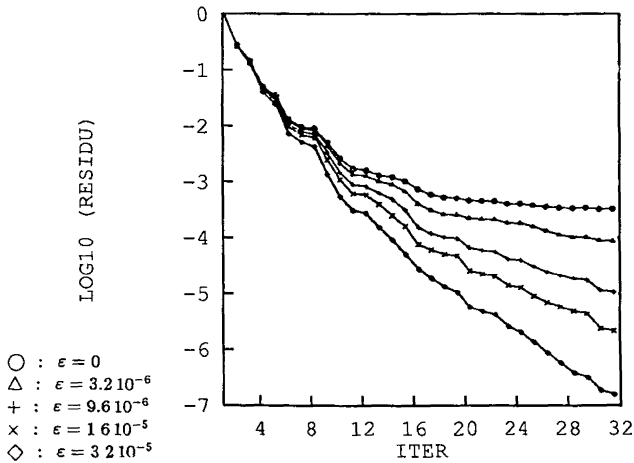


Figure 3. — Variation du résidu.

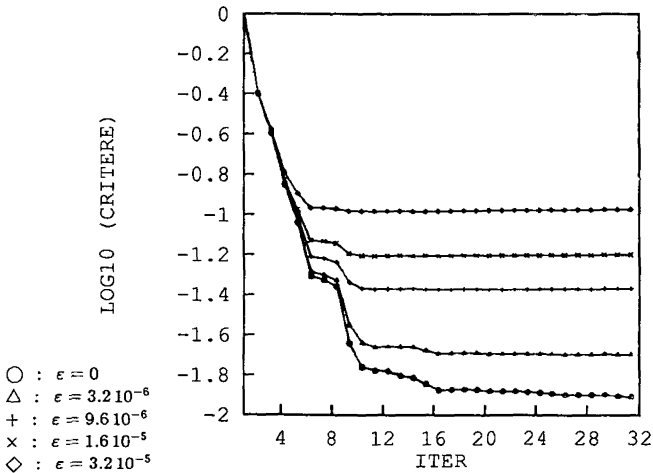


Figure 4. — Variation du critère.

u est la solution du problème de diffraction si et seulement si le critère est nul.) La solution discrète a convergé lorsque le critère a atteint une valeur fixe (qui est non nulle à cause des erreurs de discrétisation et de pénalisation). Les courbes des figures 5 et 6 montrent quand à elles l'erreur relative et le nombre d'itérations nécessaire (pour avoir la convergence du critère) en fonction de ε . Nous voyons donc clairement que l'introduction du terme de pénalisation améliore la convergence et que la convergence est linéaire à

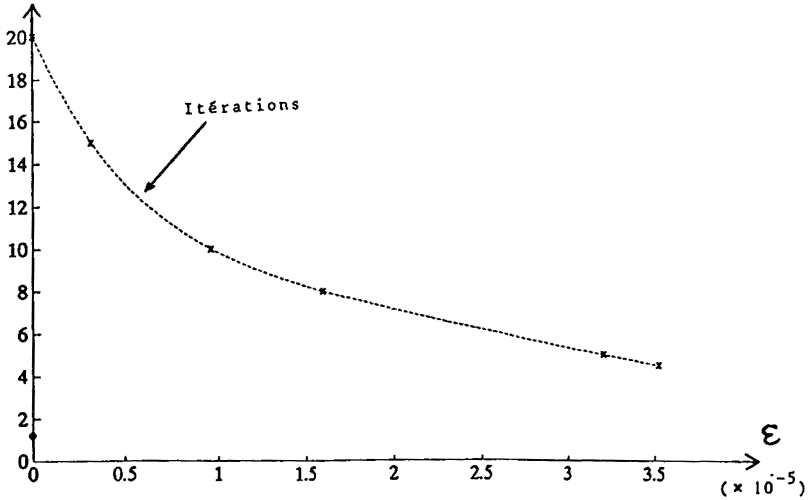


Figure 5. — Nombre d'itérations pour converger.

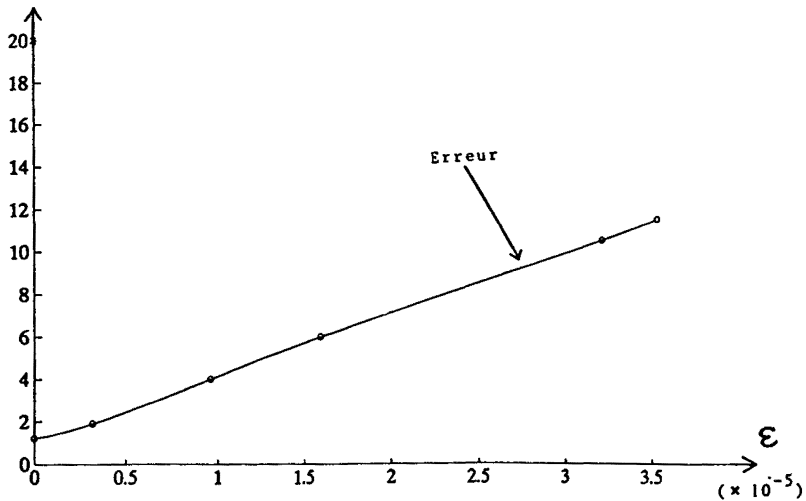


Figure 6. — Norme L^2 de l'erreur relative.

partir de ε assez petit. D'autre part, la figure 5 illustre parfaitement l'existence d'un compromis, pour ε convenablement bien choisi, entre le fait de vouloir un nombre d'itérations le plus faible possible et celui d'obtenir une solution satisfaisante.

La précision de la solution obtenue en fonction de ε est visualisée à la figure 7 qui représente la signature acoustique de l'onde diffractée, c'est-à-dire le rapport entre l'énergie rayonnée et l'énergie incidente à l'infini en fonction de la direction d'observation. Plus précisément, soit ϕ la direction de l'onde incidente et θ la direction d'observation, il est connu que le comportement asymptotique du champ solution s'écrit (cf. [R]) :

$$u(r, \theta, \phi) \sim A(\theta, \phi) \frac{e^{i\omega r}}{r^{n-1/2}} \text{ à l'infini.}$$

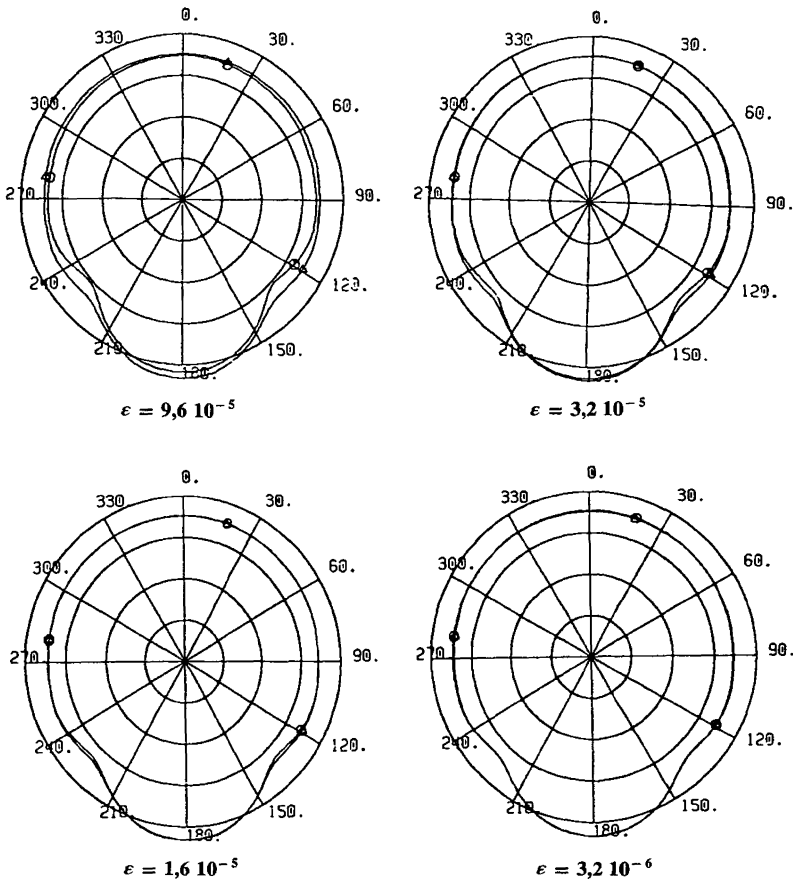


Figure 7. — Signature acoustique par rapport au calcul de référence.

Le terme d'amplitude $A(\theta, \phi)$ caractérise donc entièrement le champ diffracté à l'infini. Nous avons représenté la figure 7 la fonction $\theta \rightarrow |A(\theta, \phi)|^2$ en échelle logarithmique et en coordonnées polaires. La référence est la solution calculée par une méthode classique d'équations intégrales. Ceci illustre *de visu* la convergence de la solution du problème pénalisé vers la solution du problème initial.

6. CONCLUSION

Notre analyse d'une méthode de domaines fictifs appliqués à la résolution d'un problème de diffraction d'onde acoustique nous a permis d'obtenir un certain nombre de résultats intéressants. L'approche domaines fictifs nous a conduit à résoudre un problème de minimisation avec contrainte (le problème (P)) qui est un problème de contrôle optimal. Nous avons établi l'existence et l'unicité de la solution de ce problème et présenté deux approches pour sa résolution :

- Approche par multiplicateurs de Lagrange.
- Approche par régularisation-pénalisation.

L'étude par multiplicateurs de Lagrange mène à une équation intégrale, sur la frontière de l'obstacle, qui semble nouvelle. Cette équation est dérivée du problème dual du problème (P) et son inconnue n'est autre que le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte. Cette équation a l'avantage d'être autoadjointe, d'avoir un noyau régulier et d'évacuer le problème des fréquences irrégulières. Elle nous semble toutefois peu utilisable sur le plan pratique à cause de la complexité de son noyau.

L'approche par régularisation est plus viable sur le plan numérique (c'est d'ailleurs ce que nous avons mis en œuvre). Nous avons obtenu des résultats de convergence et des estimations d'erreur qui sont optimales en un certain sens. L'un des avantages de cette méthode est que pour un paramètre de pénalisation $\varepsilon > 0$ fixé le conditionnement est borné et ne dépend que de ε . Nous avons présenté quelques résultats numériques dans un cas simple qui sont en bon accord avec la théorie.

Dans toute cette analyse nous nous sommes limités à l'étude de la condition de Dirichlet, mais nous pouvons étendre ces résultats de manière analogue à la condition de Neumann, ou encore au système des équations de Maxwell. Pour de plus amples informations sur ces extensions nous renvoyons le lecteur à la thèse de C. Atamian [At].

Finalement, cette méthode de domaines fictifs est très simple dans son principe, marche bien numériquement et permet d'obtenir une précision satisfaisante. Toutefois, elle ne nous semble pas compétitive vis-à-vis d'autres méthodes existantes en ce qui concerne le coût en temps de calcul, notamment par rapport à la méthode des équations intégrales. La conclusion est néanmoins moins négative si nous envisageons d'appliquer cette approche

au cas d'un problème pour lequel les équations intégrales ne sont pas adaptées, un obstacle entouré d'un milieu fortement hétérogène par exemple.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier particulièrement Guy Chavent, Roland Glowinski et Laurence Halpern pour leurs précieux conseils.

RÉFÉRENCES

- [Ad] R. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.
- [Ag] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, 1965.
- [AS] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, 1968.
- [Ast 1] G. B. ASTRAKHANTSEV, Methods of fictitious domains for a second-order elliptic equation with natural boundary conditions, *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.*, vol. 18, n° 1, 1978, pp. 114-121.
- [Ast 2] G. B. ASTRAKHANTSEV, Numerical solution of the Dirichlet problem using a discrete analogue of a double-layer potential, *Soviet. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 1, 1986, pp. 267-276.
- [At] C. ATAMIAN, *Résolution de problèmes de diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques en régime fréquentiel par une méthode de domaines fictifs*, Thèse de doctorat de l'université de Paris VI, 1991.
- [BDGG] B. BUZBEE, F. DORR, J. GEORGE, G. GOLUB, The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 8, n° 4, 1970, pp. 722-736.
- [Ben] A. BENDALI, *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*, Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VI, 1984.
- [Ber] M. BERCOVIER, Perturbation of mixed variational problems. Application to mixed finite element methods, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, n° 12, 1978, pp. 211-236.
- [Br] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris 1983.
- [BW] C. BÖRGERS, O. B. WIDLUND, *Finite element capacitance matrix methods*, Technical report 261, Computer Science Department, New York University, and LBL Report 22583, Lawrence Berkeley Laboratory, 1986.
- [Ce] J. CEA, *Optimisation, Théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1971.
- [Ci] P. G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1982.
- [DL] R. DAUTRAY, J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, Masson, Paris, 1984.
- [DS] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Interscience, 1958.
- [Fa] P. FAURRE, *Notes d'optimisation*, Cours du CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1984.

- [FK] S. A. FINOGENOV, Y. A. KUZNETSOV, Two-stage fictitious component method for solving the Dirichlet boundary value problem, *Sov. J. Num. Anal. Math. Modelling*, 3, 1988, pp. 301-324.
- [G] J. GIROIRE, *Integral equations methods for exterior problems for the Helmholtz equation*, Rapport interne du CMAP, École polytechnique, n° 40, Palaiseau, 1978.
- [H] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, Springer, 1983.
- [Li] J. L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.
- [LM] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [Lu] D. G. LUENBERGER, *Optimization by vector space methods*, Wiley, 1969.
- [MKM] G. I. MARCHUK, Y. A. KUZNETSOV, A. M. MATSOKIN, Fictitious domain and domain decomposition methods, *Sov. J. Num. Anal. Math. Modelling*, 1, 1986, pp. 3-36.
- [Nec] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [Ned] J. C. NEDELEC, *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*, Cours de l'école d'été d'analyse numérique, EDF-CEA-INRIA, 1977.
- [O] F. OLVER, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, 1981.
- [OW] D. P. O'LEARY, O. WIDLUND, Capacitance matrix methods for the Helmholtz equation on general three-dimensional regions, *Math. Comp.*, vol. 33, n° 147, 1979, pp. 849-879.
- [PW1] W. PROSKUROWSKI, O. WIDLUND, On the numerical solution of Helmholtz's equation by the capacitance matrix method, *Math. Comp.*, vol. 30, n° 135, 1976, pp. 433-468.
- [PW2] W. PROSKUROWSKI, O. WIDLUND, A finite element capacitance matrix method for the Neumann problem for the Laplace's equation, *SIAM J. Sci. Comp.*, col. 1, n° 4, 1980, pp. 410-425.
- [R] A. G. RAMM, *Scattering by obstacles*, Reidel Publishing Company, 1986.
- [RT] J. E. ROBERTS, J. M. THOMAS, Mixed and hybrid methods, *Handbook of numerical analysis*, vol. II, Finite element methods (Part 1), North Holland, 1991.
- [RS] M. REED, B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, 1981.
- [Sc] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.
- [So] A. SOMMERFELD, *Partial differential equations in physics*, Academic Press, New York, 1964.
- [TA] A. TYCHONOV, V. ARSENINE, *Méthode de résolution de problèmes mal posés*, Éditions Mir, Moscou, 1976.
- [W] C. H. WILCOX, Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains, *Lecture Notes in Maths.*, n° 442, Springer-Verlag, Berlin, 1975.