M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique

Isabelle Gruais

Modélisation de la jonction entre une plaque et une poutre en élasticité linéarisée

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, nº 1 (1993), p. 77-105

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_1_77_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 27, n° 1, 1993, p. 77 à 105)

MODÉLISATION DE LA JONCTION ENTRE UNE PLAQUE ET UNE POUTRE EN ÉLASTICITÉ LINÉARISÉE (*)

par Isabelle GRUAIS [1]

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *On donne une justification mathématique du comportement de la jonction entre une plaque d'épaisseur* 2ε *et une poutre de section carrée égale à* $4\varepsilon^2$ *lorsqu'elles sont constituées de matériaux élastiques obéissant à des lois de comportement linéarisées. On considère le cas où la poutre est en partie insérée dans la plaque, son extrémité libre étant encastrée, et on choisit de faire une analyse asymptotique. On montre qu'à la limite, le système est partiellement rigidifié au niveau de la jonction pour le déplacement transversal de la poutre. D'autre part, à la jonction la poutre induit sur la plaque une torsion constante qui dépend de la résultante du moment des forces appliquées.*

Abstract. — Modelling of the junction between a plate and a rod in linear elasticity. *We give a mathematical justification for the modelisation of the junction between a plate of thickness* 2ε *and a rod whose cross section varies as* $4\varepsilon^2$ *when they are made of linearly elastic materials. We are interested in the case where the rod is partly inserted in the plate and clamped at its free extremity, and we make an asymptotic analysis. Passing to the limit, we show that the transverse displacement of the rod is partly rigid. Moreover, at the junction the torsion of the plate induced by the rod is a constant depending on the total moment of the applied forces.*

Les structures étudiées par les ingénieurs sont constituées d'éléments de base tels que, outre des corps massifs, des plaques, des poutres ou des coques minces. Dans la pratique, les schémas numériques bidimensionnels ou monodimensionnels sont plus performants alors que les problèmes que l'on veut considérer sont naturellement tridimensionnels. Il est cependant

(*) Reçu pour publication en février 1992.
Ce travail fait partie du Projet « Junctions in Elastic Multi-Structures » du Programme « S.C.I.E.N.C.E. » de la Commission des Communautés Européennes (Contrat N° SC1*0473-C(EDB)).
[1] U.F.R. Mathématiques de la Décision, Université Paris IX-Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, 75016 Paris.

possible, dans le cas de poutres ou de plaques, de se ramener à des modèles monodimensionnels ou bidimensionnels grâce à des approximations classiques en physique, mais dont la justification mathématique n'existe pas toujours.

Des travaux récents de Ciarlet et Destuynder basés sur la méthode des développements asymptotiques ont permis de lever cette difficulté dans le cas de plaques et de coques minces élastiques (Ciarlet [1980], [1990] ; Ciarlet et Destuynder [1979a, b] ; Destuynder [1980], [1981], [1986]). L'idée a été reprise pour la modélisation de poutres (Cimetière, Geymonat, Le Dret, Raoult, Tutek [1988]) puis de systèmes appelés classiquement « multi-structures » parce qu'ils associent des éléments de « dimensions » différentes : par exemple, un corps tridimensionnel dans lequel on insère une plaque mince pour le premier article à ce sujet (*cf.* Ciarlet, Le Dret, Nzengwa [1989]).

L'étude qui suit traite du cas particulier de la jonction entre une plaque et une poutre insérée dans celle-ci lorsque le matériau qui les constitue est élastique, homogène, isotrope et obéit à la loi de comportement linéarisée. On s'inspire beaucoup des travaux de Le Dret [1989a, b], [1990a] concernant la jonction entre deux plaques ou deux poutres : l'analogie entre la démarche adoptée ici et cette dernière référence est d'ailleurs remarquable compte tenu de la différence entre les géométries des deux problèmes. Tout se passe comme si, au moins d'un point de vue mathématique, la poutre imposait son comportement à l'ensemble : en forçant un peu sur le sens des mots, la partie monodimensionnelle l'emporte sur la partie bidimensionnelle de la structure étudiée.

Il peut être généralement intéressant de rapprocher le problème étudié ici avec l'étude du raidissement d'une plaque au moyen de tiges partiellement enfoncées dans le plan de celle-ci (Aufranc [1990]) : cette mise en parallèle paraît inévitable puisqu'on veut, dans les deux cas, modéliser la jonction entre deux solides dont l'un est bidimensionnel et l'autre monodimensionnel. La différence tient néanmoins à ce que les raidisseurs étudiés par Aufranc relient deux côtés opposés de la plaque sans déborder de celle-ci, ce qui limite le choix des conditions aux limites — en particulier, la plaque est toujours encastrée sur un de ses côtés — et modifie le comportement limite de la jonction dans certains cas.

Dans la suite, il importera de préciser quelle partie du solide est encastrée et quel choix on fait pour le rapport des rigidités entre les deux matériaux. Comme on s'intéresse aux seuls cas limites dans lesquels la plaque et la poutre sont élastiques, le choix de ce rapport des rigidités est limité : on peut montrer qu'il n'existe en fait que deux possibilités, les autres valeurs de ce rapport induisant une rigidification d'une partie du système et vidant ainsi de son sens l'idée-même de jonction élastique...

La méthode étant désormais classique, on se reportera aux références déjà citées et en particulier à Ciarlet, Le Dret, Nzengwa [1989] pour tous les détails la concernant.

On se limite ici à la description du problème particulier envisagé.

1. LE PROBLÈME TRIDIMENSIONNEL

Le problème tridimensionnel initial auquel on applique classiquement la méthode des développements asymptotiques est posé sur un ouvert de $\mathbf{R}^3$ qui est la configuration de référence d'un solide que l'on décrit ainsi : c'est la réunion d'une plaque rectangulaire d'épaisseur 2 ε notée Ω^{ε} et d'une poutre de section carrée de côté 2 ε notée $\hat{\Omega}^{\varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$ est un paramètre destiné à tendre vers 0. En toute rigueur, on devrait noter 2 εh la taille commune à l'épaisseur de la plaque et au côté de la section de la poutre, mais si on prend $h = 1$ pour fixer les idées, on s'affranchit de cette notation.

On écrit donc :

$$\Omega^{\varepsilon} := \left\{\mathbf{x}^{\varepsilon} \in \mathbf{R}^3 ;\ -1 < x_1^{\varepsilon} < \beta,\ \left|x_2^{\varepsilon}\right| < 1,\ \left|x_3^{\varepsilon}\right| < \varepsilon\right\}$$

où $\beta \in]0, 1[$ est un paramètre fixe sans dimension,

$$\hat{\Omega}^{\varepsilon} := \left\{\mathbf{x}^{\varepsilon} \in \mathbf{R}^3 ;\ 0 < x_1^{\varepsilon} < 1,\ \left|x_2^{\varepsilon}\right| < \varepsilon,\ \left|x_3^{\varepsilon}\right| < \varepsilon\right\}$$

et on note

$$O^{\varepsilon} = \Omega^{3} \cup \hat{\Omega}^{\varepsilon}$$

la configuration de référence du solide.

Enfin, la section de la poutre d'abscisse

$$x_1^{\varepsilon} = a$$

est désignée par :

$$\hat{\omega}_a^{\varepsilon} := \left\{\mathbf{x}^{\varepsilon} \in \hat{\Omega}^{\varepsilon} ;\ x_1^{\varepsilon} = a\right\}$$

si $a \in [0, 1]$.

On écrit le problème tridimensionnel initial sous la forme d'un problème variationnel dont l'inconnue $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ et les fonctions-tests sont prises dans un espace V^{ε} qui est l'espace des déplacements admissibles. Dans l'écriture de V^{ε}, on tient compte de l'encastrement de la poutre à son extrémité libre et on s'assure du minimum de régularité pour écrire le problème. On note

$$(\lambda^{\varepsilon}, \mu^{\varepsilon}),\ (\hat{\lambda}^{\varepsilon}, \hat{\mu}^{\varepsilon})$$

les constantes de Lamé associées respectivement à la plaque et à la poutre.

Finalement, on écrit le problème tridimensionnel initial sous la forme suivante.

Trouver

$$\mathbf{u}^\varepsilon \in V^\varepsilon := \left\{ \mathbf{v}^\varepsilon \in H^1(O^\varepsilon)^3 \,;\ \mathbf{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \hat{\omega}_1^\varepsilon \right\}$$

tel que :

$\forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon$,

$$\int_{\Omega^\varepsilon \setminus \hat{\Omega}^\varepsilon} A^\varepsilon \, \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \, dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{A}^\varepsilon \, \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \, dx^\varepsilon =$$

$$= \int_{O^\varepsilon} \mathbf{f}^\varepsilon \, \mathbf{v}^\varepsilon \, dx^\varepsilon + \int_{\partial O^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon \, \mathbf{v}^\varepsilon \, da^\varepsilon$$

où :

$$\begin{aligned}
(A^\varepsilon \, \boldsymbol{\tau}^\varepsilon)_{ij} &= 2 \, \mu^\varepsilon \, \tau_{ij}^\varepsilon + \lambda^\varepsilon \, \tau_{ll}^\varepsilon \, \delta_{ij} \\
(\hat{A}^\varepsilon \, \boldsymbol{\tau}^\varepsilon)_{ij} &= 2 \, \hat{\mu}^\varepsilon \, \tau_{ij}^\varepsilon + \hat{\lambda}^\varepsilon \, \tau_{ll}^\varepsilon \, \delta_{ij} \\
\forall \boldsymbol{\tau}^\varepsilon &= (\tau_{ij}^\varepsilon), \ \tau_{ij}^\varepsilon = \tau_{ji}^\varepsilon \,.
\end{aligned}$$

2. NOUVEAU PROBLÈME POSÉ SUR DES OUVERTS INDÉPENDANTS DU PARAMÈTRE $\varepsilon > 0$

Le problème tridimensionnel de départ est posé sur des ouverts Ω^ε et $\hat{\Omega}^\varepsilon$ qui dépendent du paramètre $\varepsilon > 0$. L'analyse qui suit consiste, dans un premier temps, à se ramener à un problème équivalent posé sur des ouverts fixes notés Ω et $\hat{\Omega}$.

Cette étape, dite de « mise à l'échelle » ou « scaling » en anglais, est désormais classique dans ce genre de situation. Elle a été mise au point d'abord par Ciarlet et Destuynder [1979a, b] pour la modélisation de plaques seules, puis étendue au cas de poutres (Cimetière, Geymonat, Le Dret, Raoult, Tutek [1988] ; Rigolot [1976]) et de coques « shallow shells » (Destuynder [1986]).

Pour l'étude de jonctions, dont on a ici un exemple, elle s'accompagne d'un artifice introduit dans Ciarlet, Le Dret, Nzengwa [1989] qui permet d'analyser rigoureusement le comportement limite de la jonction (quand $\varepsilon \to 0$).

Suivant cette méthode, on introduit une « copie » de $\mathbf{R}^3$, notée $\hat{\mathbf{R}}^3$, identifiée dans la pratique des calculs à $\mathbf{R}^3$, ce qui permet de définir deux ouverts Ω et $\hat{\Omega}$ indépendamment l'un de l'autre.

$$\Omega = \omega \times (]-1, 1[)_{x_3} = \left\{(\mathbf{x}_\alpha ; x_3) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} ; (\mathbf{x}_\alpha) \in \omega, -1 < x_3 < 1\right\}$$

où x_3 est la variable distinguée et où ω est le plan médian de la plaque :

$$\omega = \left\{\mathbf{x} \in \Omega ; x_3 = 0\right\}$$

$$\hat{\Omega} = \hat{\omega} \times (]0, 1[)_{\hat{x}_1} = \left\{(\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\alpha}}, \hat{x}_1) \in \hat{\mathbf{R}}^2 \times \hat{\mathbf{R}} ; (\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\alpha}}) \in \hat{\omega}, 0 < \hat{x}_1 < 1\right\}$$

où $\hat{x}_1$ est la variable distinguée et où $\hat{\omega}$ est la section droite de la poutre :

$$\hat{\omega} = (]-1, 1[)^2 \subset \hat{\mathbf{R}}^2 .$$

Pour tout $a \in [0, 1]$, on note $\hat{\omega}_a$ la section d'abscisse $\hat{x}_1 = a$ de la poutre $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\omega}_a = \left\{\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega} ; \hat{x}_1 = a\right\} .$$

On passe alors de Ω^ε à Ω et de $\hat{\Omega}^\varepsilon$ à $\hat{\Omega}$ par deux changements de variables (ou « scalings ») définis par les applications :

$$\Pi^\varepsilon : \Omega \to \Omega^\varepsilon, \mathbf{x} \to \Pi^\varepsilon \mathbf{x} = (x_1, x_2, \varepsilon x_3)$$
$$\hat{\Pi}^\varepsilon : \hat{\Omega} \to \hat{\Omega}^\varepsilon, \hat{\mathbf{x}} \to \hat{\Pi}^\varepsilon \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \varepsilon\hat{x}_2, \varepsilon\hat{x}_3)$$

qui sont des bijections de Ω sur Ω^ε et de $\hat{\Omega}$ sur $\hat{\Omega}^\varepsilon$ respectivement.

La zone de jonction $\Omega^\varepsilon \cap \hat{\Omega}^\varepsilon$ admet alors deux images dans ce changement de variables, notées J_β^ε et $\hat{J}_\beta$, associées aux applications Π^ε et $\hat{\Pi}^\varepsilon$ respectivement :

$$\boxed{\begin{aligned} J_\beta^\varepsilon &= (\Pi^\varepsilon)^{-1}\,(\Omega^\varepsilon \cap \hat{\Omega}^\varepsilon) \subset \Omega \\ \hat{J}_\beta &= (\hat{\Pi}^\varepsilon)^{-1}\,(\Omega^\varepsilon \cap \hat{\Omega}^\varepsilon) \subset \hat{\Omega} \end{aligned}} \; .$$

Dans la pratique, on sera amené à confondre $\mathbf{R}^3$ et $\hat{\mathbf{R}}^3$ et à remarquer que si

$$\mathbf{x}^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon \cap \hat{\Omega}^\varepsilon ,$$

alors $\mathbf{x}^{\varepsilon}$ peut s'écrire :

$$\mathbf{x}^{\varepsilon} = (x_1, \varepsilon x_2, x_3)$$

avec :

$$\mathbf{x} \in J_{\beta} := \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 ; 0 < x_1 < \beta, \ |x_2| < 1, \ |x_3| < 1\right\} .$$

Dans ce cas, on rappelle que :

$$(x_1, \varepsilon x_2, x_3) \in J_{\beta}^{\varepsilon} .$$

Le « scaling » introduit ci-dessus permet de définir un couple

$$(\mathbf{u}(\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1(\hat{\Omega})^3$$

associé au déplacement $\mathbf{u}^{\varepsilon} \in V^{\varepsilon}$ de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} u_{\alpha}^{\varepsilon}(\mathbf{x}^{\varepsilon}) &= \varepsilon^2 u_{\alpha}(\varepsilon)(\mathbf{x}) \\ u_3^{\varepsilon}(\mathbf{x}^{\varepsilon}) &= \varepsilon u_3(\varepsilon)(\mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{x}^{\varepsilon} &= \Pi^{\varepsilon} \mathbf{x} \in \Omega^{\varepsilon} \end{aligned}} \tag{2.0.1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1^{\varepsilon}(\mathbf{x}^{\varepsilon}) &= \varepsilon \hat{u}_1(\varepsilon)(\hat{\mathbf{x}}) \\ u_{\hat{\alpha}}^{\varepsilon}(\mathbf{x}^{\varepsilon}) &= \varepsilon^2 \hat{u}_{\hat{\alpha}}(\varepsilon)(\hat{\mathbf{x}}) \\ \forall \mathbf{x}^{\varepsilon} &= \hat{\Pi}^{\varepsilon} \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}^{\varepsilon} \end{aligned}} \, . \tag{2.0.2}$$

On va voir que les déplacements $\mathbf{u}(\varepsilon)$ et $\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ sont majorés uniformément en norme à un déplacement rigide près lorsqu'on fait des hypothèses asymptotiques convenables sur les données initiales, c'est-à-dire sur les densités de forces et sur les constantes de Lamé.

Plus précisément, on suppose que les densités de forces peuvent s'écrire (*cf.* Ciarlet, Destuynder [1979a], Le Dret [1989a, b]) :

$$\boxed{\begin{aligned} & f_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}^{\varepsilon}) = f_i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}^{\varepsilon} = \Pi^{\varepsilon} \mathbf{x} \in \Omega^{\varepsilon} \\ & g_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}^{\varepsilon}) = \varepsilon g_i(\mathbf{x}) \quad \text{si} \quad x_3^{\varepsilon} \in \{-\varepsilon, \varepsilon\} \\ & g_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}^{\varepsilon}) = g_i(\mathbf{x}) \quad \text{si} \quad x_3^{\varepsilon} \notin \{-\varepsilon, \varepsilon\} \\ & \qquad \forall \mathbf{x}^{\varepsilon} = \Pi^{\varepsilon} \mathbf{x} \in S^{\varepsilon} \end{aligned}} \tag{2.0.3}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} f^\varepsilon_{\hat\alpha}(\mathbf{x}^\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\hat f_{\hat\alpha}(\hat{\mathbf{x}}), & f^\varepsilon_{\hat 1}(\mathbf{x}^\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\hat f_1(\hat{\mathbf{x}}), & \forall \mathbf{x}^\varepsilon = \hat\Pi^\varepsilon\,\hat{\mathbf{x}} \in \hat\Omega^\varepsilon \\ g^\varepsilon_{\hat\alpha}(\mathbf{x}^\varepsilon) = \hat g_{\hat\alpha}(\hat{\mathbf{x}}), & g^\varepsilon_{\hat 1}(\mathbf{x}^\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\hat g_1(\hat{\mathbf{x}}), & \forall \mathbf{x}^\varepsilon = \hat\Pi^\varepsilon\,\hat{\mathbf{x}} \in \hat S^\varepsilon \end{array}} \tag{2.0.4}$$

où on a posé :

$$S^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon \backslash \{\hat\Omega^\varepsilon\}^-$$
$$\hat S^\varepsilon = \partial\hat\Omega^\varepsilon \backslash (\Omega^\varepsilon \cup \{\mathbf{x}^\varepsilon \in \partial\hat\Omega^\varepsilon \,;\, x^\varepsilon_{\hat 1} = 1 \text{ ou } x^\varepsilon_{\hat 1} = 0\})\,.$$

On suppose en outre que les constantes de Lamé sont de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-3}\lambda\,, & \mu^\varepsilon = \varepsilon^{-3}\mu \\ \hat\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-4}\hat\lambda\,, & \hat\mu^\varepsilon = \varepsilon^{-4}\hat\mu \end{array}}$$

où l'on a en général :

$$\lambda \neq \hat\lambda\,, \quad \mu \neq \hat\mu\,.$$

En particulier :

$$\frac{\hat\lambda^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon} = \varepsilon^{-1}\frac{\hat\lambda}{\lambda}\,, \quad \frac{\hat\mu^\varepsilon}{\mu^\varepsilon} = \varepsilon^{-1}\frac{\hat\mu}{\mu}$$

où les rapports

$$\hat\lambda/\lambda\,, \quad \hat\mu/\mu$$

ne dépendent pas du paramètre $\varepsilon > 0$.

D'un point de vue mécanique, cela revient à supposer que la structure devient infiniment rigide quand ε tend vers 0 et que, en particulier, la poutre devient infiniment plus rigide que la plaque.

On note encore

$$\hat S_\beta = \partial\hat\Omega \backslash (\partial\hat J_\beta \cup \{\hat{\mathbf{x}} \in \partial\hat\Omega \,;\, \hat x_1 = 1 \text{ ou } \hat x_1 = 0\} \cup \{\hat{\mathbf{x}} \in \partial\hat J_\beta \,;\, \hat x_3 = \pm 1\})$$
$$S^\varepsilon_\beta = \partial\Omega \backslash \partial J^\varepsilon_\beta\,.$$

Les relations (2.0.1)-(2.0.2) induisent des conditions de compatibilité entre $\mathbf{u}(\varepsilon)$ et $\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ qui expriment qu'un point $x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon \cap \hat\Omega^\varepsilon$ est associé à deux représentants

$$\mathbf{x} \in J^\varepsilon_\beta\,, \quad \hat{\mathbf{x}} \in \hat J_\beta$$

qui sont à l'origine du couplage entre la plaque et la poutre (pour le choix des exposants du paramètre ε qui a été fait plus haut) :

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(\varepsilon)(x_1,\ \varepsilon x_2,\ x_3) &= \hat{u}_1(\varepsilon)(\mathbf{x}) && (2.0.5)\\ \varepsilon u_2(\varepsilon)(x_1,\ \varepsilon x_2,\ x_3) &= \hat{u}_2(\varepsilon)(\mathbf{x}) && (2.0.6)\\ u_3(\varepsilon)(x_1,\ \varepsilon x_2,\ x_3) &= \hat{u}_3(\varepsilon)(\mathbf{x}) && (2.0.7)\\ &\forall \mathbf{x} \in J_\beta\ . \end{aligned}}$$

On verra que ces relations jouent un rôle essentiel dans la description de la jonction.

Plus généralement, si $\mathbf{v}^\varepsilon$ décrit l'espace V^ε, le couple $(\mathbf{v}(\varepsilon),\ \hat{\mathbf{v}}(\varepsilon))$ qui lui est associé par les relations (2.0.1)-(2.0.2) décrit l'espace $V(\varepsilon)$ des déplacements « mis à l'échelle » :

$$\boxed{\begin{aligned} V(\varepsilon) := \Big\{(\mathbf{v},\ \hat{\mathbf{v}}) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1(\hat{\Omega})^3\ ;\ v_1(x_1,\ \varepsilon x_2,\ x_3) = \hat{v}_1(\mathbf{x})\ ;\\ \varepsilon v_2(x_1,\ \varepsilon x_2,\ x_3) = \hat{v}_2(\mathbf{x})\ ;\ v_3(x_1,\ \varepsilon x_2,\ x_3) = \hat{v}_3(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in J_\beta\ ;\\ \hat{\mathbf{v}} = 0 \text{ sur} \hat{\omega}_1\Big\}\ . \end{aligned}} \quad (2.0.8)$$

$V(\varepsilon)$ ainsi défini est l'espace des déplacements admissibles associé au nouveau problème (posé sur $\Omega \cup \hat{\Omega}$) que l'on écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} &\textit{Trouver } (\mathbf{u}(\varepsilon),\ \hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \in V(\varepsilon)\\ &\textit{tel que } \forall (v,\ \hat{v}) \in V(\varepsilon)\\ &\int_{\Omega \setminus J_\beta^\varepsilon} B_\varepsilon(\mathbf{u}(\varepsilon),\ \mathbf{v})\, dx + \int_{\hat{\Omega}} \hat{B}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon),\ \hat{\mathbf{v}})\, d\hat{x} =\\ &\qquad = \int_{\Omega \setminus J_\beta^\varepsilon} f_3\, v_3\, dx + \int_{S_\beta^\varepsilon} g_3\, v_3\, da + \int_{\hat{\Omega}} \hat{f}_i\, \hat{v}_i\, d\hat{x} + \int_{\hat{S}_\beta} \hat{g}_i\, \hat{v}_i\, d\hat{a} +\\ &\qquad + \varepsilon\left(\int_{\Omega \setminus J_\beta^\varepsilon} f_\alpha\, v_\alpha\, dx + \int_{S_\beta^\varepsilon} g_\alpha\, v_\alpha\, da\right) \end{aligned}}$$

(2.0.9)

où on a posé :

$$\begin{aligned}
&\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in H^1(\Omega)^3 ,\\
&B_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \varepsilon^{-4}(\lambda + 2\,\mu)\, e_{33}(\mathbf{u})\, e_{33}(\mathbf{v}) + \\
&\qquad + \varepsilon^{-2}\{\lambda\,(e_{\gamma\gamma}(\mathbf{u})\, e_{33}(\mathbf{v}) + e_{33}(\mathbf{u})\, e_{\gamma\gamma}(\mathbf{v})) + 4\,\mu e_{\alpha 3}(\mathbf{u})\, e_{\alpha 3}(\mathbf{v})\}\\
&\qquad + \{\lambda\, e_{\gamma\gamma}(\mathbf{u})\, e_{\mu\mu}(\mathbf{v}) + 2\,\mu e_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\, e_{\alpha\beta}(\mathbf{v})\}
\end{aligned} \tag{2.0.10}$$

$$\begin{aligned}
&\forall (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) \in H^1(\hat{\Omega})^3 ,\\
&\hat{B}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) := \varepsilon^{-4}\{\hat{\lambda}\, e_{\hat{\gamma}\hat{\gamma}}(\hat{\mathbf{u}})\, e_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\hat{\mathbf{v}}) + 2\,\hat{\mu} e_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\hat{\mathbf{u}})\, e_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\hat{\mathbf{v}})\} + \\
&\qquad + \varepsilon^{-2}\{\hat{\lambda}\,(e_{\hat{\gamma}\hat{\gamma}}(\hat{\mathbf{u}})\, e_{11}(\hat{\mathbf{v}}) + e_{11}(\hat{\mathbf{u}})\, e_{\hat{\gamma}\hat{\gamma}}(\hat{\mathbf{v}})) + 4\,\hat{\mu} e_{\hat{\alpha}1}(\hat{\mathbf{u}})\, e_{\hat{\alpha}1}(\hat{\mathbf{v}})\}\\
&\qquad + (\hat{\lambda} + 2\,\hat{\mu})\, e_{11}(\hat{\mathbf{u}})\, e_{11}(\hat{\mathbf{v}}) .
\end{aligned} \tag{2.0.11}$$

Commentaires

La prochaine étape consiste à étudier le comportement de la suite $\{(\mathbf{u}(\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}(\varepsilon))\}$ des déplacements mis à l'échelle lorsque ε tend vers 0.

Plus précisément, on veut montrer que cette suite converge, en un sens à préciser, vers la solution d'un problème variationnel posé sur les ouverts ω et $]0, 1[$.

On commence donc par chercher une estimation uniforme de la suite $\{(\mathbf{u}(\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}(\varepsilon))\}$ dans $H^1(\Omega)^3 \times H^1(\hat{\Omega})^3$.

Or, le nouveau problème (2.0.9) est un problème variationnel posé sur les ouverts Ω et $\hat{\Omega}$ avec une condition aux limites sur le seul déplacement $\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)$: on voit donc qu'une estimation du type annoncé est a priori exclue. Cependant, on doit s'attendre à ce que la dépendance entre $\mathbf{u}(\varepsilon)$ et $\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ due à la jonction autorise la transmission, au moins partielle, à la plaque, de la condition d'encastrement, comme on le vérifie dans le cas de la jonction entre deux plaques ou deux poutres dont une seulement est encastrée (*cf.* Ciarlet [1989a, b]).

3. RECHERCHE D'UNE MAJORATION UNIFORME DE LA SUITE $\{(\mathbf{u}(\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}(\varepsilon))\}_\varepsilon$

Comme dans Le Dret [1989a, b], il apparaît que la suite $\{u(\varepsilon)\}_\varepsilon$ ne peut pas être bornée dans $H^1(\Omega)^3$. On s'inspire directement de Le Dret [1989b] pour établir ce résultat. On commence donc par montrer qu'il y a défaut de coercivité dans le sens suivant.

PROPOSITION 3.1 (*cf.* Le Dret [1989b]) : *Si* $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1(\hat{\Omega})^3 = : V$, *on définit :*

$$|||\, (\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}})\, |||_\varepsilon^2 = \varepsilon^{-4}\Big(\|e_{33}(\mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\hat{\mathbf{v}})\|^2_{L^2(\hat{\Omega})}\Big) + $$

$$+ \varepsilon^{-2}\Big(\|e_{\alpha 3}(\mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e_{\hat{\alpha}1}(\hat{\mathbf{v}})\|^2_{L^2(\hat{\Omega})}\Big)$$

$$+ \|e_{\alpha\beta}(\mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e_{11}(\hat{\mathbf{v}})\|^2_{L^2(\hat{\Omega})}, \tag{3.1.1}$$

$$\|(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}})\|^2_V = \|\mathbf{v}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\nabla\hat{\mathbf{v}}\|^2_{L^2(\hat{\Omega})}. \tag{3.1.2}$$

Alors, $|||\, .\, |||_\varepsilon$ *est une norme sur* $V(\varepsilon)$ *équivalente à* $\|\,.\,\|_V$; *mais il existe une suite* $\{(\mathbf{z}(\varepsilon), \hat{\mathbf{z}}(\varepsilon))\}_\varepsilon$ *d'éléments de* $V(\varepsilon)$ *qui vérifient :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |||\, (\mathbf{z}(\varepsilon), \hat{\mathbf{z}}(\varepsilon))\, |||_\varepsilon = 0 ,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|(\mathbf{z}(\varepsilon), \hat{\mathbf{z}}(\varepsilon))\|_V = |\Omega| > 0 .$$

Démonstration : La première partie est une conséquence immédiate de l'inégalité de Korn appliquée aux ouverts Ω et $\hat{\Omega}$.

Pour établir le deuxième résultat, on considère, comme dans Le Dret [1989b] :

$$\hat{\mathbf{z}}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\hat{x}_2\, \dot{\varphi}(\hat{x}_1) \\ \varphi(\hat{x}_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$$

où $$\varphi \in C^\infty(0, 1)$$

$$\varphi(t) = 1 , \quad \text{si} \quad t < \beta , \quad \varphi(1) = \dot{\varphi}(1) = 0 ;$$

$$\mathbf{z}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega .$$

∎

En fait, on peut préciser le comportement de $\{u(\varepsilon)\}_\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0 : on montre en effet, comme dans Le Dret [1989b], que cette suite est majorée uniformément modulo un déplacement rigide d'ordre -1 en ε. Pour cela, on rappelle la variante de l'inégalité de Korn utilisée dans Le Dret [1989a, b].

PROPOSITION 3.2 : *Soit* $y = (\beta/2, 0, 0)$.
Il existe une constante $C > 0$ *telle que :*

$$\text{pour tout } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 ,$$

on peut trouver deux vecteurs constants a *et* b *de* $\mathbf{R}^3$ *(dépendant de* v*) vérifiant, si on pose :*

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{a} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \mathbf{b} , \tag{3.2.1}$$

les conditions

$$\int_\Omega \bar{\mathbf{v}}\, dx = 0 , \tag{3.2.2}$$

$$\int_\Omega ((\nabla \bar{\mathbf{v}})^T - \nabla \bar{\mathbf{v}})\, dx = 0 , \tag{3.2.3}$$

$$\| e(\mathbf{v}) \|_{L^2(\Omega)} = \| e(\bar{\mathbf{v}}) \|_{L^2(\Omega)} \geq C \, \| \bar{\mathbf{v}} \|_{H^1(\Omega)} . \tag{3.2.4}$$

Démonstration : (*cf.* Le Dret [1989a]). ■

On montre alors (*cf.* Le Dret [1989b]) :

PROPOSITION 3.3 : *Il existe des constantes* C, $\varepsilon_0 > 0$ *indépendantes du paramètre* ε *telles que :*

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[,$$

$$|b_1^\varepsilon| + \varepsilon |b_2^\varepsilon| + |b_3^\varepsilon| \leq C (\|\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} + \|\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{H^1(\hat{\Omega})}) \tag{3.3.1}$$

$$\varepsilon |a_1^\varepsilon| + |a_2^\varepsilon| + \varepsilon |a_3^\varepsilon| \leq C (\|\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} + \|\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{H^1(\hat{\Omega})}) . \tag{3.3.2}$$

■

Ce résultat est amélioré par la :

PROPOSITION 3.4 : *Il existe des constantes* C, $\varepsilon_0 > 0$ *indépendantes du paramètre* $\varepsilon > 0$ *telles que :*

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[,$$

$$|a_1^\varepsilon| \leq C (\|\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} + \|\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{H^1(\hat{\Omega})} + |||\, (\mathbf{u}(\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \,|||_\varepsilon) . \tag{3.4.1}$$

■

Remarque : Le raisonnement — par l'absurde — fait intervenir les quantités :

$$\kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon) = e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) , \quad \kappa_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} e_{\alpha 3}(\mathbf{u}(\varepsilon)) , \quad \kappa_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} e_{33}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \tag{3.4.2}$$

$$\hat{\kappa}_{11}(\varepsilon) = e_{11}(\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)) , \quad \hat{\kappa}_{\hat{\alpha}1}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} e_{\hat{\alpha}1}(\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)) , \quad \hat{\kappa}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} e_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)) . \tag{3.4.3}$$

■

Finalement on trouve que le résultat de majoration uniforme initialement cherché doit être remplacé par des estimations portant sur le couple $(\bar{u}(\varepsilon), \hat{u}(\varepsilon))$ ainsi que sur les vecteurs constants a^{ε}, b^{ε}. Cela s'exprime par la :

PROPOSITION 3.5 : *Il existe des constantes C, $\varepsilon_0 > 0$ indépendantes du paramètre $\varepsilon > 0$ telles que :*

$$\forall \varepsilon \in \left]0, \varepsilon_0\right[$$

$$\|\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{H^1(\hat{\Omega})} \leqslant C \,, \qquad \|\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \tag{3.5.1}$$

$$|a_1^{\varepsilon}| + |a_2^{\varepsilon}| + \varepsilon |a_3^{\varepsilon}| \leqslant C \tag{3.5.2}$$

$$|b_1^{\varepsilon}| + \varepsilon |b_2^{\varepsilon}| + |b_3^{\varepsilon}| \leqslant C \,. \tag{3.5.3}$$

■

COROLLAIRE 3.6 : *Avec les notations* (3.4.2)-(3.4.3) *on a :*

$$\forall \varepsilon \in \left]0, \varepsilon_0\right[\,,$$

$$\|\kappa(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \tag{3.6.1}$$

$$\|\hat{\kappa}(\varepsilon)\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leqslant C \,. \tag{3.6.2}$$

■

Compte tenu des résultats obtenus, on pose :

$$\mathbf{u}(\varepsilon) = \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\varepsilon) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3^{\varepsilon} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 - \beta/2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2^{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.6.3}$$

ce qui revient à faire rentrer dans $\bar{u}(\varepsilon)$ les composantes bornées (donc a priori convergentes) des vecteurs a^{ε}, b^{ε}.

Des estimations (3.5.1)-(3.5.3) et de (3.6.3) on déduit :

$$\|\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \,, \qquad \forall \varepsilon \in \left]0, \varepsilon_0\right[\,. \tag{3.6.4}$$

COROLLAIRE 3.7 : *Il existe des suites extraites, encore paramétrées à l'aide de ε pour simplifier l'écriture, telles que :*

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\varepsilon) \to \bar{\bar{\mathbf{u}}} \quad \text{dans} \quad \mathbf{H}^1(\Omega)^3 \quad \text{faible} \tag{3.7.1}$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon) \to \hat{\mathbf{u}} \quad \text{dans} \quad \mathbf{H}^1(\hat{\Omega})^3 \quad \text{faible} \tag{3.7.2}$$

$$\varepsilon a_3^{\varepsilon} \to a_3 \tag{3.7.3}$$

$$\varepsilon b_2^{\varepsilon} \to b_2 \tag{3.7.4}$$

$$\boldsymbol{\kappa}(\varepsilon) \to \boldsymbol{\kappa} \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^2(\Omega)^9 \quad \text{faible} \tag{3.7.5}$$

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) \to \hat{\boldsymbol{\kappa}} \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^2(\hat{\Omega})^9 \quad \text{faible} \tag{3.7.6}$$

■

Remarques

1) Dans le second membre de l'inégalité (2 0 9), le paramètre ε factorise la somme

$$\int_{\Omega \setminus J_\beta^\varepsilon} f_\alpha v_\alpha \, d\mathbf{x} + \int_{S_\beta^\varepsilon} g_\alpha v_\alpha \, d\mathbf{a} .$$

C'est une conséquence immédiate des hypothèses asymptotiques (2 0.3)-(2.0 4) faites sur les densités de forces.

Cet artifice se justifie a priori si on remarque que malgré la forme « imparfaite » des estimations (3.3 1)-(3.3 2) et (3.4 1) qui ne permettent pas de majorer uniformément les suites $\{a_3^\varepsilon\}_\varepsilon$ et $\{b_2^\varepsilon\}_\varepsilon$, on peut néanmoins établir les estimations (3 5 1) sans difficulté supplémentaire.

2) On peut noter la puissance de la Proposition 3 2 qui, indépendamment de la géométrie du problème étudié (*cf* aussi Le Dret [1989a, b]), permet de montrer que la suite des déplacements mis à l'échelle converge à un déplacement rigide près lorsqu'une partie seulement de la structure élastique est encastrée

3) On ne sait pas si les estimations (3.5.2)-(3 5.3) sont optimales. Par contre, elles s'imposent naturellement au cours du raisonnement, en particulier lorsqu'on veut établir (3 5.1) au moyen des équations (2.0.9) lorsque la fonction-test est $(u(\varepsilon), \hat{u}(\varepsilon))$.

D'autre part, le contre-exemple de la Proposition 3.1 est un couple $(\mathbf{z}(\varepsilon), \hat{\mathbf{z}}(\varepsilon))$ pour lequel $(\varepsilon^{-1}\mathbf{z}(\varepsilon), \varepsilon^{-1}\hat{\mathbf{z}}(\varepsilon))$ appartient aussi à $V(\varepsilon)$ et $\varepsilon^{-1} z(\varepsilon)$ est un déplacement rigide dans Ω de la forme :

$$\mathbf{a}^\varepsilon \wedge \begin{pmatrix} x_1 - \beta/2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mathbf{b}^\varepsilon$$

avec $$\mathbf{a}^\varepsilon = 0 , \quad b_1^\varepsilon = b_3^\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad b_2^\varepsilon \quad \text{non borné}$$

lorsque ε tend vers 0.

4) On peut déjà énoncer une première propriété de l'application $\bar{\bar{\mathbf{u}}}$ ·

PROPOSITION 3 8 *La limite $\bar{\bar{\mathbf{u}}}$ vérifie*

$$\int_\Omega \bar{\bar{u}}_2 \, d\mathbf{x} = 0 \tag{3.8 1}$$

$$\int_\Omega (\partial_1 \bar{\bar{u}}_2 - \partial_2 \bar{\bar{u}}_1) \, d\mathbf{x} = 0 \tag{3.8.2}$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des relations (3.2.2)-(3.2.3) vérifiées en particulier par $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ et de la définition de $\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\varepsilon)$. ■

4. IDENTIFICATION DU PROBLÈME LIMITE

On déduit aisément de ce qui précède que $\bar{\bar{\mathbf{u}}}$ est un déplacement de Kirchhoff-Love et que $\hat{\mathbf{u}}$ est un déplacement de Bernoulli-Navier. Plus précisément :

PROPOSITION 4.1 :

i) $$\exists (\zeta_\alpha) \in H^1(\omega)^2 , \quad \exists \zeta_3 \in H^2(\omega)\ tq :$$

$$\begin{cases} \bar{\bar{\mathbf{u}}}_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x_1, x_2) - x_3\, \partial_\alpha \zeta_3(x_1, x_2) \\ \bar{\bar{\mathbf{u}}}_3(x) = \zeta_3(x_1, x_2) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

$$\forall x \in \Omega .$$

De plus, (ζ_α) *vérifie :*

$$\int_\omega \zeta_2\, d\omega = \int_\omega (\partial_1 \zeta_2 - \partial_2 \zeta_1)\, d\omega = 0 . \tag{4.1.2}$$

ii) $$\exists \hat{\zeta}_1 \in H^1(0, 1) , \quad \exists (\hat{\zeta}_{\hat{\alpha}}) \in H^2(0, 1)^2\ tq :$$

$$\begin{cases} \hat{u}_1(\hat{x}) = \hat{\zeta}_1(\hat{x}_1) - \hat{x}_{\hat{\alpha}}\, \hat{\zeta}'_{\hat{\alpha}}(\hat{x}_1) \\ \hat{u}_{\hat{\alpha}}(\hat{x}) = \hat{\zeta}_{\hat{\alpha}}(\hat{x}_1) \end{cases} \tag{4.1.3}$$

$$\forall \hat{x} \in \Omega .$$

De plus, $\hat{\zeta}$ *vérifie*

$$\hat{\zeta}_i(1) = \hat{\zeta}'_{\hat{\alpha}}(1) = 0 . \tag{4.1.4}$$

Démonstration : Le raisonnement étant désormais classique, on ne le détaille pas ici.

On peut trouver une démonstration de (4.1.1) dans Ciarlet et Destuynder [1979a], de (4.1.3) dans Aufranc [1990].

Les égalités (4.1.2) se déduisent immédiatement de (3.8.1)-(3.8.2), compte tenu de (4.1.1).

Les conditions aux limites (4.1.4) s'obtiennent sans difficulté à partir de la condition d'encastrement sur la poutre. ■

Écrire le problème variationnel dont $(\bar{\bar{u}}, \hat{u})$ est solution équivaut à rechercher celui que satisfait le couple $(\zeta, \hat{\zeta})$. On commence par déterminer l'espace fonctionnel auquel appartient $(\zeta, \hat{\zeta})$: dans un certain sens, c'est la limite, quand ε tend vers 0, de l'espace $V(\varepsilon)$ décrit par (2.0.8). En particulier, la régularité de $(\zeta, \hat{\zeta})$ ainsi que les conditions aux limites (4.1.4) découlent de l'inclusion de $V(\varepsilon)$ dans $H^1(\Omega)^3 \times H^1(\hat{\Omega})^3$ et de la condition $\hat{u}(\varepsilon) = 0$ sur $\hat{\omega}_1$ vérifiée par $(u(\varepsilon), \hat{u}(\varepsilon))$.

Il reste à voir ce que deviennent les égalités (2.0.5)-(2.0.7) quand ε tend vers 0 : plus précisément, on va montrer que le couplage plaque-poutre évoqué plus haut se traduit par l'existence de relations de compatibilité entre ζ et $\hat{\zeta}$ induites par la jonction. Le premier résultat qui suit est immédiat.

PROPOSITION 4.2 : *Si* $\omega_\beta := \{x \in \omega \,;\, 0 < x_1 < \beta,\, x_2 = 0\}$

$$\zeta_1|_{\omega_\beta} = \hat{\zeta}_1|_{(0,\beta)} \tag{4.2.1}$$

$$\hat{\zeta}_2|_{]0,\beta[} = a_3\left(x_1 - \frac{\beta}{2}\right) + b_2 \tag{4.2.2}$$

$$\zeta_3|_{\omega_\beta} = \hat{\zeta}_3|_{(0,\beta)}\,. \tag{4.2.3}$$

■

Étant donné la régularité de $\zeta_3 (\in H^2(\omega))$, il faut encore ajouter une condition au bord portant sur une dérivée de ζ_3.

On y parvient en adaptant au cas étudié ici le raisonnement utilisé dans Le Dret [1989b]. On a besoin d'un résultat préliminaire.

PROPOSITION 4.3 :

$$\kappa_{\alpha 3} = 0 \quad dans \quad \Omega\,. \tag{4.3.1}$$

■

On peut alors montrer la relation de compatibilité supplémentaire recherchée.

PROPOSITION 4.4 :

$$\partial_2 \zeta_3|_{\omega_\beta} = -C_0\left\{\int_\Omega x_2 f_3\,dx + \int_{\partial\Omega} x_2 g_3\,da\right\} \tag{4.4.1}$$

où $C_0 = C_0(\beta) > 0$ *est la constante de rigidité à la torsion de la poutre.*

Démonstration : La démonstration qui suit est une adaptation des idées de Le Dret [1989b]. Comme elle est très longue, on la subdivise en neuf étapes.

On commence par établir un lemme technique très utile dans la suite (Lemme 4.4.0).

LEMME 4.4.0 : *Soit* $\{\tau(\varepsilon)\}_\varepsilon$ *une suite d'éléments de* $L^2(\Omega\ ;\ S^3)$ *vérifiant si* $J_\beta := (-1, 1)_{x_2} \times \omega_{13}^\beta$,

$$\|\tau(\varepsilon)\|_{H^1((-1,-\varepsilon)_{x_2}\,;\,H^{-1}(\omega_{13}^\beta))} \leq C \tag{4.4.0-1}$$

$$\|\tau(\varepsilon)\|_{H^1((\varepsilon,1)_{x_2}\,;\,H^{-1}(\omega_{13}^\beta))} \leq C \tag{4.4.0-2}$$

$$\|\tau(\varepsilon)\|_{L^2((-1,1)_{x_2}\,;\,H^{-1}(\omega_{13}^\beta))} \leq C \tag{4.4.0-3}$$

Alors :

$$\tau(\varepsilon) \to 0 \quad dans \quad H^{-1}(\omega_{13}^\beta)\,. \tag{4.4.0-4}$$

Démonstration du Lemme 4.4.0 : Suivant une idée de Le Dret, on introduit un prolongement par réflexion de $\tau(\varepsilon)$, noté $\tilde{\tau}(\varepsilon)$, en posant :

$$\begin{cases} \tilde{\tau}(\varepsilon)(x) = \tau(\varepsilon)(x) & \text{si } x \in \Omega \backslash J_\beta^\varepsilon \\ \tilde{\tau}(\varepsilon)(x) = \tau(\varepsilon)(x_1, -(2\varepsilon + x_2), x_3) & \text{si } x \in J_\beta^\varepsilon \quad \text{et} \quad x_2 < 0 \\ \tilde{\tau}(\varepsilon)(x) = \tau(\varepsilon)(x_1, 2\varepsilon - x_2, x_3) & \text{si } x \in J_\beta^\varepsilon \quad \text{et} \quad x_2 > 0\,. \end{cases} \tag{4.4.0-5}$$

On vérifie immédiatement que $\tilde{\tau}(\varepsilon)$ est un élément de l'espace

$$H^1((-1,0)_{x_2}\,;\,H^{-1}(\omega)) \cup H^1((0,1)_{x_2}\,;\,H^{-1}(\omega))\,.$$

Les hypothèses (4.4.0-1)-(4.4.0-3) permettent de montrer que $\tilde{\tau}(\varepsilon)$ converge vers 0 pour la topologie faible de cet espace, de sorte qu'en particulier, en prenant les traces sur ω_{13}^β :

$$\tilde{\tau}(\varepsilon)|_{(x_2 = 0^\pm)} \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\omega_{13}^\beta) \quad \text{faible}\,. \tag{4.4.0-6}$$

On conclut à l'aide de (4.4.0-6) et des inclusions :

$$H^1((-1,0)_{x_2}\,;\,H^{-1}(\omega_{13}^\beta)) \hookrightarrow C^{0,1/2}([-1,0]_{x_2}\,;\,H^{-1}(\omega_{13}^\beta))$$
$$H^1((1,0)_{x_2}\,;\,H^{-1}(\omega_{13}^\beta)) \hookrightarrow C^{0,1/2}([0,1]_{x_2}\,;\,H^{-1}(\omega_{13}^\beta))$$

ainsi que de la définition (4.4.0-5) de $\tilde{\tau}(\varepsilon)$. ■

Démonstration de la Proposition 4.4

Première étape

Posant :

$$\hat{l}(\varepsilon) = \widehat{\text{rot}}\,(\varepsilon^{-1}\,\hat{u}_{\hat{\alpha}}(\varepsilon)) \in L^2(\hat{\Omega}) \tag{4.4.2}$$

on déduit des relations à la jonction (2.0.5)-(2.0.7) :

$$\hat{l}(\varepsilon)(x) = 2\,[\partial_3 \bar{\bar{u}}_2(\varepsilon)(x_1, \varepsilon x_2, x_3) - e_{23}(\bar{\bar{u}}(\varepsilon))(x_1, \varepsilon x_2, x_3)] \tag{4.4.3}$$

avec :

$$\partial_3 \bar{\bar{u}}_2(\varepsilon) \in H^1((-1, 1)_{x_2} ; H^{-1}(\omega_{13})) \tag{4.4.4}$$

si

$$\Omega := (-1, 1)_{x_2} \times \omega_{13}.$$

De (3.7.1), on déduit, compte tenu de la définition (4.4.1) de $\bar{\bar{u}}$ en fonction de ζ :

$$\partial_3 \bar{\bar{u}}_2(\varepsilon)|_{(x_2 = 0)} \to - \partial_2 \zeta_3|_{\omega_\beta} \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\omega_{13}^\beta) \quad \text{faible} . \tag{4.4.5}$$

En utilisant l'inclusion :

$$H^1((-1, 1)_{x_2} ; H^{-1}(\omega_{13}^\beta)) \hookrightarrow C^{0, 1/2}([-1, 1]_{x_2} ; H^{-1}(\omega_{13}^\beta))$$

on montre que (4.4.5) entraîne :

$$\partial_3 \bar{\bar{u}}_2(\varepsilon)(x_1, \varepsilon x_2, x_3) \to - \partial_2 \zeta_3|_{\omega_\beta}$$
$$\text{dans} \quad L^2((-1, 1)_{x_2} ; H^{-1}(\omega_{13}^\beta)) \quad \text{faible} . \tag{4.4.6}$$

D'autre part, on montre immédiatement, via un changement de variable, que :

$$e_{13}(\bar{\bar{u}}(\varepsilon))(x_1, \varepsilon x_2, x_3) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(J_\beta) \quad \text{fort} . \tag{4.4.7}$$

Finalement, il résulte de (4.4.4) et (4.4.7)-(4.4.8) que :

$$\boxed{\hat{l}(\varepsilon) \to - 2\, \partial_2 \zeta_3|_{\omega_\beta} \quad \text{dans} \quad L^2((-1, 1)_{x_2} ; H^{-1}(\omega_{13}^\beta)) \quad \text{faible}} \, . \tag{4.4.8}$$

Deuxième étape : convergence de la suite $\{\hat{l}(\varepsilon)\}$

On vérifie par ailleurs que :

$$\widehat{\text{rot}}\, \hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}}(\varepsilon) = \partial_1 \hat{l}(\varepsilon) \quad \text{dans} \quad L^2(0, 1 ; H^{-1}(\hat{\omega})) \tag{4.4.9}$$

et que :

$$\hat{u}(\varepsilon)|_{(\hat{x}_1 = 1)} = 0 \Rightarrow \hat{l}(\varepsilon)|_{(\hat{x}_1 = 1)} = 0 . \tag{4.4.10}$$

De (4.4.9)-(4.4.10) on déduit que la suite $\{\hat{l}(\varepsilon)\}$ est bornée pour la norme de l'espace $H^1(0, 1 ; H^{-1}(\hat{\omega}))$, de sorte que, au moins pour une suite extraite :

$$\boxed{\hat{l}(\varepsilon) \to \hat{l} \quad \text{dans} \quad H^1(0, 1 ; H^{-1}(\hat{\omega})) \quad \text{faible}} \, . \tag{4.4.11}$$

Troisième étape :

De (4.4.8) et (4.4.11) on déduit :

$$\boxed{\hat{l} = -2\, \partial_2 \zeta_3 \big|_{\omega_\beta} \quad \text{dans} \quad H^1(0, \beta\,; H^{-1}(\hat{\omega}))} \,. \tag{4.4.12}$$

Dans l'étape suivante, on détermine $\hat{l}$ dans l'ouvert $\hat{\Omega}$ entier.

Quatrième étape :

L'estimation (3.8.2) entraîne en particulier :

$$\left\| \hat{\kappa}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\varepsilon) \right\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leqslant C \quad \text{si} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \,. \tag{4.4.13}$$

L'inégalité bidimensionnelle de Korn permet alors d'en déduire que $\hat{u}_{\hat{\alpha}}(\varepsilon)$ peut se mettre sous la forme :

$$\hat{u}_{\hat{\alpha}}(\varepsilon) = \varepsilon^2\, \hat{w}_{\hat{\alpha}}(\varepsilon) + \varepsilon^2\, \hat{a}^{\varepsilon}(\hat{x}_1)(\hat{x}_3, -\hat{x}_2) + \varepsilon^2\, \hat{b}^{\varepsilon}_{\hat{\alpha}}(\hat{x}_1) \tag{4.4.14}$$

où :

$$\left\| \hat{w}_{\hat{\alpha}}(\varepsilon) \right\|_{L^2(0,\,1\,; H^1(\hat{\omega}))} \leqslant C \tag{4.4.15}$$

$$\hat{a}^{\varepsilon},\ \hat{b}^{\varepsilon} \in L^2(0, 1)\,. \tag{4.4.16}$$

On déduit de (4.4.14)-(4.4.15) et de (4.4.11) que :

$$\varepsilon \hat{a}^{\varepsilon}(\hat{x}_1) \rightharpoonup \bar{a}(\hat{x}_1) \quad \text{dans} \quad L^2(0, 1) \quad \text{faible} \tag{4.4.17}$$

avec :

$$\hat{l} = 2\, \bar{a}(\hat{x}_1) \quad \text{dans} \quad L^2(0, 1)\,. \tag{4.4.18}$$

Alors, la régularité de $\hat{l}$ entraîne :

$$\boxed{\begin{gathered} \bar{a} \in H^1(0, 1) \\ \hat{l} = 2\, \bar{a}(\hat{x}_1) \quad \text{dans} \quad H^1(0, 1\,; H^{-1}(\hat{\omega})) \end{gathered}} \,. \tag{4.4.19}$$

Remarques :

i) De (4.4.19) et (4.4.12) on déduit que :

$$\partial_2\, \zeta_{3\,|\,\omega_\beta} = -\, \bar{a}\,|_{]0,\, \beta[} \,.$$

ii) En passant à la limite dans l'égalité (4.4.9) on obtient, compte tenu de (4.4.19) :

$$\boxed{\widehat{\mathrm{rot}}\ \hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}} = 2\ \dot{\hat{\alpha}}(\hat{x}_1) \quad \text{dans} \quad L^2(0, 1\ ; H^{-1}(\hat{\omega}))}\ . \tag{4.4.20}$$

On est donc ramené à étudier $\hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}}$ pour $0 < \hat{x}_1 < \beta$. ■

Cinquième étape : convergence de la suite $\{\hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}}(\varepsilon)\}_\varepsilon$

i)

$$-\ \partial_{\hat{\beta}}\ \hat{\kappa}_{1\hat{\beta}} = 0 \quad \text{dans} \quad D'(\hat{\Omega})\ .$$

De (4.3.8) et (4.3.3) on déduit :

$$-\ 2\ \hat{\mu}\ \partial_{\hat{\beta}}\hat{\kappa}_{1\hat{\beta}}(\varepsilon) = \varepsilon(\hat{f}_1 + \partial_1\hat{\Sigma}_{11}(\varepsilon)) \quad \text{dans} \quad \hat{\Omega} \tag{4.4.21}$$

avec :

$$\varepsilon(\hat{f}_1 + \partial_1\hat{\Sigma}_{11}(\varepsilon)) \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(0, 1\ ; L^2(\hat{\omega})) \quad \text{fort}\ . \tag{4.4.22}$$

On en déduit, compte tenu de (4.4.21) et (3.7.6) :

$$\boxed{-\ \partial_{\hat{\beta}}\hat{\kappa}_{1\hat{\beta}} = 0 \quad \text{dans} \quad D'(\hat{\Omega})}\ . \tag{4.4.23}$$

ii)

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{13}\ \hat{\mathbf{n}}_{13} = 0 \quad \textbf{sur} \quad \partial\hat{\boldsymbol{\Omega}}\ .$$

D'après (4.3.8) on a aussi :

$$-\ 2\ \hat{\mu}\ \partial_3\hat{\kappa}_{13}(\varepsilon) = \varepsilon\ \partial_1\hat{\Sigma}_{11}(\varepsilon) + 2\ \hat{\mu}\ \partial_2\hat{\kappa}_{12}(\varepsilon) + \varepsilon\hat{f}_1 \quad \text{dans} \quad \hat{\Omega}\ . \tag{4.4.24}$$

On en déduit, compte tenu de (3.6.2) :

$$\left\|\hat{\kappa}_{13}(\varepsilon)\right\|_{H^1((-1,\,1)_{\hat{x}_3}\,;\,H^{-1}(\hat{\omega}_{12}))} \leqslant C \tag{4.4.25}$$

si $\hat{\Omega} := (0, 1)_{x_3} \times \hat{\omega}_{12}$.

Il en résulte, au moins pour une suite extraite :

$$\hat{\kappa}_{13}(\varepsilon)|_{(\hat{x}_3 = \pm 1)} \to \hat{\kappa}_{13}|_{(\hat{x}_3 = \pm 1)} \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\hat{\omega}_{12})\ \text{faible}\ . \tag{4.4.26}$$

Or, (4.3.8) entraîne, compte tenu de la définition (4.3.3) de $\hat{\Sigma}_{13}(\varepsilon)$:

$$\begin{cases} \hat{\kappa}_{13}(\varepsilon)|_{(\hat{x}_3=+1)} = \dfrac{\varepsilon}{2\hat{\mu}}\hat{g}_1 \\ \hat{\kappa}_{13}(\varepsilon)|_{(\hat{x}_3=-1)} = -\dfrac{\varepsilon}{2\hat{\mu}}\hat{g}_1 \end{cases} \tag{4.4.27}$$

$$\text{sur} \quad \hat{\omega}_{12}.$$

On en déduit :

$$\hat{\kappa}_{13}(\varepsilon)|_{(\hat{x}_3=\pm 1)} \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\hat{\omega}_{12}) \quad \text{fort}. \tag{4.4.28}$$

Alors, (4.4.26) et (4.4.28) entraînent :

$$\boxed{\hat{\kappa}_{13}\,\hat{n}_{13} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\hat{\Omega}} \tag{4.4.29}$$

iii)

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{12}\,\hat{\mathbf{n}}_2 = 0 \quad \textbf{sur} \quad \partial\hat{\boldsymbol{\Omega}}.$$

Un raisonnement analogue à partir de l'égalité :

$$-2\,\hat{\mu}\;\partial_2\hat{\kappa}_{12}(\varepsilon) = 2\,\hat{\mu}\;\partial_3\hat{\kappa}_{13}(\varepsilon) + \varepsilon\;\partial_1\hat{\Sigma}_{11}(\varepsilon) + \varepsilon\hat{f}_1 \quad \text{dans} \quad \hat{\Omega} \tag{4.4.30}$$

montre que :

$$\hat{\kappa}_{12\,|\,(\hat{x}_2=\pm 1)} = 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\hat{\omega}_{13}\backslash\hat{\omega}_{13}^{\beta}) \tag{4.4.31}$$

si $\hat{\Omega} := (-1, 1)_{x_2} \times \hat{\omega}_{13}$, $\hat{J}_\beta := (-1, 1)_{x_2} \times \hat{\omega}_{13}^{\beta}$.

Il reste à vérifier que :

$$\hat{\kappa}_{12\,|\,(\hat{x}_2=\pm 1)} = 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\hat{\omega}_{13}^{\beta}). \tag{4.4.32}$$

Or, d'après (4.3.8) :

$$2\,\hat{\mu}\,\hat{\kappa}_{12}(\varepsilon)(x_1, \pm 1, x_3) = \varepsilon\Sigma_{12}(\varepsilon)(x_1, \pm 1, x_3) \quad \text{dans} \quad \omega_{13}^{\beta}. \tag{4.4.33}$$

Pour étudier le second membre de cette égalité, on remarque que :

$$-\varepsilon\;\partial_2\Sigma_{12}(\varepsilon) = \varepsilon\;\partial_1\Sigma_{11}(\varepsilon) + \varepsilon\;\partial_3\Sigma_{13}(\varepsilon) + \varepsilon^2 f_1 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash J_\beta^{\varepsilon}. \tag{4.4.34}$$

Les estimations (3.6.1)-(3.6.2) et les définitions (4.3.5)-(4.3.6) de $\Sigma_{11}(\varepsilon)$ et $\Sigma_{13}(\varepsilon)$ permettent de montrer que le second membre de l'égalité (4.4.34) est borné dans l'espace

$$L^2((-1, 1)_{x_2};\; H^{-1}(\omega_{13})),$$

de sorte que les hypothèses (4.4.0-1)-(4.4.0-2) du Lemme 4.4.0 sont vérifiées pour $\tau(\varepsilon) = \varepsilon \Sigma_{12}(\varepsilon)$.

Utilisant à nouveau les estimations (3.6.1)-(3.6.2), on montre qu'il en est de même pour l'hypothèse (4.4.0-3). On en déduit, à l'aide du Lemme 4.4.0, que :

$$\varepsilon \Sigma_{12}(\varepsilon)(x_1, \pm 1, x_3) \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\omega_{13}^{\beta}) \text{ faible} . \tag{4.4.35}$$

Alors, passant à la limite dans les deux membres de l'égalité (4.4.33) on en déduit (4.4.32).

De (4.4.31)-(4.4.32) il résulte que :

$$\boxed{\hat{\kappa}_{12}\, \hat{n}_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \hat{\Omega}} . \tag{4.4.36}$$

iv) *Conclusion :*

En conclusion, (4.4.23), (4.4.29) et (4.4.36) donnent le système :

$$\boxed{\begin{array}{lll} -\partial_{\hat{\beta}} \hat{\kappa}_{1\hat{\beta}} = 0 & \text{dans} & \hat{\Omega} \\ \hat{\kappa}_{1\hat{\beta}}\, \hat{n}_{\hat{\beta}} = 0 & \text{sur} & \partial \hat{\Omega} \end{array}} \tag{4.4.37}$$

où :

$$\hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}} \in L^2(\hat{\Omega}) .$$

Sixième étape : calcul de $\hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}}$

C'est une conséquence directe de ce qui précède. En effet, il en résulte qu'il existe une application $\hat{\Psi}$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Psi} \in L^2(0, 1 ; H^1(\hat{\omega})) \\ (\hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}}) = \widehat{\mathbf{Rot}}\ \hat{\Psi}(\hat{x}) \quad \text{dans} \quad \{\hat{x}_1\} \times \hat{\omega} \end{array} \right. \tag{4.4.38}$$

où :

$$\widehat{\mathbf{Rot}}\ \hat{\Psi} = (\partial_3 \hat{\Psi}, -\partial_2 \hat{\Psi})$$

avec $\hat{\Psi}$ solution du problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \hat{\underset{\sim}{\Delta}} \hat{\Psi} = \widehat{\mathbf{rot}}\ \hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}} & \text{dans} & \{\hat{x}_1\} \times \hat{\omega} \\ \hat{\Psi} = 0 & \text{sur} & \{\hat{x}_1\} \times \partial \hat{\omega} \end{array} \right. \tag{4.4.39}$$

$$0 < \hat{x}_1 < 1 .$$

Or, de (4.4.39) on déduit, compte tenu de l'expression du rotationnel de $\hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}}$ donnée par (4.4.20), qu'il existe une application $\hat{\chi}$ telle que :

$$\hat{\chi} \in H^1(\hat{\omega}), \quad \hat{\Psi}(\hat{x}) = 2\,\dot{\bar{a}}(\hat{x}_1)\,\hat{\chi}(\hat{\underset{\sim}{x}}), \quad (\hat{\underset{\sim}{x}} = (\hat{x}_2, \hat{x}_3)) \tag{4.4.40}$$

et $\hat{\chi}$ est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \hat{\underset{\sim}{\Delta}}\hat{\chi} = 1 & \text{dans} \quad \hat{\omega} \\ \hat{\chi} = 0 & \text{sur} \quad \partial\hat{\omega}\,. \end{cases} \tag{4.4.41}$$

Par suite, (4.4.38) et (4.4.40) entraînent :

$$\boxed{(\hat{\kappa}_{1\hat{\alpha}}) = 2\,\dot{\bar{a}}(\hat{x}_1)\,\widehat{\mathbf{Rot}}\,\hat{\chi}(\hat{\underset{\sim}{x}}) \quad \text{dans} \quad L^2(0, 1\,; L^2(\hat{\omega}))}\,. \tag{4.4.42}$$

Septième étape : calcul de $\bar{a}|_{]0, \beta[}$

D'après les relations à la jonction (2.0.5)-(2.0.7) et les définitions (3.4.2)-(3.4.3) de $\kappa(\varepsilon)$ et $\hat{\kappa}(\varepsilon)$, on a, par un calcul direct :

$$\kappa_{ij}(\varepsilon)(x_1, \varepsilon x_2, x_3) = \hat{\kappa}_{ij}(\varepsilon)(x) \quad \text{dans} \quad J_\beta\,. \tag{4.4.43}$$

Or :

$$\kappa_{13}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} e_{13}(\bar{\bar{u}}(\varepsilon)) \in H^1((-1, 1)_{x_2}\,; H^{-1}(\omega_{13}))$$

et cette quantité est bornée uniformément pour la norme de l'espace

$$H^1((-1, 1)_{x_2}\,; H^{-1}(\omega_{13}))\,.$$

On en déduit, en utilisant (4.3.1) et la continuité de l'application trace :

$$\kappa_{13}(\varepsilon)|_{(x_2 = 0)} \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\omega_{13})\text{ faible}\,. \tag{4.4.44}$$

Compte tenu de l'inclusion :

$$H^1((-1, 1)_{x_2}\,; H^{-1}(\omega_{13})) \hookrightarrow C^{0, 1/2}([-1, 1]_{x_2}\,; H^{-1}(\omega_{13}))$$

on déduit de (4.4.44) que :

$$\kappa_{13}(\varepsilon)(x_1, \varepsilon x_2, x_3) \to 0 \text{ dans } L^2((-1, 1)_{x_2}\,; H^{-1}(\omega_{13}^{\beta})) \text{ faible}\,. \tag{4.4.45}$$

De l'égalité (4.4.43) et de (4.4.45) il résulte que :

$$\hat{\kappa}_{13} = 0 \quad \text{dans} \quad \hat{J}_\beta \tag{4.4.46}$$

ce qui donne, compte tenu de (4.4.42) :

$$\dot{\bar{a}}(\hat{x}_1)\,\partial_2\hat{\chi} = 0 \quad \text{dans} \quad \hat{J}_\beta\,. \tag{4.4.47}$$

Raisonnant par l'absurde on en déduit, grâce à la régularité de $\hat{\chi}$ et à l'égalité (4.4.41) que :

$$\boxed{\dot{\bar{a}} = 0 \quad \text{dans} \quad]0, \beta[}\,. \tag{4.4.48}$$

Il en résulte, puisque $\bar{a}$ est dans $H^1(0, 1)$ d'après (4.4.19) :

$$\boxed{\bar{a}(\hat{x}_1) = \text{Cte} = \bar{a}(\beta) \quad \text{dans} \quad]0, \beta[}\,. \tag{4.4.49}$$

Huitième étape : calcul de $\bar{a}|_{]\beta, 1[}$

Déterminons $\bar{a}|_{]\beta, 1[}$.

Pour cela, on se donne $\hat{\xi} \in D(\beta, 1)$ et on pose :

$$\hat{v}(\hat{x}) = (0, \hat{x}_3\,\hat{\xi}(\hat{x}_1)\,, \quad -\hat{x}_2\,\hat{\xi}(\hat{x}_1))\,, \quad \forall \hat{x} \in \hat{\Omega} \tag{4.4.50}$$

$$v(x) = 0\,, \quad \forall x \in \Omega\,. \tag{4.4.51}$$

On vérifie que $(v, \hat{v})$ est un élément de $V(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. C'est donc une fonction-test admissible pour l'équation (4.3.8). Passant à la limite quand ε tend vers 0 et remarquant que (4.4.41) entraîne :

$$\int_{\hat{\omega}} (\hat{\underset{\sim}{\nabla}}\hat{\chi} \cdot \underset{\sim}{\hat{x}})\, d\underset{\sim}{\hat{x}} = 2 \int_{\hat{\omega}} \|\hat{\underset{\sim}{\nabla}}\hat{\chi}\|^2\, d\underset{\sim}{\hat{x}} > 0 \tag{4.4.52}$$

on en déduit alors que :

$$\int_\beta^1 \dot{\hat{\xi}}(\hat{x}_1)\,\dot{\bar{a}}(\hat{x}_1)\,d\hat{x}_1 = 0\,, \quad \forall \hat{\xi} \in D(\beta, 1) \tag{4.4.53}$$

ce qui entraîne :

$$\ddot{\bar{a}} = 0 \quad \text{dans} \quad (\beta, 1)\,. \tag{4.4.54}$$

De plus, d'après (4.4.19) on a :

$$\hat{l}\,|_{(\hat{x}_1 = 1)} = 0 \Rightarrow \bar{a}(1) = 0 \tag{4.4.55}$$

donc (4.4.54) entraîne :

$$\boxed{\bar{a}(\hat{x}_1) = \bar{a}(\beta)\left(\frac{1-\hat{x}_1}{1-\beta}\right) \quad \text{dans} \quad (\beta, 1)} . \tag{4.4.56}$$

Calcul de $\bar{a}(\beta)$

Pour déterminer $\bar{a}(\beta)$, et donc aussi $\bar{a}|_{(0,\beta)}$ d'après (4.4.49), on prend dans (4.3.8) :

$$\hat{v}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{x}_3(1-\hat{x}_1) \\ -\hat{x}_2(1-\hat{x}_1) \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \beta < \hat{x}_1 < 1 \tag{4.4.57}$$

$$\hat{v}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{x}_3(1-\beta) \\ -\hat{x}_2(1-\beta) \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad 0 < \hat{x}_1 < \beta \tag{4.4.58}$$

$$v(x) = v(\varepsilon)(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1} x_3(1-\beta) \\ -\varepsilon^{-1} x_2(1-\beta) \end{pmatrix} . \tag{4.4.59}$$

On vérifie que $(v(\varepsilon), \hat{v})$ appartient à $V(\varepsilon)$ et que :

$$e_{ij}(v(\varepsilon)) = 0 , \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3 . \tag{4.4.60}$$

Les calculs donnent alors :

$$\boxed{\left(2\,\hat{\mu} \int_{\hat{\omega}} \|\hat{\underset{\sim}{\nabla}} \hat{\chi}\|^2 \, d\hat{\underset{\sim}{x}}\right) \bar{a}(\beta) = (1-\beta)\left\{\int_{\Omega} x_2 f_3 \, dx + \int_{\partial\Omega} x_2 g_3 \, da\right\}} . \tag{4.4.61}$$

Neuvième étape : conclusion

On conclut grâce à (4.4.12), (4.4.19), (4.4.49) et (4.4.61). ■

Remarques :

1) Dans l'étude du raidissement d'une plaque au moyen de poutres (Aufranc [1990]) les conditions aux limites dues à la jonction diffèrent de celles que l'on obtient dans les Propositions 4.3 et 4.4 : en particulier, le Lemme 2.2.1 de la référence citée ne contient pas l'analogue de la

Proposition 4.4. Cela tient à la nature des deux problèmes puisque dans le cas des raidisseurs, la poutre ne peut être encastrée à l'une de ses extrémités que si la plaque l'est aussi sur le côté correspondant : d'un point de vue mathématique, cela fournit une condition aux limites supplémentaire portant sur les dérivées de la flexion de la plaque qui rend inutile toute relation du type (4.4.1). ■

On est maintenant en possession d'un nombre suffisant de relations de compatibilité à la jonction pour écrire les équations d'équilibre du problème limite.

On a montré que le couple $(\zeta, \hat{\zeta})$ est dans l'espace affine :

$$\boxed{\begin{gathered} V_\beta := \Big\{ (\eta, \hat{\eta}) \in H^1(\omega)^3 \times H^1(0,1)^3 \,;\, \eta_3 \in H^2(\omega),\ \hat{\eta}_{\hat{\alpha}} \in H^2(0,1), \\ \hat{\eta}_i(1) = \dot{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}(1) = 0,\ \int_\omega \eta_2 \, d\omega = \int_\omega (\partial_1 \eta_2 - \partial_2 \eta_1) \, d\omega = 0\,, \\ \eta_{1|\omega_\beta} = \hat{\eta}_{1|(0,\beta)},\ \eta_{3|\omega_\beta} = \hat{\eta}_{3|(0,\beta)}\,; \\ \exists\, (a(\hat{\eta}_2), b(\hat{\eta}_2)) \in \mathbf{R}^2,\ \hat{\eta}_{2|(0,\beta)} = a(\hat{\eta}_2)(x_1 - \beta/2) + b(\hat{\eta}_2)\,, \\ \partial_2 \eta_{3|\omega_\beta} = -C_0 \left\{ \int_\Omega x_2 f_3 \, dx + \int_{\partial\Omega} x_2 g_3 \, da \right\} \Big\} \end{gathered}} \tag{4.7.10}$$

où $C_0 > 0$ dépend uniquement des caractéristiques de la plaque et de la poutre (c'est la constante de rigidité à la torsion de la poutre).

$(\zeta, \hat{\zeta})$ est donc déterminé si on montre que c'est la solution d'une équation variationnelle dont les fonctions-tests sont prises dans l'espace vectoriel TV_β défini par :

$$\boxed{\begin{gathered} TV_\beta := \Big\{ (\eta, \hat{\eta}) \in H^1(\omega)^3 \times H^1(0,1)^3 \,;\, \eta_3 \in H^2(\omega),\ \hat{\eta}_{\hat{\alpha}} \in H^2(0,1), \\ \hat{\eta}_i(1) = \dot{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}(1) = 0,\ \int_\omega \eta_2 \, d\omega = \int_\omega (\partial_1 \eta_2 - \partial_2 \eta_1) \, d\omega = 0\,, \\ \eta_{1|\omega_\beta} = \hat{\eta}_{1|(0,\beta)},\ \eta_{3|\omega_\beta} = \hat{\eta}_{3|(0,\beta)}\,; \\ \exists\, (a(\hat{\eta}_2), b(\hat{\eta}_2)) \in \mathbf{R}^2,\ \hat{\eta}_{2|(0,\beta)} = a(\hat{\eta}_2)(x_1 - \beta/2) + b(\hat{\eta}_2)\,, \\ \partial_2 \eta_{3|\omega_\beta} = 0 \Big\}\,. \end{gathered}} \tag{4.7.11}$$

THÉORÈME 4.8 : *Le couple* $(\zeta, \hat{\zeta})$ *est solution du problème variationnel :*

$$(\zeta, \hat{\zeta}) \in V_\beta ;$$

$$\forall (\eta, \hat{\eta}) \in TV_\beta ;$$

$$\frac{2E}{(1-\nu^2)} \int_\omega [(1-\nu)\, e_{\alpha\beta}(\zeta) + \nu\, e_{\gamma\gamma}(\zeta)\, \delta_{\alpha\beta}]\, e_{\alpha\beta}(\eta)\, d\omega$$

$$+ \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \int_\omega [(1-\nu)\, \partial_{\alpha\beta}\zeta_3 + \nu(\Delta\zeta_3)\, \delta_{\alpha\beta}]\, \partial_{\alpha\beta}\eta_3\, d\omega$$

$$+ 4\hat{E} \int_0^1 \dot{\hat{\zeta}}_1\, \dot{\hat{\eta}}_1\, d\hat{x}_1 + \frac{4}{3}\hat{E} \int_0^1 \ddot{\hat{\zeta}}_{\hat{\alpha}}\, \ddot{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}\, d\hat{x}_1$$

$$= a(\hat{\eta}_2)\Big[- \Big(\int_\Omega x_2 f_1\, dx + \int_{\partial\Omega} x_2 g_1\, da \Big) +$$

$$+ \Big(\Big(\int_\Omega (x_1 - \beta/2) f_2\, dx + \int_{\partial\Omega} (x_1 - \beta/2)\, g_2\, da \Big) \Big) \Big]$$

$$+ b(\hat{\eta}_2) \int_\Omega f_2\, dx + \int_{\partial\Omega} g_2\, da$$

$$+ \int_\omega \Big\{ g_3^+ + g_3^- + \int_{-1}^{+1} f_3\, dx_3 \Big\}\, \eta_3\, d\omega + \int_\gamma \Big\{ \int_{-1}^{+1} g_3\, dx_3 \Big\}\, \eta_{3|\gamma}\, d\gamma$$

$$+ \int_0^1 \Big\{ \int_{\hat{\omega}} \hat{f}_i\, d\underset{\sim}{\hat{x}} + \chi(0, \beta) \int_{-1}^{+1} (\hat{g}_i^+ + \hat{g}_i^-)\, d\hat{x}_2 + \chi(\beta, 1) \int_{\partial\hat{\omega}} \hat{g}_i\, d\underset{\sim}{\hat{a}} \Big\}\, \hat{\eta}_i\, d\hat{x}_1$$

$$- \int_0^1 \Big\{ \int_{\hat{\omega}} \hat{x}_2 \hat{f}_1\, d\underset{\sim}{\hat{x}} + \chi(0, \beta) \int_{-1}^{+1} \hat{x}_2 (\hat{g}_1^+ + \hat{g}_1)\, d\hat{x}_2 +$$

$$+ \chi(\beta, 1) \int_{\partial\hat{\omega}} \hat{x}_2\, \hat{g}_i\, d\underset{\sim}{\hat{a}} \Big\}\, \dot{\hat{\eta}}_2\, d\hat{x}_1$$

$$- \int_0^1 \Big\{ \int_{\hat{\omega}} \hat{x}_3 \hat{f}_1\, d\underset{\sim}{\hat{x}} + \chi(0, \beta) \int_{-1}^{+1} (\hat{g}_1^+ - \hat{g}_1)\, d\hat{x}_2 +$$

$$+ \chi(\beta, 1) \int_{\partial\hat{\omega}} \hat{x}_3\, \hat{g}_i\, d\underset{\sim}{\hat{a}} \Big\}\, \dot{\hat{\eta}}_3\, d\hat{x}_1$$

où on a posé : (4.8.1)

$$\hat{E} = \hat{\mu}\, \frac{(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})}{\hat{\lambda} + \hat{\mu}} > 0\,, \quad E = \mu\, \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} > 0 \qquad (4.8.2)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} > 0\,. \qquad (4.8.3)$$

Démonstration : On utilise la même méthode que dans Ciarlet, Le Dret, Nzengwa [1989] et Le Dret [1990a] : étant donnée une fonction-test arbitraire $(\eta, \hat{\eta})$ dans $TV_\beta \cap C^\infty(\omega)^3 \times C^\infty(0, 1)^3$, on définit $(v, \hat{v}) \in C^\infty(\Omega)^3 \times C^\infty(\hat{\Omega})^3$ par les relations :

$$v(x) = \begin{pmatrix} \eta_1(x_1, x_2) - x_3\, \partial_1 \eta_3(x_1, x_2) \\ \eta_2(x_1, x_2) - x_3\, \partial_2 \eta_3(x_1, x_2) \\ \eta_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} \tag{4.8.4}$$

$$\hat{v}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1(\hat{x}_1) - \hat{x}_\alpha\, \dot{\hat{\eta}}_\alpha(\hat{x}_1) \\ \hat{\eta}_2(\hat{x}_1) \\ \hat{\eta}_3(\hat{x}_1) \end{pmatrix} \tag{4.8.5}$$

et on construit une approximation $(v(\varepsilon), \hat{v}(\varepsilon)) \in V(\varepsilon)$ de $(v, \hat{v})$ pour la norme $|||\,.\,|||_\varepsilon$ avant de passer à la limite dans (2.0.9) écrit avec $(v(\varepsilon), \hat{v}(\varepsilon))$ comme fonction-test. ■

Remarques :

1) D'un point de vue « physique », les relations (4.2.1)-(4.2.3) et (4.4.1) montrent que la structure étudiée subit un raidissement partiel au niveau de la jonction. En particulier, de (4.4.2) et (4.4.1) on déduit que la poutre, tout en subissant une rotation d'angle a_3, reste dans un plan vertical fixe au niveau de la jonction et qu'elle impose cette configuration à la plaque dont la rotation autour de l'axe de la poutre est rendue impossible ($\partial_2 \zeta_3|_{\omega_\beta} = \text{Cte}$).

Il est naturel de comparer le problème étudié ici avec l'analyse de Aufranc [1990] sur la modélisation des raidisseurs d'une plaque car les deux situations sont très proches l'une de l'autre. En particulier, on a vu que l'analyse ci-dessus fournit une relation supplémentaire (4.4.1) par rapport au cas d'un « vrai » raidisseur : elle est due clairement à l'absence de condition de Dirichlet qui, imposée sur le bord de la plaque, suffirait à rendre le problème coercif.

On peut avancer une explication « mécanique » à ce phénomène curieux, suggérée par Le Dret. En fait, dans le cas étudié par Aufranc, la condition d'encastrement de la plaque sur une partie de son bord l'oblige à se déformer en torsion. Par contre, dans le cas étudié ici, la plaque est libre de tourner dans l'espace et de relaxer cette torsion en suivant la torsion de la poutre. En l'absence de forces suffisantes, le minimum d'énergie pour que cela se réalise est atteint pour une torsion évidemment nulle, alors que pour des raidisseurs, la condition d'encastrement agit comme une contrainte — au sens de l'optimisation si on veut — sur les déformations, et cela empêche une telle relaxation.

2) Le problème limite (4.8.1) ainsi obtenu peut se découpler en deux problèmes indépendants coercifs. Plus précisément, on montre que $(\zeta_3, (\hat{\zeta}_{\hat{\alpha}}))$ d'une part, $((\zeta_\alpha), \hat{\zeta}_1)$ d'autre part, sont les solutions de deux problèmes variationnels indépendants admettant chacun une solution unique.

Pour être tout à fait complet, on termine avec un résultat de convergence sur la suite $\{(\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}(\varepsilon))\}_\varepsilon$ qui n'ajoute rien à la description du problème limite mais est intéressant en soi.

PROPOSITION 4.9 : *Toute la suite* $\{(\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}(\varepsilon))\}_\varepsilon$ *converge fortement dans l'espace* $H^1(\Omega)^3 \times H^1(\hat{\Omega})^3$.

Démonstration : Cf. Ciarlet, Le Dret, Nzengwa [1989].

BIBLIOGRAPHIE

M. AUFRANC [1990a], Sur quelques problèmes de jonctions dans les multi-structures élastiques, *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie,* Paris.

M. AUFRANC [1990b], Junctions between three-dimensional and two-dimensional non-linearly elastic structures (submitted to *Asymptotic Analysis*).

P. G. CIARLET [1980], A justification of the Von Kármán equations, *Arch Rational Mech Anal*, 73, 349-389.

P. G. CIARLET [1990], Plates and junctions in elastic multi-structures : An asymptotic analysis, *Masson,* Paris.

P. G. CIARLET, P. DESTUYNDER [1979a], A justification of the two-dimensional plate model, *J Mecanique,* 18, 315-344.

P. G. CIARLET, P. DESTUYNDER [1979b], A justification of a non linear model in plate theory, *Comp Methods Appl Mech Engrg*, 17/18, 227-258.

P. G. CIARLET, H. LE DRET, R. NZENGWA [1989], Junctions between three-dimensional and two-dimensional linearly elastic structures, *J. Math Pures Appl*, 68, 261-295.

A. CIMETIÈRE, G. GEYMONAT, H LE DRET, A. RAOULT, Z. TUTEK [1988], Asymptotic theory and analysis for displacement and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods, *J Elasticity,* 19, 111-161.

P. DESTUYNDER [1980], Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques, *Doctoral Dissertation, Université Pierre et Marie Curie,* Paris.

P. DESTUYNDER [1981], Comparaison entre les modèles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité, *RAIRO Modél Math Anal Numér*, 15, 331-369.

P. DESTUYNDER [1986], Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire, *Masson,* Paris.

H. LE DRET [1989a], Folded plates revisited, *Comput Mech*, 5, 345-365

H. LE DRET [1989b], Modelling of the junction between two rods, *J. Math. Pures Appl.*, 68, 365-397.

H. LE DRET [1990a], Modelling of a folded plate, *Comput. Mech.*, 5, 401-416.

H. LE DRET [1990b], Vibrations of a folded plate, *Math. Model. & Numer. Anal.*, à paraître.

A. RIGOLOT [1972], Sur une théorie asymptotique des poutres, *J. Mécanique*, 11, 673-703.