

B. DUCOMET

D. HA. QUANG

Diffusion électromagnétique à basse fréquence par un réseau de cylindres diélectriques. Étude numérique

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 26, n° 6 (1992), p. 709-738

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1992__26_6_709_0

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



**DIFFUSION ÉLECTROMAGNÉTIQUE
A BASSE FRÉQUENCE PAR UN RÉSEAU
DE CYLINDRES DIÉLECTRIQUES
ÉTUDE NUMÉRIQUE (*)**

par B. DUCOMET ⁽¹⁾ et D. Ha. QUANG ⁽²⁾

Communiqué par Cl BARDOS

Résumé — Nous proposons une formulation numérique correspondant à la modélisation d'un réseau périodique de fils diélectriques placé au-dessus d'un plan conducteur, fondée sur la résolution d'un problème de transmission. Nous comparons les résultats numériques obtenus à des mesures effectuées sur ce modèle, et nous étudions l'influence des paramètres physiques et géométriques sur la validité de diverses approximations physiques du même système.

Abstract — Low frequency electromagnetic diffusion by a grating of dielectric cylinders numerical study. The low-frequency electromagnetic scattering by a grating of dielectric cylinders, is numerically investigated by a boundary integral equation method. We compare our results to experiments, and we analyse the influence of physical and geometrical parameters upon the validity range of several approximate models.

1. INTRODUCTION

Il est bien connu que la mise en œuvre numérique des problèmes de multidiffusion (acoustiques, électromagnétiques) est très lourde, c'est une des raisons pour laquelle on s'intéresse depuis longtemps à des modèles approchés, permettant de prendre en compte la multidiffusion sans avoir à traiter explicitement tous les degrés de liberté du système, au moins dans certains régimes de fonctionnement. Dans cet ordre d'idées, on peut citer les conditions de transmissions artificielles [1], les conditions aux limites absorbantes [3], et les théories de milieux effectifs [2].

(*) Received for publication April 4, 1991

(1) Service de Physique et Techniques Nucléaires, CEA-Centre d'Études de Bruyères-le-Châtel, BP 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France

(2) CISI Ingénierie CEN-Saclay, France

Malheureusement, le calcul du phénomène complet est en général hors de portée (trop grand nombre d'inconnues), et rares sont les situations physiques où l'on peut analyser complètement, sur un même modèle, plusieurs niveaux d'approximation, pour comparer les simulations obtenues à des résultats expérimentaux.

Nous proposons ici un cas très simple d'une telle situation, dans le cadre électromagnétique bidimensionnel périodique, possédant un nombre restreint de degrés de liberté, où on voit apparaître des effets de multidiffusion, à « moindre frais », et où on peut comparer plusieurs approximations au calcul « exact », et à l'expérience.

Le plan suivi est le suivant : après une description du modèle (section 2), nous présentons dans la section 3 les résultats du problème de transmission qui est le problème « exact ». Dans la section 4, nous analysons le problème de Robin (condition aux limites de type impédance), qui est une approximation du premier problème dès que le coefficient d'impédance est convenablement identifié. Nous donnons ensuite (section 5) la méthode numérique utilisée pour résoudre ces problèmes, ainsi que (section 6) deux approximations classiquement utilisées (l'approximation « filaire » des calculs d'antenne [4] et un calcul de couche homogène équivalente [2]). Nous faisons enfin (section 7) une étude paramétrique de ces quatre modèles, et nous les comparons à des cas mesurés.

2. MODÉLISATION PHYSIQUE

2.1. Description sommaire du système physique

Le système étudié, représenté sur la figure 1, est un réseau périodique de cylindres diélectriques placé au-dessus d'un plan métallique, supposé parfaitement conducteur.

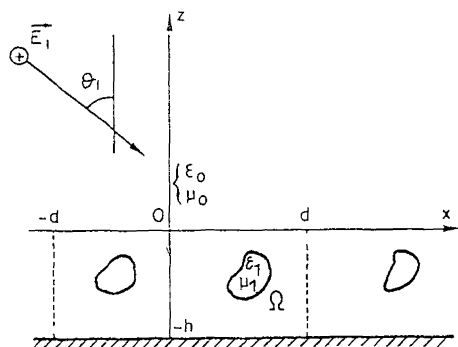


Figure 1. — Le réseau de cylindres diélectriques.

On considère la diffraction par ce réseau, d'une onde plane, polarisée parallèlement aux génératrices des cylindres.

On note : d la période du réseau, h l'épaisseur du diélectrique, a le rayon des fils (ϵ_0, μ_0), les caractéristiques physiques du vide ($\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$), les caractéristiques physiques des cylindres, λ la longueur d'onde incidente, et k_0 le nombre d'onde associé. θ_i est l'angle d'incidence de l'onde plane, et on note $\alpha = k_0 \sin \theta_i$ et $\beta = k_0 \cos \theta_i$.

2.2. Equations du problème

Nous avons donné ailleurs une étude théorique de ce problème [5], [18], et nous allons en rappeler les résultats nécessaires à la compréhension, renvoyant à la référence précitée pour les détails et les preuves.

Dans toute la suite, on notera ϕ le champ inconnu, et η sera un paramètre scalaire associé à ce champ, selon la polarisation choisie ($\eta = \mu$, dans le cas Transverse Electrique (TE); $\eta = \epsilon$, dans le cas Transverse Magnétique (TM)).

L'équation satisfaite par ϕ est alors l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \phi + k_j^2 \phi = 0 \tag{1}$$

où :

1. $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, ω étant la pulsation du rayonnement incident,
2. $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$, dans les obstacles.

La condition sur l'interface inférieur M parfaitement conducteur se traduit par :

1. dans le cas Transverse Electrique (TE) :

$$\phi |_M = 0 \tag{2}$$

2. dans le cas Transverse Magnétique (TM) :

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi |_M = 0 . \tag{2'}$$

Les conditions de transmission s'écrivent, en terme de ϕ , à l'interface 0, 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = \phi_0 \\ \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial n} \phi_1 = \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 . \end{array} \right. \tag{3}$$

Les équations (1) (2) (3) définissent alors un problème bien posé, à condition de leur adjoindre une condition de rayonnement à l'infini.

Auparavant, rappelons l'expression des solutions élémentaires utilisées dans la résolution.

2.3. Fonctions de Green périodiques adaptées au réseau

On note ξ , le point générique (x, z) , et on considère la fonction de Green \mathbf{G} , solution dans le demi-espace $z > -h$, de l'équation :

$$(\Delta_\xi + k_0^2) \mathbf{G}(\xi, \zeta) = -e^{-i\alpha x} \sum_z \delta(x - x_0 - nd) \delta(z - z_0) \quad (4)$$

où $\zeta = (x_0, z_0)$.

On considère l'une des deux conditions sur le plan conducteur inférieur :

1. en mode TE :

$$\mathbf{G}(\xi, \zeta)|_{z=-h} = 0 \quad (5)$$

2. en mode TM :

$$\frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(\xi, \zeta)|_{z=-h} = 0 \quad (5')$$

où on a posé $\alpha = k_0 \sin \theta_i$.

Le calcul de cette fonction de Green (relation (A3) de l'annexe) donne :

$$\mathbf{G}(\xi, \zeta) = \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id} \sum_z e^{2in\pi \frac{x-x_0}{d}} S_n(z, z_0). \quad (6)$$

On introduit, parallèlement à \mathbf{G} , une fonction de Green interne \mathbf{G}^1 , correspondant au matériau de l'obstacle, solution du problème :

$$(\Delta_\xi + k_1^2) \mathbf{G}^1(\xi, \zeta) = -e^{-i\alpha(x-x_0)} \sum_z \delta(x - x_0 - nd) \delta(z - z_0)$$

avec les mêmes conditions de rayonnement à l'infini. On notera, par analogie, \mathbf{G}^0 la fonction de Green externe solution de (4).

Grâce à ces solutions élémentaires, le problème (1) (2) (2') (3) peut se ramener à la résolution d'un système d'équations intégrales posé sur le bord de l'obstacle situé dans la maille élémentaire.

3. LE PROBLÈME DE TRANSMISSION

On définit un certain nombre d'opérateurs intégraux agissant sur des fonctions définies sur le bord de l'obstacle élémentaire.

On rappelle les notations géométriques suivantes :

Le demi-espace physique :

$$\mathcal{E}_p = \{(x, z); x \in \mathbf{R}, z > -h\} .$$

Le miroir :

$$\mathcal{M} = \{(x, -h); x \in \mathbf{R}\} .$$

Le réseau \mathbf{S} , constitué de l'ensemble des obstacles :

$$\mathbf{S} = \Omega + d\mathbf{Z} \vec{e}_x ,$$

où \vec{e}_x est le vecteur unitaire de x' .

Le demi-espace physique externe :

$$\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_p \setminus \mathbf{S} .$$

Si on considère la cellule élémentaire : $\mathbf{T} = \{(x, z); 0 < x < d, z > -h\}$, on peut alors définir les quantités « locales » associées à cette cellule.

$$\Omega_0 = \mathcal{E}_e \cap \mathbf{T},$$

$$\Omega_1 = \Omega,$$

$$\mathfrak{J}_h = \{(x, -h); 0 < x < d\} ,$$

La section de Ω_0 à l'altitude ζ :

$$\Sigma_\zeta = \{(x, z); 0 \leq x \leq d, z = \zeta\} .$$

Le complémentaire « tronqué » de Ω_0 à l'altitude ζ :

$$\Omega_{0, \zeta} = \{(x, z) \in \Omega_0; z \leq \zeta\}$$

où on suppose que $\zeta \geq \max \{z : (x, z) \in \Omega_1\}$. □

On peut chercher la solution quasi-périodique sous la forme du développement de Rayleigh-Bloch :

$$\Phi(x, z) = e^{i\alpha x} \sum_z e^{i\beta_n x} v_n(z)$$

où $\beta_n = \frac{2n\pi}{d} + \alpha$.

Cette décomposition permet d'énoncer la condition de rayonnement dans le cas 1-périodique, en terme de v_n :

Condition \mathcal{R} (Alber) [13] :

1. Pour $n \in \mathbf{Z}$ et $\beta_n^2 \leq k_0^2$, lorsque $z \rightarrow +\infty$:

$$\frac{dv_n}{dz} = i(k_0^2 - \beta_n^2)^{1/2} v_n + o\left(\frac{1}{z}\right).$$

2. Pour $n \in \mathbf{Z}$ et $\beta_n^2 \geq k_0^2$, lorsque $z \rightarrow +\infty$:

$$v_n = o\left(\frac{1}{z}\right). \quad \square$$

Cette condition nous permet de poser correctement le problème de diffusion.

Il sera commode d'utiliser la notation suivante, pour la solution « libre » :

$$\phi^l = E^i - E^r \quad (7)$$

où $E^i = e^{i(\alpha x + \beta z)}$ est l'onde plane incidente et $E^r = e^{-2i\beta h} e^{i(\alpha x - \beta z)}$ est l'onde plane réfléchie, en l'absence du réseau.

On notera de même :

$$\phi^d = \phi^e - \phi^l,$$

le champ diffracté par le réseau.

On considère alors le :

Problème \mathcal{P}_0 : « Trouver les fonctions $\phi^d = \phi^e - \phi^l$, ϕ^l vérifiant :

$$\begin{aligned} (\Delta + k_0^2) \phi^d &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}_e \\ (\Delta + k_1^2) \phi^l &= 0 \quad \text{dans } \mathbf{S} \end{aligned}$$

ainsi que :

1. les conditions de transmission (4) aux interfaces \mathbf{S} ,
2. la condition de miroir sur \mathcal{M} ,
3. la condition \mathcal{R} d'Alber, à l'infini $z > 0$. »

On introduit, d'après [13] [7] [12], des espaces fonctionnels adaptés au cas quasi-périodique.

On considère l'ensemble des fonctions test quasi-périodiques :

$C_\alpha^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega), \text{supp}(u) \text{ compact en la variable } z \text{ et } u(x+d, z) = e^{i\alpha d} u(x, z)\}$ où Ω est un ouvert régulier de \mathcal{E}_p .

On notera alors $H_\alpha^1(\Omega)$, la fermeture de $C_\alpha^\infty(\Omega)$, dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$.

On peut alors donner un sens précis au développement de Rayleigh-Bloch (9), en munissant $H_\alpha^1(\Omega_{0, \zeta})$ d'une norme appropriée (voir [7]).

On associe à $H^1_\alpha(\Omega)$, l'espace :

$$H^1_\Delta(\Omega) = \{u \in H_1(\Omega) ; \Delta u \in L^2(\Omega)\} .$$

Si on définit le prolongement quasi-périodique de $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega_0)$ par $\tilde{u}^{(\alpha)}$, tel que :

$$\tilde{u}^{(\alpha)}(x + d) = e^{i\alpha x} \tilde{u}^{(\alpha)}(x) .$$

Alors, on dira que u appartient à l'espace de Sobolev « quasi-périodique » $H^1_{\Delta, \alpha}(\Omega)$, si $u \in H^1_\alpha(\Omega) \cap H^1_\Delta(\Omega)$ et si $\tilde{u}^{(\alpha)} \in H^1_{\Delta, \text{loc}}(\mathcal{E}_p)$.

On introduit enfin, en suivant [12], les espaces fonctionnels « extérieur » et « intérieur » suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0 &= \{ \phi \in H^1_{\Delta, \alpha, \text{loc}}(\Omega_0) : (\Delta + k_0^2) \phi = 0 ; \\ \phi \Big|_{\mathfrak{J}_h} &= 0 \left(\text{resp. } \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\mathfrak{J}_h} = 0 \right) \text{ (TE) (resp. (TM))} ; \\ &\phi \text{ satisfaisant la condition } \mathcal{R} \text{ à l'infini } \} \\ \mathcal{L}^1 &= \{ \phi \in H^1_{\Delta, \alpha}(\Omega_1) : (\Delta + k_1^2) \phi = 0 \} . \end{aligned}$$

Ces espaces permettent de résoudre le problème dans la cellule élémentaire.

Avec ces définitions, le problème \mathcal{P}_0 se reformule comme suit :

Problème \mathcal{P} : Trouver $\phi_0^d \in \mathcal{L}^0$, $\phi_2 \in \mathcal{L}^1$, vérifiant, à travers l'interface Γ , les conditions de transmission \mathfrak{T} :

$$\begin{aligned} \phi_0^d + \phi^l &= \phi_1 \\ \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial}{\partial n} (\phi_0^d + \phi^l) &= \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial n} \phi_1 . \end{aligned}$$

3.1. Unicité de la solution de \mathcal{P}

On fera dans la suite les hypothèses physiques raisonnables suivantes :

1. les parties réelles des nombres ε_j et μ_j sont positives
2. $\Im m \varepsilon_0$ et $\Im m \mu_0$ sont nulles

On rappelle [5] la :

PROPOSITION 1 : Si les constantes μ_1 et ε_1 , vérifient la condition suivante :

$$\Im m \left(\frac{1}{\mu_1} \right) - \frac{1}{\lambda_N} \Im m (\varepsilon_1) \leq 0 ,$$

où λ_N est la première valeur propre non nulle du problème de Neumann associé au Laplacien dans $L^2(\Omega_1)$ alors le problème homogène \mathcal{P} admet la seule solution triviale.

3.2. Formule de représentation et potentiels de surface

On introduit les potentiels définis sur le bord $\Gamma = \partial\Omega_1$, pour tout $\phi \in C^\infty(\Gamma)$, par : $\forall \xi \in \Omega_\alpha$, $\alpha = 0, 1$:

$$V_{\Omega_\alpha} \phi(\xi) := -2 \int_{\Gamma} \mathbf{G}^\alpha(\xi, \zeta) \phi(\zeta) d\Gamma(\zeta)$$

$$K_{\Omega_\alpha} \phi(\xi) := -2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial n}(\xi, \zeta) \phi(\zeta) d\Gamma(\zeta).$$

On a alors [5] le résultat de représentation suivant :

LEMME 2 : 1. $\forall \phi_0 \in \mathcal{L}^0$ et $\forall \xi \in \Omega^0$, on a :

$$\phi_0(\xi) = \frac{1}{2} (V_{\Omega_0} \psi^0(\xi) - K_{\Omega_0} v^0(\xi)) \quad (8)$$

où $v^0 = \phi_0|_{\Gamma}$ et $\psi^0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial n}|_{\Gamma}$.

2. $\forall \phi_1 \in \mathcal{L}^1$ et $\forall \xi \in \Omega_1$, on a :

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2} (K_{\Omega_1} v^1(\xi)) - (V_{\Omega_1} \psi^1(\xi)) \quad (9)$$

où $v^1 = \phi_1|_{\Gamma}$ et $\psi^1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial n}|_{\Gamma}$.

Les équations (15) et (16) expriment les champs ϕ_j en tout point de $\Omega_0 \cup \Omega_1$, en fonction de leur valeur et de celle de leur dérivée normale, à l'interface Γ .

Pour trouver ces fonctions inconnues, on se ramène à un système d'équations intégrales, valable que le bord Γ soit régulier ou polygonal. Pour cela, on introduit d'abord les potentiels de simple et double couche, ainsi que leurs dérivées, relatifs à Γ :

Pour tout $\phi \in C^\infty(\Gamma)$, tout $\xi \in \Gamma$, et $\alpha = 0, 1$:

$$V_\alpha \phi(\xi) := -2 \int_{\Gamma} \mathbf{G}^\alpha(\xi, \zeta) \phi(\zeta) d\Gamma(\zeta) \quad (10)$$

$$K_\alpha \phi(\xi) := -2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial n_\zeta}(\xi, \zeta) \phi(\zeta) d\Gamma(\zeta) \quad (11)$$

$$K'_\alpha \phi(\xi) := -2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial n_\xi}(\xi, \zeta) \phi(\zeta) d\Gamma(\zeta) \quad (12)$$

$$D_\alpha \phi(\xi) := -\frac{\partial}{\partial n_\xi} K_{\Omega_\alpha} \phi(\xi). \quad (13)$$

On définit les opérateurs matriciels relatifs à l'interface Γ :

$$\mathcal{A}_\alpha = \begin{pmatrix} -K_\alpha & V_\alpha \\ D_\alpha & K'_\alpha \end{pmatrix}, \text{ pour } \alpha = 0, 1. \quad (14) \quad \square$$

On montre alors [5] le :

THÉORÈME 3 : Soit $(v, \psi) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists u \in \mathcal{L}^\alpha$ tel que v et ψ sont les valeurs au bord de u sur Γ .
2. $(1 - (-1)^\alpha \mathcal{A}_\alpha) \begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} = 0$.
3. $\exists (g, h) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que :

$$\begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} = \mathcal{C}_\alpha \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

où les $\mathcal{C}_\alpha = 1/2(1 + (-1)^\alpha \mathcal{A}_\alpha)$, $\alpha = 0, 1$, sont les opérateurs de Calderon correspondant à l'interface Γ . □

Ce résultat permet d'écrire le système d'équations intégrales cherché, sous la forme : « Trouver (v_0, ψ_0) et (ψ_1, ψ_1) , valeurs au bord sur Γ respectives dans \mathcal{L}^0 et \mathcal{L}^1 , satisfaisant le système :

$$(1 - \mathcal{A}_0) \begin{pmatrix} v_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

$$(1 + \mathcal{A}_1) \begin{pmatrix} v_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^l \\ \psi^l \end{pmatrix} \quad (17)$$

où M est la matrice de transmission :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_0}{\eta_1} \end{pmatrix}$$

et où v_l et ψ_l sont les valeurs du champ libre ϕ_l et de sa dérivée normale sur Γ ».

Pour simplifier l'écriture du système, on utilise le résultat suivant concernant les valeurs « au bord » v^l et ψ^l du champ libre ϕ^l .

LEMME 4 : On a la relation :

$$(1 + \mathcal{A}_0) \begin{pmatrix} v^l \\ \psi^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

L'élimination de deux des quatre inconnues dans les relations (15) (16) (17) (18) conduit alors au système d'équations intégrales de Fredholm de première espèce :

Trouver (v, ψ) solution de :

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} = -M^{-1} \begin{pmatrix} v^l \\ \psi^l \end{pmatrix} \quad (19)$$

où :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_1 + M^{-1} \mathcal{A}_0 M).$$

Explicitelement :

$$\mathcal{H} = 1/2 \begin{pmatrix} - (K_0 + K_1) V_1 + \frac{\eta_0}{\eta_1} V_0 \\ D_1 + \frac{\eta_1}{\eta_0} D_0 K'_0 + K'_1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors l'équivalence des deux systèmes (15) (16) (17), d'une part, et (19) d'autre part.

Rappelons pour terminer le résultat d'existence et d'unicité :

THÉORÈME 5 : *Sous la condition d'unicité de la proposition 2, l'équation $\mathcal{H}u = v$ a une unique solution, et si $v \in H^s \times H^{s-1}$, il en est de même pour u .*

Avant de passer à la résolution numérique du système (19), nous allons rappeler la définition du coefficient de réflexion du réseau.

3.3. Comportement asymptotique et coefficient de réflexion

Le comportement asymptotique, en champ lointain, du système est donné par la :

PROPOSITION 6 : *Il existe, pour $kd < 2\pi$, un nombre complexe $\mathcal{R}(k)$ unique appelé coefficient de réflexion du système périodique (Ω_0, Ω_1) , tel que le champ total $\bar{\phi}_0$ vérifie la condition asymptotique suivante :*

$$\lim_{z_0 \rightarrow +\infty} (\bar{\phi}_0(\xi) - E^l(\xi) + \mathcal{R}(k) \cdot E^r(\xi)) = 0$$

où $\xi = (x_0, z_0)$, E^l et E^r sont les champs libres définis dans la section 3.

On a de plus, la formule de représentation :

$$\mathcal{R}(k) = R_0(k) - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} E(\xi) v^0(\xi) d\Gamma(\xi) + \int_{\Gamma} E(\xi) \psi^0(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (20)$$

où (v^0, ψ^0) est la solution du problème \mathcal{P}' , et :

$$E(\zeta) = \frac{e^{-i\alpha x}}{2i\beta d} (e^{i\beta z} - e^{-i\beta(z+2h)})$$

où $R_0(k) = e^{-2i\beta h}$ est le coefficient de réflexion du plan conducteur supposé seul. □

Les propriétés de scattering du système périodique sont ainsi complètement caractérisées par un seul coefficient, qui joue le rôle d'amplitude de diffusion.

C'est ce coefficient qui est l'« observable » physique, et c'est lui que nous comparerons aux mesures.

Auparavant, nous allons donner la formulation du problème de Robin extérieur pour ce même système, qui jouera le rôle d'approximation du problème de transmission, lorsque les cylindres auront une section assez « petite ».

4. PROBLÈME DE ROBIN EXTÉRIEUR

On remplace la condition de transmission, par la condition d'impédance dite « de Robin », sur le bord Γ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \lambda \phi = 0,$$

où $\lambda \in C$, et où ϕ est le champ total : $\phi = \phi_0 + \phi^l$.

On considère le :

Problème \mathcal{L} .

« Trouver $\phi_0 \in \mathcal{L}^0$, vérifiant la condition d'impédance (36) sur Γ ».

4.1. Résolution du problème

On a la condition d'unicité :

PROPOSITION 7 : *Si les paramètres complexes λ et k_0 vérifient l'inégalité :*

$$\frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Im}(\lambda \bar{k}_0^2)} \leq \frac{1}{\lambda_N},$$

où λ_N est la constante de la proposition 1, le problème homogène \mathcal{L} admet la seule solution triviale.

D'après les lemmes 2 et 3, et en notant $\phi = \phi_0 + \phi^l$, $\psi = \psi^0 + \psi^l$, $v = v_0 + v^l$, les quantités relatives au champ total, on obtient l'équation intégrale en v :

$$v(\xi) = v^l(\xi) - (K + \lambda V) v(\xi)$$

On notera $\mathbf{X} = H^{-1/2}(\Gamma)$ et $\mathcal{B} = -K - \lambda V$

D'après les propriétés des potentiels K et V , on obtient alors le résultat suivant :

THÉORÈME 8 :

1. Sous l'hypothèse d'unicité de la proposition 2, l'opérateur $(\mathcal{B} - I)^{-1}$ est un opérateur de $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$. L'équation (37) a donc une solution unique

2. En notant $\mathcal{B}(\lambda)$ la dépendance de \mathcal{B} en λ , on voit que $\mathcal{B}(\lambda)$ est compact dans \mathbf{X} , pour tout $\lambda \in \Lambda$, Λ étant une bande complexe $|\text{Im}(\lambda)| \leq \kappa$, d'épaisseur κ assez petite $\mathcal{B}(\lambda)$ est donc borné et holomorphe, comme fonction de λ dans $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ et le problème de Robin a bien, pour $\lambda \in \Lambda$, une solution unique

4.2. Comportement asymptotique et coefficient de réflexion

Le comportement asymptotique, en champ lointain, du système est donné par [5] :

PROPOSITION 9 · Il existe, pour $kd < 2\pi$, un nombre complexe $\mathcal{R}'(k)$ unique, appelé coefficient de réflexion du système périodique (Ω_0, λ) , tel que le champ total ϕ vérifie la condition asymptotique suivant

$$\lim_{z_0 \rightarrow +\infty} (\phi(\xi) - E^l(\xi) + \mathcal{R}'(k) \cdot E^r(\xi)) = 0$$

où $\xi = (x_0, z_0)$, E^l et E^r sont les champs libres définis dans la section 3.

On a de plus la formule de représentation

$$\mathcal{R}'(k) = R_0(k) - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_{\zeta}} E(\zeta) + \lambda E(\zeta) \right) v^0(\zeta) d\Gamma(\zeta) \quad (21)$$

où v^0 est la solution du problème \mathcal{L} , et

$$E(\zeta) = \frac{e^{-i\alpha x}}{2i\beta d} (e^{i\beta z} - e^{-i\beta(z+2h)})$$

où $R_0(k) = e^{-2i\beta h}$ est le coefficient de réflexion du plan conducteur supposé seul

Reste à identifier le coefficient λ , ce qui permettra d'obtenir une approximation du problème de transmission.

4.3. Identification du coefficient d'impédance

Nous allons rappeler brièvement les résultats du problème classique de la diffraction [16] d'une onde plane $\phi^i(r, \theta) = e^{-ik_0 r \cos \theta}$, par un cylindre circulaire diélectrique avec condition de transmission ou d'impédance au bord, après quoi nous identifierons le coefficient d'impédance équivalent.

Considérons la diffraction de l'onde plane ϕ^i par un cylindre homogène de rayon b et de caractéristiques ϵ_1 et μ_1 . On note $\zeta = \frac{\mu_1}{\mu_0}$ le coefficient de transmission, et $k_1 = \omega (\epsilon_1 \mu_1)^{1/2}$ le nombre d'onde interne.

Alors le champ diffracté au point (r, θ) extérieur au cylindre [17] est :

$$\phi^e(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m H_m^{(2)}(k_0 r) e^{i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}$$

où :

$$b_m = \frac{\zeta k_1 J'_m(k_1 b) J_m(k_0 b) - k_0 J_m(k_1 b) J'_m(k_0 b)}{k_0 J_m(k_1 b) H_m^{(2)}(k_0 b) - \zeta k_1 J'_m(k_1 b) H_m^{(2)}(k_0 b)}.$$

On a des expressions équivalentes pour le problème de Robin de paramètre d'impédance λ . Le champ diffracté au point (r, θ) extérieur au cylindre (voir [17]) est dans ce cas :

$$\psi^e(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_m H_m^{(2)}(k_0 r) e^{i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}$$

où :

$$B_m = - \frac{\lambda J_m(k_0 b) + k_0 J'_m(k_0 b)}{\lambda H_m^{(2)}(k_0 b) + k_0 H_m^{(2)'}(k_0 b)}.$$

Le problème est alors le suivant : peut-on trouver λ tel qu'on ait égalité des amplitudes de diffusion dans les deux problèmes précédents ?

Il est clair que la situation physiquement raisonnable est celle où k_0 et k_1 sont petits devant 1. Dans ce cas, on peut se limiter, dans (9) et (9'), aux termes $m = -1, 0, 1$. En rétrodiffusion vers l'arrière $\left(\theta = \frac{\pi}{2} \right)$, seul le terme $m = 0$ contribue, et la relation cherchée est :

$$b_0 = B_0.$$

D'où la valeur du coefficient d'impédance « phénoménologique » λ :

$$\lambda = -\xi k_1 \frac{J'_0(k_1 b)}{J_0(k_1 b)}. \quad (22)$$

On retrouve ainsi une formule utilisée par Wait [6].

Nous sommes maintenant en mesure de donner les formulations numériques des problèmes précédents.

5. RÉOLUTION NUMÉRIQUE

5.1. Résolution du problème de transmission

Pour résoudre (19), nous allons d'abord discrétiser le bord Γ de l'obstacle élémentaire.

5.1.1. Discrétisation géométrique

Dans l'équation (19), le second membre est une donnée du problème. On a $v_l = \phi^l|_{\Gamma}$ et $\psi_l = \frac{\partial}{\partial n} \phi^l|_{\Gamma}$, où ϕ^l est donné par (7).

Nous nous limitons, pour simplifier, au cas de cylindres de section circulaire. Le bord Γ du cylindre élémentaire est alors défini par :

$$\Gamma = (\xi = (x(\theta), z(\theta)); x(\theta) = \mathbf{x} + a \cos \theta, z(\theta) = \mathbf{z} + a \sin \theta),$$

où (\mathbf{x}, \mathbf{z}) est le centre du cercle.

La dérivée normale au point $\xi \in \Gamma$ est :

$$\frac{\partial}{\partial n_{\xi}} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial z}.$$

On considère une discrétisation régulière de Γ :

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^{N-1} \Gamma_k,$$

où $\Gamma_k = ((x, z) \in \Gamma; \theta_k \leq \theta < \theta_{k+1})$ pour $k = 0, 1 \dots N-1$, et où $\theta_k = k\delta$, avec $\delta = \frac{2\pi}{N}$, avec la convention $\theta_N = \theta_0$.

On appellera ξ_k le point de discrétisation générique de Γ , et on considère le réseau des ξ_k :

$$\Xi^{(N)} = (\xi_k; k = 0 \dots N-1).$$

5.1.2. *Approximation du système*

On choisit pour v , la valeur au bord du champ, une approximation d'ordre zéro sur chaque Γ_k :

$$v(\xi) = v_k \quad \text{pour} \quad \theta_k \leq \theta < \theta_{k+1} .$$

On choisit également pour ψ , la dérivée normale du champ, une approximation constante par morceau sur chaque Γ_k :

$$\psi(\xi) = \psi_k \quad \text{pour} \quad \theta_k \leq \theta < \theta_{k+1} .$$

On écrit, en tout point ξ de $\Xi^{(N)}$:

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} (\xi) = -M^{-1} \begin{pmatrix} v^l \\ \psi^l \end{pmatrix} (\xi) .$$

On obtient ainsi, compte tenu des relations (23), un système linéaire de $2N$ équations à $2N$ inconnues. Il faut maintenant examiner plus précisément le calcul des opérateurs intégraux singuliers (relations (10)-(13)) [8], [9].

5.1.3. *Calcul des opérateurs singuliers*

On utilise une version différente des fonctions de Green, obtenue à partir de celle de l'annexe par transformée de Poisson, faisant intervenir naturellement (voir l'annexe) les fonctions de Hankel H_p^2 , pour $p = 0, 1, 2$:

$$\mathbf{G}^j(\xi, \zeta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m (\mathcal{R}_m^j - \mathcal{S}_m^j)$$

où $\lambda_m = \frac{-i}{4} e^{-m\alpha_j d}$, $\mathcal{R}_m^j = H_0^2(k_j r_m)$, $\mathcal{S}_m^j = H_0^2(k_j s_m)$ et où les distances r_m et s_m sont données par :

$$\begin{aligned} r_m &= ((x - x_0 - md)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2} \\ s_m &= ((x - x_0 - md)^2 + (2h + z + z_0)^2)^{1/2} . \end{aligned}$$

Si \wp symbolise l'un des opérateurs \mathfrak{J} , $\frac{\partial}{\partial n_\zeta}$, $\frac{\partial}{\partial n_\xi}$, $\frac{\partial^2}{\partial n_\zeta \partial n_\xi}$, on a alors formellement :

$$\wp \mathbf{G}^j(\xi, \zeta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m (\wp \mathcal{R}_m^j - \wp \mathcal{S}_m^j) (\xi, \zeta) .$$

Il s'agit de calculer les quantités $\wp \mathcal{R}_m^j$ et $\wp \mathcal{S}_m^j$, ainsi que les intégrales singulières correspondantes [10].

On vérifie les expressions suivantes, pour les dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \mathcal{R}_m^j(\xi, \zeta) = -k_j \frac{\partial r_m}{\partial n_\zeta} H_1^2(k_j r_m)$$

où :

$$\frac{\partial r_m}{\partial n_\zeta} = \frac{(x - x_0 - md) \cos \theta + (z - z_0) \sin \theta}{r_m}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} \mathcal{R}_m^j(\xi, \zeta) = -k_j \frac{\partial r_m}{\partial n_\xi} H_1^2(k_j r_m)$$

où :

$$\frac{\partial r_m}{\partial n_\xi} = -\frac{(x - x_0 - md) \cos \theta_0 + (z - z_0) \sin \theta_0}{r_m}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n_\zeta \partial n_\xi} \mathcal{R}_m^j(\xi, \zeta) = -k_j \left(\frac{\partial^2 r_m}{\partial n_\zeta \partial n_\xi} H_1^2(k_j r_m) + \frac{1}{2} k_j \frac{\partial r_m}{\partial n_\zeta} \frac{\partial r_m}{\partial n_\xi} (H_0^2(k_j r_m) - H_2^2(k_j r_m)) \right)$$

où :

$$\frac{\partial^2 r_m}{\partial n_\zeta \partial n_\xi} = -\frac{\cos(\theta - \theta_0)}{r_m} - \frac{1}{r_m} \frac{\partial r_m}{\partial n_\zeta} \frac{\partial r_m}{\partial n_\xi}$$

On a le même type d'expressions pour les dérivées de \mathcal{S}_m^j .

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \mathcal{S}_m^j(\xi, \zeta) = -k_j \frac{\partial s_m}{\partial n_\zeta} H_1^2(k_j s_m)$$

où :

$$\frac{\partial s_m}{\partial n_\zeta} = -\frac{(x - x_0 - md) \cos \theta + (2h + z + z_0) \sin \theta}{s_m}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} \mathcal{S}_m^j(\xi, \zeta) = -k_j \frac{\partial s_m}{\partial n_\xi} H_1^2(k_j s_m)$$

où :

$$\frac{\partial s_m}{\partial n_\xi} = \frac{(x - x_0 - md) \cos \theta_0 - (2h + z + z_0) \sin \theta_0}{s_m}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n_\zeta \partial n_\xi} \mathcal{S}_m^j(\xi, \zeta) = -k_j \left(\frac{\partial^2 s_m}{\partial n_\zeta \partial n_\xi} H_1^2(k_j s_m) + \frac{1}{2} k_j \frac{\partial s_m}{\partial n_\zeta} \frac{\partial s_m}{\partial n_\xi} (H_0^2(k_j s_m) - H_2^2(k_j s_m)) \right)$$

où :

$$\frac{\partial^2 s_m}{\partial n_\zeta \partial n_\xi} = - \frac{\cos(\theta + \theta_0)}{s_m} - \frac{1}{s_m} \frac{\partial s_m}{\partial n_\zeta} \frac{\partial s_m}{\partial n_\xi}.$$

Passons au calcul des intégrales singulières.

Il s'agit des intégrales correspondant aux opérateurs V_j, K_j, K'_j, D_j , définis plus haut.

Avec l'approximation d'ordre zéro, et la discrétisation du bord Ω choisies, on obtient les versions discrétisées des opérateurs, qu'on désignera par la même lettre, pour simplifier les notations.

Pour $0 \leq p \leq N - 1$:

$$\begin{aligned} V_j v(\xi_p) &:= -2 \sum_{k=0}^{N-1} v_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{G}^j(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta) \\ K_j \phi(\xi_p) &:= -2 \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{G}^j}{\partial n_\zeta}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta) \\ K'_j \phi(\xi_p) &:= -2 \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{G}^j}{\partial n_\xi}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta). \end{aligned}$$

Pour l'opérateur D_j , un traitement en valeur principale [11] est nécessaire, à cause de la singularité non intégrable du noyau $\frac{\partial^2 \mathbf{G}^j}{\partial n_\xi \partial n_\zeta}$.

On va décomposer $\wp \mathbf{G}^j$ en parties singulière et régulière :

$$\wp \mathbf{G}^j = \wp \mathbf{G}^j_{\text{reg}} + \wp \mathbf{G}^j_{\text{sing}}.$$

Où on note :

$$\wp \mathbf{G}^j_{\text{reg}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \lambda_m (\wp \mathcal{R}^j_m - \wp \mathcal{S}^j_m) - \lambda_0 \wp \mathcal{S}^j_0$$

et :

$$\wp \mathbf{G}^j_{\text{sing}} = \lambda_0 \wp \mathcal{R}^j_0.$$

On va évaluer les intégrales correspondantes, dans les quatre cas $\wp = \left(\mathfrak{J}, \frac{\partial}{\partial n_\zeta}, \frac{\partial}{\partial n_\xi}, \frac{\partial^2}{\partial n_\zeta \partial n_\xi} \right)$.

α) Calcul de V^j . On décompose :

$$V_j = V_j^{\text{reg}} + V_j^{\text{sing}}$$

où :

$$V_j^{\text{reg}} \psi(\xi_p) := -2 \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{G}'_{\text{reg}}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta)$$

et :

$$V_j^{\text{sing}} \psi(\xi_p) := -2 \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{G}'_{\text{sing}}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta).$$

Le calcul de $V_j^{\text{reg}} \psi(\xi_p)$ se fait par intégration numérique, l'intégrand étant régulier.

Pour $V_j^{\text{sing}} \psi(\xi_p)$, un traitement analytique est nécessaire, à cause de la divergence logarithmique.

On a explicitement :

$$V_j^{\text{sing}} \psi(\xi_p) := \frac{ai}{2} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} H_0^2(k, \rho_p(\theta)) d\theta$$

où :

$$\rho_p(\theta) = 2a \sin \left| \frac{(\theta - \theta_p)}{2} \right|,$$

pour $\theta_k = \frac{2\pi k}{N}$. En notant :

$$\mathfrak{J}_k^p = \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} H_0^2(k, \rho_p(\theta)) d\theta$$

$$V_j^{\text{sing}} \psi(\xi_p) := \frac{ai}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k \mathfrak{J}_k^p.$$

Seules seront singulières les contributions correspondant à $k = p$ et $k = p - 1$. Sur ces deux intervalles, on sépare $H_0^2(k, \rho_p(\theta))$ en sa partie logarithmiquement divergente et un reste régulier.

β) *Calcul de K^j* . On décompose de la même façon :

$$K_j = K_j^{\text{reg}} + K_j^{\text{sing}}$$

où :

$$K_j^{\text{reg}} v(\xi_p) := -2 \sum_{k=0}^{N-1} v_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \mathbf{G}'_{\text{reg}}}{\partial n_\zeta}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta)$$

et :

$$K_j^{\text{sing}} v(\xi_p) := -2 \sum_{k=0}^{N-1} v_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \mathbf{G}'_{\text{sing}}}{\partial n_\zeta}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta).$$

Le calcul de $K_j^{\text{reg}} v(\xi_p)$ se fait toujours par intégration numérique, l'intégrand étant régulier.

Pour $K_j^{\text{sing}} v(\xi_p)$, on écrit explicitement :

$$K_j^{\text{sing}} v(\xi_p) := -\frac{i}{4a} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{k_j \rho_p(\theta)}{2} H_1^2(k_j \rho_p(\theta)) d\theta .$$

En notant :

$$\mathcal{L}_k^p = \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{k_j \rho_p(\theta)}{2} H_1^2(k_j \rho_p(\theta)) d\theta$$

on écrit :

$$K_j^{\text{sing}} v(\xi_p) := -\frac{i}{4} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \mathcal{L}_k^p .$$

On remarque que les contributions correspondant à $k = p$ et $k = p - 1$ ne sont pas singulières. Numériquement, sur ces deux intervalles, on traite globalement le produit $\frac{k_j \rho_p(\theta)}{2} H_1^2(k_j \rho_p(\theta))$ par un développement approprié.

$\gamma)$ Calcul de K' . On décompose :

$$K'_j = K_j^{\text{reg}} + K_j^{\text{sing}}$$

où :

$$K_j^{\text{reg}} \psi(\xi_p) := -2 \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \mathbf{G}'_{\text{reg}}}{\partial n_\xi}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta)$$

et :

$$K_j^{\text{sing}} v(\xi_p) := -2 \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \mathbf{G}'_{\text{sing}}}{\partial n_\xi}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta) .$$

On vérifie qu'à cause de la symétrie n_ζ, n_ξ , les calculs concernant K et K' sont identiques. On a donc directement :

$$K_j^{\text{sing}} \psi(\xi_p) := -\frac{i}{4A} \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{k_j \rho_p(\theta)}{2} H_1^2(k_j \rho_p(\theta)) d\theta$$

on écrit donc :

$$K_j^{\text{sing}} \psi(\xi_p) := -\frac{i}{4} \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k \mathcal{L}_k^p .$$

δ) *Calcul de D^j* . On a besoin ici d'une décomposition plus fine :

$$D_j = D_j^{\text{reg}} + D_j^{\text{sing}}$$

où :

$$D_j^{\text{reg}} v(\xi) = 2 \int_{\Gamma} v(\zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{G}'_{\text{reg}}}{\partial n_{\xi} \partial n_{\zeta}}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta)$$

et :

$$D_j^{\text{sing}} v(\xi) = 2 \int_{\Gamma} v(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial n_{\xi} \partial n_{\zeta}} (\mathbf{G}'_{\text{sing}} - \mathbf{G}_{\text{log}})(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta) + 2 VP \int_{\Gamma} (v(\zeta) - v(\xi)) \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{\text{log}}}{\partial n_{\xi} \partial n_{\zeta}}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta)$$

où $\mathbf{G}_{\text{log}} = -\frac{1}{2\pi} \log |\zeta - \xi|$ est la singularité logarithmique de \mathbf{G}' .

La version discrétisée est, pour la partie régulière :

$$D_j^{\text{reg}} v(\xi_p) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} v_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial^2 \mathbf{G}'_{\text{reg}}}{\partial n_{\xi} \partial n_{\zeta}}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta).$$

Pour la partie singulière, on sépare en deux termes :

$$D_j^{\text{sing}} v(\xi_p) = D_{j,1}^{\text{sing}} v(\xi_p) + D_{j,2}^{\text{sing}} v(\xi_p)$$

où :

$$D_{j,1}^{\text{sing}} v(\xi_p) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} v_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial^2}{\partial n_{\xi} \partial n_{\zeta}} (\mathbf{G}'_{\text{sing}} - \mathbf{G}_{\text{log}})(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta)$$

et :

$$D_{j,2}^{\text{sing}} v(\xi_p) = 2 \sum_{k \neq p-1, p}^{N-1} (v_k - v_p) \int_{\Gamma_k} \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{\text{log}}}{\partial n_{\xi} \partial n_{\zeta}}(\xi_p, \zeta) d\Gamma(\zeta).$$

Les calculs de $D_j^{\text{reg}} v(\xi_p)$ et de $D_{j,1}^{\text{sing}} v(\xi_p)$ se font tous deux par intégration numérique.

Pour le terme $D_{j,2}^{\text{sing}} v(\xi_p)$, correspondant à la valeur principale, un calcul explicite donne :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_{\text{log}}}{\partial n_{\xi} \partial n_{\zeta}}(\xi_p, \zeta) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{1 + \cos(\theta - \theta_p)}{1 - \cos(\theta - \theta_p)}.$$

Ce qui donne pour l'intégrale :

$$D_{j, \frac{1}{2}}^{\text{sing}} v(\xi_p) = \frac{1}{2 \pi a} \sum_{k \neq p-1, p}^{N-1} (v_k - v_p) \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{1 + \cos(\theta - \theta_p)}{1 - \cos(\theta - \theta_p)} d\theta$$

soit :

$$D_{j, \frac{1}{2}}^{\text{sing}} v(\xi_p) = -\frac{1}{2 \pi a} \sum_{k \neq p-1, p}^{N-1} (v_k - v_p) \times \left(2 \cotg \left(\frac{\theta_{k+1} - \theta_p}{2} \right) - 2 \cotg \left(\frac{\theta_k - \theta_p}{2} \right) + \theta_{k+1} - \theta_k \right).$$

5.2. Résolution numérique du problème de Robin

On note toujours ξ_k le point de discrétisation générique de Γ , et on considère le réseau des ξ_k :

$$\Xi^{(N)} = (\xi_k ; k = 0 \dots N - 1).$$

On prend encore pour v , la valeur au bord du champ, une approximation d'ordre zéro sur chaque Γ_k :

$$v(\xi) = v_k \text{ pour } \theta_k \leq \theta < \theta_{k+1}.$$

On écrit, en tout point ξ de $\Xi^{(N)}$:

$$(1 - \mathcal{B})(v) = -v'(\xi).$$

On obtient ainsi un système linéaire de N équations à N inconnues. Le calcul des opérateurs intégraux singuliers s'effectue alors de la même façon que pour le problème de transmission.

Lorsque le coefficient d'impédance λ est calculé par la formule (22), on doit vérifier que la solution du problème de Robin est une approximation du problème de transmission.

6. DEUX APPROXIMATIONS CLASSIQUES

6.1. Approximation filaire

L'approximation filaire consiste à postuler la forme suivante de la densité de courant :

$$j(x, z) = -e^{i\alpha x} I \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - x_0 - nd) \delta(z - z_0)$$

où I est l'amplitude (supposée constante) du courant électrique qui circule dans les fils.

Pour déterminer le paramètre inconnu I , on est ramené à un problème de rayonnement par une antenne « filaire » [4].

En polarisation TE, si on suppose les fils très fins, le champ à l'intérieur d'un fil est relié à l'impédance interne z du fil par

$$\phi = I \cdot z .$$

Le courant I se calcule alors en écrivant que la moyenne du champ sur le périmètre Γ du fil Ω vaut zI :

$$\bar{\phi} \Big|_{\Gamma} := \int_{\Gamma} \phi(x, z) d\Gamma = zI .$$

Le seul paramètre libre du problème est l'impédance z , qui est reliée simplement [18] au coefficient d'impédance λ , par la formule :

$$z = \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \frac{1}{2 \pi a i} \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)},$$

où J_n est la fonction de Bessel d'ordre n .

Cette approximation filaire revient donc à faire l'hypothèse que le champ est constant sur le bord des cylindres. Il s'agit donc d'une approximation du problème de Robin.

6.2. Approximation de la couche équivalente

C'est une approximation de type milieu effectif [2], qui consiste à supposer que le système de fils est équivalent à une couche continue d'épaisseur $2a$, située à la même distance de la plaque conductrice, et dont les caractéristiques $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\mu}$ sont les moyennes de celles des fils, et du substrat (ici le vide), pondérées par les aires.

On obtient les valeurs homogènes équivalentes :

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 - i \frac{\pi a \sigma_2}{2 d \omega} \quad \text{et} \quad \hat{\mu} = \mu_0 .$$

7. COMPARAISON THÉORIE-EXPÉRIENCE

7.1. Description des cas mesurés et des cas simulés

Pour tester le modèle, nous avons utilisé les résultats de mesures réalisées au C.E.A.-C.E.S.T.A. (Centre d'Études Scientifiques et Techniques d'Aquitaine).

Il s'agit de deux réseaux de fils, notés **A** et **B**, placés au-dessus d'une plaque métallique, dont les caractéristiques sont les suivantes :

1. Réseau A

- Conductivité mesurée : $33,5 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$
- Espacement entre fils : $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- Hauteur (fils-plaque) : $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $7,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, 10^{-2} m
- Diamètre des fils : $0,437 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

2. Réseau B

- Conductivité mesurée : $5,02 \cdot 10^2 \bar{\Omega}^{-1} \text{ m}^{-1}$
- Espacement entre fils : $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- Hauteur (fils-plaque) : $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $7,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, 10^{-2} m
- Diamètre des fils : $0,437 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

On conviendra aussi d'appeler **C** et **D** les deux réseaux simulés suivant :

3. Réseau C

- Conductivité : $100 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$
- Espacement entre fils : $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- Hauteur (fils-plaque) : 10^{-3} m
- Diamètre des fils : $0,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

4. Réseau D

- Conductivité : $100 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$
- Espacement entre fils : $3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- Hauteur (fils-plaque) : 10^{-3} m
- Diamètre des fils : $0,437 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

7.2. Analyse des résultats

Les résultats se présentent sous forme de courbes donnant le module du coefficient de réflexion (en décibels), en fonction de la fréquence incidente (en gigahertz).

7.2.1. Comparaisons avec les mesures

Il s'agit des deux séries de courbes 2a à 2c et 3a à 3c, correspondant aux réseaux A et B définis ci-dessus. On constate un bon accord théorie-expérience pour les deux cas de conductivité des deux réseaux A et B, compte tenu des incertitudes expérimentales sur l'évaluation des paramètres géométriques et physiques (rayon des fils, distance fils-plaque, période du réseau, conductivité des fils) et sur le traitement des données (problèmes de « planéité » des fronts d'onde, effets de taille finie du réseau...). On observe ainsi un petit glissement de la fréquence de résonance, dû à ces incertitudes.

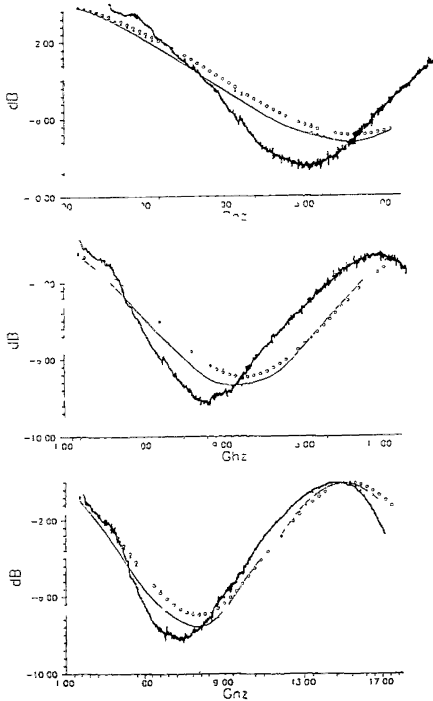


Fig. 2.

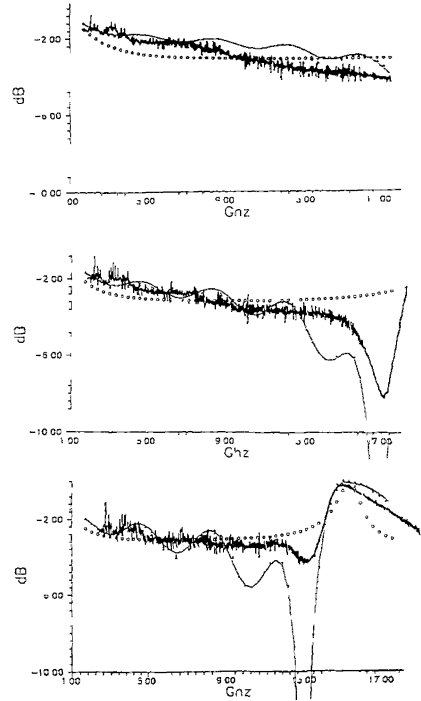


Fig. 3.

Figure 2. — Réseau A, pour les trois écartements fils-plaque ($h = 5,0 \cdot 10^{-3}$ m, $7,5 \cdot 10^{-3}$ m, 10^{-3} m). (○ Couche équivalente, △ Modèle filaire, * Impédance, — Transmission).

Figure 3. — Réseau B, pour les trois écartements fils-plaque ($h = 5,0 \cdot 10^{-3}$ m, $7,5 \cdot 10^{-3}$ m, 10^{-3} m). (○ Couche équivalente, △ Modèle filaire, * Impédance, — Transmission).

7.2.2. Étude paramétrique et discrimination des modèles

Pour examiner les domaines de validité des modèles présentés ci-dessus, on a choisi de faire varier, deux paramètres géométriques significatifs : la période d du réseau, et le rayon a des fils (réseaux C et D).

On constate que pour les petits rayons a , et les petites valeurs de la période d (courbes 4a et 5a), le comportement global du coefficient de réflexion est respecté par le modèle de couche équivalente, mais que pour des valeurs encore relativement faibles de ces paramètres (courbes 4b et 5b), les détails de structure ne sont pas reproduits.

Lorsque a augmente, les trois autres modèles donnent des résultats comparables, jusqu'à un rayon limite (courbe 4b), où le modèle filaire « décroche », jusqu'à donner des résultats non physiques ($|R| > 1$, pour la

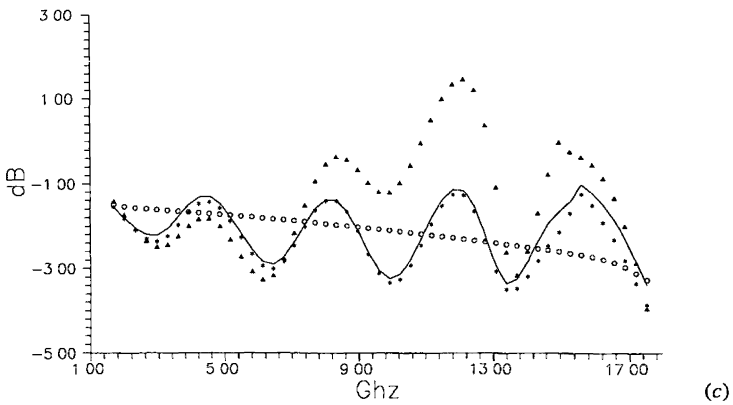
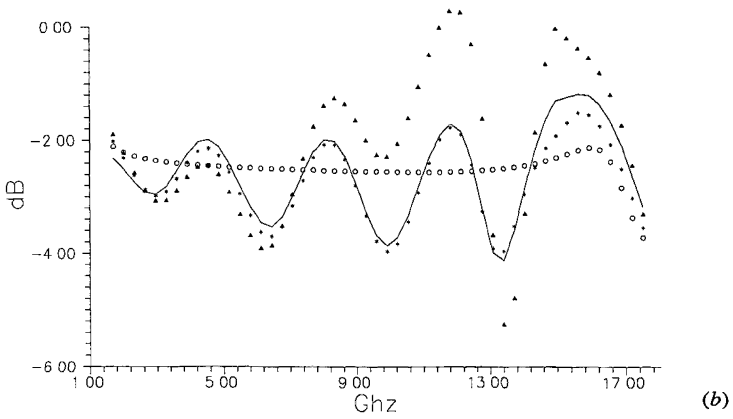
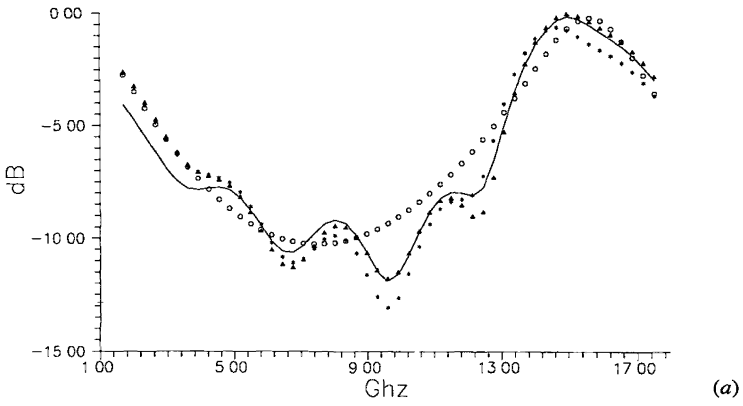


Figure 4. — Réseau C, pour les trois valeurs du diamètre ($a = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$). (○ Couche équivalente, Δ Modèle filaire, * Impédance, — Transmission).

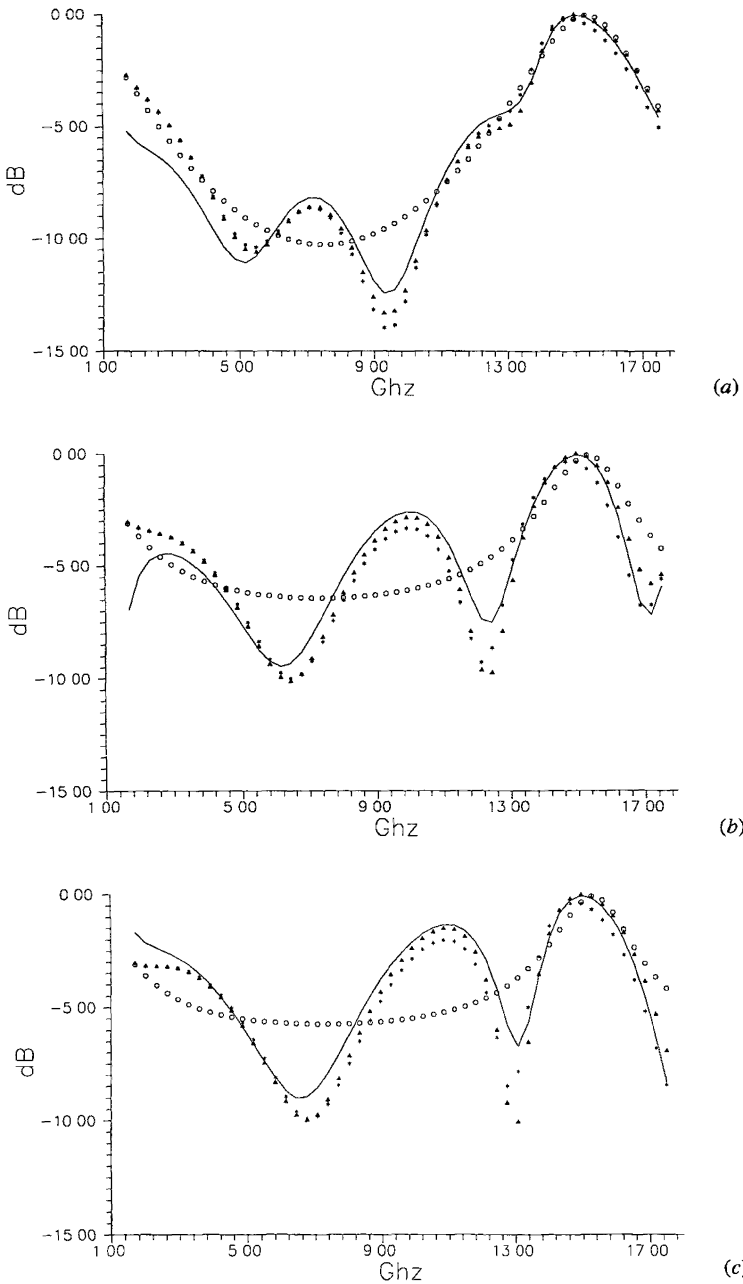


Figure 5. — Réseau D, pour les trois valeurs de la période ($d = 3,0 \cdot 10^{-3}$ m, $2,0 \cdot 10^{-3}$ m, $1,8 \cdot 10^{-3}$ m). (○ Couche équivalente, △ Modèle filaire, * Impédance, — Transmission).

courbe 4c). Les deux modèles les plus précis, quant à eux, donnent des résultats très comparables sur tout le domaine de variation des paramètres.

8. COMMENTAIRES ET CONCLUSION

Après avoir comparé trois approximations « emboîtées » pour le système périodique de cylindres diélectriques décrit plus haut, on a constaté que le paramètre « rayon » des fils, directement relié à la dilution, était le paramètre essentiel du problème. Il apparaît aussi que des conditions aux limites de type impédance (problème de Robin) constituent une bonne approximation du problème de transmission.

Numériquement, l'avantage est double : tout d'abord, on divise par deux le nombre de degrés de liberté (les matrices à inverser sont pleines, complexes, et non symétriques), ensuite le traitement du problème de Robin nécessite seulement le calcul d'opérateurs de simple et double couche (faiblement singuliers à deux dimensions), sans avoir à évaluer, en valeur principale, la dérivée normale de l'opérateur double couche, calcul rendu encore plus délicat à cause des séries de Fourier lentement convergentes, qui définissent les fonctions de Green.

REMERCIEMENTS

Nous remercions G. Le Blevenec qui nous a transmis et commenté les courbes expérimentales, et Ph. Guimbal pour de fructueuses conversations sur la physique des modèles présentés.

ANNEXE

Calcul et propriétés de la fonction de Green périodique

Les sources ponctuelles sont situées aux points $\zeta + (d, 0)\mathbf{Z}$, où $\zeta = (x_0, z_0)$.

La fonction de Green considérée est la solution « sortante » de l'équation :

$$(\Delta_{\xi} + k^2) \mathbf{G}(\xi, \zeta) = -e^{-i\alpha(x-x_0)} \sum_z \delta(x - x_0 - nd) \delta(z - z_0) \quad (\text{A1})$$

où $\xi = (x, z)$, $\alpha = k_0 \sin \theta_1$, et où on suppose remplie la condition de conducteur parfait à l'interface « miroir » $z = -h$.

La périodicité permet, avec les arguments standard, de développer $\mathbf{G}(\xi, \zeta)$ en série de Fourier :

$$\mathbf{G}(\xi, \zeta) = e^{-i\alpha(x-x_0)} \sum_z e^{\frac{2\pi i \pi x}{d}} w_n(x). \quad (\text{A2})$$

On pose :

$$\gamma n^2 = k^2 - \left(\frac{2n\pi}{d} - \alpha \right)^2$$

Alors, pour $-h \leq z$:

$$\mathbf{G}(\xi, \zeta) = \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id} \sum_z e^{2ni\pi \frac{x-x_0}{d}} S_n(z, z_0) \quad (\text{A3})$$

où :

$$S_n(z, z_0) = \frac{1}{\gamma_n} (e^{-i\gamma_n |z-z_0|} - e^{-i\gamma_n(2h+z+z_0)}) \quad (\text{TE}) \quad (\text{A4})$$

$$S_n(z, z_0) = \frac{1}{\gamma_n} (e^{-i\gamma_n |z-z_0|} + e^{-i\gamma_n(2h+z+z_0)}) \quad (\text{TM}). \quad (\text{A4}')$$

Numériquement, il sera utile de faire une décomposition de \mathbf{G} , en parties régulière et singulière :

LEMME 1 : *On a la décomposition :*

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{\text{reg}} + \mathbf{G}^{\text{sing}}$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{\text{reg}}(\xi, \zeta) &= \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2d} S_0(z, z_0) + \\ &+ \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2d} \sum_{z^*} e^{2ni\pi \frac{x-x_0}{d}} \left[\frac{1}{\gamma_n} (e^{-i\gamma_n |z-z_0|} - e^{-i\gamma_n(2h+z+z_0)}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{2i\pi} \frac{e^{-2\pi \frac{|n|}{d} |z-z_0|}}{|n|} \right] \quad (\text{A5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{\text{sing}}(\xi, \zeta) &= \\ &= -\frac{1}{4i\pi} e^{-i\alpha(x-x_0)} \\ &\quad \times \text{Log} \left(1 - 2e^{-\frac{2\pi}{d} |z-z_0|} \cos \left(\frac{2\pi}{d} (x-x_0) \right) + e^{-\frac{4\pi}{d} |z-z_0|} \right). \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

De plus, lorsque $|\xi - \zeta| \sim 0$:

$$\mathbf{G}^{\text{sing}}(\xi, \zeta) \sim -\frac{1}{2\pi} \text{Log} |\xi - \zeta|. \tag{A7}$$

L'autre régime asymptotique est décrit par le :

LEMME 2 : Si $kd < 2\pi$, il existe quatre constantes positives R , C , C_1 , et C_2 , telles que :

1. pour $|\xi - \zeta| > R$:

$$\left| \mathbf{G}(\xi, \zeta) - \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id} S_0(z, z_0) \right| \leq C_1 e^{-\frac{C}{d}z_0}. \tag{A8}$$

2. de plus, si $\zeta \in \Gamma$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \left(\mathbf{G}(\xi, \zeta) - \frac{e^{-i\alpha(x-x_0)}}{2id} S_0(z, z_0) \right) \right| \leq C_2 e^{-\frac{C}{d}z_0}. \tag{A9}$$

LEMME 3 : On a l'expression équivalente suivante pour la fonction de Green :

$$\mathbf{G}^j(\xi, \zeta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m (\mathcal{R}_m^j - \mathcal{S}_m^j) \tag{A10}$$

où $\lambda_m = \frac{-i}{4} e^{-m\alpha_j d}$, $\mathcal{R}_m^j = H_0^2(k, r_m)$, $\mathcal{S}_m^j = H_0^2(k, s_m)$ et où les distances r_m et s_m sont données par :

$$\begin{aligned} r_m &= ((x - x_0 - md)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2} \\ s_m &= ((x - x_0 - md)^2 + (2h + z + z_0)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

On reconnaît évidemment la somme des fonctions de Green correspondant à chacun des points du réseau accompagné de son symétrique par rapport au plan conducteur, et on vérifie [14] que les deux expressions se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Poisson.

REFERENCES

[1] K. M. MITZNER, Effective boundary conditions for reflection and transmission by an absorbing shell of arbitrary shape, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* AP-16 (1968), 706.
 [2] ETOPIM 1, Electrical transport and optical properties of inhomogeneous media, *AIP Conference proceedings*, Vol. 2 (1978).

- [3] A. BAMBERGER, G. COHEN, L. HALPERN, P. JOLY, *Journées Aspects Mathématiques et numériques des phénomènes de propagation d'ondes*, INRIA, Nice (1988).
- [4] J. R. WAIT, *Electromagnetic wave theory*, Wiley (1987).
- [5] B. DUCOMET, *Diffusion électromagnétique à basse fréquence par un réseau de cylindres diélectriques*, A paraître aux *Annales de l'I.H.P.*
- [6] J. R. WAIT, Reflection from a wire grid parallel to a conducting plane, *Can. J. Phys.* **32** (1954), 571.
- [7] Z. BENJELLOUN TOUMI EL-DABAGHI, Diffraction par un réseau 1-périodique de R^3 , *Thèse*, Université Paris XIII (1988).
- [8] R. KRESS, *Linear integral equations*, Springer-Verlag (1989).
- [9] P. FILIPPI ed., *Theoretical acoustics and numerical techniques*, Springer-Verlag (1983).
- [10] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover (1964).
- [11] M. N. SAYHI, Y. OUSSET, G. VERCHERY, Solution of radiation problems by collocation of integral formulations in terms of simple and double layer potentials, *J. Sound Vibr.* **74** (1981), 187.
- [12] M. COSTABEL and E. STEPHAN, A direct boundary integral equation method for transmission problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **106** (1985), 367.
- [13] H. D. ALBER, A quasi-periodic boundary value problem for the Laplacian and the continuation of its resolvent, *Proc. of the Royal Soc. of Edinb.*, **92A** (1979), 251.
- [14] G. PETIAU, *La théorie des fonctions de Bessel*, CNRS (1955).
- [15] J. A. STRATTON, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill (1941).
- [16] V. NIKOLSKI, *Electrodynamique et propagation des ondes radio-électriques*, Mir (1982).
- [17] D. S. JONES, *Acoustic and electromagnetic waves*, Clarendon Press (1986).
- [18] B. DUCOMET, Sur la validité du modèle de Wait à basse fréquence, *Rapport interne CEA*.