M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique

C. Bolley

Modélisation du champ de retard à la condensation d'un supraconducteur par un problème de bifurcation

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 26, nº 2 (1992), p. 235-287

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1992__26_2_235_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol 26, n° 2, 1992, p 235 à 287)

MODÉLISATION DU CHAMP DE RETARD A LA CONDENSATION D'UN SUPRACONDUCTEUR PAR UN PROBLÈME DE BIFURCATION (*)

par C. BOLLEY [1]

Communiqué par R TEMAM

Résumé — *Une étude des équations de Ginzburg-Landau décrivant les différents états d'un film supraconducteur d'épaisseur a, a montré l'existence de solutions bifurquées à partir de toutes les solutions triviales qui vérifient deux conditions nécessaires de bifurcation particulières Nous appellerons* ($\mathscr{P}_c$) *le problème posé par ces deux conditions*

Après un rappel de ces résultats, le problème est étudié comme un problème de bifurcation étude d'une classe de solutions triviales dans le paragraphe 2 2, et de solutions non triviales dans le paragraphe 2 3 , pour ce dernier paragraphe, nous sommes amenés à écrire trois conditions nécessaires de bifurcation du problème ($\mathscr{P}_c$), *équivalentes entre elles, et à montrer que l'une d'elles est vérifiée pour au moins une valeur du paramètre a Une hypothèse supplémentaire de transversalité sera faite pour assurer l'existence de solutions bifurquées , cette hypothèse est vérifiée par les résultats numériques obtenus Cependant, une démonstration directe écrite sans cette hypothèse, montre que* ($\mathscr{P}_c$) *admet des solutions non triviales pour a assez grand*

Le paragraphe III détermine, grâce à des arguments de stabilité, quelles solutions parmi toutes les solutions de ($\mathscr{P}_c$), *nous donnent le champ de retard à la condensation du film supraconducteur*

Abstract. — *A study of Ginzburg-Landau equations, describing the different states of a superconducting film of thickness a, has showed the existence of solutions bifurcating from all the trivial solutions which satisfy two necessary bifurcating conditions Let* ($\mathscr{P}_c$) *be the problem defined by these two conditions*

After a summary of these results, problem ($\mathscr{P}_c$) *is studied as a branching problem first, a study of trivial solutions in paragraph 2 2, followed by a study of non trivial solutions in paragraph 2 3 For this last study, we write three equivalent necessary bifurcating conditions for* ($\mathscr{P}_c$) , *and we show that one of them is satisfied for, at least, one value of the parameter a An hypothesis of transversality is added to guarantee the existence of bifurcating solutions This hypothesis is verified in numerical results However, a direct proof, without this hypothesis, shows that non trivial solutions exist when a is large enough*

Using stability arguments, section III shows, which solutions of ($\mathscr{P}_c$) *give the super-cooling field of the superconducting film*

(*) Manuscrit reçu en décembre 1989
[1] École Nationale Supérieure de Mécanique, 1, rue de la Noe, 44072 Nantes Cedex.

M² AN Modélisation mathématique et Analyse numérique 0764-538X/92/02/235/53/$ 7 30

INTRODUCTION

L'étude qui suit modélise le champ de retard à la condensation d'un matériau supraconducteur de type 1. Cette modélisation, écrite à partir des équations de Ginzburg-Landau, s'appuie sur une étude de la stabilité des solutions triviales de ces équations en fonction de l'épaisseur du matériau. Nous sommes amenés à étudier le comportement asymptotique de la solution d'une équation de type Sturm-Liouville en fonction de plusieurs paramètres, ainsi qu'un problème de bifurcation provenant de la multiplicité des solutions triviales.

Des résultats numériques concordent avec les résultats théoriques obtenus et justifient une hypothèse faite dans l'étude théorique du problème de bifurcation.

I. MODÉLISATION DU PROBLÈME

1.1 La théorie de Ginzburg-Landau

Les matériaux appelés supraconducteurs de type 1 sont caractérisés par une absence de résistance électrique et par un changement complet de leur état lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique extérieur H_e suffisamment grand :

— en l'absence de champ magnétique extérieur H_e (ou lorsque H_e est faible), ils sont à l'état supra lorsque leur température T est inférieure à une température critique T_c, et à l'état normal lorsque T est supérieur à T_c ;

— lorsque T est inférieur à T_c et que le champ magnétique extérieur est supérieur à une valeur critique H_{cB}, l'état normal est rétabli.

Cependant, lorsque T est inférieur à T_c, et sous champ magnétique extérieur croissant, l'état supra peut exister jusqu'à une valeur de H_e égale à une valeur H_{sH} supérieure à H_{cB}, et sous champ magnétique extérieur décroissant l'état normal peut exister jusqu'à une valeur de H_e égale à une valeur H_{sc} inférieure à H_{cB}. H_{sH} est le *champ de surchauffe* et H_{sc} le *champ de retard à la condensation.*

Nous supposerons ici que l'échantillon est un film d'épaisseur d, placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{H}_e$ parallèle à la surface du film ; et nous choisirons un système d'axes tel que $\vec{O}z$ soit parallèle au champ magnétique extérieur $\vec{H}_e$:

$$\vec{H}_e = (0, 0, H_e) .$$

Le champ magnétique intérieur $\vec{H}$, inconnue du problème, a pour direction celle de $\vec{H}_e$. Par conséquent :

$$\vec{H} = (0, 0, H(x)) \qquad -d/2 \leqslant x \leqslant d/2 .$$

Le vecteur potentiel du champ magnétique $\vec{H}$ intérieur au matériau est tel que :

$$\text{rot}\, \vec{A} = \mu_0 \vec{H} \tag{1.1}$$

$\vec{A}$ est choisi tel que :

$$\begin{aligned} &\vec{A} = (0,A,0) \\ &\text{avec} \quad A = A(x) \quad \text{fonction de } x \text{ seulement} \\ &\qquad -d/2 \leqslant x \leqslant d/2 . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ginzburg et Landau ont introduit une pseudo-fonction d'onde, ψ, supposée complexe et nulle à l'état normal, caractérisant les différents états d'un matériau supraconducteur (*cf.* V. L. Ginzburg [7], B. Dugnoille [6], J. Blot [1], Y. Pellan [13]).

Nous cherchons les solutions stables du problème, c'est-à-dire les fonctions ψ qui minimisent la différence d'énergie libre de Gibbs, notée ΔG. Le problème mathématique semble ouvert. Comme dans B. Dugnoille, J. Blot, Y. Pellan, nous nous limiterons à chercher la fonction d'onde ψ sous la forme particulière suivante :

$$\psi(x, y, z) = \psi_0 f(x)\, e^{ik_1 y} e^{ik_2 z} \quad \text{où} \quad k_1 \quad \text{et} \quad k_2 \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

et où ψ_0 est une constante de normalisation égale à ψ lorsque H est nul.

La théorie de Ginzburg et Landau permet de développer la différence d'énergie libre de Gibbs ΔG entre l'état normal et l'état supra du matériau en fonction de ψ.

Les inconnues f, A, k_1 et k_2 doivent vérifier les équations d'Euler associées à ΔG, équations obtenues par dérivation de ΔG par rapport à ces variables.

Après plusieurs changements de variables et une translation de A qui fait de ψ une fonction indépendante de y et élimine l'inconnue k_2 (*cf.* B. Dugnoille, C. Bolley [2], [3]) les équations d'Euler, appelées ici équations de Ginzburg-Landau, s'écrivent :

$$\begin{cases} -f'' + \kappa^2(-f + f^3 + A^2 f) = 0 & \text{dans} \quad]-a/2, a/2[\\ f'(\pm a/2) = 0 , & f \in H^2(-a/2, a/2) \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} -A'' + f^2 A = 0 \quad \text{dans} \quad]-a/2, a/2[\\ A'(\pm a/2) = h , \quad A \in H^2(-a/2, a/2) \end{cases} \tag{1.5}$$

et

(1.6) $$k_2 = 0$$

la condition limite de (1.4) signifiant qu'il n'y a pas de courant à traverser la surface qui sépare le supraconducteur du milieu extérieur, et celle de (1.5) signifiant que, dans les nouvelles unités, le champ magnétique intérieur est égal, au bord du film, au champ magnétique appliqué à l'extérieur.

Le paramètre κ est une caractéristique du matériau, a est l'épaisseur du film et h le champ magnétique extérieur dans de nouvelles unités.

Les paramètres a et h peuvent être introduits dans les équations en faisant le changement de variable x en x/a puis le changement de fonction A en A/ah.

Nous sommes donc amenés à résoudre le système non linéaire suivant : étant donné $\kappa > 0$, $a > 0$ et $h > 0$: on cherche f et A tels que :

$$(\mathscr{P}_{fA}) \begin{cases} (1.7) \begin{cases} -f'' + a^2\kappa^2(-f + f^3 + a^2h^2A^2f) = 0 & \text{dans }]-1/2, 1/2[\\ f'(\pm 1/2) = 0 & f \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases} \\ (1.8) \begin{cases} -A'' + a^2f^2A = 0 & \text{dans }]-1/2, 1/2[\\ A'(\pm 1/2) = 1 & A \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases} \end{cases}$$

et noterons $(f, A\,;a, h)$ une solution du problème $(\mathscr{P}_{fA})$ associée aux paramètres a et h.

1.2. Champ de retard à la condensation

Pour une valeur de a donnée, a supérieur à une valeur critique a_c, le champ de retard à la condensation H_{sc} est tel que pour h inférieur à H_{sc} le matériau soit toujours à l'état supra et le champ de surchauffe H_{sh} est tel que pour h supérieur à H_{sh} le matériau soit toujours à l'état normal. Pour h compris entre H_{sc} et H_{sh}, le matériau est soit l'état normal soit à l'état supra. Une solution de $(\mathscr{P}_{fA})$ est dite *stable* si elle minimise ΔG, *métastable* si c'est un minimum local de ΔG et une solution *instable* sinon.

H_{sc} est la plus grande valeur du champ h pour lequel le problème $(\mathscr{P}_{fA})$ n'admet pas de solution stable ni métastable avec f non identiquement nulle. Or f identiquement nulle étant toujours une solution du problème $(\mathscr{P}_{fA})$, H_{sc} est la valeur de h pour laquelle toute solution de $(\mathscr{P}_{fA})$ de la forme $(0, A\,;a, h)$ devient instable : le champ H_{sc} sera donc donné par les solutions triviales singulières du problème $(\mathscr{P}_{fA})$.

1.3. Les paramètres du problème.

— Le paramètre κ, appelé paramètre de Ginzburg-Landau sera *fixé* dans toute l'étude. Il caractérise le supraconducteur.

— Le paramètre a (épaisseur du film) est un *paramètre « gouvernant »*. Il varie dans l'intervalle $]0, +\infty[$; et nous étudierons H_{sc} en fonction de a.

— Le champ magnétique extérieur h est tantôt un *paramètre,* tantôt une *inconnue ;* c'est un paramètre dans le problème $(\mathscr{P}_{fA})$, mais une inconnue, fonction du paramètre a dans la recherche des valeurs critiques H_{sc} et H_{sh}.

II. UN PROBLÈME DE « VALEURS PROPRES »

2.1. Conditions nécessaires et suffisantes de bifurcation du problème $(\mathscr{P}_{fA})$

Rappelons le problème $(\mathscr{P}_{fA})$: étant donnés κ, $a > 0$ et $h > 0$, on cherche f et A tels que

$$(\mathscr{P}_{fA}) \begin{cases} (2.1) \begin{cases} -f'' + a^2\kappa^2(-1 + f^2 + a^2h^2A^2)f = 0 & \text{dans }]-1/2, 1/2[\\ f'(\pm 1/2) = 0 & f \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases} \\ (2.2) \begin{cases} -A'' + a^2f^2A = 0 & \text{dans }]-1/2, 1/2[\\ A'(\pm 1/2) = 1 & A \in H^2(-1/2, 1/2)\,. \end{cases} \end{cases}$$

Pour tout couple $(a, h) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ le problème $(\mathscr{P}_{fA})$ admet les solutions $(0, x + c ; a, h)$ où $c \in \mathbb{R}$. Ce sont les seules solutions telles que : $f \equiv 0$.

Dans C. Bolley [3], on étudie l'existence de solutions bifurquées du problème $(\mathscr{P}_{fA})$ à partir de solutions de la forme $(0, x + c ; a, h)$. Rappelons quelques définitions et résultats démontrés :

DÉFINITION 2.1 : *Les solutions* $(0, x + c ; a, h)$ *sont appelées* solutions triviales *du problème* $(\mathscr{P}_{fA})$.

DÉFINITION 2.2 : *Nous dirons qu'une solution triviale* $(0, x + c ; a, h)$ *est un* point de bifurcation *pour le problème* $(\mathscr{P}_{fA})$ *si pour tout voisinage V de* $(0, x + c ; a, h)$ *dans* $H^2(-1/2, 1/2) \times H^2(-1/2, 1/2) \times]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, *il existe une solution* $(f, A ; a, h + \delta h)$ *de* $(\mathscr{P}_{fA})$ *dans V avec f non identiquement nulle.*

a est fixé ; h est le paramètre de bifurcation.

PROPOSITION 2.3 : *Soit* $(a, h) \in]0, +\infty[\times]0, \infty[$

i) *une condition nécessaire pour que* $(0, x + c ; a, h)$ *soit un point de* *bifurcation pour le problème* ($\mathcal{P}_{fA}$) *est qu'il existe une solution* φ *non identiquement nulle du problème suivant :*

$$(2.3) \quad \begin{cases} -\varphi'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)^2 \varphi - a^2 \kappa^2 \varphi = 0 & \text{dans } I =]-1/2, 1/2[\\ \varphi'(\pm 1/2) = 0 \quad \varphi \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

ii) *une deuxième condition nécessaire pour que* $(0, x+c\,; a, h)$ *soit un point de bifurcation est que :*

$$(H_c) \qquad \int_I (x+c)\,\varphi^2\,dx = 0$$

où φ *est une solution non identiquement nulle de* (2.3).

La démonstration est donnée dans C. Bolley [3].

Le problème (2.3) sera appelé « *problème de valeurs propres* » par analogie avec les problèmes de valeurs propres habituels.

La proposition suivante montre l'existence de solutions de l'équation (2.3), pour tout $a > 0$ et tout $c \in \mathbb{R}$:

PROPOSITION 2.4 : *Étant donnés* $a > 0$ *et* $c \in \mathbb{R}$:

i) *il existe une infinité dénombrable de valeurs de h telles que* (2.3) *ait une solution*

ii) *il existe un h positif et un seul, tel que le problème* (2.3) *ait une solution* φ *strictement positive et une seule (à une constante multiplicative près) dans* $]-1/2, 1/2[$.

iii) *les applications qui à* $a > 0$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *associent h et* φ *donnés par* ii) *avec* φ *de norme* 1 *dans* $L^2(-1/2, 1/2)$, *sont analytiques sur* $]0, \infty[\times \mathbb{R}$.

La démonstration est donnée dans C. Bolley [3].

Remarque : Sous l'hypothèse $c = 0$, la condition (H_c) de la proposition 2.3 est vérifiée par toute solution de (2.3), puisque $x\varphi^2$ est alors une fonction impaire. Il en résulte donc que, pour tout $a > 0$, la solution $(0, x\,; a, h)$ du problème ($\mathcal{P}_{fA}$) où h est donné par ii) de la proposition 2.4, vérifie les deux conditions nécessaires de bifurcation du problème ($\mathcal{P}_{fA}$) données dans la proposition 2.3.

Les paragraphes suivants étudient l'existence d'autres solutions des équations (2.3) et (H_c) simultanément.

Dans C. Bolley [3], on montre que les deux conditions nécessaires de bifurcation (2.3) et (H_c) sont aussi des conditions suffisantes de bifurcation du problème ($\mathcal{P}_{fA}$) ; et plus précisément, on montre que pour a fixé et c tel que (2.3) (H_c) aient une solution, il existe une courbe de bifurcation $(f_\varepsilon, A_\varepsilon\,; a, h_\varepsilon)$ paramétrée par un paramètre ε positif ou négatif et issue du point $(0, x+c\,; a, h)$ avec f_ε non nulle et a indépendant de ε.

2.2 Étude du problème de valeurs propres (2.3) dans le cas où $c = 0$

Il résulte de la proposition 2.4 que pour tout $a > 0$, il existe $h = h(a) > 0$ unique tel que le problème, noté $(\mathscr{P}_h^0)$:

$$(\mathscr{P}_h^0)\begin{cases}(2.4)\begin{cases}-\varphi'' + a^4 h^2 \kappa^2 x^2 \varphi - a^2 \kappa^2 \varphi = 0 & \text{dans} \quad]-1/2, 1/2[\\ \varphi'(\pm 1/2) = 0 \quad \varphi \in H^2(-1/2, 1/2)\end{cases} \\ (2.5) \quad \varphi > 0 \quad \text{dans} \quad]-1/2, 1/2[\\ \text{avec} \quad \|\varphi\|_{L^2(-1/2, 1/2)} = 1\end{cases}$$

ait une solution φ.

2.2.1. *Étude des variations de h et de φ en fonction de a*

PROPOSITION 2.5 : *Soit (a, h, φ) tels que $(\mathscr{P}_h^0)$ soit vérifié, alors :*

i) $\lim\limits_{a \to 0} h = +\infty$

ii) *l'application qui à $a > 0$ associe $h > 0$ est strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$.

iii) $\lim\limits_{a \to \infty} h = \kappa$.

Démonstration : Nous noterons dans cette démonstration et les deux suivantes, $h_a = h$ et $\varphi_a = \varphi$, le réel h et la fonction φ tels que le problème $(\mathscr{P}_h^0)$ soit vérifié.

i) En intégrant l'équation (2.4) sur l'intervalle $]-1/2, 1/2[$, il vient :

$$a^2 h_a^2 \int_I x^2 \varphi_a \, dx = \int_I \varphi_a \, dx \tag{2.6}$$

et φ_a étant positive dans $]-1/2, 1/2[$:

$$\int_I x^2 \varphi_a \, dx \leq \frac{1}{4} \int_I \varphi_a \, dx .$$

Il en résulte immédiatement que :

$$a^2 h_a^2 \geq 4 \tag{2.7}$$

et donc :

$$\lim_{a \to 0} h_a = +\infty .$$

ii) La solution φ_a du problème $(\mathscr{P}_h^0)$ étant paire, nous pouvons ramener le problème (2.4) (2.5) à un problème sur]0, 1/2[:

$$(2.8) \qquad \begin{cases} -\varphi_a'' + a^4 h^2 \kappa^2 x^2 \varphi_a - a^2 \kappa^2 \varphi_a = 0 & \text{dans} \quad]0, 1/2[\\ \varphi_a'(0) = 0 ; \quad \varphi_a'(1/2) = 0 \end{cases}$$

avec $\varphi_a > 0$ dans]0, 1/2[.

L'équation (2.8) se ramène à une équation d'Hermite par le changement de variable :

$$t = a\sqrt{\kappa h_a}\, x .$$

Soit $$y(t) = \varphi_a(x) , \quad \text{alors :}$$

φ_a est solution de (2.6) si et seulement si y est solution de :

$$(2.9) \qquad -y''(t) + \left(t^2 - \frac{\kappa}{h_a}\right) y(t) = 0 \quad \text{dans} \quad \left]0, \frac{a\sqrt{\kappa h_a}}{2}\right[$$

$$(2.10) \qquad y'(0) = y'\left(\frac{a\sqrt{\kappa h_a}}{2}\right) = 0 .$$

Cette équation (2.9) est l'*équation d'Hermite* de paramètre $\eta = \kappa/h_a$.

Or la solution y de l'équation :

$$(2.11) \qquad -y'' + (t^2 - \eta) y = 0 \quad \text{dans} \quad]0, +\infty[$$

vérifiant les conditions limites :

$$(2.12) \qquad y(0) = y_0 ; \quad y'(0) = 0$$

est donnée par :

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} c_{2p} t^{2p}$$

où
$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{2p} = \dfrac{(1-\eta)(5-\eta)\dots(4p-3-\eta)}{(2p)!} \quad p \geqslant 1 \end{cases}$$

(*cf.* B. M. Levitan and I. S. Sargsjan [12] par ex.).

Le rayon de convergence de la série $\sum c_{2p} t^{2p}$ étant $\rho = +\infty$, nous pouvons dériver sous le signe $\sum$; il vient :

(2.13)
$$y'(t) = y_0 t e^{-\frac{t^2}{2}} \left(-\eta + \sum_{p=1}^{\infty} t^{2p} \frac{(1-\eta)\dots(4p-3-\eta)}{(2p+1)!}(2p-\eta)\right)$$

* *lorsque* $\eta < 1$:
ce qui équivaut à $h_a > \kappa$, tous les termes de la série sont positifs, et le rapport entre le terme général de cette série et celui de $\exp(-x^2/2)$, soit :

$$\frac{\dfrac{(1-\eta)\dots(4p-3-\eta)(2p-\eta)}{(2p+1)!}\,t^{2p+1}}{\dfrac{1}{2^p\,p!}\,t^{2p}} =$$

$$= \frac{(1-\eta)\dots(4p-3-\eta)}{(2p+1)!}\,(2p-\eta)\,2^p\,p!\,t$$

tend vers $+\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Il en résulte que :

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = +\infty .$$

D'autre part, pour tout $t > 0$, $y(t)$ est du signe de y_0 car :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{2p} \quad \text{est du signe de } y_0 .$$

Il résulte alors de l'équation :

$$y''(t) = (t^2 - \eta)\,y(t) \quad t \in\,]0, +\infty[,$$

le diagramme de variations de y suivant (lorsque y_0 est choisi positif) :

t	0	$\sqrt{\eta}$		$+\infty$
y(t)	+		+	
y''(t)	-	0	+	
y'(t)	0 ↘	−	↗	$+\infty$

Il existe donc un unique t_0 dans l'intervalle $]0, +\infty[$ tel que :

$$y'(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad t_0 \in\,]\sqrt{\eta}, +\infty[.$$

Il en résulte immédiatement que :

LEMME 2.6 : *Pour tout* $h_a > \kappa$, *il existe une valeur de a et une seule telle que le problème* (2.9) (2.10) *ait une solution.*

a est donné par la relation :

$$a = \frac{2\,t_0}{\sqrt{\kappa h_a}} .$$

Le lemme 2.6 assure la bijectivité de l'application $a \to h_a = h(a)$ de $]0, +\infty[$ sur $]\kappa, +\infty[$.

* *lorsque* $1 < \eta < 2$:

ce qui équivaut à $h_a \in\,]\kappa/2, \kappa[$:

Tous les termes de la série (2.13) donnant $y'(t)$ sont négatifs.

Comme de plus : $y'(0) = 0$, le problème (2.9) (2.10) n'a pas de solution.

Il en résulte, par continuité de h_a par rapport à a, que :

$$h_a(]0, +\infty[) =]\kappa, +\infty[.$$

L'application h_a est donc décroissante sur $]0, +\infty[$ et :

$$\lim_{a \to \infty} h_a = \kappa$$

* *lorsque* $\eta \geqslant 2$:

Il existe, pour certaines valeurs de η, d'autres solutions au problème (2.9) (2.10) ; mais, d'après l'unicité de la solution positive du problème (2.3) pour a fixé (proposition 2.4.ii)), les solutions existant pour $\eta \geqslant 2$ changent de signe dans $]0, t_0[$ et donc ne nous concernent pas.

PROPOSITION 2.7 : *Si pour tout* $a > 0$, (h, φ) *vérifie le problème* $(\mathscr{P}_h^0)$ *alors :*

i) $\lim\limits_{a \to 0} \varphi = 1$ *dans* $H^1(-1/2, 1/2)$.

ii) $\lim\limits_{a \to 0} a^2 h^2 = 12$.

Démonstration : Soit encore $h_a = h$, $\varphi_a = \varphi$.

i) Montrons tout d'abord que (ah_a) reste borné lorsque a tend vers 0 : y' vérifie :

$$y'\left(\frac{a\sqrt{\kappa h_a}}{2}\right) = 0$$

cette condition équivaut donc à :

$$0 = -\eta + \frac{a^2 \kappa h_a}{4} \frac{1}{3!} (1-\eta)(2-\eta) + \\ + \sum_{p=2}^{\infty} \left(\frac{a^2 \kappa h_a}{4}\right)^p \frac{(1-\eta) \dots (4p-3-\eta)}{(2p+1)!} (2p-\eta) .$$

Les termes de cette dernière série étant positifs, il en résulte que :

$$\frac{a^2 \kappa h_a}{24} (1-\eta)(2-\eta) < \eta \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\kappa}{h_a}$$

c'est-à-dire :

$$a^2 h_a^2\left(2 - \frac{3\,\kappa}{h_a} + \left(\frac{\kappa}{h_a}\right)^2\right) < 24\,.$$

Soit $\bar{a}$ tel que $\bar{a} < 2/\kappa$ et soit $a \leqslant \bar{a}$, alors, d'après (2.7) :

$$h_a \geqslant \frac{2}{\bar{a}}$$

et, puisque $\eta < 1$, nous avons :

$$a^2 h_a^2\left(3 - \frac{3}{2}\bar{a}\kappa\right) < 24$$

donc :

$$a^2 h_a^2 \leqslant \frac{8}{1 - \frac{1}{2}\bar{a}\kappa}$$

le produit $a^2 h_a^2$ est donc borné pour a assez « petit ».

La fonction φ_a vérifie $(\mathscr{P}_h^0)$ donc :

$$\int_I \varphi_a'^2\,dx + a^4 h_a^2 \kappa^2 \int_I x^2 \varphi_a^2\,dx = a^2 \kappa^2 \tag{2.14}$$

ce qui implique :

$$\|\varphi_a'\|_{L^2(-1/2,\,1/2)} \leqslant a^2 \kappa^2$$

comme de plus φ_a est de norme 1 dans $L^2(-1/2, 1/2)$, pour tout $a > 0$, il en résulte que la famille des fonctions φ_a paramétrée par a, et notée $(\varphi_a)_a$, est bornée dans $H^1(-1/2, 1/2)$ lorsque a tend vers 0.

En revenant à l'équation (2.4), on vérifie que $(\varphi_a)_a$ est borné dans $H^2(-1/2, 1/2)$ lorsque a tend vers 0.

Il existe donc une suite $(a_n)_n$ tendant vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et telle que la suite $(\varphi_{a_n})_n$ extraite de la famille $(\varphi_a)_a$, converge faiblement vers un élément $\bar{\varphi}$ dans $H^2(-1/2, 1/2)$ lorsque n tend vers ∞. La suite (a_n) est associée à une suite (h_n) de valeurs de h.

Montrons que $\bar{\varphi} \equiv 1$.

En multipliant l'équation (2.4) par $\bar{\varphi}$, nous avons :

$$\int_I \varphi_{a_n}' \bar{\varphi}'\,dx + a_n^4 h_n^2 \kappa^2 \int_I x^2 \varphi_{a_n} \bar{\varphi}\,dx - a_n^2 \kappa^2 \int_I \varphi_{a_n} \bar{\varphi}\,dx = 0\,. \tag{2.15}$$

Et en passant à la limite, quand n tend vers ∞, nous obtenons :

$$\| \bar{\varphi}' \|_{L^2(-1/2,\,1/2)} = 0 .$$

Or $\bar{\varphi}$ est dans $H^2(-1/2, 1/2)$, $\bar{\varphi}'$ est donc continue sur $[-1/2, 1/2]$ et par conséquent :

$$\bar{\varphi}' \equiv 0 \qquad \text{sur} \quad [-1/2, 1/2]$$

et

$$\bar{\varphi} \equiv \text{Cte} = c_4 \quad \text{sur} \quad [-1/2, 1/2] .$$

Cette constante c_4 est égale à 1 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_{a_n} est de norme 1 ; la limite $\bar{\varphi}$ est donc aussi de norme 1 dans $L^2(-1/2, 1/2)$, et donc :

$$\bar{\varphi} \equiv 1$$

constante positive, car c'est la limite d'une suite de fonctions positives.

La sous-suite $(\varphi_{a_n})_n$ converge donc faiblement vers 1 dans $H^2(-1/2, 1/2)$; par unicité de la limite, il en résulte que toute la famille $(\varphi_a)_a$ tend vers 1 dans $H^2(-1/2, 1/2)$ faiblement, et donc dans $H^1(-1/2, 1/2)$ fortement.

ii) En passant à la limite, a tendant vers 0, dans l'équation (2.6), il vient immédiatement que

$$\lim_{a \to 0} a^2 h_a^2 = 12$$

car φ_a tend vers 1 dans $L^2(-1/2, 1/2)$ et donc dans $L^1(-1/2, 1/2)$.

PROPOSITION 2.8 : *Si pour tout $a > 0$, (h, φ) vérifie le problème $(\mathscr{P}_h^0)$ alors, lorsque a tend vers $+\infty$:*

i) $x\varphi$ tend vers 0 dans $L^2(-1/2, 1/2)$.

ii) φ^2 tend vers δ_0 dans $\mathscr{D}'(]-1/2, 1/2[)$.

Démonstration : Soit donc comme précédemment, $h_a = h$ et $\varphi_a = \varphi$.

Il résulte de l'équation (2.14) que :

$$h_a^2 \int_I x^2 \varphi_a^2 \, dx \leq \frac{1}{a^2}$$

or, d'après la proposition 2.5 :

$$\lim_{a \to \infty} h_a = \kappa .$$

Il en résulte que :

$$\lim_{a \to \infty} \int_I x^2 \varphi_a^2 \, dx = 0$$

c'est-à-dire que $x\varphi_a$ tend vers 0 dans $L^2(-1/2, 1/2)$ lorsque $a \to +\infty$.

Remarque : La famille (φ_a) converge faiblement vers 0 dans $L^2(-1/2, 1/2)$; en effet : la famille (φ_a) étant bornée dans $L^2(-1/2, 1/2)$, il existe une sous-suite (a_n) qui tend vers 0 et est telle que la suite (φ_{a_n}) converge vers une limite φ_0, faiblement dans $L^2(-1/2, 1/2)$, lorsque n tend vers $+\infty$.

L'application :

$$\varphi \in L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \int_I x^2 \varphi^2 \, dx$$

étant convexe et continue sur $L^2(-1/2, 1/2)$, elle est faiblement s.c.i. sur $L^2(-1/2, 1/2)$; nous avons donc :

$$\int_I x^2 \varphi_0^2 \, dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_I x^2 \varphi_{a_n}^2 \, dx = 0$$

donc :

$$\varphi_0 = 0 .$$

Par unicité de la limite φ_0, il en résulte que la famille $(\varphi_a)_a$ toute entière, converge faiblement vers 0 dans $L^2(-1/2, 1/2)$.

La famille $(\varphi)_a$ ne peut pas converger fortement vers 0 dans $L^2(-1/2, 1/2)$ car la limite forte $\varphi_0 = 0$ devrait vérifier $\|\varphi_0\| = 1$, ce qui est faux.

Montrons ii) :

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels positifs qui tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, et soit $(f_n)_n$ la suite définie par :

$$f_n(x) = \left| \begin{array}{lll} \varphi_{a_n}^2(x) & \text{si} & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{si} & |x| > \frac{1}{2} . \end{array} \right.$$

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \geq 0$.
* Soit $[x_1, x_2] \subset]0, +\infty[$ (la démonstration serait analogue dans le cas où $[x_1, x_2] \subset]-\infty, 0[$), alors :

$$\int_{x_1}^{x_2} f_n(x) \, dx = \int_{[x_1, x_2] \cap \left]0, \frac{1}{2}\right]} \varphi_{a_n}^2(x) \, dx$$

donc :

$$\int_{x_1}^{x_2} f_n(x) \, dx \leq \frac{1}{x_1^2} \int_{x_1}^{\inf\left(x_2, \frac{1}{2}\right)} x^2 \varphi_{a_n}^2 \, dx \leq \frac{1}{x_1^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \varphi_{a_n}^2 \, dx$$

avec d'après i) :

$$\lim_{n \to \infty} \int_I x^2 \varphi_{a_n}^2 \, dx = 0$$

donc :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_1}^{x_2} f_n \, dx = 0 .$$

$*$ Pour tout x_0 tel que $|x_0| \geqslant 1/2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-x_0}^{x_0} f_n(x) \, dx = 1$$

et pour tout x_0 tel que $x_0 > 0$ et $x_0 \leqslant 1/2$:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-x_0}^{x_0} f_n(x) \, dx = 1 - 2 \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{1/2} f_n(x) \, dx = 1 .$$

Il résulte donc d'un théorème classique (*cf.* L. Schwartz [16]), que :

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \delta \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R})$$

et donc que :

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{a_n}^2 = \delta \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(]-1/2, 1/2[) .$$

Ce résultat étant vrai pour toute suite $(a_n)_n$ de $\mathbb{R}^+$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, nous avons :

$$\lim_{a \to \infty} \varphi_a^2 = \delta \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(]-1/2, 1/2[) .$$

Les estimations suivantes, obtenues par des méthodes semi-clasiques (*cf.* B. Helffer [8] et [9]), nous donnent un bon contrôle de h et de φ lorsque a tend vers $+\infty$.

PROPOSITION 2.9 : *Soit, pour tout $a > 0$, (h, φ) vérifiant le problème $(\mathscr{P}_h^0)$, alors, il existe $c_0 > 0$ tel que, pour tout $a \geqslant c_0$:*

i) $$h - \kappa = 2\,\pi^{-1/2} a \kappa^{1/2} h^{3/2} e^{-\frac{a^2 \kappa h}{4}} \left(1 + \frac{2}{a^2 \kappa h} + O\left(\frac{1}{a^4 h^2} \right) \right)$$

ii) *et il existe une constante* $c_1 > 0$, *indépendante de* h *et de* a $(a > c_0)$, *telle que :*

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [-1/2,\, 1/2]} \left| \varphi(x) - \frac{1}{a^{1/2}(h\kappa)^{1/4}} \varphi^a(x) \right| \leq c_1\, e^{-\frac{5}{32} a^2 \kappa h}$$

où :

$$\varphi^a(x) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{a^2 \kappa h}{2} x^2} + \mu(a) \frac{1}{x} e^{\frac{a^2 \kappa h}{2} x^2} \left(1 + \frac{1}{2 x^2 a^2 \kappa h} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \times$$
$$\times\, (\Xi(2x) - \Xi(-2x))$$

$$\mu(a) = \frac{\pi^{-1/4}}{2} e^{-\frac{a^2 \kappa h}{4}} \left(1 + \frac{2}{a^2 \kappa h} + O\left(\frac{1}{a^4 h^2}\right)\right)$$

et où Ξ *est une fonction de troncature,* $\Xi \in C^\infty(\mathbb{R})$, *telle que :*

$$\Xi(x) = \begin{vmatrix} 1 & si & x \geq 3/4 \\ 0 & si & x \leq 1/2 \,. \end{vmatrix}$$

Démonstration : Le problème (2.4)-(2.5) s'écrit de manière équivalente :

$$(2.16) \qquad \begin{cases} \begin{cases} P\bar{f} = \lambda \bar{f} & \text{dans} \quad \bar{I} =]-\bar{a}, \bar{a}[\\ \bar{f}'(\pm \bar{a}) = 0\,, & \bar{f} \in H^2(-\bar{a}, \bar{a}) \end{cases} \\ \bar{f} > 0 & \text{dans} \quad]-\bar{a}, \bar{a}[\end{cases}$$

avec :

$$P\bar{f} \equiv -\bar{f}'' + x^2 \bar{f}$$

$$(2.17) \qquad \begin{cases} \bar{a} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\kappa h}\,; \quad \lambda = \dfrac{\kappa}{h} \\ \text{et} \quad \bar{f}(a\sqrt{\kappa h}\, x) = a^{1/2}(h\kappa)^{1/4} \varphi(x)\,. \end{cases}$$

Nous supposerons que $\bar{f}$ vérifie la condition de normalisation :

$$\|\bar{f}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} = 1\,.$$

Notons que cette condition équivaut à :

$$\|\varphi\|_{L^2(-1/2, 1/2)} = 1\,.$$

i) *Montrons* tout d'abord que lorsque $\bar{a}$ tend vers $+\infty$:

$$|\lambda - 1| \leqslant \text{Cte}\, \bar{a}^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{(\bar{a})^2}{2}\left(1+\frac{7}{16}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{(\bar{a})^2}\right)\right). \tag{2.18}$$

L'équation : $P\bar{f} = \bar{f}$ admet sur $\mathbb{R}$ un système de solutions linéairement indépendantes f_1 et f_2 qui vérifient :

$$f_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \quad \text{lorsque} \quad x \to +\infty$$

avec :

$$f_2'(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \quad \text{lorsque} \quad x \to +\infty$$

(*cf.* Y. Sibuya [17] par exemple).

La dérivée f_2' étant positive lorsque $x \to +\infty$, la fonction f_2 est croissante pour $\bar{a}$ assez grand.

D'autre part la fonction $f_2(-x)$ étant aussi solution du problème $P\bar{f} = \bar{f}$, on cherche une solution approchée $\bar{f}^{\bar{a}}$ de $\bar{f}$, sur $]-\bar{a}, \bar{a}[$, de la forme suivante :

$$\bar{f}^{\bar{a}}(x) = \beta\, e^{-\frac{x^2}{2}} + \mu(\bar{a})\, f_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) + \nu(\bar{a})\, f_2(-x)\, \Xi\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right) \tag{2.19}$$

où β, $\mu(\bar{a})$ et $\nu(\bar{a})$ sont tels que :

$$\|\bar{f}^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} = 1$$

et

$$(\bar{f}^{\bar{a}})'(\pm \bar{a}) = 0$$

Ξ est une fonction de troncature, $\Xi \in C^\infty(\mathbb{R})$, définie dans la proposition 2.9.

Or $(\bar{f}^{\bar{a}})'(\bar{a}) = 0$ équivaut à :

$$\mu(\bar{a}) = \beta\, \bar{a}\, e^{-(\bar{a})^2}\left(1 + \frac{1}{2(\bar{a})^2} + O\left(\frac{1}{(\bar{a})^4}\right)\right) \tag{2.20}$$

$(\bar{f}^{\bar{a}})'(-\bar{a})$ à :

$$\nu(\bar{a}) = \mu(\bar{a})$$

et

$$\beta = \pi^{-1/4} + O(e^{-(\bar{a})^2}\, \bar{a}) \quad \text{lorsque} \quad \bar{a} \to \infty$$

puisque :

$$\|\overline{f^{\bar a}}\|_{L^2(-\bar a,\bar a)}=1$$

$$\Leftrightarrow \beta^2\left[\int_{\mathbb R} e^{-x^2}dx-2\int_{\bar a}^{\infty} e^{-x^2}dx+\frac{4\,\mu(\bar a)}{\beta}\int_{\frac{\bar a}{2}}^{\bar a}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\times\right.$$

$$\times\,\Xi\left(\frac{x}{\bar a}\right)dx$$

$$\left.+2\left(\frac{\mu(\bar a)}{\beta}\right)^2\int_{\frac{\bar a}{2}}^{\bar a} e^{x^2}\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\Xi^2\left(\frac{x}{\bar a}\right)dx\right]=1$$

avec :

$$\int_{\mathbb R} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\quad\text{et}\quad\int_{\bar a}^{\infty}e^{-x^2}dx\leqslant\frac{1}{\bar a}\int_{\bar a}^{\infty}x\,e^{-x^2}dx=\frac{1}{2\bar a}e^{-\bar a^2}$$

donc :

$$\beta^2\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{\bar a\pi}e^{-(\bar a)^2}$$

et :

$$\beta^2\geqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}-\frac{2}{\pi}\bar a\,e^{-(\bar a)^2}\left(1+O\left(\frac{1}{(\bar a)^2}\right)\right)$$

car les fonctions à intégrer sur $[\bar a/2,\bar a]$ sont positives sur l'intervalle considéré.

f_1 et f_2 étant solutions de : $P\bar f=\bar f$, nous avons :

$$P\overline{f^{\bar a}}=\overline{f^{\bar a}}+w^{\bar a}$$

avec :

$$\begin{aligned}w^{\bar a}\equiv\;&-\frac{\mu(\bar a)}{\bar a^2}\left(f_2(x)\,\Xi''\left(\frac{x}{\bar a}\right)+f_2(-x)\,\Xi''\left(-\frac{x}{\bar a}\right)\right)\\&-2\frac{\mu(\bar a)}{\bar a}\left(f_2'(x)\,\Xi'\left(\frac{x}{\bar a}\right)+f_2'(-x)\,\Xi'\left(-\frac{x}{\bar a}\right)\right).\end{aligned}$$

La dérivée f_2' est croissante sur l'intervalle $[\bar a/2,\ 3\bar a/4]$ pour $\bar a$ assez grand, car :

$$f_2''(x)=(x^2-1)\,f_2(x)$$

est positif dès que $x>1$.

Par conséquent, Ξ' et Ξ'' étant bornées indépendamment de $\bar{a}$:

$$\|w^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})} \leqslant \text{Cte}\, e^{-\bar{a}^2}(\bar{a})^{1/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\bar{a}^2}\right)\right)\left(\frac{1}{\bar{a}} f_2\left(\frac{3\bar{a}}{4}\right) + \right.$$
$$\left. + f_2'\left(\frac{3\bar{a}}{4}\right)\right)$$
$$= \text{Cte}\, e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}\left(1+\frac{7}{16}\right)}(\bar{a})^{1/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\bar{a}^2}\right)\right)$$

où la constante est indépendante de $\bar{a}$.

D'autre part, si Sp (P) désigne le spectre de l'opérateur P :

$$\|(P-1)\bar{f}^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})} \geqslant \|\bar{f}^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})} \cdot d(\mathrm{Sp}\,(P), 1) = d(\mathrm{Sp}\,(P), 1)$$

car P est un opérateur auto-adjoint et $\bar{f}^{\bar{a}}$ est de norme 1 dans $L^2(-\bar{a}, \bar{a})$.

Or par symétrie et parce que la première fonction propre du problème (2.16) est la seule fonction propre, de ce problème, qui ne change pas de signe sur $]-\bar{a}, \bar{a}[$, nous avons :

$$\lambda = \eta$$

où η est la première valeur propre du problème (2.9)-(2.10).

Or, $\eta = \kappa/h$, et h, solution de $(\mathscr{P}_h^0)$, tend vers κ lorsque a tend vers $+\infty$ (d'après la proposition 2.5). Il en résulte que η tend vers 1, lorsque a tend vers $+\infty$, et donc que λ tend vers 1, lorsque $\bar{a}$ tend vers $+\infty$. Par conséquent :

$$d(\mathrm{Sp}\,(P), 1) = |\lambda - 1| .$$

Il en résulte (2.18).

ii) Soit maintenant $\Pi_{\bar{a}}$ la projection orthogonale de $L^2(-\bar{a}, \bar{a})$ sur l'espace propre associé à la valeur propre principale de (2.16) ; et soit : $v^{\bar{a}} = \Pi_{\bar{a}} \bar{f}^{\bar{a}}$, alors :

$$P v^{\bar{a}} = \lambda v^{\bar{a}} \cdot$$

Définissons

$$G^{\bar{a}} = \{\xi \in L^2(-\bar{a}, \bar{a})\,;\,(\xi, v^{\bar{a}}) = 0\}$$

et $$F^{\bar{a}} = \{\xi \in H^2(-\bar{a}, \bar{a}) \cap G^{\bar{a}}\,;\,\xi'(\pm\bar{a}) = 0\}\ ,$$ alors :

$(P - \lambda)$ étant un isomorphisme de $F^{\bar{a}}$ sur $G^{\bar{a}}$:

$$v^{\bar a} - \bar f^{\bar a} = (P - \lambda)^{-1}\Big[(\lambda - 1)\bar f^{\bar a} + \\ + \frac{\mu(\bar a)}{\bar a^2}\left[f_2(x)\,\Xi''\left(\frac{x}{\bar a}\right) + f_2(-x)\,\Xi''\left(-\frac{x}{\bar a}\right)\right] \\ + 2\frac{\mu(\bar a)}{\bar a}\left(f_2'(x)\,\Xi'\left(\frac{x}{\bar a}\right) + f_2'(-x)\,\Xi'\left(-\frac{x}{\bar a}\right)\right)\Big].$$

Or, par définition de la norme d'un opérateur linéaire et en utilisant la caractérisation variationnelle des valeurs propres de $(P - \lambda)^{-1}$, nous avons :

$$\|(P - \lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(G^{\bar a}, F^{\bar a})} = \\ = \operatorname*{Sup}_{\xi \in G^{\bar a}} \frac{\|(P - \lambda)^{-1}\xi\|_{H^2(-\bar a, \bar a)}}{\|\xi\|_{L^2(-\bar a, \bar a)}} \\ = \operatorname*{Sup}_{\xi \in F^{\bar a}} \frac{\|\xi\|_{H^2(-\bar a, \bar a)}}{\|(P - \lambda)\xi\|_{L^2(-\bar a, \bar a)}} = \frac{\|\psi\|_{H^2(-\bar a, \bar a)}}{(\lambda_1 - \lambda)\|\psi\|_{L^2(-\bar a, \bar a)}}$$

où λ_1 est la deuxième valeur propre de (2.16) et ψ une fonction propre associée.

Nous avons :

$$\psi'' = (x^2 - \lambda_1)\,\psi \quad \text{dans} \quad]-\bar a, \bar a[$$

donc, d'une part :

$$\|\psi''\|_{L^2(-\bar a, \bar a)} \leqslant (\bar a^2 + \lambda_1)\|\psi\|_{L^2(-\bar a, \bar a)}$$

et d'autre part, par une intégration par parties :

$$\|\psi'\|^2_{L^2(-\bar a, \bar a)} + \int_I x^2\,\psi^2\,dx = \lambda_1\|\psi\|^2_{L^2(-\bar a, \bar a)}$$

donc :

$$\|\psi'\|^2_{L^2(-\bar a, \bar a)} \leqslant \lambda_1\|\psi\|^2_{L^2(-\bar a, \bar a)}.$$

Il en résulte que :

$$\|\psi\|_{H^2(-\bar a, \bar a)} \leqslant (\bar a^2 + \lambda_1 + 1)\|\psi\|_{L^2(-\bar a, \bar a)}.$$

Par conséquent :

$$\|(P - \lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(G^{\bar a}, F^{\bar a})} \leqslant \frac{(\bar a^2 + \lambda_1 + 1)}{\lambda_1 - \lambda}.$$

Or, λ tend vers 1 lorsque $\bar{a}$ tend vers $+\infty$ et λ_1 est minorée par une constante strictement supérieure à 1, en effet :

Nous pouvons étudier λ_1 en reprenant la démonstration de la proposition 2.5, et en considérant la solution z de l'équation (2.11) :

$$-z''(t)+(t^2-\eta)\,z(t)=0 \quad \text{dans} \quad]0,+\infty[$$

qui vérifie les conditions limites suivantes :

$$z(0)=0\,;\quad z'(0)=z_0\,.$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$z(t)=z_0\,e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}c_{2p+1}\,t^{2p+1}$$

où $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{2p+1} = \dfrac{(3-\eta)(7-\eta)\dots(4p-1-\eta)}{(2p+1)!} \quad \text{pour} \quad p \geq 1\,. \end{cases}$

En dérivant sous le signe $\sum$, ce qui est possible puisque le rayon de convergence de la série est $+\infty$, nous obtenons :

$$z'(t)=z_0\,e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\frac{(1-\eta)}{2}\,t^2+\frac{(3-\eta)^2}{24}\,t^4+\right.$$
$$\left.+\sum_{p=3}^{\infty}\frac{(3-\eta)(7-\eta)\dots(4p-5-\eta)}{(2p)!}\,(2p-1-\eta)\,t^{2p}\right).$$

Il en résulte que $z'(t)$ ne peut s'annuler que pour $\eta \leq 1$.

Supposons donc : $1<\eta$.

Une étude de la fonction :

$$f(X)=1-\frac{\eta-1}{2}X+\frac{(3-\eta)^2}{24}X^2$$

sur l'intervalle $]0,+\infty[$, montre qu'elle admet un minimum sur cet intervalle en un point X_0 tel que :

$$f(X_0)=-\frac{(\eta^2+6\,\eta-15)}{2(3-\eta)^2} \quad \text{avec :} \quad X_0=\frac{6(\eta-1)}{(3-\eta)^2}$$

$f(X_0)$ ne peut donc être négatif que si η est supérieur à la racine positive de $(\eta^2+6\,\eta-15)$, c'est-à-dire :

$$\eta>1{,}9\,.$$

Le reste de la série donnant $z'(t)$ étant positif pour $\eta < 3$, il en résulte que λ_1 est nécessairement supérieur à 1,9. On peut en fait montrer que λ_1 tend vers la seconde valeur propre (égale à 3) du problème :

$$P\bar{f} = \mu \bar{f} \quad \text{sur} \quad]-\infty, +\infty[$$

et un résultat analogue pour les autres valeurs propres.

Par conséquent :

$$\|(P - \lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\dot{G}^{\bar{a}}, F^{\bar{a}})} \leq \text{Cte } (\bar{a})^2 .$$

Il en résulte, compte tenu de (2.18) que :

$$\left\| v^{\bar{a}} - \bar{f}^{\bar{a}} \right\|_{H^2(-\bar{a}, \bar{a})} = O\left((\bar{a})^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}\left(1+\frac{7}{16}\right)} \right). \tag{2.21}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $(v^{\bar{a}} - \bar{f}^{\bar{a}})$ est orthogonal à $v^{\bar{a}}$ et en posant :

$$\lambda^{\bar{a}} \equiv \frac{(P\bar{f}^{\bar{a}}, \bar{f}^{\bar{a}})}{(\bar{f}^{\bar{a}}, \bar{f}^{\bar{a}})}$$

nous avons :

$$\lambda = \frac{(Pv^{\bar{a}}, v^{\bar{a}})}{(v^{\bar{a}}, v^{\bar{a}})} = \lambda^{\bar{a}} + O\left((\bar{a})^5 e^{-(\bar{a})^2\left(1+\frac{7}{16}\right)} \right) \tag{2.22}$$

(*cf.* B. Helffer [9]).

$\lambda^{\bar{a}}$ est une approximation de λ que l'on peut calculer ; en effet :

$$(P\bar{f}^{\bar{a}}, \bar{f}^{\bar{a}}) - (\bar{f}^{\bar{a}}, \bar{f}^{\bar{a}}) = 2\,\mu(\bar{a})\Big(-\left(f_2(\bar{x})\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right)\right)'' + \\ + x^2 f_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) - f_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right), \bar{f}^{\bar{a}} \Big) .$$

En intégrant deux fois par parties ce produit scalaire défini sur $]-\bar{a}, \bar{a}[$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(P\bar{f}^{\bar{a}}, \bar{f}^{\bar{a}}) - (\bar{f}^{\bar{a}}, \bar{f}^{\bar{a}}) = \\ & - 2\,\mu(\bar{a})\, f_2'(\bar{a})\, \bar{f}^{\bar{a}}(\bar{a}) \\ & - \frac{4}{\bar{a}}(\mu(\bar{a}))^2 \left(f_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right), \Xi'\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) (f_2)'(x) \right) \\ & - \bar{2}\left(\frac{\mu(\bar{a})}{\bar{a}}\right)^2 \left(f_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right), \Xi''\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) f_2(x) \right) .\end{aligned}$$

Or, grâce à (2.19) et à l'expression de f_2', nous avons lorsque $\bar{a}$ tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} f_2'(\bar{a})\,\bar{f}^{\bar{a}}(\bar{a}) &= f_2'(\bar{a})\,(\beta f_1(\bar{a}) + \mu(\bar{a})\,f_2(\bar{a})) \\ &= e^{\frac{\bar{a}^2}{2}}\left(1 - \frac{1}{2\,\bar{a}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right)\beta\, e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}}\left(2 + \frac{1}{\bar{a}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right) \\ &= \pi^{-1/4}\left(2 + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right) \end{aligned}$$

et les deux derniers produits scalaires sont de l'ordre de :

$$O\,(e^{-\bar{a}^2(1 + 3/4)})$$

donc :

$$(P\bar{f}^{\bar{a}}, \bar{f}^{\bar{a}}) = (\bar{f}^{\bar{a}}, \bar{f}^{\bar{a}}) - 4\,\pi^{-1/2}\,\bar{a}\,e^{-(\bar{a})^2}\left(1 + \frac{1}{2\,\bar{a}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right).$$

Comme de plus $\bar{f}^{\bar{a}}$ est de norme 1 dans $L^2(-\bar{a}, \bar{a})$, nous avons :

$$\lambda^{\bar{a}} = 1 - 4\,\pi^{-1/2}\,\bar{a}\,e^{-\bar{a}^2}\left(1 + \frac{1}{2\,\bar{a}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right).$$

Il résulte alors de (2.22) que :

$$\lambda = 1 - 4\,\pi^{-1/2}\,\bar{a}\,e^{-\bar{a}^2}\left(1 + \frac{1}{2\,\bar{a}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right). \tag{2.23}$$

C'est-à-dire i) de la proposition 2.9, dans les paramètres et variables initiaux.

iii) *Montrons* que, pour $\bar{a}$ assez grand :

$$\|\bar{f} - \bar{f}^{\bar{a}}\|_{H^2(-\bar{a}, \bar{a})} \leqslant \mathrm{Cte}\; e^{-\frac{5}{8}\bar{a}^2}$$

et tout d'abord que :

$$\|\bar{f} - v^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} \leqslant \|v^{\bar{a}} - \bar{f}^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})}.$$

Cette inégalité est équivalente à :

$$\begin{aligned} &\|\bar{f}\|^2_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} - 2(\bar{f}, v^{\bar{a}}) + \|v^{\bar{a}}\|^2_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \|\bar{f}^{\bar{a}}\|^2_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} - 2(\bar{f}^{\bar{a}}, v^{\bar{a}}) + \|v^{\bar{a}}\|^2_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} \end{aligned}$$

et donc, puisque $\bar{f}$ et $\bar{f^{a}}$ sont de norme 1 dans $L^2(-\bar{a}, \bar{a})$:

$$\Leftrightarrow (\bar{f^{a}}, v^{\bar{a}}) \leqslant (\bar{f}, v^{\bar{a}})$$

or, $v^{\bar{a}}$ étant la projection de $\bar{f^{a}}$ sur l'espace propre engendré par $\bar{f}$:

$$v^{\bar{a}} = \alpha \bar{f}$$

avec $\alpha > 0$ car $v^{\bar{a}} > 0$ et $\bar{f} > 0$, et $\alpha \leqslant 1$ car :

$$\|v^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} = \left\|\Pi_{\bar{a}} \bar{f^{a}}\right\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} \leqslant \left\|\bar{f^{a}}\right\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} = 1$$

et
$$\|\bar{f}\| = 1$$

et d'autre part :

$$\bar{f^{a}} = v^{\bar{a}} + (v^{\bar{a}})^{\perp} \quad \text{avec} \quad ((v^{\bar{a}})^{\perp}, v^{\bar{a}}) = ((v^{\bar{a}})^{\perp}, \bar{f}) = 0$$

donc :

$$(\bar{f^{a}}, v^{\bar{a}}) = \|v^{\bar{a}}\|^2 = \alpha^2 \|\bar{f}\|^2 = \alpha^2$$

et
$$(\bar{f}, v^{\bar{a}}) = \alpha \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha \leqslant 1\,.$$

Il en résulte que :

$$(\bar{f}, v^{\bar{a}}) \leqslant (\bar{f^{a}}, v^{\bar{a}})$$

d'où l'inégalité énoncée.

Et par conséquent, d'après (2.21) :

$$\|\bar{f} - \bar{f^{a}}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} \leqslant \sqrt{2}\|v^{\bar{a}} - \bar{f^{a}}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} \leqslant \text{Cte}\ \bar{a}^{\frac{5}{2}}\, e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}\left(1 + \frac{7}{16}\right)}\,.$$

D'autre part, $\bar{f}$ vérifiant (2.16), et $\bar{f^{a}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} P\bar{f^{a}} = \bar{f^{a}} + w^{\bar{a}} \\ \bar{f^{a}}'(\pm \bar{a}) = 0 \end{cases}$$

nous avons :

$$P(\bar{f} - \bar{f^{a}}) = (\bar{f} - \bar{f^{a}}) + (\lambda - 1)\bar{f} - w^{\bar{a}}$$

et donc par une intégration par parties, après avoir multiplié par $(\bar{f} - \bar{f^a})$:

$$\int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} (\bar{f} - \bar{f^a})'^2\, dx + \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} x^2(\bar{f} - \bar{f^a})^2\, dx =$$

$$= (\lambda - 1)\int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} \bar{f}(\bar{f} - \bar{f^a})\, dx + \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} (\bar{f} - \bar{f^a})^2\, dx - \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} w^{\bar{a}}(\bar{f} - \bar{f^a})\, dx\,.$$

Grâce aux majorations précédentes de $|\lambda - 1|$, $\|\bar{f} - \bar{f^a}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})}$ et $\|w^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})}$, et en tenant compte du fait que les deux termes du premier membre sont positifs, nous avons :

$$\begin{aligned}\|(\bar{f} - \bar{f^a})'\|^2_{L^2(-\bar{a},\bar{a})} &\leqslant |\lambda - 1|\,\|\bar{f} - \bar{f^a}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})} + \|\bar{f} - \bar{f^a}\|^2 \\ &\quad + \|w^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})}\|\bar{f} - \bar{f^a}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})} \\ &\leqslant \text{Cte}\ (\bar{a})^5\, e^{-\bar{a}^2\left(1+\frac{7}{16}\right)}\,.\end{aligned}$$

Enfin :

$$(\bar{f} - \bar{f^a})'' = x^2(\bar{f} - \bar{f^a}) + (1-\lambda)\bar{f} + w^{\bar{a}} - (\bar{f} - \bar{f^a}) \quad \text{dans} \quad]-\bar{a}, \bar{a}[$$

donc :

$$\begin{aligned}\|(\bar{f} - \bar{f^a})''\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})} &\leqslant (\bar{a}^2 - 1)\|\bar{f} - \bar{f^a}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})} \\ &\quad + |1-\lambda| + \|w^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a},\bar{a})} \\ &\leqslant \text{Cte}\ \bar{a}^{2+\frac{5}{2}}\, e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}\left(1+\frac{7}{16}\right)}\end{aligned}$$

et donc :

$$\|\bar{f} - \bar{f^a}\|_{H^2(-\bar{a},\bar{a})} \leqslant \text{Cte}\ (\bar{a})^{\frac{9}{2}}\, e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}\left(1+\frac{7}{16}\right)} \leqslant \text{Cte}\ e^{-\frac{5}{8}\bar{a}^2}$$

et comme $H^1(-\bar{a},\bar{a}) \subset C^0([-\bar{a},\bar{a}])$ avec injection continue, il existe deux constantes c_0 et c_1 positives telles que, pour tout $\bar{a}$ tel que $\bar{a} > c_0$:

$$\sup_{x\in[-\bar{a},\bar{a}]} |\bar{f}(x) - \bar{f^a}(x)| \leqslant c_1\, e^{-\frac{5}{8}\bar{a}^2}\,.$$

Il en résulte ii) de la proposition 2.9, en utilisant les changements de variables (2.17).

2.2.2. *Résolution numérique du problème* $(\mathcal{P}_h^0)$

On cherche dans ce paragraphe à calculer numériquement la valeur positive de h définie par ii) de la proposition 2.4 ainsi que la solution φ du problème $(\mathcal{P}_h^0)$ correspondante, lorsque c est nul et lorsque a décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

2.2.2.1. Principe de résolution

κ, a et $N \in \mathbb{N}$ étant donnés tous positifs, on définit une subdivision régulière (x_i) de l'intervalle $]-1/2, 1/2[$ par :

$$x_i = (i - N - 1)\, dx \quad i = 1, \dots, 2N + 1 \quad \text{avec} \quad 2N\, dx = 1 \,.$$

Pour h donné, arbitraire, l'opérateur :

$$-\Delta + a^4 h^2 \kappa^2 x^2 \mathbb{I} : H^2(-1/2, 1/2) \to L^2(-1/2, 1/2)$$

est approché par :

$$-\Delta_h + a^4 h^2 \kappa^2 (x_i)^2 \mathbb{I}_{2N+1} : \mathbb{R}^{2N+1} \to \mathbb{R}^{2N+1}$$

où Δ_h est l'opérateur de différences finies habituel dans la discrétisation du Laplacien.

Le problème approché s'écrit :

$$(\Delta\mathcal{P}_h) \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & & \\ 1 & \alpha_2 & 1 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & 0 & & 1 & \alpha_{2N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_{2N+1} \end{pmatrix} = -(dx)^2 a^2 \kappa^2 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_{2N+1} \end{pmatrix}$$

où
$$\varphi_i \simeq \varphi(x_i)$$

et
$$\alpha_1 = -1 - a^4 h^2 \kappa^2 (dx)^2/4$$
$$\alpha_i = -2 - a^4 h^2 \kappa^2 (x_i)^2 (dx)^2 \quad i = 2, \dots, 2N$$
$$\alpha_{2N+1} = -1 - a^4 h^2 \kappa^2 (dx)^2/4 \,.$$

Soit A la matrice du système $(\Delta\mathcal{P}_h)$. La solution h de $(\mathcal{P}_h^0)$ est déterminée de telle sorte que la première valeur propre μ du problème :

$$A \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_{2N+1} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_{2N+1} \end{pmatrix}$$

soit égale à : $-(dx)^2 a^2 \kappa^2$.

On utilise la méthode de la puissance itérée inverse pour calculer la plus petite valeur propre μ de A, et une méthode de dichotomie pour la détermination de h. L'approximation $(\varphi_i\ ; i = 1, \dots, 2N + 1)$ de φ est alors obtenue en normant la fonction propre obtenue par la méthode de la puissance itérée.

2.2.2.2. Résultats numériques

Des calculs ont été effectués sur le VAX 8700 de l'E.N.S.M. avec $\kappa = 0{,}062$, valeur caractéristique de l'indium. Ce matériau a été étudié expérimentalement par Y. Pellan.

La figure 1 représente la courbe $h = h(a)$ obtenue par lissage d'une vingtaine de points (a, h) avec $a \in [1{,}5,\ 100]$ lorsque $N = 40$.

Les résultats numériques concordent avec les résultats théoriques du paragraphe 2.2.1 :

— décroissance de la courbe $h = h(a)$
— comportement en $\sqrt{12}$ du produit ah lorsque a tend vers 0
— $h(a)$ tend vers κ lorsque a tend vers $+\infty$.

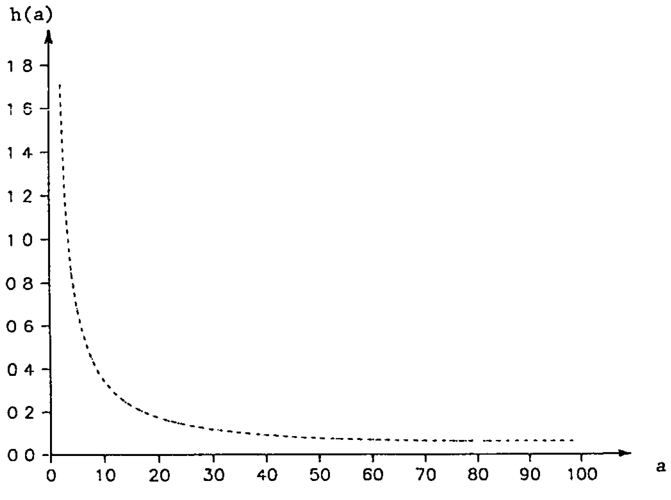

Figure 1. — $h(a)$.

La figure 2 représente des fonctions propres φ obtenues pour différentes valeur de a ; elle confirme que φ est de plus en plus « raide » à l'origine lorsque a croît.

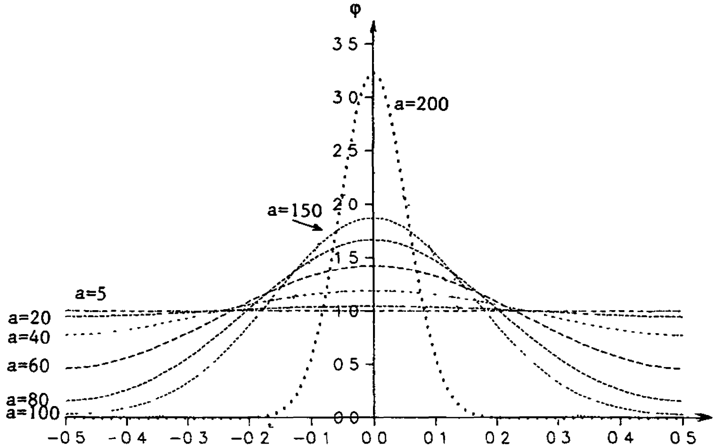

Figure 2. — Fonctions propres φ pour différentes valeurs de a.

2.3. Étude du problème de valeurs propres dans le cas où c est non nul : le problème $(\mathscr{P}_c)$

2.3.1. *Le problème de bifurcation en $c = c(a)$*

Soit $(\mathscr{P}_c)$ le problème posé dans le paragraphe 2.1 :
étant donné $a > 0$, trouver $c \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $h > 0$ et φ solutions de :

$$(\mathscr{P}_c)\begin{cases} (\mathscr{P}_h^c)\begin{cases} (2.24)\begin{cases} -\varphi'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)^2 \varphi - a^2 \kappa^2 \varphi = 0 \\ \varphi'(\pm 1/2) = 0 \quad \varphi \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases} \\ (2.25) \quad \varphi > 0 \quad \text{dans} \quad]-1/2, 1/2[\\ (2.26) \quad \|\varphi\|_{L^2(-1/2, 1/2)} = 1 \end{cases} \\ (H_c) \displaystyle\int_I (x+c)\, \varphi^2(x)\, dx = 0\,. \end{cases}$$

Considérons l'application G définie par :

$$G : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$(2.27) \qquad (c, a) \to G(c, a) \equiv c + \int_I x \varphi^2 \, dx$$

où φ est la solution des équations (2.24)-(2.25)-(2.26).

Le problème $(\mathscr{P}_c)$ consiste à déterminer les couples $(c, a) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ tels que :

$$(2.28) \qquad G(c, a) = 0$$

sachant que pour tout $a > 0$, $(0, a)$ est une solution triviale de (2.28) et de $(\mathscr{P}_c)$.

DÉFINITION 2.11 : *Nous dirons qu'une solution triviale* $(0, a_0)$ *de* $(\mathcal{P}_c)$ *est un* point de bifurcation du problème $(\mathcal{P}_c)$, *si pour tout voisinage* V *de* $(0, a_0)$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *il existe une solution* (c, a) *de* $(\mathcal{P}_c)$ *dans* V *avec* c *non nul.*

Les propositions suivantes donnent des conditions nécessaires de bifurcation du problème $(\mathcal{P}_c)$, qui sont équivalentes entre elles.

2.3.2. *Conditions nécessaires de bifurcation du problème* $(\mathcal{P}_c)$

PROPOSITION 2.12 : *Une condition nécessaire pour qu'une solution triviale* $(0, a_0)$ *de* $(\mathcal{P}_c)$ *soit un point de bifurcation pour* $(\mathcal{P}_c)$ *est qu'il existe une solution* ψ *du problème suivant :*

$$(2.29)\qquad \begin{cases} -\psi'' + a_0^4 h_0^2 \kappa^2 x^2 \psi - a_0^2 \kappa^2 \psi = -2\, a_0^4 h_0^2 \kappa^2 x \varphi_0 \\ \psi'(\pm 1/2) = 0 \quad \psi \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

$$(2.30)\qquad (\varphi_0, \psi) = 0$$

telle que :

$$(2.31)\qquad \int_I x \varphi_0 \psi \, dx = -\frac{1}{2}$$

où φ_0 *est la solution du problème* $(\mathcal{P}_h^0)$ *associée à* a_0 *et* h_0.

Démonstration : L'ensemble $\{(0, a), a > 0\}$ constitue une courbe de solutions triviales de (2.28). h et φ, solutions de (2.24), admettant, d'après la proposition 2.7, des dérivées partielles continues par rapport à c et a sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, une condition nécessaire pour qu'il existe une courbe de solutions (c, a) bifurquée, issue d'un point $(0, a_0)$ est que :

$$\frac{\partial G(0, a_0)}{\partial c} = 0$$

car sinon le théorème des fonctions implicites assurerait l'unicité de la courbe de solutions de (2.28) passant par le point $(0, a_0)$. Or :

$$(2.32)\qquad \forall (c, a) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[: \frac{\partial G(c, a)}{\partial c} = 1 + 2 \int_I t \varphi \psi \, dt$$

où $\psi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial c}$ est la solution de :

$$\begin{cases} (2.33) \begin{cases} -\psi'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x + c)^2 \psi - a^2 \kappa^2 \psi \\ = -2\, a^4 h\, \partial_c h\, \kappa^2 (x + c)^2 \varphi - 2\, a^4 h^2 \kappa^2 (x + c)\, \varphi \\ \psi'(\pm 1/2) = 0 \end{cases} \\ (2.34) \quad (\psi, \varphi) = 0 \end{cases}$$

et
$$\partial_c h = \frac{\partial h}{\partial c}(c, a)$$

les équations (2.33) et (2.34) étant obtenues par dérivation par rapport à c des équations (2.24) et (2.26).

LEMME 2.13 : a) *Soit* $(c, a) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ *et* h *solution de* $(\mathscr{P}_h^c)$ *alors :*

$$\frac{\partial h}{\partial c}(c, a) = -h \frac{\int_I (x+c)\varphi^2\,dx}{\int_I (x+c)^2 \varphi^2\,dx}$$

b) *les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\frac{\partial h}{\partial c}(c, a) = 0$

ii) $G(c, a) = 0$

c) *si* i) *ou* ii) *de* b) *est vérifié, alors :*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial c^2}(c, a) = -h \frac{2\int_I (x+c)\varphi\psi\,dx + 1}{\int_I (x+c)^2 \varphi^2\,dx}$$

où ψ *est la solution de* (2.33)-(2.34).

Démonstration : Si ψ est solution de (2.33)-(2.34), le second membre de cette équation est orthogonal à φ donc

$$(2.35)\quad \partial_c h \int_I (x+c)^2 \varphi^2\,dx + h \int_I (x+c)\varphi^2\,dx = 0$$

φ étant de norme 1 dans $L^2(-1/2, 1/2)$:

$$\int_I (x+c)^2 \varphi^2\,dx \neq 0$$

a) en résulte immédiatement.

b) est une conséquence de *a*).

Pour montrer *c*), posons :

$$\partial_c^2 h = \frac{\partial^2 h_c}{\partial c^2} \quad \text{et} \quad \partial_c^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c^2}.$$

En dérivant (2.33) par rapport à c, nous obtenons :

$$\begin{cases} -\ (\partial_c^2 \varphi)'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)^2 (\partial_c^2 \varphi) - a^2 \kappa^2 (\partial_c^2 \varphi) \\ = -\ 4\, a^4 h(\partial_c h)\, \kappa^2 (x+c)^2\, \psi - 4\, a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)\, \psi \\ \quad -\ 2\, a^4 (\partial_c h)^2\, \kappa^2 (x+c)^2\, \varphi - 2\, a^4 h(\partial_c^2 h)\, \kappa^2 (x+c)^2\, \varphi \\ \quad -\ 8\, a^4 h(\partial_c h)\, \kappa^2 (x+c)\, \varphi - 2\, a^4 h^2 \kappa^2\, \varphi \\ (\partial_c^2 \varphi)'\ (\pm\ 1/2) = 0 \end{cases}$$

avec $\partial_c h = 0$ lorsque i) ou ii) de b) est vérifié.

La condition d'orthogonalité à φ du second membre de l'équation implique immédiatement c).

Compte tenu des relations (2.33)-(2.34) et du lemme 2.13, la condition nécessaire de bifurcation :

$$\frac{\partial G(0, a_0)}{\partial c} = 0$$

s'écrit :

$$1 + 2 \int_I t \varphi_0\, \psi\, dt = 0$$

avec ψ solution de (2.29)-(2.30).

PROPOSITION 2.14 : *Une condition nécessaire, équivalente à la condition donnée dans la proposition* 2.12, *pour qu'une solution triviale* $(0, a_0)$ *soit un point de bifurcation du problème* $(\mathcal{P}_c)$ *est qu'il existe une solution* ψ_0 *non identiquement nulle du problème suivant :*

$$(2.36) \quad \begin{cases} -\ \psi_0'' + a_0^4 h_0^2 \kappa^2 x^2 \psi_0 - a^2 \kappa^2 \psi_0 - 4\, a_0^4 h_0^2 \kappa^2 x \varphi_0 \displaystyle\int_I t \varphi_0\, \psi_0\, dt = 0 \\ \psi_0'(\pm\ 1/2) = 0 \quad \psi_0 \in H^2(-\ 1/2,\ 1/2) \end{cases}$$

$$(2.37) \qquad (\psi_0, \varphi_0) = 0\,.$$

Démonstration : Montrons que les deux conditions sont équivalentes :

* si ψ_0 est une solution de (2.36) et (2.37) avec $\psi_0 \neq 0$ alors :

$$\int_I t \varphi_0\, \psi_0\, dt \neq 0$$

car sinon ψ_0 vérifierait :

$$\begin{cases} -\ \psi_0'' + a_0^4 h_0^2 \kappa^2 x^2 \psi_0 - a_0^2 \kappa^2 \psi_0 = 0 \\ \psi_0'(\pm\ 1/2) = 0 \end{cases}$$

et donc :

$$\psi_0 = \alpha \varphi_0 \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

ce qui est contraire à la condition d'orthogonalité (2.37).

Nous pouvons donc poser :

$$\psi = -\frac{\psi_0}{2 \int_I t \varphi_0 \psi_0 \, dt}$$

ceci implique (2.31) et (2.29).

La réciproque est immédiate.

La condition nécessaire énoncée dans la proposition 2.12 peut s'écrire sous une autre forme équivalente particulièrement simple en utilisant les changements de variable et de paramètres de (2.17).

Le problème $(\mathscr{P}_h^c)$ équivaut en effet à :

$$\begin{cases} (2.38) \quad \begin{cases} -\bar{f}'' + (x+\bar{c})^2 \bar{f} = \lambda_{\bar{c}} \bar{f} & \text{dans} \quad \bar{I} =]-\bar{a}, \bar{a}[\\ \bar{f}'(\pm \bar{a}) = 0, \quad \bar{f} \in H^2(-\bar{a}, \bar{a}) \end{cases} \\ (2.39) \quad \bar{f} > 0 \quad \text{dans} \quad]-\bar{a}, \bar{a}[\end{cases}$$

avec, comme en (2.17) :

$$(2.40) \quad \begin{cases} \bar{c} = \sqrt{\kappa h}\, ac \, ; \quad \bar{a} = \dfrac{a}{2} \sqrt{\kappa h} \\ \lambda_{\bar{c}} = \dfrac{\kappa}{h} \quad \text{et} \quad \bar{f}(a\sqrt{\kappa h}\, x) = a^{1/2} (h\kappa)^{1/4} \varphi(x) \end{cases}$$

et la condition (H_c) équivaut à :

$$(\bar{H}_{\bar{c}}) \qquad \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} (x+\bar{c}) \bar{f}^2(x) \, dx = 0 \, .$$

Nous cherchons la solution $\bar{f}$ de (2.38) (2.39) telle que :

$$(2.41) \qquad \|\bar{f}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} = 1 \, .$$

PROPOSITION 2.15 : *Soit $\bar{f}$ et $\lambda_{\bar{c}}$ les solutions de* (2.38)-(2.39)-(2.41) *alors :*

i) *le problème $(\mathscr{P}_c)$ est équivalent à trouver $\bar{c} \in \mathbb{R}$, tel que :*

$$\frac{\partial \lambda_{\bar{c}}}{\partial \bar{c}} (\bar{c}, \bar{a}) = 0$$

ii) *une condition nécessaire pour que* $(0, a_0)$ *soit un point de bifurcation du problème* $(\mathscr{P}_c)$ *est qu'il existe une solution* $\bar{y}$ *du problème suivant :*

$$(2.42)\qquad \begin{cases} -\bar{y}'' + x^2\bar{y} - \lambda_0\bar{y} = -2x\bar{f} \\ \bar{y}'(\pm\bar{a}_0) = 0 \quad \bar{y} \in H^2(-\bar{a}_0, \bar{a}_0) \end{cases}$$

$$(2.43)\qquad (\bar{y}, \bar{f}) = 0 \quad \textit{pour le produit scalaire de } L^2(-\bar{a}, \bar{a}),$$

telle que :

$$(2.44)\qquad \bar{a}_0 + (\bar{a}_0^2 - \lambda_0)\frac{\bar{y}(\bar{a}_0)}{\bar{f}(\bar{a}_0)} = 0$$

où

$$\bar{a}_0 = \frac{a_0}{2}\sqrt{h\kappa}\,.$$

La proposition résulte du lemme suivant :

LEMME 2.16 : *Étant donnés* $\bar{a} > 0$ *et* $\bar{c} \in \mathbb{R}$, *la valeur propre principale* $\lambda_{\bar{c}}$ *du problème* (2.38)-(2.39) *vérifie :*

$$\text{i) } (2.45)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\bar{c}}(\bar{c}, \bar{a}) = 2\int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} (x + \bar{c})\bar{f}^2(x)\,dx$$

dès que $\|\bar{f}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} = 1$

$$\text{ii) } (2.46)\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial\bar{c}}(\bar{c}, \bar{a}) = \Phi(\bar{c}) - \Phi(-\bar{c}) \\ \textit{où } \Phi(\bar{c}) = (q(\bar{a} + \bar{c}) - \lambda_{\bar{c}})\bar{f}^2(\bar{a}) \textit{ et } q(x) = x^2. \end{cases}$$

Démonstration du lemme :

i) Comme dans la démonstration du lemme 2.13, on dérive (2.38) par rapport à $\bar{c}$, et on écrit que le second membre de l'équation obtenue est orthogonal à $\bar{f}$.

ii) Résulte de M. Dauge et B. Helffer [5] en considérant le problème (2.38)-(2.39), translaté sur l'intervalle $]-\bar{a} + \bar{c}, \bar{a} + \bar{c}[$ et en utilisant les propriétés de symétries :

$$\lambda_{-\bar{c}} = \lambda_{\bar{c}} \quad \text{et} \quad \bar{g}_{-\bar{c}}(x + \bar{c}) = \bar{g}_{\bar{c}}(-x + \bar{c})$$

où

$$\bar{g}_{\bar{c}}(x) = \bar{f}(x - \bar{c}) \quad \forall x \in\,]-\bar{a} + \bar{c}, \bar{a} + \bar{c}[$$

i) de la proposition 2.15 résulte immédiatement de i) du lemme 2.16 et de la condition $(\bar{H}_{\bar{c}})$

ii) de la proposition 2.15 traduit la condition nécessaire de bifurcation :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{c}}\left[\int_{-\bar{a}_0}^{\bar{a}_0} (x+\bar{c})\,\bar{f}^2\,dx\right]_{\bar{c}=0} = 0$$

par dérivation de l'expression (2.46) par rapport à $\bar{c}$, puis division par la quantité strictement positive $\bar{f}^2(\bar{a}_0)$.

2.3.3. *Étude des conditions nécessaires de bifurcation du problème* $(\mathscr{P}_c)$

2.3.3.1. Étude de la condition nécessaire (2.29)-(2.30)-(2.31)

Considérons tout d'abord le problème suivant :

Étant donné $a > 0$, soit (h, φ) la solution du problème $(\mathscr{P}_h^0)$. On cherche ψ solution de :

$$(\mathscr{P}_\psi)\begin{cases} (2.47)\begin{cases} -\psi'' + a^4h^2\kappa^2x^2\psi - a^2\kappa^2\psi = -2\,a^4h^2\kappa^2x\varphi \\ \psi'(\pm 1/2) = 0 \quad \psi \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases} \\ (2.48) \quad (\psi, \varphi) = 0\,. \end{cases}$$

Ce problème admet toujours une solution ψ unique, car le second membre est orthogonal à φ.

LEMME 2.17 : *Pour tout $a > 0$, la solution ψ de $(\mathscr{P}_\psi)$ est une fonction impaire telle que :*

i) $\psi < 0$ *dans* $]0, 1/2[$

ii) $\displaystyle\int_I x\varphi\psi\,dx < 0\,.$

En effet :

i) ψ est impaire car φ est une fonction paire. Nous avons donc $\psi(0) = 0$ et nous pouvons considérer le problème $(\mathscr{P}_\psi)$ sur $]0, 1/2[$ et non plus sur $]-1/2, 1/2[$.

On cherche donc ψ sur $]0, 1/2[$ telle que :

(2.49) $\quad -\psi'' + a^4h^2\kappa^2x^2\psi - a^2\kappa^2\psi = -2\,a^4h^2\kappa^2x\varphi \quad$ dans $\quad]0, 1/2[$

(2.50) $\quad \psi(0) = 0 \qquad \psi'(1/2) = 0\,.$

Soit $\Delta_0 \equiv -\Delta + (a^4h^2\kappa^2x^2 - a^2\kappa^2)\,\mathbb{I}$ alors, la première valeur propre μ_0 de l'opérateur Δ_0, en restriction à $]0, 1/2[$ et muni les conditions limites (2.50), est supérieure ou égale à la première valeur propre λ_0 de Δ_0 dans $]-1/2, 1/2[$ muni des conditions limites de Neumann.

Or $\qquad \lambda_0 = 0\,, \quad$ donc $\quad \mu_0 \geq 0$

et toutes les valeurs propres de Δ_0 sur $]0, 1/2[$ avec les conditions limites (2.50) sont positives ou nulles. Mais la solution ψ de $(\mathscr{P}_\psi)$ est unique, et par conséquent, toutes ces valeurs propres sont strictement positives.

Comme de plus, le second membre de (2.49) est strictement négatif dans $]0, 1/2[$, il résulte du principe du maximum que $\psi < 0$ dans $]0, 1/2[$.

ii) est alors immédiat car φ est positive dans $]-1/2, 1/2[$.

PROPOSITION 2.18 : *Si pour tout* $a > 0$, (h, φ) *vérifie* $(\mathscr{P}_h^0)$ *et* ψ *vérifie* $(\mathscr{P}_\psi)$ *alors :*

i) $\lim\limits_{a \to 0} \psi = 0$ *dans* $H^2(-1/2, 1/2)$.

ii) $\lim\limits_{a \to 0} \displaystyle\int_I x\varphi\psi \, dx = 0$.

Démonstration : Soit A l'opérateur défini de $H^2(-1/2, 1/2)$ dans $L^2(-1/2, 1/2)$ par :

$$A : \xi \to A\xi \equiv -\xi'' + a^4 h^2 \kappa^2 x^2 \xi$$

alors $\lambda_0 = a^2 \kappa^2$ est la première valeur propre de A pour le problème de Neumann sur $]-1/2, 1/2[$.

Soit λ_1 la deuxième valeur propre de ce problème ; λ_1 est donné par :

$$\lambda_1 = \inf_{\xi \in \{(\xi, \varphi) = 0\}} \frac{(A\xi, \xi)}{\|\xi\|^2}$$

où $\| \ \|$ désigne la norme habituelle de $L^2(-1/2, 1/2)$; donc, si ψ est la solution de $(\mathscr{P}_\psi)$:

$$(A\psi, \psi) \geq \lambda_1 \|\psi\|^2 . \tag{2.51}$$

Or :

$$(A\psi, \psi) - a^2 \kappa^2 \|\psi\|^2 = (f, \psi) \quad \text{où} \quad f = a^4 h^2 \kappa^2 x\varphi$$

et grâce à (2.51) :

$$(\lambda_1 - a^2 \kappa^2) \|\psi\|^2 \leq (f, \psi) \leq \|f\| \cdot \|\psi\|$$

donc, puisque : $\lambda_1 \quad \lambda_0 = a^2 \kappa^2$:

$$\|\psi\| \leq \frac{\|f\|}{\lambda_1 - a^2 \kappa^2} \leq \frac{1}{2} \frac{a^4 h^2}{(\lambda_1 - a^2 \kappa^2)} .$$

Lorsque a tend vers 0 :

- $a^2 h^2$ reste borné
- λ_1 tend vers la deuxième valeur propre du problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = 0 & \text{dans} \quad]-1/2, 1/2[. \\ \varphi'(\pm 1/2) = 0 \end{cases}$$

car les valeurs propres de l'équation de Sturm-Liouville sont continues par rapport aux coefficients. Il en résulte que :

$$\lim_{a \to 0} \lambda_1 = \pi^2 > 0$$

et par conséquent :

$$\lim_{a \to 0} \psi = 0 \quad \text{dans} \quad L^2(-1/2, 1/2).$$

En revenant à l'équation (2.47), nous vérifions que ψ tend vers 0 dans $H^2(-1/2, 1/2)$.

ii) est immédiat car :

$$\left| \int_I x\varphi\psi \, dx \right| \leq \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(-1/2, 1/2)}.$$

COROLLAIRE 2.19 : *Le problème* $(\mathscr{P}_c)$ *n'admet pas de bifurcation au point* $(0, a)$ *lorsque* a *est voisin de* 0.

La démonstration est immédiate, puisque d'après la proposition 2.18, la condition (2.31) ne peut pas être satisfaite lorsque a est voisin de 0.

Soit :

$$\alpha_0 = \sup \left\{ \alpha > 0 \text{ t.q. } \forall a \in]0, \alpha[: -\int_I x\varphi\psi \, dx < \frac{1}{2} \right\}. \tag{2.52}$$

Il résulte de la proposition 2.18 que α_0 est strictement positif.

COROLLAIRE 2.20 : *Soit* $a < \alpha_0$ *alors l'application :* $c \to h_c$ *où* h_c *est la solution de* $(\mathscr{P}_h^c)$ *admet un maximum local en* $c = 0$.

Démonstration : L'application $c \to h_c$ où h_c est la solution de $(\mathscr{P}_h^c)$, est strictement concave en $c = 0$, car

$$\partial_c h = 0 \quad \text{lorsque} \quad c = 0$$

et donc, d'après c) du lemme 2.13 et par définition de α_0, nous avons lorsque $a < \alpha_0$: $\partial_c^2 h < 0$.

PROPOSITION 2.2.1 : *Il existe* $a_0 > 0$ *tel que la condition nécessaire de bifurcation* (2.29)-(2.30)-(2.31) *soit satisfaite.*

Démonstration : Montrer qu'il existe a_0 tel que (2.31) soit satisfaite est équivalent à montrer qu'il existe $\bar{a}_0$ tel que l'égalité (2.44) soit vérifiée.

Notons, pour $\bar{a}$ quelconque positif :

$$A^{\bar{a}} \equiv \bar{a} + (\bar{a}^2 - \lambda_0) \frac{\bar{y}(\bar{a})}{\bar{f}(\bar{a})}$$

et $I_{\bar{a}}^- =]-\bar{a}, \bar{a}[$; nous avons :

$$A^{\bar{a}} = \frac{1}{\bar{f}^2(\bar{a})} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{c}} \int_{I_{\bar{a}}} (x + \bar{c})\, \bar{f}^2(x)\, dx \right]_{\bar{c}=0} = \frac{1}{\bar{f}^2(\bar{a})} \left[2 \int_{I_{\bar{a}}} x \bar{f} \bar{y}\, dx + 1 \right].$$

Or, par définition de α_0, (*cf.* (2.52)), la condition : $0 < a < \alpha_0$ implique qu'avec le paramètre $\bar{a}$:

$$A^{\bar{a}} > 0 .$$

Nous allons montrer, en utilisant des équivalents de $\bar{f}$, λ_0 et $\bar{y}$ (*cf.* B. Helffer [8]), que l'on a l'inégalité inverse dès que $\bar{a}$ est assez grand.

Il résulte de la démonstration de la proposition 2.9, que lorsque $\bar{a}$ tend vers $+\infty$:

$$\forall x \in [-\bar{a}, \bar{a}] \quad \bar{f}(x) = \bar{f}^{\bar{a}}(x) + O\left(e^{-\frac{5}{8}\bar{a}^2}\right) \tag{2.53}$$

où $\bar{f}^{\bar{a}}$ est donnée par (2.19)-(2.20) : c'est-à-dire (dans les notations de cette proposition et de sa démonstration) :

$$\bar{f}^{\bar{a}}(x) = \beta f_1(x) + \mu(\bar{a}) f_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) + \mu(\bar{a}) f_2(-x)\, \Xi\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right)$$

et d'autre part :

$$\lambda_0 = 1 - 4\pi^{-1/2} \bar{a}\, e^{-\bar{a}^2} \left(1 + \frac{1}{2(\bar{a})^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right). \tag{2.23}$$

i) *Cherchons* une solution approchée $\bar{y}^{\bar{a}}$ de $\bar{y}$.

Nous cherchons en fait une solution approchée du problème suivant :

$$\begin{cases} -\bar{z}'' + x^2 \bar{z} - \bar{z} = -2x\bar{f}^{\bar{a}}(x) & \text{dans} \quad]-\bar{a}, \bar{a}[\\ \bar{z}'(\pm \bar{a}) = 0 \quad \bar{z} \in H^2(-\bar{a}, \bar{a}) \\ (\bar{z}, \bar{f}^{\bar{a}})_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} = 0 . \end{cases} \tag{2.54}$$

La fonction :

$$\bar{y}_1(x) - x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

est la solution sur $\mathbb{R}$ du problème :

$$\begin{cases} -\bar{y}_1'' + x^2 \bar{y}_1 - \bar{y}_1 = -2\, x f_1(x) & x \in \mathbb{R} \\ (\bar{y}_1, f_1)_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \\ \bar{y}_1 \in L^2(\mathbb{R})\,. \end{cases}$$

La fonction $\bar{y}_1$ étant impaire, il en résulte que $\bar{z}$ vérifie (2.54) si et seulement si la fonction :

$$\bar{z}^{\bar{a}}(x) \equiv \bar{z}(x) - \beta \bar{y}_1(x)\,,$$

vérifie l'équation suivante (dans $]-\bar{a}, \bar{a}[$:

$$\begin{cases} -\bar{z}^{\bar{a}\prime\prime} + x^2 \bar{z}^{\bar{a}} - \bar{z}^{\bar{a}} = -2\, \mu\, (\bar{a})\, x f_2(x)\, \Xi\left(\dfrac{x}{\bar{a}}\right) \\ -\bar{2}\, \mu\, (\bar{a})\, x f_2(x)\, \Xi\left(-\dfrac{x}{\bar{a}}\right) \\ (\bar{z}^{\bar{a}}, \bar{f}^{a})_{L^2(]-\bar{a}, \bar{a}[)} = 0 \\ \bar{z}^{\bar{a}\prime}(\pm \bar{a}) = 0 \quad \bar{z}^{\bar{a}} \in L^2(]-\bar{a}, \bar{a}[) \end{cases}$$

or, on vérifie qu'une solution $\bar{y}_2$ de l'équation :

$$-\bar{y}_2'' + x^2 \bar{y}_2 - \bar{y}_2 = -2\, x f_2(x) \quad \text{lorsque } x \text{ tend vers } + \infty$$

est telle que :

$$\bar{y}_2(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{2\,x} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \quad \text{lorsque } x \text{ tend vers } + \infty$$

(le développement pouvant être mené aussi loin qu'on le désire).

La fonction :

$$\beta \bar{y}_1(x) + \mu\, (\bar{a})\, \bar{y}_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right)$$

nous donnera une approximation de l'équation $(2.54)_1$ sur $[0, +\bar{a}]$. En prolongeant par symétrie l'intervalle $[-\bar{a}, \bar{a}]$, la fonction impaire :

$$\beta \bar{y}_1(x) + \mu\, (\bar{a})\, \bar{y}_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) - \mu\, (\bar{a})\, \bar{y}_2(-x)\, \Xi\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right)$$

sera une solution approchée de $(2.54)_1$ sur $[-\bar{a}, \bar{a}]$, orthogonale à la fonction propre $\bar{f}^{a}$.

Mais cette fonction ne vérifiant pas les conditions de Neumann en $\pm \bar{a}$, nous considérons :

$$(2.55)\quad \bar{y}^{\bar{a}}(x) = \beta \bar{y}_1(x) + \mu(\bar{a})\, \bar{y}_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) - \mu(\bar{a})\, \bar{y}_2(-x)\, \Xi\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right) + \rho(\bar{a})\, f_2(x)\, \Xi\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) + \tau(\bar{a})\, f_2(-x)\, \Xi\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right)$$

et choisissons $\rho(\bar{a})$ et $\tau(\bar{a})$ tels que $\bar{y}^{\bar{a}}$ vérifie les conditions de Neumann en $\bar{a}$ et $-\bar{a}$, c'est-à-dire :

$$(2.56)\quad \rho(\bar{a}) = -2\,\beta\, e^{-(\bar{a})^2}(\bar{a})^2\left(1 + \frac{1}{2(\bar{a})^2} + O\left(\frac{1}{(\bar{a})^4}\right)\right)$$

et $\quad \rho(\bar{a}) = -\tau(\bar{a})$.

ii) *Montrons* que lorsque $\bar{a}$ tend vers $+\infty$:

$$(2.57)\quad \sup_{x \in [-\bar{a}, \bar{a}]} |\bar{y}^{\bar{a}}(\bar{x}) - \bar{y}(x)| \leqslant \text{Cte}\ (\bar{a})^{\frac{15}{2}}\, e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}\left(1+\frac{7}{16}\right)} \leqslant \text{Cte}\ e^{-\frac{5}{8}\bar{a}^2}$$

$\bar{y}^{\bar{a}}$ est impaire par construction, et donc orthogonale à $\bar{f}$, et elle vérifie :

$$\begin{aligned}
-\bar{y}^{\bar{a}\prime\prime} + x^2 \bar{y}^{\bar{a}} - \bar{y}^{\bar{a}} = &- 2\, x \bar{f}^{\bar{a}} \\
&+ \frac{\mu(\bar{a})}{\bar{a}}\left[\bar{y}_2'(x)\, \Xi'\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) - \bar{y}_2'(-x)\, \Xi'\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right)\right] \\
&+ \frac{\mu(\bar{a})}{(\bar{a})^2}\left[\bar{y}_2(x)\, \Xi''\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) - \bar{y}_2(-x)\, \Xi''\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right)\right] \\
&+ \frac{\rho(\bar{a})}{\bar{a}}\left[f_2'(x)\, \Xi'\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) - f_2'(-x)\, \Xi'\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right)\right] \\
&+ \frac{\rho(\bar{a})}{(\bar{a})^2}\left[f_2(x)\, \Xi''\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) - f_2(-x)\, \Xi''\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\|\bar{y}^{\bar{a}} - \bar{y}\|_{H^2(-\bar{a}, \bar{a})} \leqslant\ & \|(P - \lambda_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(G^{\bar{a}}, F^{\bar{a}})} \times \\
& \times \Big[\,|1 - \lambda_0|\ \|\bar{y}^{\bar{a}}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} + 2\,\bar{a}\ \|\bar{f}^{\bar{a}} - \bar{f}\|_{L^2(-\bar{a}, \bar{a})} \\
& + \text{Cte}\ \mu(\bar{a})\left(\frac{\bar{a}}{2}\right)^{1/2}\left[\bar{y}_2'\left(\frac{3\,\bar{a}}{4}\right) + \bar{y}_2\left(\frac{3\,\bar{a}}{4}\right)\right] \\
& + \text{Cte}\ \rho(\bar{a})\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}\left[f_2'\left(\frac{3\,\bar{a}}{4}\right) + f_2\left(\frac{3\,\bar{a}}{4}\right)\right]\Big]
\end{aligned}$$

d'où (2.57), par des majorations analogues à celles de la démonstration de la proposition 2.9.

iii) Il résulte alors immédiatement de la proposition 2.9 et de (2.57) que, lorsque $\bar{a}$ tend vers $+\infty$:

$$\Lambda^{\bar{a}} \equiv \bar{a} + ((\bar{a})^2 - \lambda_0)\frac{\bar{y}(\bar{a})}{\bar{f}(\bar{a})} = \bar{a} + ((\bar{a})^2 - \lambda_0)\frac{\bar{y}^{\bar{a}}(\bar{a}) + O\left(e^{-\frac{5}{8}\bar{a}^2}\right)}{\bar{f}^{\bar{a}}(\bar{a}) + O\left(e^{-\frac{5}{8}\bar{a}^2}\right)}$$

donc, compte tenu des développements (2.19) et (2.55) de $\bar{f}^{\bar{a}}$ et $\bar{y}^{\bar{a}}$ respectivement, et de celui de β donné par :

$$\beta = \pi^{1/2} + O(e^{-\bar{a}^2}\bar{a})$$

nous avons :

$$\begin{aligned}\bar{y}^{\bar{a}}(\bar{a}) = \pi^{-\frac{1}{4}}\Bigg[& -\bar{a}\,e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}} + \bar{a}\,e^{-\bar{a}^2}\left(1 + \frac{1}{2\bar{a}^2}\right)\left(e^{\frac{\bar{a}^2}{2}}\left(1 + \frac{1}{2\bar{a}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right)\right) \\ & - 2\,e^{-\bar{a}^2}\bar{a}^2\left(1 + \frac{1}{2\bar{a}^2}\right)\left(e^{\frac{\bar{a}^2}{2}}\frac{1}{\bar{a}}\left(1 + \frac{1}{2\bar{a}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right)\right)\Bigg] \\ = {} & \pi^{-1/4}e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}}\left(-2\bar{a}\left(1 + \frac{1}{2\bar{a}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

De même :

$$\bar{f}^{\bar{a}}(\bar{a}) = 2\,\pi^{-1/4}e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}}\left(1 + \frac{1}{2\bar{a}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right).$$

Par conséquent :

$$\Lambda^{\bar{a}} = \bar{a} + (\bar{a}^2 - \lambda_0)(-\bar{a})\left(1 + O\left(\frac{1}{\bar{a}^4}\right)\right)$$

et grâce à (2.23) :

$$\Lambda^{\bar{a}} = -(\bar{a})^3 + 2\,\bar{a} + O\left(\frac{1}{\bar{a}}\right)$$

quantité négative pour $\bar{a}$ assez grand. La proposition 2.21 en résulte par continuité de $\Lambda^{\bar{a}}$ par rapport à $\bar{a}$.

La condition nécessaire de bifurcation (2.29) (2.30) (2.31) est donc vérifiée pour au moins une valeur du paramètre a. L'unicité de cette valeur n'est pas évidente à démontrer ; les résultats numériques du paragraphe 2.3.4 donnent cependant quelques informations le suggérant.

L'existence de solutions bifurquées du problème $(\mathscr{P}_c)$, issues d'un point $(0, a_0)$ vérifiant la condition (2.29) (2.30) (2.31), est étudiée dans le paragraphe 2.3.4.

D'autre part, la proposition 2.21 nous donne un résultat d'existence d'une valeur propre double pour un problème de valeurs propres intégro-différentiel sur]– 1/2, 1/2[; c'est l'objet du paragraphe suivant.

2.3.3.2. Le problème de valeurs propres en ψ

Soit $a > 0$, et (φ, h) la solution du problème $(\mathscr{P}_h^0)$ associée à a ; considérons le problème de valeurs propres suivant :

$$(\mathscr{P}_\mu) \qquad \begin{cases} -\psi'' + a^4 h^2 \kappa^2 x^2 \psi - a^2 \kappa^2 \psi \\ \qquad - 4\, a^4 h^2 \kappa^2 x\varphi \displaystyle\int_I t\varphi\psi\, dt = \mu\psi \\ \psi'(\pm 1/2) = 0 \quad \psi \in H^2(-1/2, 1/2)\,. \end{cases}$$

Pour tout $a > 0$, φ est une fonction propre du problème $(\mathscr{P}_\mu)$, associée à la valeur propre $\mu = 0$.

PROPOSITION 2.22 : *Soit a_0 donné par la proposition* 2.21, *alors l'espace propre du problème $(\mathscr{P}_\mu)$ associé à la valeur propre $\mu = 0$ est de dimension deux.*

Démonstration : Il résulte de la proposition 2.20 et de l'équivalence entre les conditions nécessaires de bifurcation du problème $(\mathscr{P}_c)$ qu'en $a = a_0$, où a_0 est donné par la proposition 2.21, le problème $(\mathscr{P}_\mu)$ admet au moins une solution ψ, orthogonale à φ, associée à la valeur propre $\mu = 0$.

Si ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions propres du problème $(\mathscr{P}_\mu)$ associées à la valeur propre $\mu = 0$, et qui ne sont pas proportionnelles à φ, alors :

$$\begin{cases} -\psi_i'' + a^4 h^2 \kappa^2 x^2 \psi_i - a^2 \kappa^2 \psi_i \\ \qquad - 4\, a^4 h^2 \kappa^2 x\varphi \displaystyle\int_I t\varphi\psi_i\, dt = 0 \\ (\psi_i')\ (\pm 1/2) = 0 \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

avec :
$$\int_I t\varphi\psi_i\, dt \neq 0 \quad \text{pour} \quad i = 1 \text{ et } 2$$

car sinon ψ_1 ou ψ_2 vérifierait (2.4) et serait donc proportionnelle à φ.

Posons :

$$\beta_i = \int_I t\varphi\psi_i\, dt \quad \text{et} \quad \xi_i = \frac{\psi_i}{\beta_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2\,.$$

Les fonctions ξ_1 et ξ_2 vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} -\xi_i'' + a^4 h^2 \kappa^2 x^2 \xi_i - a^2 \kappa^2 \xi_i = 4\, a^4 h^2 \kappa^2 x\varphi \\ \xi_i'(\pm 1/2) = 0 \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

donc, si : $\xi = \xi_1 - \xi_2$:

$$\begin{cases} -\xi'' + a^4 h^2 \kappa^2 x^2 \xi - a^2 \kappa^2 \xi = 0 \\ \xi'(\pm 1/2) = 0 . \end{cases}$$

Il en résulte que ξ est proportionnelle à φ ; il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\psi_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \psi_2 + \alpha \varphi \int_I \varphi \psi_1 \, dt .$$

ψ_1 s'écrit donc comme combinaison linéaire de ψ_2 et φ, il en résulte que l'espace propre associé à la valeur propre $\mu = 0$, est de dimension deux dans $H^2(-1/2, 1/2)$, et de dimension un dans l'orthogonal de φ.

2.3.4. *Étude numérique des conditions nécessaires de bifurcation*

2.3.4.1. Principe de résolution

Parmi les conditions équivalentes données, la condition nécessaire étudiée numériquement est celle énoncée dans la proposition 2.12. κ et a étant donnés, on calcule une valeur approchée de la solution ψ du problème $(\mathcal{P}_\psi)$ par une discrétisation de ce problème analogue à celle effectuée pour le calcul des $(\varphi_i)_i$. ψ est calculée aux mêmes points (x_i) que φ ; il en résulte un système S, de $(2N+2)$ équations, $(2N+1)$ inconnues et de rang $(2N+1)$:

Si $\psi_i \simeq \psi(x_i) \quad i = 1, \ldots, 2N+1$, les (ψ_i) sont solutions de :

$$(S)\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \cdots \\ 1 & \alpha_2 & 0 \cdots \\ & & \\ 0 & \cdots 1 & \alpha_{2N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \psi_{2N+1} \end{pmatrix} + a^2 \kappa^2 (dx)^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \psi_{2N+1} \end{pmatrix} = \\ \qquad = 2 a^4 h^2 \kappa^2 \begin{pmatrix} x_1 \varphi_1 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ x_{2N+1} \varphi_{2N+1} \end{pmatrix} \\ \displaystyle\sum_{i=1 \, (i \text{ impair})}^{2N-1} [\varphi_i \psi_i + 4 \varphi_{i+1} \psi_{i+1} + \varphi_{i+2} \psi_{i+2}] = 0 . \end{cases}$$

Ce système rectangulaire est résolu par la méthode de Householder.

On calcule ensuite une approximation de l'intégrale :

$$I(a) = -\int_I x \varphi \psi \, dx$$

par la formule de Simpson.

On cherche a tel que $I(a) = 1/2$ en faisant varier a dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

2.3.4.2. Résultats numériques

La figure 3 représente la courbe obtenue dans le cas de l'indium ($\kappa = 0{,}062$), par lissage d'environ 80 points $(a, I(a))$ lorsque $N = 40$.

On vérifie que $I(a)$ tend vers 0 lorsque $a \to 0$, conformément à la proposition 2.19. De plus, la courbe croît de $a = 0$ jusqu'à un maximum approximativement égal à 0,8, puis tend en décroissant vers 0,5, lorsque $a \to \infty$.

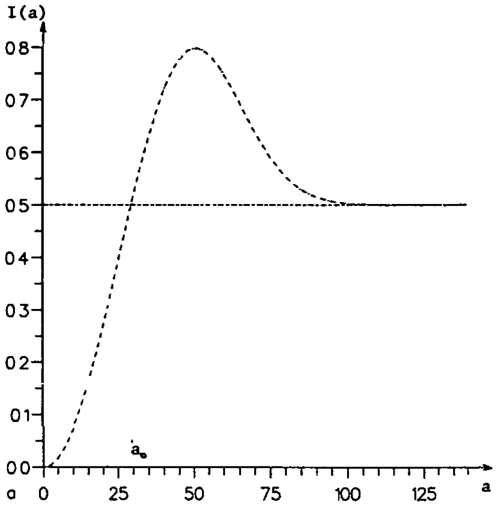

Figure 3. — $I(a)$ en fonction de a.

On vérifie donc, conformément à la proposition 2.21, qu'il existe une valeur a_0 de a telle que : $I(a) = 0{,}5$. Cette valeur critique calculée est $a_0 \simeq 29{,}237$.

Les valeurs de $I(a)$ obtenues étant très voisines de 0,5 lorsque a tend vers $+\infty$, les précisions des calculs ne permettent pas de conclure sur l'existence d'éventuelles autres valeurs critiques a_0 ; seule la décroissance de $I(a)$ en fonction de a le laisse supposer.

2.3.5. *Existence d'une bifurcation du problème* $(\mathscr{P}_c)$

La condition nécesaire de bifurcation (2.29)-(2.30)-(2.31) n'étant pas suffisante pour assurer l'existence d'une bifurcation du problème $(\mathscr{P}_c)$, nous ferons dans ce paragraphe l'hypothèse (H_ψ) suivante :

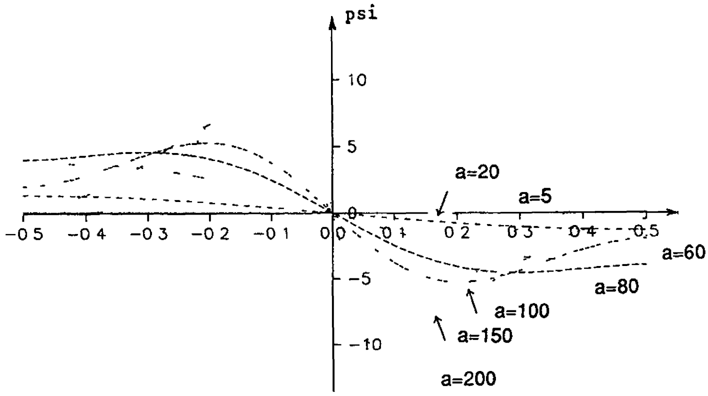

Figure 4. — Fonctions ψ pour differentes valeurs de a.

Si pour $a > 0$, (h, φ) est la solution du problème $(\mathscr{P}_h^0)$ et ψ la solution de (2.29)-(2.30),

$$(H_\psi) \begin{cases} \text{La courbe } a \to I(a) = -\displaystyle\int_I x\varphi \, dx \\ \text{coupe } \textit{transversalement} \text{ l'axe } y = 1/2 \text{ en } a = a_0 \,. \end{cases}$$

L'existence de a_0 tel que $I(a_0) = 1/2$, est donnée par la proposition 2.21 ; nous supposons ici de plus la transversalité. Cette hypothèse (H_ψ) est justifiée par les résultats numériques du paragraphe 2.3.4.

Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2.23 : *Sous l'hypothèse* (H_ψ) *il existe une courbe de bifurcation* (c, a) *du problème* $(\mathscr{P}_c)$, *issue du point* $(0, a_0)$.

Démonstration Considérons comme dans le paragraphe 2.3.1, l'application :

$$G : \mathbb{R} \times \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$$

$$(c, a) \to G(c, a) = c + \int_I x\varphi^2 \, dx \tag{2.27}$$

où φ est la solution positive du problème $(\mathscr{P}_h^c)$.

Pour montrer le théorème 2.23, nous sommes naturellement amenés à utiliser le lemme de Morse. Rappelons ce lemme, dans une version « faible ».

LEMME DE MORSE : *Soit G une application de classe C^m $m \geqslant 2$, sur un voisinage de l'origine dans* $\mathbb{R}^2$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et vérifiant :*

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \\ DG(0) &= 0 \\ \det D^2 G(0) &\neq 0 \end{aligned}$$

alors l'ensemble (local) des zéros de F est réduit à $\{0\}$ *si* $\det D^2 G(0) > 0$, *ou est composé de deux courbes de classe C^{m-1} si* $\det D^2 G(0) < 0$.

Il résulte de la proposition 2.4 que l'application G donnée par (2.27) est bien de classe C^∞ dans un voisinage de $(0, a_0)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Lorsque $c = 0$ et que $a = a_0$:

$$\frac{\partial G}{\partial a}(0, a_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial a^2}(0, a_0) = 0$$

car pour tout $a > 0$: $G(0, a) = 0$

et :

$$\frac{\partial G}{\partial c}(0, a_0) = 0$$

parce que a_0 vérifie la condition nécessaire de bifurcation.

Il en résulte que :

$$DG(0, a_0) = 0$$

et :

$$\det D^2 G(0, a_0) = -\left[\frac{\partial^2 G}{\partial a\, \partial c}(0, a_0)\right]^2 \tag{2.58}$$

où $D^2 G(0, a_0)$ est la matrice hessienne de G en $(0, a_0)$.

$\det D^2 G(0, a_0)$ ne peut être que négative ou nulle ; pour utiliser le lemme de Morse, il faut s'assurer qu'elle n'est pas nulle. Or :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial a\, \partial c}(0, a_0) = \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial c}\left[\int_I t\varphi^2\, dt\right]_{(0, a_0)} = -2\frac{\partial I}{\partial a}(a_0)\,.$$

Il en résulte que si la courbe $(I(a), a)$ coupe *transversalement* l'axe $y = +1/2$ en $a = a_0$ (hypothèse H_ψ)), $\det D^2 G(0, a_0)$ n'est pas nul ; il est donc strictement négatif. Le lemme de Morse implique donc l'existence d'une branche de bifurcation (c, a) du problème $(\mathscr{P}_c')$, issue du point $(0, a_0)$.

Cette branche est de classe C^∞ dans un voisinage de 0.

2.3.6. *Étude directe du problème* $(\mathscr{P}_c)$

Nous donnons, dans ce paragraphe, quelques résultats concernant les solutions des problèmes $(\mathscr{P}_h^c)$ et $(\mathscr{P}_c)$ lorsque c est différent de 0.

Cette étude ne suppose pas l'hypothèse (H_ψ) satisfaite.

PROPOSITION 2.24 : *Étant donnés* $a > 0$ *et* c *dans* $\mathbb{R}$, *soit* (h_c, φ_c) *la solution de* $(\mathscr{P}_h^c)$, *alors :*

i) $\lim_{c \to \infty} h_c = 0$.

ii) Sup $\{h$; *h donné par* i) *de* (2.4), $c \in \mathbb{R}\}$

est atteint en c tel que :

$$c = -\int_I x\varphi_c^2\, dx .$$

Démonstration :

i) (h_c, φ_c) étant solution du problème $(\mathscr{P}_h^c)$:

$$h_c^2 = \frac{a^2 \kappa^2 - \|\varphi_c'\|^2_{L^2(-1/2,\, 1/2)}}{a^4 \kappa^2 \left[c^2 + 2c \int_I x\varphi_c^2\, dx + \int_I x^2 \varphi_c^2\, dx\right]} .$$

Le numérateur est majoré par $a^2 \kappa^2$, et le dénominateur tend vers $+\infty$ lorsque c tend vers $\pm\infty$; il en résulte que h_c^2 tend vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$.

ii) a et c étant donnés, nous allons montrer que h admet la caractérisation suivante :

$$h_c^2 = \sup_{\xi \in S_1} \left[\frac{a^2 \kappa^2 \|\xi\|^2_{L^2(-1/2,\, 1/2)} - \|\xi'\|^2_{L^2(-1/2,\, 1/2)}}{a^4 \kappa^2 \int_I (x + c)^2 \xi^2\, dx}\right] \tag{2.59}$$

où $S_1 = \{\xi \in H^2(-1/2, 1/2), \xi'(\pm 1/2) = 0\}$.

En effet, a, h et c étant fixés, le « problème de valeurs propres » :

$$(\mathscr{P}_\varphi) \qquad \begin{cases} -\varphi'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x + c)^2 \varphi = a^2 \kappa^2 \varphi \\ \varphi \in S_1 , \qquad \varphi > 0 \end{cases}$$

s'écrit sous la forme variationnelle suivante :

$$a^2 \kappa^2 = \inf_{\xi \in S_1} \frac{\left[\|\xi'\|^2_{L^2(-1/2,\, 1/2)} + a^4 h^2 \kappa^2 \int_I (x + c)^2 \xi^2\, dx\right]}{\|\xi\|^2_{L^2(-1/2,\, 1/2)}} \tag{2.60}$$

(*cf.*, par exemple, S. Smoller [18]), donc :

$$\forall \xi \in S_1 : h^2 \geqslant \left[\frac{a^2 \kappa^2 \|\xi\|^2_{L^2(-1/2,\, 1/2)} - \|\xi'\|^2_{L^2(-1/2,\, 1/2)}}{a^4 \kappa^2 \int_I (x + c)^2 \xi^2\, dx}\right]$$

le sup pour $\xi \in S_1$ étant atteint par $\xi = \varphi_c$ lorsque $h = h_c$, ceci montre la relation (2.59).

Posons :

$$H(c, \xi) = \frac{a^2 \kappa^2 \|\xi\|^2_{L^2(-1/2, 1/2)} - \|\xi'\|^2}{a^4 \kappa^2 \int_I (x + c)^2 \xi^2 \, dx} \qquad c \in \mathbb{R}, \quad \xi \in S_1 . \tag{2.61}$$

Nous cherchons $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$h_{\bar{c}}^2 = \operatorname*{Sup}_{c \in \mathbb{R}} h^2 = \operatorname*{Sup}_{c \in \mathbb{R}} \operatorname*{Sup}_{\xi \in S_1} H(c, \xi) \tag{2.62}$$

donc tel que :

$$h_{\bar{c}}^2 = \operatorname*{Sup}_{\xi \in S_1} \operatorname*{Sup}_{c \in \mathbb{R}} H(c, \xi)$$

h_c étant continue en c sur $\mathbb{R}$, il résulte de i) qu'il existe $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$h_{\bar{c}}^2 = \operatorname*{Sup}_{c \in \mathbb{R}} h^2$$

donc, tel que :

$$h_{\bar{c}}^2 = H(\bar{c}, \varphi_{\bar{c}})$$

or, pour ξ fixé :

$$\operatorname*{Sup}_{c \in \mathbb{R}} H(c, \xi) \quad \text{est atteint en un } c \text{ égal à : } c = -\int_I x \xi^2 \, dx$$

donc en particulier, pour $\xi = \varphi_{\bar{c}}$:

$$\bar{c} = -\int_I x \varphi_{\bar{c}}^2 \, dx$$

d'où ii).

Remarque : dans ii) nous considérons les valeurs de h associés à toutes les solutions φ de $(\mathscr{P}_\varphi)$ et non seulement à la solution $\varphi > 0$.

PROPOSITION 2.25 : i) *Il existe $a_\infty > 0$, tel que, pour tout $a > a_\infty$, il existe une solution c non nulle du problème $(\mathscr{P}_c)$;*

ii) *de plus, si h_c est la solution de $(\mathscr{P}_h^c)$ pour la valeur de c définie en* i), *et si h la solution de $(\mathscr{P}_h^0)$, alors :*

$$h_c > h_0 .$$

Démonstration : D'après la proposition 2.24, pour tout $a > 0$, il existe $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$h(\bar{c}) = \operatorname*{Sup}_{c \in \mathbb{R}} h_c \quad \text{avec} \quad \bar{c} \text{ solution du problème } (\mathscr{P}_c)\,.$$

et d'après la démonstration de la proposition 2.21, il existe $a_\infty > 0$ tel que pour tout $a > a_\infty$:

$$-\int_I x\varphi\psi\, dx > \frac{1}{2}\,.$$

Il résulte donc du lemme 2.13 que $c = 0$ réalise un minimum local de $h(c)$, puisqu'alors :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial c^2}(0, a) > 0\,.$$

Or, h tendant vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$ d'après la proposition 2.24, il en résulte, par continuité et différentiabilité, qu'il existe un $c_0 > 0$ tel que :

$$\frac{\partial h}{\partial c}(c_0, a) = 0$$

$h(c_0)$ est en fait un maximum local de h.

Nous avons alors de manière évidente :

$$h_{\bar{c}} > h \qquad \text{où } h \text{ est la solution positive de } (\mathscr{P}_h^0)\,.$$

Ce résultat d'existence est indépendant du théorème 2.23 qui donne l'existence d'une bifurcation du problème $(\mathscr{P}_c)$.

2.3.7. *Étude numérique du problème* $(\mathscr{P}_c)$

2.3.7.1. Principe de résolution

$a > 0$ et c étant donnés, on calcule un couple (h, φ) solution du problème $(\mathscr{P}_h^c)$ par une méthode de discrétisation analogue à celle du paragraphe 2.2.2.

On calcule ensuite l'intégrale :

$$J_c = \int_I (x + c)\, \varphi^2\, dx$$

par la méthode de Simpson.

Pour déterminer une valeur de c vérifiant le problème $(\mathscr{P}_c)$ c'est-à-dire telle que la condition (H_c) soit vérifiée, on utilise la méthode de dichotomie sur J_c.

2.3.7.2. Résultats numériques

La courbe 5 représente les valeurs de c, solutions de $(\mathscr{P}_c)$, calculées en fonction de a : en plus de la solution triviale $c = 0$, nous obtenons une courbe de valeurs positives, issues de la valeur de $a \cong 29,24$ et la courbe symétrique des valeurs opposées de c.

Nous obtenons donc une courbe bifurquée à partir de la solution triviale $(0, a_0)$ en la valeur a_0 trouvée dans l'étude numérique du paragraphe 2.3.3.

La courbe 6 ci-dessous, représente, en pointillés, les valeurs de h solutions du problème $(\mathscr{P}_h^c)$ lorsque c est une solution non nulle du

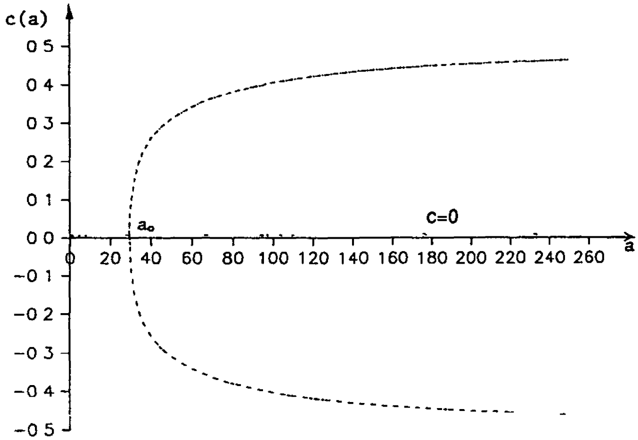

Figure 5. — $c(a)$.

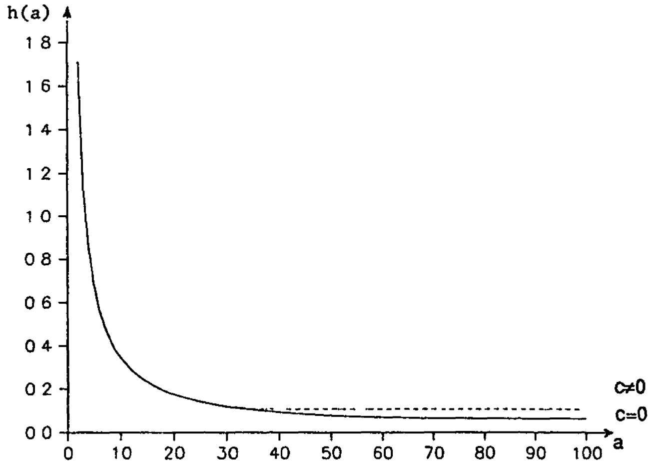

Figure 6. — $h_0(a)$ et $h_c(a)$.

problème ($\mathscr{P}_c$). La courbe en continu reprend la figure 1, c'est-à-dire h en fonction de a lorsque c est nul. Nous constatons que le long de la courbe correspondant à c non nul, $h_c(a)$ tend vers $1{,}7\,\kappa$, lorsque $a \to \infty$.

La figure 7 représente les fonctions propres du problème ($\mathscr{P}_c$) pour différentes valeurs de a et $c = c(a)$:

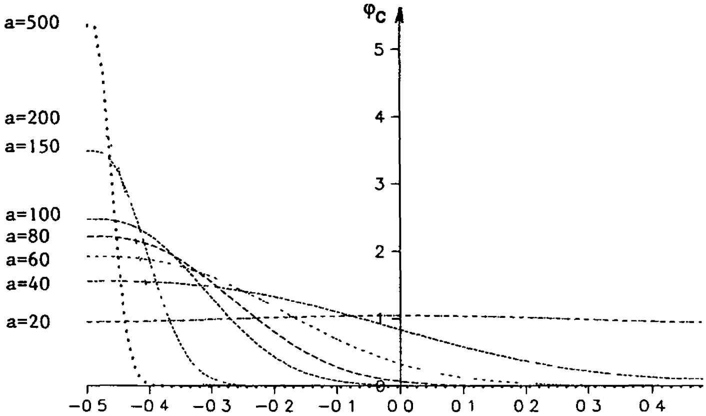

Figure 7. — φ_c pour différentes valeurs de a.

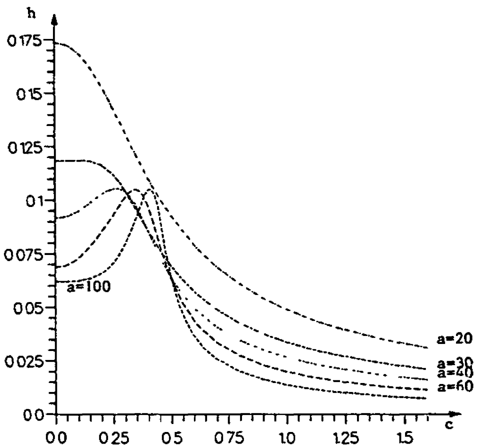

Figure 8. — $h = h(c)$ solution de ($\mathscr{P}_c$), pour différentes valeurs de a. Les valeurs de c telles que $\frac{\partial h}{\partial c}(c, a) = 0$ sont solutions de ($\mathscr{P}_c$).

La figure 8 représente $h = h(c)$ solution du problème ($\mathscr{P}_c$) pour quelques valeurs choisies de a ; pour a fixé, $h(c)$ n'admet qu'un maximum local en c sur l'intervalle $]0, 0{,}5]$: une solution de ($\mathscr{P}_c$) étant caractérisée par un extremum de h, il en résulte que les seules solutions de $(\mathscr{P}_c)$ sont celles données par la figure 5.

III. CHAMP DE RETARD A LA CONDENSATION

Le but de ce paragraphe est de montrer que le champ de retard à la condensation H_{sc} est donné par la solution h de $(\mathscr{P}_h^0)$ lorsque $a < a_0$, et par la solution h de $(\mathscr{P}_h^c)$ avec $c \neq 0$ solution de $(\mathscr{P}_c)$ lorsque $a \geqslant a_0$.

DÉFINITION 3.1 : *Une solution du problème* $(\mathscr{P}_{fA})$ *est dite* stable *si c'est un minimum de la différence d'énergie libre de Gibbs* ΔG, *une solution* métastable *si c'est un minimum local et non global de* ΔG, *et une solution* instable *sinon.*

La différence d'énergie libre de Gibbs est donnée, d'après la théorie de Ginzburg et Landau par :

$$\Delta G = \text{Cte} \int_{-1/2}^{1/2} \left[-f^2 + \frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{a^2 \kappa^2} (f')^2 + a^2 h^2 A^2 f^2 + h^2 (A' - 1)^2 \right] dx$$

(*cf.* V. L. Ginzburg [7]).

Pour a fixé, H_{sc} correspond à un changement de stabilité de la solution $f \equiv 0$ du problème $(\mathscr{P}_{fA})$; en effet, $f = 0$ est associé à l'état normal du film, et pour $h \geqslant H_{sc}$ l'état normal est un état métastable tandis que pour $h < H_{sc}$, l'état normal est instable.

LEMME 3.2 : i) *Soit a donné dans* $]0, \infty[$, *et soit* (h_0, φ) *la solution de* $(\mathscr{P}_h^0)$, *alors :*

* *si* $h < h_0$, *la solution* $(0, x ; a, h)$ *est instable*

** *si* $h > h_0$, *la solution* $(0, x ; a, h)$ *est stable ou métastable.*

ii) *Soit* (a, c) *donné dans* $]0, \infty[\times]-1/2, 0[\cup]0, 1/2[$ *tel que le problème* $(\mathscr{P}_c)$ *ait une solution* (h_c, φ_c), *alors :*

* *si* $h < h_c$, *la solution* $(0, x + c ; a, h)$ *est instable*

** *si* $h > h_c$, *la solution* $(0, x + c ; a, h)$ *est stable ou métastable.*

Démonstration : La différence d'énergie entre une solution triviale et une solution perturbée est égale à :

$$\Delta G(\delta f, x + c + \delta A) - \Delta G(0, x + c) =$$
$$= \text{Cte} \int_{-1/2}^{1/2} \left[-\delta f^2 + \frac{(\delta f')^2}{a^2 \kappa^2} + a^2 h^2 (x + c)^2 (\delta f)^2 + h^2 (\delta A')^2 \right] dx$$
$$+ o(\delta f^2, \delta f \,.\, \delta A, \delta A^2)$$

puisque toutes les solutions de la forme $(f, A ; a, h) = (O, x + c ; a, h)$ où $c \in \mathbb{R}$, correspondent à une différence d'énergie de Gibbs ΔG nulle.

Donc en choisissant $\delta f = \alpha \varphi$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) et $\delta A = 0$, nous obtenons :

$$\Delta G(\delta f, x + \delta A) - \Delta G(0, x) = a^2(h^2 - h_0^2)\, \alpha^2 \int_{-1/2}^{1/2} x^2 \varphi^2 \, dx + o(\delta f^2)\,.$$

Il en résulte que $(0, x)$ est instable dès que $h < h_0$.

Montrons ** de i) :

$$\Delta G(\delta f, x + \delta A) - \Delta G(0, x) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\delta f \in H^2} \left[\frac{1}{a^2 \kappa^2} \int_I (\delta f)'^2 \, dx + a^2 h^2 \int_I x^2 (\delta f)^2 \, dx - \int_I (\delta f)^2 \, dx \right] + o(\delta f^2, \delta f \,.\, \delta A, \delta A^2)$$

avec :

$$\inf_{\xi \in H^2(I)} \left[\int_I \xi'^2 \, dx + a^4 h_0^2 \kappa^2 \int_I x^2 \xi^2 \, dx - a^2 \kappa^2 \int_I \xi^2 \, dx \right] = 0$$

puisque ce minimum est atteint par la solution φ de $(\mathcal{P}_h^0)$. Par conséquent, si $h > h_0$:

$$\Delta G(\delta f, x + \delta A) - \Delta G(0, x) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\delta f \in H^2(I)} \left[a^2 (h^2 - h_0^2) \int_I x^2 \, \delta f^2 \, dx \right] + o(\delta f^2, \delta f \,.\, \delta A, \delta A^2)$$

et donc, dès que $h \geqslant h_0$:

$$\Delta G(\delta f, x + \delta A) - \Delta G(0, x) \geqslant 0$$

c'est-à-dire que $(0, x)$ est stable ou métastable.

La démonstration de ii) est analogue.

Pour conclure sur une caractérisation du champ H_{sc}, il nous faut faire des hypothèses supplémentaires qui sont justifiées par les résultats numériques des paragraphes 2.3.7 (Fig. 5 et 8).

Hypothèse H_0 : il existe $a_0 > 0$ unique tel que :

— lorsque $a \leqslant a_0$, $c = 0$ est la seule solution du problème $(\mathcal{P}_c)$;

— lorsque $a > a_0$ les seules solutions c autres que 0 de $(\mathcal{P}_c)$ sont les valeurs opposées représentées par la figure 5 et mises en évidence dans le théorème 2.23.

PROPOSITION 3.3 : *Sous l'hypothèse H_0, le champ de retard à la condensation H_{sc} est donné par :*
$h = h_0$ solution de $(\mathcal{P}_h^0)$ lorsque $a \leqslant a_0$
$h = h_c$ solution de $(\mathcal{P}_h^c)$ avec $c \neq 0$ vérifiant $(\mathcal{P}_c)$ lorsque $a > a_0$.

En effet, soit $H = \sup \{h_c ; c \in \mathbb{R}$ et h_c est solution de $(\mathscr{P}_h^c)\}$.

Si $h \geqslant H$ toute solution $(0, x + c ; a, h)$ où $c \in \mathbb{R}$, est linéairement stable ; par contre, si $h < H$, il existe des solutions $(0, x + c ; a, h)$ linéairement instables, celles correspondant à des h tels que :

$$h < h_c$$

la solution $f \equiv 0$ change donc de stabilité en $h = H$.

La proposition résulte alors immédiatement de ii) de la proposition 2.14.

CONCLUSION

Le champ H_{sc} est caractérisé par un changement de stabilité de la solution triviale $f = 0$ du problème $(\mathscr{P}_{fA})$, mais aussi comme étant le plus grand h pour lequel le problème $(\mathscr{P}_c)$ admet une solution. La proposition 3.3, montrée sous une hypothèse, H_0, qui est justifiée par les résultats numériques du paragraphe 2.3.7, nous donne les équations vérifiées par le champ H_{sc}, lorsque a varie sur tout l'intervalle $]0, \infty[$. H_{sc} est donc donné par la courbe $h_0(a)$ tracée en continu sur la figure 6 lorsque $a < a_0$, et par la courbe $h_c(a)$ tracée en pointillés sur la même lorsque $a > a_0$. Les valeurs asymptotiques obtenues sont celles obtenues expérimentalement par Y. Pellan [13] lorsque a tend vers O ou vers $+\infty$, et théoriquement par D. St James et P. G. de Gennes [15] lorsque a tend vers +, en utilisant une autre approche.

REMERCIEMENTS

Je remercie J. P. Puel pour les conseils qu'il m'a apportés, et B. Helffer pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail et dont les indications m'ont permis d'améliorer certains résultats.

REFERENCES

[1] J. BLOT, *Relation entre les grandeurs supraconductrices caractéristiques de l'aluminium massif et les champs de transition de films divisés, en fonction de leur épaisseur*. Thèse soutenue à Rennes 1, 1987.

[2] C. BOLLEY, *Bifurcations dans les équations de Ginzburg-Landau des matériaux supraconducteurs soumis à un champ magnétique extérieur*. Publications de l'E.N.S.M. 1988.

[3] C. BOLLEY, *Familles de branches de bifurcations dans les équations de Ginzburg-Landau*, RAIRO M²AN Vol. 25, n° 3, 1991.

[4] M. G. CRANDALL and P. H. RABINOWITZ, *Bifurcation from Simple Eigenvalues,* J. Funct. Anal. 8, 1971.

[5] M. DAUGE and B. HELFFER, *Eigenvalues variations I. Neumann problem for Sturm-Liouville operators,* à paraître.

[6] B. DUGNOILLE, *Étude théorique et expérimentale des propriétés magnétiques des couches minces supraconductrices de type I et de kappa faibles.* Thèse soutenue à Mons, 1978.

[7] V. L. GINZBURG, Soviet Physics JETP 7,78, 1958.

[8] B. HELFFER, Communication personnelle.

[9] B. HELFFER, *Semi-classical Analysis for the Schrödinger Operator and Applications.* Lecture Notes in Math. n° 1336, 1980.

[10] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators,* Springer-Verlag, n° 132, 1976.

[11] M. KRASNOSEL'SKII, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Eq.,* Pergamon Press, 1964.

[12] B. M. LEVITAN and I. S. SARGSJAN, *Introduction to Spectral Theory : Selfadjoint Ordinary Diff. Equations,* American Math. Soc., 1975.

[13] Y. PELLAN, *Étude de la métastabilité de la transition supraconductrice de films divisés d'indium sous champ magnétique parallèle et perpendiculaire.* Thèse soutenue à Rennes 1, 1987.

[14] P. H. RABINOWITZ, *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems.* J. Funct. Anal., n° 7, pp. 487-513, 1971.

[15] D. ST JAMES et P. G. de GENNES, Phys. Lett. 7, 306, 1963.

[16] L. SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques,* Hermann, Paris, 1965.

[17] Y. SIBUYA, *Global Theory of a Second Order Linear Differential Equation with a Polynomial Coefficient,* North Holland, 1975.

[18] J. SMOLLER, *Schock Waves and Reaction Diffusion Equations,* n° 258. Springer-Verlag, 1980.