

D. APPRATO

R. ARCANGÉLI

Ajustement spline le long d'un ensemble de courbes

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 25, n° 2 (1991), p. 193-212

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1991__25_2_193_0

© AFCET, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AJUSTEMENT SPLINE LE LONG D'UN ENSEMBLE DE COURBES (*)

D. APPRATO ⁽¹⁾ et R. ARCANGÉLI ⁽¹⁾

Communiqué par P G CIARLET

Résumé — On étudie dans cet article le problème de la construction d'un approximant régulier d'une surface définie par une équation explicite $x_3 = f(x_1, x_2)$ à partir de la donnée d'un ensemble fini de courbes tracées sur cette surface. On propose pour approximant de f une « spline d'ajustement discrète » (cf [2]) appartenant à un espace d'éléments finis convenable. On montre la convergence de la méthode et on donne des résultats numériques.

Abstract — In this paper, for a surface defined by an explicit equation $x_3 = f(x_1, x_2)$, the problem of constructing a smooth approximant from a finite set of curves given on the surface is studied. As an approximant of f , a « discrete smoothing spline » (cf [2]) belonging to a suitable finite element space is proposed. Convergence of the method and numerical results are given.

0. INTRODUCTION

Le problème de la construction de surfaces à partir de courbes iso-valeurs (et d'autres problèmes intervenant par exemple en Géologie) conduisent à la formulation abstraite suivante : étant donné un ensemble fini de courbes F_j , $1 \leq j \leq N$, dans l'adhérence d'un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^2 (cf. fig. 1) et une fonction f définie sur $F = \bigcup_{j=1}^N F_j$, construire une fonction régulière ϕ sur Ω approchant (en un sens à définir) la fonction f sur F .

De façon plus précise, on suppose

- que Ω est un ouvert non vide borné connexe à frontière lipschitzienne (au sens de J. Nečas [8]),

(*) Reçu en octobre 1989

Recherche effectuée dans le cadre d'un contrat avec la Société Nationale Elf-Aquitaine (Production)

⁽¹⁾ Laboratoire de Mathématiques Appliquées, URA CNRS 1204, Université de Pau, Avenue de l'Université, 64000 Pau, France

- que, pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un ouvert } R_j \subset \Omega \text{ satisfaisant aux conditions :} \\ \text{i) } R_j \text{ est connexe à frontière lipschitzienne,} \\ \text{ii) } F_j \text{ est la frontière ou une partie (ouverte pour la topologie induite} \\ \text{par } \mathbb{R}^2) \text{ de la frontière de } R_j, \end{array} \right. \quad (0-1)$$

• et que, pour simplifier l'exposé, f est la restriction à F d'une fonction, encore notée f , appartenant à l'espace de Sobolev usuel $H^m(\Omega)$, avec m entier ≥ 2 (on sait, d'après le théorème d'immersion de Sobolev, que : $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$, où \hookrightarrow désigne l'injection continue), et l'on impose la condition : $\phi \in H^m(\Omega) \cap C^k(\bar{\Omega})$, avec $k = 1$ ou 2 .

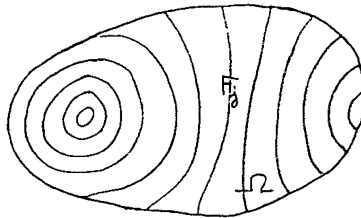


Figure 1. — Courbes F_j .

Le problème de l'approximation de f sur F est un problème d'ajustement le long de l'ensemble de courbes

$$\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_3 = f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in F_j \}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Lorsque $m > k + 1$, le problème d'interpolation correspondant admet évidemment une infinité de solutions, étant donné que dans ce cas : $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$. On peut alors obtenir une solution en utilisant la théorie des splines d'ordre (m, s) de J. Duchon [6].

On en obtient une autre en procédant de la façon suivante. Posons

$$\forall v \in H^m(\Omega), \quad \rho v = v|_F$$

et

$$K = \{ v \in H^m(\Omega) ; \rho v = \rho f \},$$

et considérons le problème : trouver σ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \in K, \\ \forall v \in K, \quad |\sigma|_{m, \Omega} \leq |v|_{m, \Omega}, \end{array} \right. \quad (0-2)$$

où on a posé $|v|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (\partial^\alpha v)^2 dx \right)^{1/2}$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$.

Pour tout $j = 1, \dots, N$, introduisons (cf. P. Grisvard [7]) l'espace de Hilbert $L^2(F_j)$ des (classes de) fonctions réelles de carré intégrable sur F_j , muni d'une norme hilbertienne $\|\cdot\|_{0,F_j}$ définissant sa topologie. Soit alors $L^2(F)$ l'espace des (classes de) fonctions réelles v sur F telles que, pour tout $j = 1, \dots, N$, $v|_{F_j} \in L^2(F_j)$, muni de la norme

$$\|\cdot\|_{0,F} = \left(\sum_{j=1}^N \|\cdot\|_{0,F_j}^2 \right)^{1/2}.$$

Alors

THÉORÈME 0.1 : *On suppose vérifiées les hypothèses précédemment formulées sur Ω, F, m et f , ainsi que l'hypothèse supplémentaire :*

$$\forall p \in P_{m-1}(\bar{\Omega}). \quad (p|_F = 0) \Rightarrow (p = 0), \tag{0-3}$$

où $P_{m-1}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace vectoriel des restrictions à $\bar{\Omega}$ des (fonctions) polynômes à deux variables de degré $\leq m - 1$ par rapport à l'ensemble des variables.

Alors le problème (0-2) admet une solution unique.

Démonstration :

1) Raisonant par compacité (cf. J. Nečas [8]), on montre, compte tenu de (0-3), que l'application $[[\cdot]]$ sur $H^m(\Omega)$ définie par : $[[v]] = (\|\rho v\|_{0,F}^2 + |v|_{m,\Omega}^2)^{1/2}$ est une norme sur $H^m(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle $\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (\partial^\alpha v)^2 dx \right)^{1/2}$.

2) La solution σ du problème (0-2) n'est autre que l'élément de norme $[[\cdot]]$ minimale du sous-ensemble convexe fermé non vide K de $H^m(\Omega)$. ■

Ainsi (lorsque $m > k + 1$) nous pourrions prendre $\phi = \sigma$. Malheureusement, sauf en des cas très particuliers, il est impossible d'expliciter σ (ou tout autre interpolant) sous une forme utilisable pour le calcul : dans un espace de dimension finie, il est évidemment impossible de satisfaire à une infinité de conditions d'interpolation.

Dans la suite, nous proposons de construire une « D^m -spline d'ajustement discrète » (cf. R. Arcangéli [2]). Pour cela, on introduit la fonctionnelle $J_{\varepsilon,h}^n$ définie sur l'espace $H^m(\Omega_h)$ par

$$J_{\varepsilon,h}^n(v) = \ell^n([v - f]^2) + \varepsilon |v|_{m,\Omega_h}^2, \tag{0-4}$$

où ε est un paramètre strictement positif, $\ell^\eta(v^2)$ une *approximation de* $\|v\|_{0,F}^2$ (nécessaire, car le terme $\|v - f\|_{0,F}^2$ ne peut pas être calculé exactement), Ω_h un ouvert (polygonal) approchant Ω et $|v|_{m,\Omega_h} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega_h} (\partial^\alpha v)^2 dx \right)^{1/2}$. La fonction cherchée sera obtenue en minimisant $J_{\varepsilon,h}^\eta$ sur un espace de dimension finie V_h convenable.

1. APPROXIMATION DE $\|\cdot\|_{0,F}^2$

On introduit :

- un sous-ensemble borné \mathbf{E} de \mathbb{R}_+^* admettant 0 pour point d'accumulation,
- pour tout $\eta \in \mathbf{E}$ et pour tout $j = 1, \dots, N$, un ensemble $\{\xi_i\}_{1 \leq i \leq L}$ de $L = L(\eta, j)$ points distincts $\xi_i = \xi_i(\eta, j)$ de \bar{F}_j tels que

$$\max_{1 \leq i \leq L-1} \delta(\xi_i, \xi_{i+1}) \leq \eta$$

(où δ désigne la distance euclidienne dans \mathbb{R}^2) et un ensemble $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq L}$ de nombres $\lambda_i = \lambda_i(\eta, j) > 0$.

On pose alors

$$\forall \eta \in \mathbf{E}, \forall j = 1, \dots, N, \forall v \in C^0(\bar{F}_j), \ell_j^\eta(v) = \sum_{i=1}^L \lambda_i v(\xi_i)$$

et

$$\forall \eta \in \mathbf{E}, \forall v \in C^0(\bar{F}), \ell^\eta(v) = \sum_{j=1}^N \ell_j^\eta(v).$$

Dans la suite on supposera que

$$\begin{cases} \exists C > 0, \exists t > 0, \forall \eta \in \mathbf{E}, \forall j = 1, \dots, N, \\ \forall v \in H^m(\Omega) : \left| \ell_j^\eta(v^2) - \|v\|_{0,F_j}^2 \right| \leq C \eta^t \|v\|_{m,\Omega}^2 \end{cases} \quad (1-1)$$

(on convient d'écrire désormais v au lieu de $v|_{F_j}$ ou de $v|_F$; on considérera ℓ^η comme une forme linéaire continue sur $C^0(\bar{\Omega})$, ou sur $C^0(\bar{\Omega}')$, pour tout ouvert Ω' contenant Ω).

Remarque 1.1 : Lorsque l'hypothèse (1-1) est vérifiée, la relation

$$\|v\|_{0,F}^2 \sim \ell^\eta(v^2)$$

constitue une formule d'intégration numérique *abstraite* pour $\|\cdot\|_{0,F}^2$. Comment obtenir des formules *explicités*? Étudions un exemple.

Supposons, pour simplifier, que $N = 1$, que $F (= F_1)$ est représentée par une équation unique

$$x_2 = a(x_1), \quad x_1 \in \Delta,$$

et que la norme $\|\cdot\|_{0,F}$ est définie par

$$\|v\|_{0,F}^2 = \int_{\Delta} v^2(x_1, a(x_1))(1 + a'^2(x_1))^{1/2} dx_1.$$

Alors on peut prendre

$$\begin{aligned} \ell^n(v) &= \frac{1}{2} \delta(\xi_1, \xi_2) v(\xi_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{L-1} [\delta(\xi_{i-1}, \xi_i) + \delta(\xi_i, \xi_{i+1})] v(\xi_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta(\xi_{L-1}, \xi_L) v(\xi_L) \end{aligned}$$

et vérifier que la condition (1-1) est satisfaite avec $t = 1$ si a est assez régulière (de classe C^2 par exemple). Dans ce cas, la relation $\int_F v(x) ds \sim \ell^n(v)$ apparaît comme une « formule des trapèzes » pour l'intégrale curviligne $\int_F v(x) ds$.

Dans le cas général, les formules obtenues sont plus compliquées parce que dépendant explicitement des systèmes locaux de coordonnées qui définissent les courbes F_j . Cependant, dans les problèmes réels, les courbes F_j sont le plus souvent *polygonales* et on peut alors utiliser des formules d'intégration numérique classiques à une variable. ■

2. AJUSTEMENT SPLINE

On suppose donnés :

- un sous-ensemble borné H de \mathbb{R}_+^* admettant 0 pour point d'accumulation ;
- un ouvert (borné) polygonal $\tilde{\Omega}$ de \mathbb{R}^2 contenant Ω ;
- pour tout $h \in H$, une triangulation $\tilde{\mathcal{T}}_h$ de $\tilde{\Omega}$ au moyen d'éléments K de diamètres $h_K \leq h$ et un espace \tilde{V}_h de type éléments finis (E.F.) construit sur $\tilde{\mathcal{T}}_h$, tel que :

$$\begin{cases} \tilde{V}_h \text{ soit un sous-espace de dimension} \\ \text{finie de } H^m(\tilde{\Omega}) \cap C^k(\tilde{\Omega}), \text{ avec } k = 1 \text{ ou } 2 \end{cases} \quad (2-1)$$

et que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une famille d'opérateurs} \\ (\tilde{\Pi}_h)_{h \in \mathbf{H}} \subset \mathcal{L}(H^m(\tilde{\Omega}), \tilde{V}_h) \text{ vérifiant les relations} \\ \text{i) } \exists C > 0, \forall h \in \mathbf{H}, \forall \ell = 0, \dots, m-1, \\ \quad \forall v \in H^m(\tilde{\Omega}) \quad |v - \tilde{\Pi}_h v|_{\ell, \tilde{\Omega}} \leq Ch^{m-\ell} |v|_{m, \tilde{\Omega}}, \\ \text{ii) } \forall v \in H^m(\tilde{\Omega}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} |v - \tilde{\Pi}_h v|_{m, \tilde{\Omega}} = 0 \end{array} \right. \quad (2-2)$$

Remarque 2 1 Le résultat (2-2) ne nécessite pas l'hypothèse classique de régularité de la méthode des E F $H^m(\tilde{\Omega}) \hookrightarrow C^s(\tilde{\Omega})$, où s désigne l'ordre maximal des dérivées intervenant dans la définition des degrés de liberté de l'E F générique de la famille $(\tilde{V}_h)_{h \in \mathbf{H}}$, mais suppose (évidemment) que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la famille } (\tilde{\mathcal{G}}_h)_{h \in \mathbf{H}} \text{ est régulière (au sens} \\ \text{de P G Ciarlet et P -A Raviart [4])} \end{array} \right. \quad (2-3)$$

Ce résultat suppose de surcroît vérifiée l'hypothèse

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'E F générique } (K, P_K, \Sigma_K) \text{ de la famille} \\ (\tilde{V}_h)_{h \in \mathbf{H}} \text{ vérifie la condition } P_K \supset P_m(K) \end{array} \right.$$

(en fait i) utilise seulement la condition $P_K \supset P_{m-1}(K)$), ainsi qu'une propriété d'« uniformité des fonctions de base » de l'E F générique de la famille $(\tilde{V}_h)_{h \in \mathbf{H}}$, vérifiée dans les cas usuels Il est dû à P Clément [5] (cf également G Strang [10]) ■

Remarque 2 2 Dans les problèmes reels, on a $m = 2$ ou $m = 3$

- lorsque $m = 2$, on peut utiliser par exemple

i) les E F triangulaires d'Argyris et de Bell de classe C^1 , les E F rectangulaires de Bogner-Fox-Schmit (B F S) de classe C^1 (cf par exemple P G Ciarlet [3]),

ii) les E F triangulaires d'Argyris et de Bell de classe C^2 (cf A Ženišek [11]), les E F rectangulaires de B F S de classe C^2 (cf D Apprato, R Arcangeli et R Manzanilla [1]),

- lorsque $m = 3$, on peut utiliser les E F de ii)

Lorsque $m > 3$, on peut utiliser les E F de B F S de classe C^{m-1} (dont la définition généralise directement celle des mêmes éléments de classes C^1 et C^2)

On vérifie que, dans tous les cas, la condition (2-1) et (lorsque (2-3) est vérifiée) la condition (2-2) sont satisfaites.

Rappelons que, de façon générale, l'implémentation des E.F. rectangulaires est moins coûteuse que celle des E.F. triangulaires. ■

Pour tout $h \in \mathbf{H}$, on considère ensuite l'ouvert Ω_h (cf. fig. 2) défini par

$$\begin{cases} \Omega_h \text{ est l'intérieur de la réunion} \\ \text{des éléments } K \text{ de } \tilde{\mathcal{C}}_h \text{ qui coupent } \Omega. \end{cases} \quad (2-4)$$

Il est clair que la famille $(\Omega_h)_{h \in \mathbf{H}}$ vérifie les relations

$$\{\forall h \in \mathbf{H}, \quad \Omega \subset \Omega_h \subset \tilde{\Omega} \quad (2-5)$$

et
$$\left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \text{mes} (\Omega_h \setminus \Omega) = 0. \quad (2-6)$$

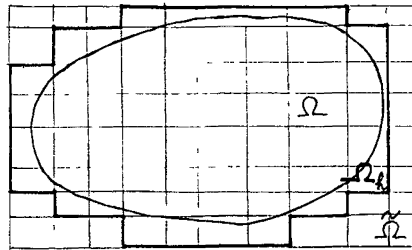


Figure 2. — Ouvert Ω_h .

Pour tout $h \in \mathbf{H}$, on définit enfin l'espace V_h par

$$\begin{cases} V_h \text{ est l'espace des restrictions} \\ \text{à } \Omega_h \text{ des fonctions de } \tilde{V}_h. \end{cases} \quad (2-7)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $h \in \mathbf{H}$ et pour tout $\eta \in \mathbf{E}$, on considère alors le problème de minimisation : trouver $\sigma_{\varepsilon, h}^\eta$ solution de

$$\begin{cases} \sigma_{\varepsilon, h}^\eta \in V_h, \\ \forall v_h \in V_h, \quad J_{\varepsilon, h}^\eta(\sigma_{\varepsilon, h}^\eta) \leq J_{\varepsilon, h}^\eta(v_h), \end{cases} \quad (2-8)$$

où $J_{\varepsilon, h}^\eta$ est la fonctionnelle introduite en (0-4), avec ℓ^η défini au paragraphe 1 et Ω_h en (2-4), ainsi que le problème variationnel : trouver $\sigma_{\varepsilon, h}^\eta$ solution de

$$\begin{cases} \sigma_{\varepsilon, h}^\eta \in V_h, \\ \forall v_h \in V_h, \quad a^\eta(\sigma_{\varepsilon, h}^\eta, v_h) + \varepsilon (\sigma_{\varepsilon, h}^\eta, v_h)_{m, \Omega_h} = a^\eta(f, v_h), \end{cases} \quad (2-9)$$

où l'on a posé : $a^\eta(u, v) = \ell^\eta(uv)$ et $(u, v)_{m, \Omega_h} = \sum_{|\alpha| = m} \int_{\Omega_h} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \, dx$.

THÉORÈME 2.1 : *On suppose que Ω , F , m et f sont définis comme au paragraphe 0 et que les hypothèses (0-3), (1-1), (2-1), (2-4) et (2-7) sont vérifiées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $h \in \mathbf{H}$ et pour tout $\eta \in \mathbf{E}$ assez petit, les problèmes (2-8) et (2-9) admettent une même solution unique $\sigma_{\varepsilon, h}^\eta$.*

Démonstration :

1) Raisonnant par compacité (cf. J. Nečas [8]), on montre compte tenu de (0-3) que l'application $[\![\cdot]\!]_h$ sur $H^m(\Omega_h)$ définie par : $[\![v]\!]_h = (\|v\|_{0, F}^2 + |v|_{m, \Omega_h}^2)^{1/2}$ est une norme sur $H^m(\Omega_h)$ équivalente à la norme usuelle $\|v\|_{m, \Omega_h} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega_h} (\partial^\alpha v)^2 \, dx \right)^{1/2}$.

2) D'après la définition de ℓ^η , la forme bilinéaire symétrique

$$(u_h, v_h) \mapsto a^\eta(u_h, v_h) + \varepsilon (u_h, v_h)_{m, \Omega_h}$$

est continue sur $V_h \times V_h$. D'autre part, elle est V_h -elliptique pour η assez petit puisque, d'après (1-1) et (2-5),

$$\exists C > 0, \quad \exists v \in H^m(\Omega_h) : a^\eta(v, v) \geq \|v\|_{0, F}^2 - C\eta' \|v\|_{m, \Omega_h}^2$$

et que, d'après le 1) les normes $[\![\cdot]\!]_h$ et $\|\cdot\|_{m, \Omega_h}$ sont équivalentes.

Le lemme de Lax-Milgram donne alors le résultat. ■

La fonction $\sigma_{\varepsilon, h}^\eta$ est appelée « D^m -spline d'ajustement discrète de f dans V_h relative à F , η et ε ». ■

Remarque 2.3 : Si on note (omettant l'indice h pour simplifier) M la dimension de V_h et $(w_j)_{1 \leq j \leq M}$ une base de V_h , alors $\sigma_{\varepsilon, h}^\eta$ s'exprime sous la forme

$$\sigma_{\varepsilon, h}^\eta = \sum_{j=1}^M \alpha_j w_j,$$

avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq M$. Introduisant les matrices

$$\mathcal{A} = (\ell^\eta(w_j, w_i))_{1 \leq i, j \leq M},$$

$$\mathcal{R} = ((w_j, w_i)_{m, \Omega_h})_{1 \leq i, j \leq M}$$

et

$$\mathcal{F} = (\ell^\eta(f w_i))_{1 \leq i \leq M},$$

on voit que (2-9) est équivalent au problème : trouver $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq M}$ solution du système linéaire d'ordre M :

$$(\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{R}) \alpha = \mathcal{F} . \blacksquare$$

Revenant au problème initial, on peut envisager de prendre pour approximation de f la fonction $\phi = \sigma_{\varepsilon, h}^\eta \Big|_\Omega$ qui, d'après les hypothèses (2-1), (2-4) et (2-7), appartient à $H^m(\Omega) \cap C^k(\bar{\Omega})$. Il reste à voir en quel sens ϕ approche f . Le résultat suivant, que nous donnons sans démonstration (on utilise des arguments de compacité et des résultats de la théorie des E.F.), montre que $\sigma_{\varepsilon, h}^\eta$ converge vers f sur F dans certaines conditions.

THÉORÈME 2.2 : *On se place dans les conditions du théorème 2.1 et, de plus, on suppose satisfaite l'hypothèse (2-2). Alors la solution $\sigma_{\varepsilon, h}^\eta$ de (2-8) et (2-9) vérifie les relations :*

i) pour tout $\theta \in]0, m - 1 [$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, h^{2(m-1-\theta)/\varepsilon} \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} \|\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - \sigma\|_{m, \Omega} = 0, \text{ où}$$

σ désigne la solution du problème (0-2) ;

ii) pour tout $\theta \in]0, m - 1 [$, il existe $C > 0$ telle que, quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$h^{2(m-1-\theta)/\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ et } \eta \rightarrow 0 : \|\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - f\|_{0, F}^2 \leq C \{h^{2(m-1-\theta)} + \eta' o(1) + \varepsilon\} .$$

En fait, pour étudier la convergence de $\sigma_{\varepsilon, h}^\eta$ vers f sur l'ouvert Ω , on est amené à étudier le problème classique de la *convergence de l'approximation*, quand le nombre de courbes F_j croît indéfiniment, de façon à ce que la famille d'ensembles F correspondants remplisse $\bar{\Omega}$ (en un sens à préciser).

3. CONVERGENCE DE L'APPROXIMATION

On modifie la situation précédente. On suppose donnés :

- un sous-ensemble \mathbf{D} de \mathbb{R}_+^* admettant 0 pour point d'accumulation ;
- pour tout $d \in \mathbf{D}$, un système (ordonné) de $N = N(d)$ sous-ensembles F_j^d , $1 \leq j \leq N(d)$, non vides de $\bar{\Omega}$, vérifiant l'hypothèse (0-1). On note :

$$\forall d \in \mathbf{D}, F^d = \bigcup_{j=1}^N F_j^d.$$

On suppose que :

$$\{\exists F_0 \subset \bar{\Omega}, \forall d \in \mathbf{D}, \exists j_0 \in \{1, \dots, N(d)\} : F_0 = F_{j_0}^d ; \quad (3-1)$$

$$\{\forall p \in P_{m-1}(\bar{\Omega}) : (p|_{F_0} = 0) \Rightarrow (p = 0) . \quad (3-2)$$

On conserve les éléments introduits au paragraphe 1, mais avec : $L = L(d, \eta, j)$, $\xi_i = \xi_i(d, \eta, j)$, $\lambda_i = \lambda_i(d, \eta, j)$. On convient d'écrire dans la suite $F_j^d, F^d, \ell_j^{d, \eta}$ et $\ell^{d, \eta}$ au lieu de F_j, F, ℓ_j^η et ℓ^η .

Pour tout $(d, \eta, \varepsilon, h) \in \mathbf{D} \times \mathbf{E} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{H}$, on note $a^{d, \eta}$ et $J_{\varepsilon, h}^{d, \eta}$ au lieu de a^η et $J_{\varepsilon, h}^\eta$ et on considère à nouveau les problèmes (2-8) et (2-9) : supposant Ω, F^d, m et f définis comme au paragraphe 0 et les hypothèses (3-1), (3-2), (1-1), (2-1), (2-4) et (2-7) vérifiées, ils admettent pour η assez petit une même solution unique notée maintenant $\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta}$ (en effet (3-1) et (3-2) impliquent (0-3)).

Pour étudier la convergence de l'ajustement, on formule les hypothèses supplémentaires suivantes (où la même lettre C désigne diverses constantes strictement positives) :

$$\{\exists C > 0, \forall d \in \mathbf{D}, \forall j = 1, \dots, N(d) : \text{mes } F_j^d \leq C ; \tag{3-3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \exists t > 0, \forall (d, \eta) \in \mathbf{D} \times \mathbf{E}, \forall j = 1, \dots, N(d), \\ \forall v \in H^m(\Omega) : \left| \ell_j^{d, \eta}(v^2) - \|v\|_{0, F_j^d}^2 \right| \leq C \eta^t \|v\|_{m, \Omega}^2 ; \end{array} \tag{3-4}$$

$$\left\{ \forall d \in \mathbf{D}, \sup_{x \in \Omega} \delta(x, F^d) = d ; \tag{3-5}$$

$$\{\exists C > 0, \exists \beta > 0, \forall d \in \mathbf{D}, d \leq \beta : N(d) \leq C/d ; \tag{3-6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \omega \neq \emptyset, \omega \text{ ouvert } \subset \Omega, \exists C_\omega > 0, \forall v \in \mathbb{N}^*, \exists \mu > 0, \\ \forall d \in \mathbf{D}, d \leq \mu, \exists \{j_1, \dots, j_v\} \subset \{1, \dots, N(d)\} : \\ \forall k = 1, \dots, v, \text{mes } (F_{j_k}^d \cap \omega) \geq C_\omega . \end{array} \tag{3-7}$$

Remarque 3.1 : L'hypothèse (3-1) est une hypothèse simplificatrice qui n'est probablement pas indispensable.

L'hypothèse (3-3) implique que les ensembles F_j^d ne sont pas trop « irréguliers ».

L'hypothèse (3-4), qui n'est autre que la condition (1-1) avec C indépendante de d , n'est pas facile à vérifier dans le cas général ; heureusement, compte tenu de (3-3), la situation se simplifie lorsque les courbes F_j^d sont *polygonales*.

L'hypothèse (3-5) précise la définition de \mathbf{D} : le paramètre d'indexation d de F^d n'est autre que $\sup_{x \in \Omega} \delta(x, F^d)$, distance de Hausdorff de $\overline{F^d}$ à

$\overline{\Omega}$. Donc (condition classique dans l'étude de la convergence des fonctions splines) cette distance tend vers 0 avec d .

L'hypothèse (3-6) traduit une propriété de régularité asymptotique de la répartition des courbes F_j^d dans $\overline{\Omega}$; elle est l'analogue d'une condition déjà

introduite dans le cas de splines d'ajustement relatives à des données ponctuelles (cf. D. Apprato, R. Arcangéli et R. Manzanilla [1]).

Enfin l'hypothèse (3-7) est une hypothèse de « minoration » des longueurs des courbes F_j^d . L'hypothèse (3-7) n'a pas d'équivalent dans le cas de données ponctuelles. A l'aide de contre-exemples, on peut montrer que ni (3-6) ni (3-7) ne sont conséquences de (3-5).

Les différentes conditions (0-1), (0-3), (3-1) à (3-7) concernant les courbes F_j^d paraissent devoir être vérifiées dans la modélisation des problèmes réels, notamment en Géologie. ■

THÉORÈME 3.1 : *On suppose que Ω , F^d , m et f sont définis comme au paragraphe 0 et que les hypothèses (2-1), (2-2), (2-4), (2-7), (3-1) à (3-7) sont satisfaites. Alors, pour tout $\gamma > 0$, pour tout $\varepsilon_0 > 0$ et pour tout $\theta \in]0, m - 1 [$, la solution $\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta}$ de (2-8) et (2-9) vérifie :*

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0, \eta/d \leq \gamma, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ h^{2(m-1-\theta)/d} \rightarrow 0}} \|\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta} - f\|_{m, \Omega} = 0.$$

Démonstration : La même lettre C désignera diverses constantes strictement positives.

1) Soit $\tilde{f} \in H^m(\tilde{\Omega})$ un prolongement quelconque de f (l'existence de \tilde{f} résulte du fait que Ω , à frontière lipschitzienne, possède la propriété de m -prolongement). Prenant dans (2-8) $v_h = (\tilde{\Pi}_h \tilde{f})|_{\Omega_h}$, où $\tilde{\Pi}_h$ est l'opérateur introduit en (2-2), il vient :

$$\forall (d, \eta, \varepsilon, h) \in \mathbf{D} \times \mathbf{E} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{H} : J_{\varepsilon, h}^{d, \eta}(\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta}) \leq \ell^{d, \eta}([\tilde{\Pi}_h \tilde{f} - \tilde{f}]^2) + \varepsilon |\tilde{\Pi}_h \tilde{f}|_{m, \Omega_h}^2.$$

Les relations (3-4) et (3-3) impliquent que

$$\exists C, \forall (d, \eta) \in \mathbf{D} \times \mathbf{E}, \forall j = 1, \dots, N(d) : \ell_j^{d, \eta}(1) \leq C,$$

d'où

$$\exists C, \forall (d, \eta) \in \mathbf{D} \times \mathbf{E} : \ell^{d, \eta}([\tilde{\Pi}_h \tilde{f} - \tilde{f}]^2) \leq CN(d) |\tilde{\Pi}_h \tilde{f} - \tilde{f}|_{C^0(\tilde{\Omega})}^2.$$

D'après le théorème d'immersion de Sobolev, on a :

$$\forall \theta > 0, H^{1+\theta}(\tilde{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\tilde{\Omega}),$$

où $H^{1+\theta}(\tilde{\Omega})$ désigne l'espace de Sobolev sur $\tilde{\Omega}$ d'ordre non entier $1 + \theta$, dont la norme est notée $\|\cdot\|_{1+\theta, \tilde{\Omega}}$. Utilisant (cf. par exemple J. Peetre [9])

une méthode d'interpolation entre les espaces $H^1(\tilde{\Omega})$ et $H^m(\tilde{\Omega})$, on déduit de (2-2) que

$$\forall \theta \in]0, m-1[, \exists C, \forall h \in \mathbf{H} : \|\tilde{\Pi}_h \tilde{f} - \tilde{f}\|_{1+\theta, \tilde{\Omega}} \leq Ch^{m-1-\theta} \|\tilde{f}\|_{m, \tilde{\Omega}}.$$

Regroupant les résultats obtenus et utilisant (3-6), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \theta \in]0, m-1[, \exists C, \forall (d, \eta, \varepsilon, h) \in \mathbf{D} \times \mathbf{E} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{H}, \\ d \leq \beta : J_{\varepsilon, h}^{d, \eta}(\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta}) \leq Ch^{2(m-1-\theta)}/d + \varepsilon |\tilde{\Pi}_h \tilde{f}|_{m, \Omega_h}^2. \end{array} \right. \quad (3-8)$$

Notons que, d'après (2-5) et (2-2)-ii) :

$$\exists C, \forall h \in \mathbf{H} : |\tilde{\Pi}_h \tilde{f}|_{m, \Omega_h} \leq C. \quad (3-9)$$

D'autre part, utilisant (3-1) et (3-4), on a :

$$\|\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta} - f\|_{0, F_0}^2 \leq J_{\varepsilon, h}^{d, \eta}(\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta}) + C\eta^t \|\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta} - f\|_{m, \Omega}^2.$$

Étant donné que, compte tenu de (2-5),

$$|\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta} - f|_{m, \Omega}^2 \leq \frac{2}{\varepsilon} J_{\varepsilon, h}^{d, \eta}(\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta}) + 2|f|_{m, \Omega}^2,$$

il vient, d'après (3-8) et (3-9), pour tout $\theta \in]0, m-1[:$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (d, \eta, \varepsilon, h) \in \mathbf{D} \times \mathbf{E} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{H}, d \leq \beta : \|\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta} - f\|_{0, F_0}^2 + |\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta} - f|_{m, \Omega}^2 \\ \leq C(\varepsilon + 2)(h^{2(m-1-\theta)}/d\varepsilon + 1) + 2|f|_{m, \Omega}^2 + C\eta^t \|\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta} - f\|_{m, \Omega}^2. \end{array} \right. \quad (3-10)$$

Comme la norme $v \mapsto (\|v\|_{0, F_0}^2 + |v|_{m, \Omega}^2)^{1/2}$ est une norme sur $H^m(\Omega)$ équivalente à $\|\cdot\|_{m, \Omega}$, on déduit de (3-10) que la famille $(\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta})_{(d, \eta, \varepsilon, h) \in \mathbf{D} \times \mathbf{E} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{H}}$ est bornée dans $H^m(\Omega)$, pour d assez petit, si ε et $h^{2(m-1-\theta)}/d\varepsilon$ restent bornés.

Supposons désormais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma > 0, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad \theta \in]0, m-1[, \quad d \rightarrow 0, \\ \eta^t/d \leq \gamma, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad h^{2(m-1-\theta)}/d\varepsilon \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (3-11)$$

D'après ce qui précède, il existe donc une suite $(\sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$, $(\eta_n^t/d_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset]0, \gamma]$, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset]0, \varepsilon_0]$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n^{2(m-1-\theta)}/d_n \varepsilon_n = 0$.

$d_n \varepsilon_n = 0$, extraite de la famille $(\sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n})$ et un élément $f^* \in H^m(\Omega)$ tels que

$$f^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{faible } \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n}, \text{ dans } H^m(\Omega).$$

2) Montrons que $f^* = f$. Pour cela, raisonnons par l'absurde : supposons $f^* \neq f$. Il existe alors un ouvert non vide ω contenu dans Ω et un réel $\alpha^* > 0$ tels que

$$\forall x \in \omega, \quad |f^*(x) - f(x)| > \alpha^*.$$

Mais $\sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n}$ tend vers f^* dans $H^m(\Omega)$ faible, donc dans $C^0(\bar{\Omega})$ fort, et par conséquent

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0, \exists n' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n' : \\ \forall x \in \omega, \quad |\sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n}(x) - f(x)| > \alpha. \end{cases}$$

Par ailleurs, d'après (3-7),

$$\begin{cases} \exists C_\omega > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \exists n'' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'', \\ \exists \{j_1, \dots, j_\nu\} \subset \{1, \dots, N(d_n)\} : \forall k = 1, \dots, \nu, \text{mes}(F_{j_k}^{d_n} \cap \omega) \geq C_\omega. \end{cases}$$

Posons

$$\forall \nu \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'' : \Psi(\nu, n) = \sum_{k=1}^{\nu} \left\| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n} - f \right\|_{0, F_{j_k}^{d_n}}^2.$$

Alors on déduit de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \max(n', n'') : \Psi(\nu, n) > \nu \alpha^2 C_\omega.$$

D'autre part, sous les conditions (3-11), il résulte de (3-4), (3-6), (3-7), (3-8) et (3-9) que

$$\exists C, \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'' : \Psi(\nu, n) \leq C(\varepsilon_0 + \gamma),$$

d'où la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \max(n', n'') : \nu \alpha^2 C_\omega < C(\varepsilon_0 + \gamma),$$

contradictoire quand $\nu \rightarrow +\infty$.

3) Montrons maintenant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n} - f \right\|_{m, \Omega} = 0.$$

Puisque l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$ est compacte, il résulte du 1) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n} = f, \quad \text{dans } H^{m-1}(\Omega) \text{ fort.}$$

D'autre part, sous les conditions (3-11), on a d'après (3-8) :

$$\left| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n} \right|_{m, \Omega}^2 \leq \left| \tilde{\Pi}_{h_n} \tilde{f} \right|_{m, \Omega_{h_n}}^2 + o(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Or

$$\left| \left| \tilde{\Pi}_h \tilde{f} \right|_{m, \Omega_h} - \left| \tilde{f} \right|_{m, \Omega_h} \right| \leq \left| \tilde{f} - \tilde{\Pi}_h \tilde{f} \right|_{m, \Omega_h}$$

et le second membre tend vers 0 avec h d'après (2-2)-ii) et (2-5). Utilisant (2-6), il vient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \tilde{\Pi}_h \tilde{f} \right|_{m, \Omega_h} = \left| f \right|_{m, \Omega}.$$

On en déduit que

$$\left| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n} \right|_{m, \Omega}^2 \leq \left| f \right|_{m, \Omega}^2 + o(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Alors on a :

$$\left| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n} - f \right|_{m, \Omega}^2 \leq 2 \left| f \right|_{m, \Omega}^2 - 2(\sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n}, f)_{m, \Omega} + o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{d_n, \eta_n} - f \right|_{m, \Omega} = 0$$

et le résultat suit.

4) Montrons enfin que, sous les conditions (3-11) :

$$\lim \left\| \sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta} - f \right\|_{m, \Omega} = 0. \quad (3-12)$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que (3-12) n'a pas lieu sous les conditions (3-11). Cela revient à dire qu'il existe $\alpha > 0$, $\gamma' > 0$, $\varepsilon'_0 > 0$, $\theta' \in]0, m-1[$ et $((d'_n, \eta'_n, \varepsilon'_n, h'_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, suite de $\mathbf{D} \times \mathbf{E} \times]0, \varepsilon'_0[\times \mathbf{H}$ telle que $d'_n \rightarrow 0$, $\eta'_n/d'_n \leq \gamma'$ et $h_n'^{2(m-1-\theta')}/d'_n \varepsilon'_n \rightarrow 0$, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\| \sigma_{\varepsilon'_n, h'_n}^{d'_n, \eta'_n} - f \right\|_{m, \Omega} > \alpha.$$

Mais une telle suite est bornée dans $H^m(\Omega)$ et le raisonnement précédent entraîne une contradiction. ■

Remarque 3.2. L'énoncé du théorème 3.1 peut être formulé de la manière suivante : la solution $\sigma_{\varepsilon, h}^{d, \eta}$ de (2-8) et (2-9) converge vers f dans $H^m(\Omega)$ suivant la base de filtre $\mathcal{B} = \{B_{r, s}; r > 0, s > 0\}$, avec

$$B_{r, s} = \{(d, \eta, \varepsilon, h) \in \mathbf{D} \times \mathbf{E} \times]0, \varepsilon_0] \times \mathbf{H};$$

$$d \leq r, \frac{\eta^t}{d} \leq \gamma, \frac{h^{2(m-1-\theta)}}{d\varepsilon} \leq s\} . \blacksquare$$

4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

On a utilisé deux fonctions f_1 et f_2 , définies l'une et l'autre sur le carré $\Omega =]0, 3[\times]0, 3[$:

$$f_1(x_1, x_2) = \sin [(x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2];$$

$$f_2(x_1, x_2) = 1 - u^2(3 - u^2) - w,$$

avec

$$u = [(x_1 - 1,5)^2 + ((x_2 - 0,5)/2,5)^2]/1,8,$$

$$v = [(x_1 - 1,5)^2 + (x_2 - 1,5)^2]^{1/2},$$

$$w = 1,5(1 - v^2(3 - 2v)), \text{ si } v \leq 1,$$

$$w = 0, \text{ sinon.}$$

On s'est donné deux ensembles $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$, réunions respectivement de cercles et de segments (cf. fig. 3 et 4).

Dans tous les exemples :

- V_h est l'espace de type éléments finis de B.F.S. de classe C^1 correspondant à une triangulation uniforme avec $h = 1$ (cf. fig. 5) : donc $k = 1$ et M (dimension de V_h) = 64 ;

- $m = 2$;
- $\varepsilon = 10^{-6}$.

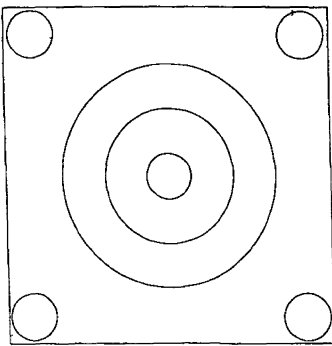


Figure 3. — Ensemble $F^{(1)}$.

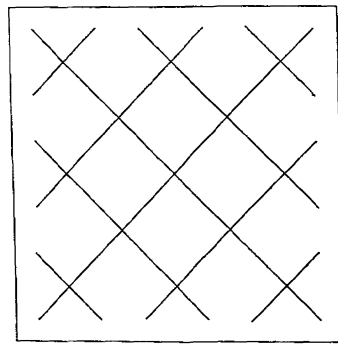


Figure 4. — Ensemble $F^{(2)}$.

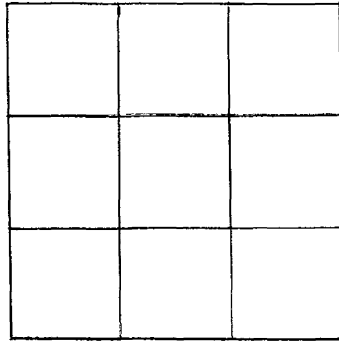


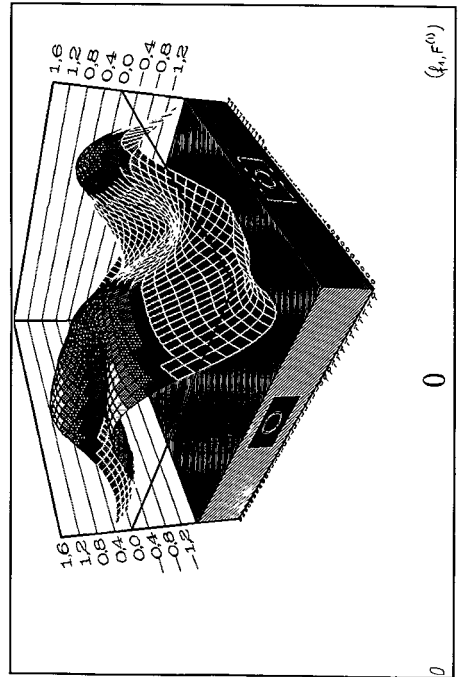
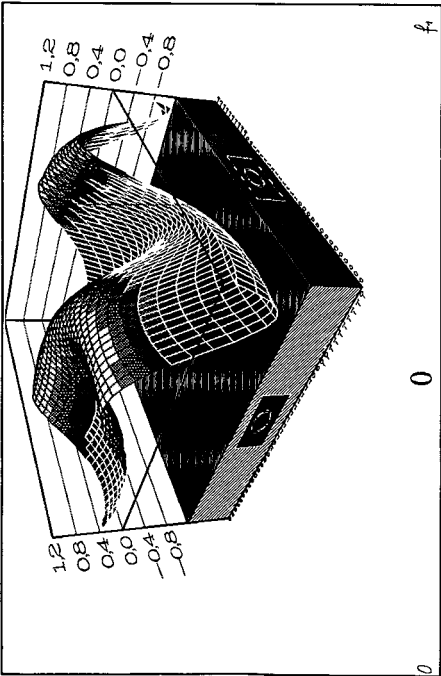
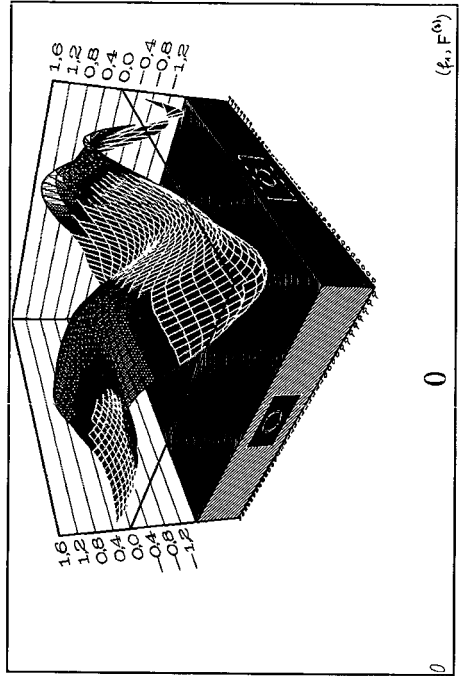
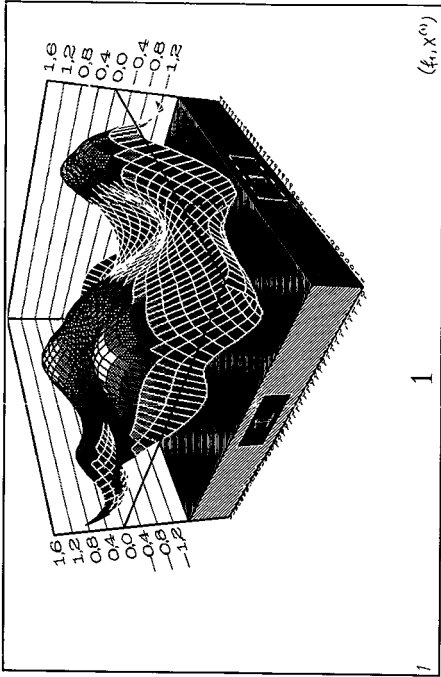
Figure 5. — Triangulation de $\bar{\Omega}$.

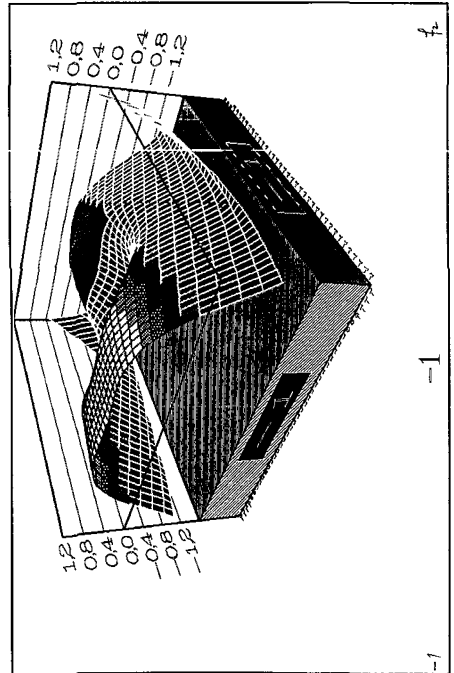
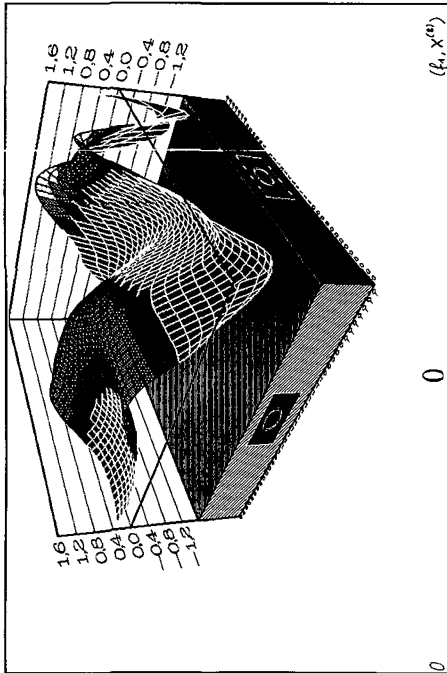
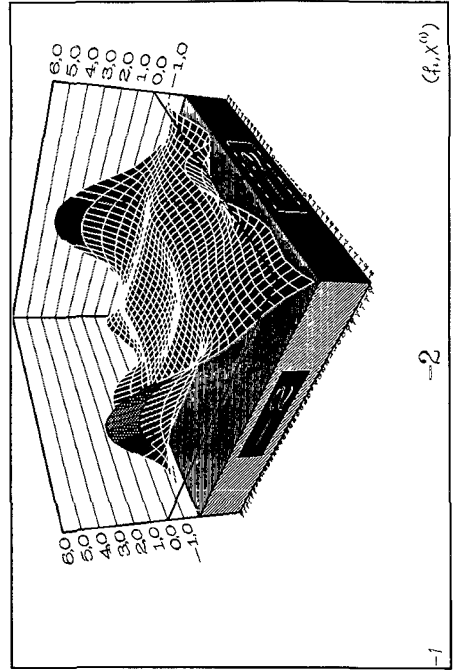
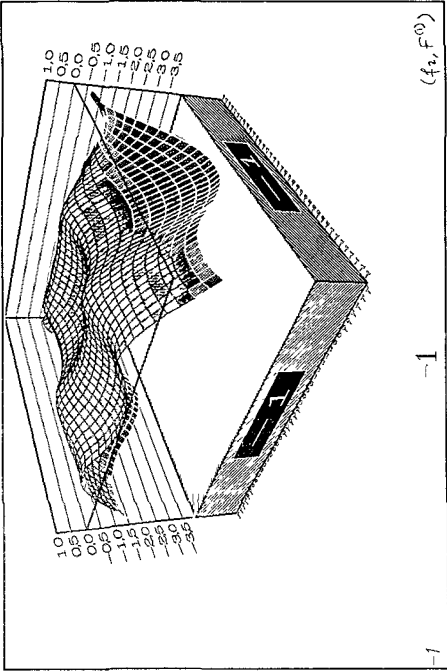
A titre de comparaison, on a approché chaque fonction par la méthode d'ajustement à partir de conditions ponctuelles introduite dans [1], en prenant pour ensemble de points de données l'ensemble $X^{(1)}$ ou l'ensemble $X^{(2)}$ des nœuds ξ_i de discrétisation de $\|\cdot\|_{0,F^{(1)}}^2$ ou de $\|\cdot\|_{0,F^{(2)}}^2$ respectivement.

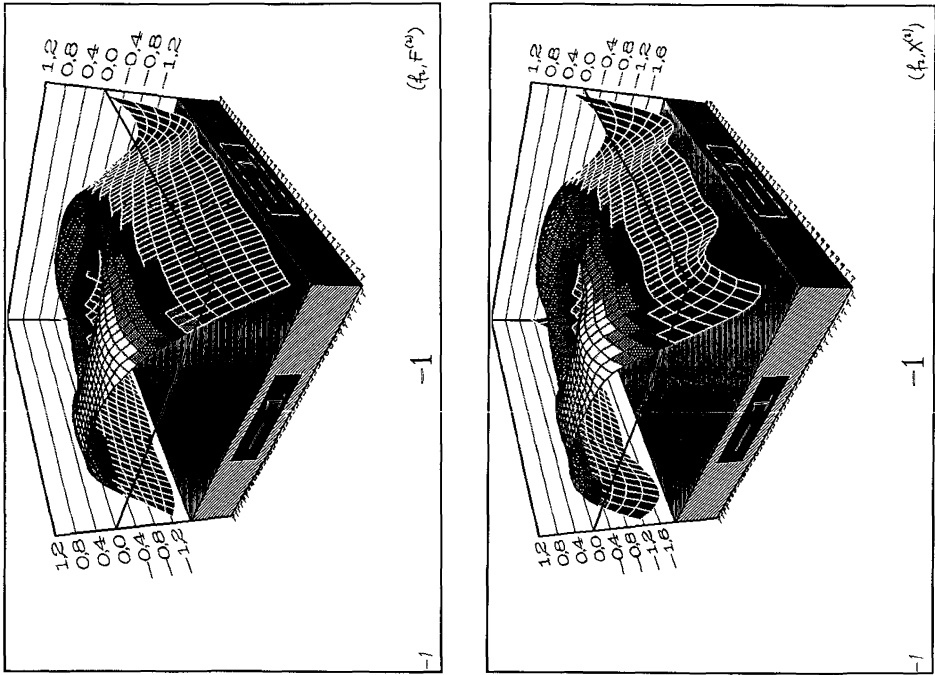
Pour chaque fonction f_i , $i = 1, 2$, on donne une vue des surfaces représentant :

- la fonction exacte,
- et, successivement pour $j = 1, 2$,
- l'approximation, notée $(f_i, F^{(j)})$, obtenue par ajustement le long des courbes,
 - l'approximation, notée $(f_i, X^{(j)})$, obtenue par ajustement à partir des conditions ponctuelles.

Le programme a été développé sur HP VECTRA ES 12.







BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. APPRATO, R. ARCANGÉLI, R. MANZANILLA, *Sur la construction de surfaces de classe C^k à partir d'un grand nombre de données de Lagrange*, *M²AN*, vol. 21, n° 4, 529-555 (1987).
- [2] R. ARCANGÉLI, *Cours de DEA, Pau*, à paraître.
- [3] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam (1978).
- [4] P. G. CIARLET, P.-A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite Interpolation in \mathbb{R}^n with Applications to Finite Element Methods*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 46, 177-199 (1972).
- [5] P. CLÉMENT, *Approximation by Finite Element Functions Using Local Regularization*, *RAIRO*, 9^e année, R-2, 77-84 (1975).
- [6] J. DUCHON, *Splines Minimizing Rotation-Invariant Semi-Norms in Sobolev Spaces*, *Lecture Notes in Math.*, 571, 85-100, Springer (1977).
- [7] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston (1985).
- [8] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris (1967).

- [9] J. PEETRE, *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16, 279-317 (1966).
- [10] G. STRANG, *Approximation in the Finite Element Method*, Numer. Math., 19, 81-98 (1972).
- [11] A. ŽENIŠEK, *A General Theorem on Triangular Finite $C^{(m)}$ -Elements*, RAIRO, R-2, 119-127 (1974).