M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis
- Modélisation mathématique et analyse numérique

Jacques Baranger
Hassan El Amri

Estimateurs a posteriori d'erreur pour le calcul adaptatif d'écoulements quasi-newtoniens

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 25, nº 1 (1991), p. 31-47

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1991__25_1_31_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 25, n° 1, 1991, p. 31 à 48)

ESTIMATEURS A POSTERIORI D'ERREUR POUR LE CALCUL ADAPTATIF D'ÉCOULEMENTS QUASI-NEWTONIENS (*)

Jacques BARANGER (1), Hassan EL AMRI (2)

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — *On étudie des estimateurs* a posteriori *de l'erreur dans l'approximation par éléments finis mixtes de certains modèles d'écoulements quasi-newtoniens (c'est-à-dire de fluides dont la viscosité dépend du second invariant du tenseur des taux de déformation). Ces estimateurs ne nécessitent que l'évaluation d'un résidu local de la solution éléments finis. Ils peuvent être utilisés pour un raffinement automatique du maillage.*

Abstract. — *We study* a posteriori *error estimators for the mixed finite element approximation of some quasi-newtonian flows (fluids whose viscosity varies with the second invariant of the rate of deformation tensor). These estimators necessitate only the evaluation of the local residual of the finite element solution. They can be used in a self-adaptive mesh-refinement process.*

0. INTRODUCTION

Dans la méthode full-multigrille on passe d'une grille grossière T_0 à une grille plus fine T_1 qu'on obtient en raffinant tous les triangles d'une manière à garder régulière la nouvelle triangulation. On peut voir pour quelques exemples de raffinements Rosenberg et Stenger [1975], Bank et Sherman [1980], Rivara [1984]. Dans une méthode multigrille adaptative on doit détecter la famille $\mathcal{F}_0$ des éléments de T_0 sur lesquels l'erreur dépasse un certain seuil, ce qui est fait au moyen d'un estimateur local d'erreur sur chaque $K \in T_0$. La grille T_1 est alors obtenue en raffinant seulement les éléments de $\mathcal{F}_0$ (et quelques voisins, variants selon les méthodes, pour ne

---

(*) Reçu en juillet 1989, révisé en janvier 1990.
Ce travail a été réalisé dans le cadre du GDR 901 CNRS, « Rhéologie des polymères fondus ».

(1) UA CNRS 740, LAN, BAT 101, Université de Lyon 1, 69622 Villeurbanne, France.
(2) UA CNRS 740 LAN, BAT 101, Université de Lyon 1, 69622 Villeurbanne, France. ENS de Fès, BP 34A, Maroc. UFR Sciences, Université de St-Etienne, France.

M²AN Modélisation mathématique et Analyse numérique 0764-583X/91/01/31/17/$ 3.70

pas sortir du cadre éléments finis et ne pas perdre la régularité de la triangulation). Pour disposer d'un algorithme adaptatif efficace il est important d'avoir des estimateurs locaux $\eta(K)$ liés à l'erreur locale sur K et qui soient aisément calculables. Les premiers travaux sur les maillages adaptatifs avec résolutions de problèmes locaux de Babuska et Rheinboldt [1978*a*], [1978*b*] et [1979] sont basés sur des partitions convenables de l'unité sur Ω. Des exemples et résultats numériques sont donnés en dimension 1 et 2. Les auteurs montrent que, dans le cas où on veut garder le nombre N d'inconnues constant, on peut arrêter le processus dès que tous les $\eta(K)$ sont approximativement égaux. Bank [1986] étudie le cas d'un problème de Neuman quasi-linéaire variationnel et construit des estimateurs locaux en résolvant des problèmes linéaires du type $(\nabla\eta, \nabla v) + (b \cdot \eta, v) = (R, v)$, où b ne dépend pas de η, et R provient de l'erreur sur le résidu, c'est-à-dire, $L(u) - L(u_h)$, et des sauts de $\partial u_h/\partial n$ à travers les côtés des triangles K de la triangulation T_h. b doit être pris tel qu'il approche $f(u, \nabla u)$. Oden *et al.* [1986] ont étudié des estimateurs locaux pour le Laplacien (linéaire et non linéaire) et le problème de Stokes dans le cas où le second membre est irrégulier (par exemple $f \in H^{-1}(\Omega)$ pour le Laplacien). Le calcul d'un estimateur local nécessite alors la résolution d'un problème local sur chaque triangle. Pour le problème de Stokes, Abdalass, Maitre et Musy [1987], Abdalass [1987], ont obtenu, pour un second membre régulier, un estimateur local qui ne nécessite pas la résolution d'un problème local sur chaque triangle. Des résultats numériques prouvant l'efficacité de la méthode sont donnés dans Verfürth [1989]. Le but de ce travail est de développer des estimateurs analogues pour des problèmes de Laplacien non linéaire et pour certains écoulements de fluides quasi-Newtoniens. Afin de rendre plus claire la technique employée on étudie au § 1 le problème modèle du Laplacien. Dans tout l'article Ω est un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$, K représente un triangle d'une triangulation (T_h) et t un côté du triangle. On peut faire une étude analogue des éléments finis rectangulaires et pour des problèmes dans $\mathbb{R}^3$. On utilisera les notations classiques suivantes :

h_k = diamètre du triangle K et $h_t =$ longueur du côté t

$\|v\|_{m,K}$ = norme Sobolev de v dans $H^1(K)$

$|v|_{1,\beta,K}$ = semi-norme Sobolev de v dans $W^{1,\beta}(K)$

$\|v\|_{1,\beta,K}$ = norme Sobolev de v dans $W^{1,\beta}(K)$

$\|v\|$ = norme de v dans l'espace où est posé le problème. Par exemple au § 1 :

$\|v\| = \|v\|_{1,\Omega}$

n = vecteur unitaire normale à la frontière, orienté vers l'extérieur.

1. LE CAS MODÈLE DU LAPLACIEN

1.1. Position du problème

Pour faciliter la compréhension de la méthode on commence par le cas simple $-\Delta u = f$.

Soit $f \in L^2(\Omega)$, on considère le problème :

Trouver $u \in V = H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$(\mathscr{P}) \qquad a(u, v) \equiv \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in V .$$

Ce problème admet une solution unique qu'on approche par une méthode d'éléments finis. Soit T_h une triangulation régulière de Ω. On a en particulier (avec les notations classiques) :

$$(1.1) \qquad \frac{h_K}{h_t} \leqslant \sigma \quad \forall K \in T_h , \quad \forall t \subset \partial K \quad (t \text{ côté de } K)$$

avec σ indépendante de $h = \max\ (h_K, h \in T_h)$.

Soit V_h un sous-espace éléments finis de V associé à T_h, et π_h l'opérateur d'interpolation de fonctions discontinues défini par Clément [1975]. π_h vérifie (C étant une constante indépendante de h) :

$$(1.2) \qquad \|v - \pi_h v\|_{m,K} \leqslant C h_k^{1-m} \sum_{K' \in S_K} \|v\|_{1,K'}$$

pour tout $v \in H^1(S_K)$ avec $m = 0$ ou 1

où $$S_K = \cup\ \{K', K \cap K' \neq \varnothing\ \} .$$

Le problème approché s'écrit alors :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$(\mathscr{P}_h) \qquad \int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in V_h$$

1.2. Estimation d'erreur

Le résidu est la forme linéaire continue sur V définie par :

$$\langle R, v \rangle = \int_\Omega \nabla u_h \nabla v - \int_\Omega f v \quad \forall v \in V$$

c'est donc un élément de $H^{-1}(\Omega)$.

Comme $\langle R, v \rangle = a(u_h, v) - (f, v) = a(u_h - u, v)$, alors en prenant $v = u_h - u$ et en utilisant la coercivité et la continuité de a on a $\|u_h - u\| \leq C \|R\|_*$ (où on note par $\|R\|_*$ la norme de R dans $V' = H^{-1}(\Omega)$). Il suffit donc d'estimer $\|R\|_*$.

On se propose d'estimer R en fonction de la norme de sa « restriction » à chaque triangle K. On a pour tout $v \in V$:

$$\langle R, v \rangle = \sum_{K \in T_h} \int_K (\nabla u_h \nabla v - fv) = \sum_{K \in T_h} \left(\int_K (-\Delta u_h - f) v + \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} v \right)$$

et comme $\langle R, v_h \rangle = 0$ pour tout $v_h \in V_h$ alors :

$$\begin{aligned} \langle R, v \rangle &= \sum_K \left(\int_K (-\Delta u_h - f)(v - \pi_h v) + \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} (v - \pi_h v) \right) \\ &= \sum_K \int_K (-\Delta u_h - f)(v - \pi_h v) + \sum_{t \in \Gamma_i} \int_t \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]_t (v - \pi_h v) \end{aligned}$$

où Γ_i est la réunion de tous les côtés des triangles intérieurs à Ω (côtés ne « rencontrant » pas la frontière Γ de Ω) et $[w]_t$ désigne le saut de w à travers le côté t. On a alors, en utilisant l'inégalité de Hôlder sur chaque K:

$$\langle R, v \rangle \leq \sum_K |\Delta u_h + f|_{0,K} |v - \pi_h v|_{0,K} + \sum_{t \in \Gamma_i} \left| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]_t \right|_{0,t} \|v - \pi_h v\|_{0,t}$$

c'est-à-dire

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \langle R, v \rangle \leq &\left(\sum_K h_K^2 |\Delta u_h + f|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_K h_k^{-2} |v - \pi_h v|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\ &+ \left(\sum_{t \in \Gamma_i} h_t \left| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]_t \right|_{0,t}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{t \in \Gamma_i} h_t^{-1} \|v - \pi_h v\|_{0,t}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

d'où en utilisant (1.2) il vient :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \langle R, v \rangle \leq C &\left(\sum_K h_K^2 |\Delta u_h + f|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|v\|_{1,\Omega} \\ &+ \left(\sum_{t \in \Gamma_i} h_t \left| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]_t \right|_{0,t}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{t \in \Gamma_i} h_t^{-1} \|v - \pi_h v\|_{0,t}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour estimer le deuxième terme du second membre on utilise le lemme suivant, démontré dans Abdalass [1987] (pour $\beta = 2$), et qu'on reprend ici dans un cadre plus général qui sera utile pour les problèmes non linéaires des paragraphes 2 et 3.

LEMME : *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $K \in T_h$ *et pour* $v \in W^{1,\beta}(K)$ *on a :*

$$h_K \| v \|^{\beta}_{0,\beta,\partial K} \leq C (\| v \|^{\beta}_{0,\beta,K} + h^{\beta}_K \| v \|^{\beta}_{1,\beta,K}) .$$

Démonstration : Soit $\hat{K}$ l'élément de référence et F_K l'application affine de $\hat{K}$ dans K ; $F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + d_K$. Pour $v \in W^{1,\beta}(K)$ posons $\hat{v} = v \circ F_K$, alors $\hat{v} \in W^{1,\beta}(\hat{K})$. Soit t un côté de K alors $\hat{t} = (F_K)^{-1}(t)$ est un côté de $\hat{K}$ et on a :

$$\int_t |v|^{\beta} \, dx = \frac{h_t}{h_{\hat{t}}} \int_{\hat{t}} |v(F_K(\hat{x}))|^{\beta} \, d\hat{x} = h_t \int_{\hat{t}} |\hat{v}|^{\beta} \, d\hat{x}$$

d'où :

$$\int_{\partial K} |v|^{\beta} \, dx \leq h_K \int_{\partial \hat{K}} |\hat{v}|^{\beta} \, d\hat{x} . \tag{1.5}$$

L'application trace de $W^{1,\beta}(\hat{K})$ dans $L^{\beta}(\partial \hat{K})$ étant continue alors il existe $C > 0$ telle que

$$\| \hat{v} \|^{\beta}_{0,\beta,\partial \hat{K}} \leq \hat{C} \| \hat{v} \|^{\beta}_{1,\beta,\hat{K}} = \hat{C} (\| \hat{v} \|^{\beta}_{0,\beta,\hat{K}} + \| \hat{v} \|^{\beta}_{1,\beta,\hat{K}}) .$$

On utilise les résultats de Ciarlet [1978] :

$$|\hat{v}|_{0,\beta,\hat{K}} \leq |\det (B_K)|^{-1/\beta} |v|_{0,\beta,K}$$

$$|\hat{v}|_{1,\beta,\hat{K}} \leq \| B_K \| \, |\det (B_K)|^{-1/\beta} |v|_{1,\beta,K} , \quad \| B_K \| \leq C h_K$$

et

$$|\det (B_K)| = \frac{\text{mes } (K)}{\text{mes } (\hat{K})} = 2 \text{ mes } (K)$$

où C désigne une constante indépendante de h et $\| B_K \|$ la norme matricielle de B_K. On a alors :

$$\begin{aligned} \| \hat{v} \|^{\beta}_{0,\beta,\partial \hat{K}} &\leq C (|v|^{\beta}_{0,\beta,K} + \| B_K \|^{\beta} |v|^{\beta}_{1,\beta,K}) / |\det (B_K)| \\ &\leq C (|v|^{\beta}_{0,\beta,K} + h^{\beta}_K |v|^{\beta}_{1,\beta,K}) / \text{mes } (K) . \end{aligned}$$

La triangulation étant supposée régulière, il existe σ_1 et $\sigma_2 > 0$ indépendants de h tels que : $\sigma_1 h_K^2 \leq \text{mes } (K) \leq \sigma_2 h_K^2$ pour tout $K \in T_h$. On a alors :

$$h^2_K \| \hat{v} \|^{\beta}_{0,\beta,\partial \hat{K}} \leq C (|v|^{\beta}_{0,\beta,K} + h^{\beta}_K |v|^{\beta}_{1,\beta,K}) . \qquad \square$$

On revient à (1.4) pour estimer le deuxième terme du second membre. Le deuxième facteur $\left\{\sum_t h_t^{-1}(\|v-\pi_h v\|_{0,t})^2\right\}^{1/2}$ peut être majoré, en utilisant (1.1) par $C\left\{\sum_K h_K^{-1}(\|v-\pi_h v\|_{0,\partial K})^2\right\}^{1/2}$. On applique le lemme 1.1 avec $\beta = 2$, il vient :

$$\left(\sum_{k\in T_h} h_K^{-1}\|v-\pi_h v\|_{0,\partial K}^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{K\in T_h} h_K^{-2}(\|v-\pi_h v\|_{0,K} + h_K^2\|v-\pi_h v\|_{1,K})\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C\|v\|_{1,\Omega}$$

où la deuxième inégalité provient de (1.2) avec $m=0$ et $m=1$. (1.4) devient alors en passant au sup sur $v\in V$:

$$\|R\|_* \leqslant C\left[\sum_{K\in T_h} h_K^2|\Delta u_h + f|_{0,K}^2\right]^{1/2} + C'\left[\sum_{t\in\Gamma_i} h_t\left(\left|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]_t\right|_{0,t}\right)^2\right]^{1/2} \tag{1.6}$$

et puisque $\|u-u_h\| \leqslant C\|R\|_*$, on en déduit que :

$$\|u-u_h\| \leqslant C\left[\sum_{K\in T_h} h_K^2|\Delta u_h + f|_{0,K}^2\right]^{1/2} + C'\left[\sum_{t\in\Gamma_i} h_t\left(\left|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]_t\right|_{0,t}\right)^2\right]^{1/2}$$

comme $a^{1/2} + b^{1/2} \leqslant 2^{1/2}(a+b)^{1/2}$ pour a et $b \geqslant 0$ alors :

$$\|u-u_h\| \leqslant C\left[\sum_{K\in T_h}\left\{h_K^2|\Delta u_h + f|_{0,K}^2 + \sum_{t\in\partial K} h_t\left(\left|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]_t\right|_{0,t}\right)^2\right\}\right]^{1/2}$$

et donc :

THÉORÈME 1.1 : *Il existe une constante C indépendante de h telle que :*

$$\|u-u_h\| \leqslant C\left[\sum_{K\in T_h}\eta(K)^2\right]^{1/2} \tag{1.7}$$

où

$$\eta(K) = \left\{h_K^2|\Delta u_h + f|_{0,K}^2 + \sum_{t\in\partial K} h_t\left(\left|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]_t\right|_{0,t}\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{1.8}$$

Remarque 1.1 : i) Pour tout côté t contenu dans la frontière de Ω on pose par convention le saut à travers t égal à 0.

ii) L'application $\eta : T_h \mapsto \mathbb{R}$ est appelée estimateur local d'erreur.

2. PROBLÈME DE LAPLACIEN NON LINÉAIRE

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ assez régulière et $f \in L^{\beta'}(\Omega)$, où β' est un réel strictement supérieur à 1. On considère le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} A(u) = -\nabla(|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array}$$

où β est le conjugué harmonique de β' : $1/\beta + 1/\beta' = 1$. Ce problème s'écrit sous la forme variationnelle suivante :

$$u \in V = W_0^{1,\beta}(\Omega)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{\beta-2}\nabla u\,\nabla v = \int_\Omega fv \quad \forall v \in V. \tag{2.1}$$

Il admet une solution unique u dans V.

Soit V_h un sous-espace éléments finis associé à une triangulation régulière T_h ; le problème approché s'écrit :

$$u_h \in V_h$$

$$\int_\Omega |\nabla u_h|^{\beta-2}\nabla u_h\,\nabla v_h = \int_\Omega fv_h \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.2}$$

Comme dans le cas linéaire on cherche une estimation du résidu de laquelle on déduit une estimation de l'erreur. On suppose que $\beta \in\,]1, 2]$.

Le résidu $R : W_0^{1,\beta}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est défini par :

$$\langle R, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u_h|^{\beta-2}\nabla u_h\,\nabla v - \int_\Omega fv$$

c'est un élément de $W^{-1,\beta'}(\Omega)$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle R, v\rangle &= \sum_{k\in T_h}\left\{\int_k |\nabla u_h|^{\beta-2}\nabla u_h\,\nabla v - \int_k fv\right\} \\ &= \sum_{k\in T_h}\left\{\int_k (-\nabla\cdot(|\nabla u_h|^{\beta-2}\nabla u_h) - f)\,v + \int_{\partial k}|\nabla u_h|^{\beta-2}\nabla u_h\cdot\vec{n}v\right\} \\ &= \sum_{k\in T_h}\left\{\int_k (-\nabla\cdot(|\nabla u_h|^{\beta-2}\nabla u_h) - f)\,v + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t\subset\partial k}\int_t [\,|\nabla u_h|^{\beta-2}\nabla u_h\cdot\vec{n}]_t\, v\right\} \end{aligned}$$

comme $\langle R, v_h \rangle = 0$ pour tout $v_h \in V_h$, alors en utilisant encore l'opérateur d'interpolation π_h

$$\langle R, v \rangle = \sum_{k \in T_h} \left\{ \int_k (-\nabla \cdot (|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h) - f)(v - \pi_h v) + \sum_{t \subset \partial k} \int_t [|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \cdot \vec{n}]_t (v - \pi_h v) \right\}$$

et donc

$$\langle R, v \rangle \leqslant \sum_{k \in T_h} |\nabla(|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h) + f|_{0,\beta',k} \cdot |v - \pi_h v|_{0,\beta,k} + \sum_{t \in \Gamma_i} |[|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \cdot \vec{n}]_t|_{0,\beta',t} \cdot |v - \pi_h v|_{0,\beta,t}$$

π_h vérifie, en particulier (voir Bernardi [1984]) :

$$\|v - \pi_h v\|_{m,\beta,K} \leqslant C h_K^{1-m} \sum_{K' \in S_K} \|v\|_{1,\beta,K'} \quad \forall v \in W^{1,\beta}(S_K)\,; \quad \text{pour } m = 0 \text{ et } m = 1\,. \tag{2.3}$$

On a donc

$$\langle R, v \rangle \leqslant C \sum_{k \in T_h} h_k |\nabla(|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h) + f|_{0,\beta',k} \cdot \|v\|_{1,\beta,K} + C \sum_{t \in \Gamma_i} h_t^{1/\beta'} |[|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \cdot \vec{n}]_t|_{0,\beta',t} \cdot h_t^{-1/\beta'} |v - \pi_h v|_{0,\beta,t}.$$

Le premier terme du second membre est majoré par :

$$C \left(\sum_{k \in T_h} h_k^{\beta'} |\nabla(|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h) + f|_{0,\beta',k}^{\beta'} \right)^{1/\beta'} \|v\|_{1,\beta,\Omega}\,.$$

Pour majorer le second terme on écrit

$$\sum_{t \in \Gamma_i} h_t^{1/\beta'} |[|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \cdot \vec{n}]_t|_{0,\beta',t} \cdot h_t^{-1/\beta'} |v - \pi_h v|_{0,\beta,t} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{t \in \Gamma_i} h_t |[|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \cdot \vec{n}]_t|_{0,\beta',t}^{\beta'} \right)^{1/\beta'} \times \left(\sum_{t \in \Gamma_i} h_t^{-\beta/\beta'} |v - \pi_h v|_{0,\beta,t}^{\beta} \right)^{1/\beta}$$

d'après le lemme 1.1

$$\sum_{t \in \Gamma_i} h_t^{-\beta/\beta'} |v - \pi_h v|_{0,\beta,t}^{\beta} \leqslant C \sum_{k \in T_h} h_K^{-\beta/\beta'} |v - \pi_h v|_{0,\beta,\partial k}^{\beta} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k \in T_h} h_k^{-(1+\beta/\beta')} (|v - \pi_h v|_{0,\beta,\partial k}^{\beta} + h_k^{\beta} |v - \pi_h v|_{1,\beta,k}^{\beta})$$

$$\leqslant C \sum_{k \in T_h} h_k^{-(1+\beta/\beta')} (h_k^{\beta} |v|_{1,\beta,k}^{\beta} + h_k^{\beta} |v|_{1,\beta,k}^{\beta}) .$$

Comme $-\beta/\beta' - 1 + \beta = 0$ il vient :

$$\sum_{t \in \Gamma_i} \left| [|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \,.\, \vec{n}]_t \right|_{0,\beta',t} \,.\, |v - \pi_h v|_{0,\beta,t} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{t \in \Gamma_i} h_t \left| [|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \,.\, \vec{n}]_t \right|_{0,\beta',t}^{\beta'})^{1/\beta'} \,.\, |v|_{1,\beta,\Omega}$$

d'où

$$\langle R, v \rangle \leqslant C \left\{ \left(\sum_{k \in T_h} h_k \left| \nabla (|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h) + f \right|_{0,\beta',K}^{\beta'} \right)^{1/\beta'} \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{t \in \Gamma_i} h_t \left| [|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \,.\, \vec{n}]_t \right|_{0,\beta',t}^{\beta'} \right)^{1/\beta'} \right\} \|v\| .$$

Comme $a^{1/\beta'} + b^{1/\beta'} \leqslant 2^{1/\beta} (a+b)^{1/\beta'}$ pour a et $b \geqslant 0$, on a l'estimation suivante :

$$\|R\|_* = \|A(u) - A(u_h)\|_* \leqslant C \left(\sum_{K \in T_h} \eta^{\beta'}(k) \right)^{1/\beta'} \tag{2.4}$$

avec

$$\eta(k) = \left\{ h_k \left| \nabla (|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h) + f \right|_{0,\beta',k}^{\beta'} + \right. \tag{2.5}$$

$$\left. + \sum_{t \subset \partial K} h_t \left| [|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \,.\, \vec{n}]_t \right|_{0,\beta',t}^{\beta'} \right\}^{1/\beta'}$$

Il reste à relier $\|R\|_*$ et $\|u - u_h\|$, ce qui utilise une propriété de coercivité de l'opérateur $A : W_0^{1,\beta}(\Omega) \to W^{-1,\beta'}(\Omega)$.

Pour $\beta \in]1, 2[$ on a :

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geqslant \alpha \frac{\|u - v\|^2}{(\|u\| + \|v\|)^{2-\beta}} \quad \text{pour } u, v \in W_0^{1,\beta}(\Omega) \tag{2.6}$$

où α est une constante ne dépendant ni de u ni de v.

Pour plus de détails sur les propriétés de A et pour la démonstration de (2.6) on peut voir, par exemple, Glowinski et Marrocco [1975] ou Ciarlet [1978].

En prenant, dans (2.6), $v = 0$ et pour u la solution du problème (2.1) il vient, puisque $A(0) = 0$:

$$\langle A(u), u \rangle \geqslant \alpha \|u\|^{\beta}.$$

Comme $A(u) = f$ alors $\alpha \|u\|^{\beta} \leqslant \langle f, u \rangle \leqslant \|f\|_{W^{-1,\beta'}(\Omega)} \cdot \|u\|$

c'est-à-dire :

$$\|u\| \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} \|f\|_{W^{-1,\beta'}(\Omega)} \right)^{1/(\beta-1)} \leqslant C(\|f\|_{L^{\beta'}(\Omega)})^{1/(\beta-1)}$$

puisque l'injection de $L^{\beta'}(\Omega)$ dans $W^{-1,\beta'}(\Omega)$ est continue.

De même pour u_h, et on a donc :

$$(\|u\| + \|u_h\|)^{2-\beta} \leqslant C(\|f\|_{L^{\beta'}(\Omega)})^{(2-\beta)/(\beta-1)}.$$

On a alors à partir de (2.4) et (2.6) le résultat suivant :

THÉORÈME : *On a l'estimation*

$$\|u - u_h\| \leqslant C \left(\sum_{k \in T_h} \eta_{(k)}^{\beta'} \right)^{1/\beta'}$$

où C ne dépend que de β, Ω, σ, et f et où

$$\eta(k) = \left\{ h_k \left| \nabla(|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h) + f \right|_{0,\beta',k}^{\beta'} + \right.$$
$$\left. + \sum_{t \subset \partial K} h_t \left| [\,|\nabla u_h|^{\beta-2} \nabla u_h \cdot \vec{n}]_t \right|_{0,\beta',t}^{\beta'} \right\}^{1/\beta'}.$$

Remarque 2.1 : Pour $\beta \geqslant 2$ on obtient :

$$\|u - u_h\| \leqslant C \left(\sum_{k \in T_h} \eta_{(k)}^{\beta'} \right)^{1/\beta}$$

où C ne dépend ni de u ni de f, car dans ce cas à la place de (2.6) on a :

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geqslant \alpha \|u - v\|^{\beta} \quad \forall u, v \in W_0^{1,\beta}(\Omega).$$

3. FLUIDES QUASI-NEWTONIENS

3.1. Introduction

Dans ce paragraphe on applique la technique d'estimation du résidu à un modèle de fluides quasi-Newtoniens, c'est-à-dire fluides dont la viscosité varie en fonction du deuxième invariant du tenseur D des taux de déformation $D_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$. On se limitera ici au modèle de Carreau à $\mu_\infty > 0$. La viscosité s'écrit dans ce cas :

$$\mu = \mu(D_{\|}(u)) \quad \text{où :} \tag{3.1}$$

$$\mu(z) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + \lambda z)^{(\beta - 2)/2} \tag{3.2}$$

avec :

$$\lambda > 0\,, \quad 1 < \beta \leqslant 2\,, \quad \mu_0 > \mu_\infty > 0 \quad \text{et} \tag{3.3}$$

$$D_{\|}(u) = D_{ij}(u) \,.\, D_{ij}(u) \quad \text{le second invariant de } D(u)\,. \tag{3.4}$$

On utilise la convention de sommation d'Einstein et on considère le problème : trouver u et p tels que :

$$\begin{array}{lllll} (3.5) & -\partial_j(2\,\mu(D_{\|}(u))\,D_{ij}(u)) + \partial_i p & = f_i & \text{dans } \Omega & i = 1, 2 \\ (3.6) & \partial_i u_i & = 0 & \text{dans } \Omega & \\ (3.7) & u_{|\Gamma} & = 0 & & \end{array}$$

où Ω est ouvert borné de frontière assez régulière. On pose pour simplifier

$$A_i(u) = -\,\partial_j(2\,\mu(u)\,D_{ij}(u))\,. \tag{3.8}$$

Pour une étude détaillée de ce problème voir Baranger et Najib [1989] ou Najib [1988]. On a en particulier l'existence et l'unicité de la solution (u, p), si $f \in X'$, dans $X \times M$ où :

$$X = (H_0^1(\Omega))^2 \quad \text{et} \tag{3.10}$$

$$M = L_0^2(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R}\,. \tag{3.11}$$

L'opérateur A défini de X dans X' par (3.8) vérifie :

PROPOSITION 3.1 : *Pour tout $u, v \in X$ on a :*

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geqslant C(u, v)\,\|u - v\|^2 \quad \textit{où} \tag{3.12}$$

$$C(u, v) = \left\{(\alpha_1 + \alpha_2(\|u\| + \|v\|))^{2-\beta}\right\}^{-1} \quad \textit{avec} \quad \alpha_1 \textit{ et } \alpha_2 > 0 \quad \square \tag{3.13}$$

PROPOSITION 3.2 (Georget [1985]) : *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

(3.14) $\|A(u) - A(v)\|_{X'} \leqslant C\|u - v\|$ *pour tout u, v dans X et ceci pour tout* $\beta > 1$. □

Le problème (3.5-7) entre dans le cadre abstrait suivant :

Soient X et M deux espaces de Banach réflexifs (ici deux espaces de Hilbert)

$A : X \to X'$ continu, $B : X \to M'$ linéaire continu, $f \in X'$ et $g \in M'$.

On cherche $(u, p) \in X \times M$ tel que :

$$(3.15) \qquad \begin{aligned} \langle A(u), v\rangle + \langle Bv, p\rangle &= \langle f, v\rangle \quad \forall v \in X \\ \langle Bu, q\rangle &= \langle g, q\rangle \quad \forall q \in M . \end{aligned}$$

Sous les conditions (3.12), (3.14) et la condition inf sup ce problème admet une solution unique (u, p). On a de plus (voir Scheurer [1975]) en notant $\| \ \|$ la norme de X et $| \ |$ la norme de M, et en désignant par $*$ les normes associées dans les espaces X' et M' respectivement :

$$(3.16) \qquad \|u - U\| + \|p - P\| \leqslant C(\|f - F\|_* + |g - G|_*)$$

où (u, p) et (U, P) sont les solutions du problème (3.15) associées respectivement aux couples (f, g) et $(F, G) \in X' \times M'$, et C une constante strictement positive.

On suppose que $f \in L^2(\Omega)$, alors le problème (3.5-7) s'écrit sous forme variationnelle : $(u, p) \in X \times M$

$$(3.17) \quad 2\int_\Omega \mu(D_\|(u))\, D_{ij}(u)\, D_{ij}(v) - \int_\Omega p \operatorname{div} v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in X$$

$$(3.18) \qquad \int_\Omega q \operatorname{div} v = 0 \quad \forall q \in M .$$

3.2. Discrétisation et estimation du résidu

Soit T_h une triangulation régulière de Ω vérifiant (1.1). Soit X_h et M_h deux sous-espaces éléments finis de X et M respectivement vérifiant (2.3) et (2.4). Le problème approché s'écrit :

$$(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$$

(3.19)
$$2\int_\Omega \mu(D_{\|}(u_h))\, D_{ij}(u_h)\, D_{ij}(v_h) - \int_\Omega p_h \operatorname{div} v_h = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in X_h$$

$$\int_\Omega q_h \operatorname{div} v_h = 0 \quad \forall q_h \in M_h . \tag{3.20}$$

On suppose que X_h et M_h vérifient la condition inf sup discrète, alors le problème (3.19-20) admet une solution unique $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$.

On définit deux résidus R sur X et r sur M par :

$$\langle R, v\rangle = 2\int_\Omega \mu(D_{\|}(u_h))\, D_{ij}(u_h)\, D_{ij}(v) - \\ - \int_\Omega p_h \operatorname{div} v - \int_\Omega f v \quad \text{pour tout} \quad v \in X \tag{3.21}$$

$$\langle r, q\rangle = \int_\Omega q \operatorname{div} u_h \quad \text{pour tout} \quad q \in M . \tag{3.22}$$

Soient (u, p) et (u_h, p_h) les solutions des problèmes continu (3.17-18) et approché (3.19-20), alors on a :

THÉORÈME 3.1 : *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u - u_h\| + |p - p_h| \leq C(\|R\|_* + |r|_*) \tag{3.23}$$

où R et r sont donnés par (3.21) *et* (3.22). □

En effet, (3.21-22) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\langle A(u_h), v\rangle - \langle \operatorname{div} v, p_h\rangle = \langle f, v\rangle + \langle R, v\rangle && \forall v \in X \\ &\langle \operatorname{div} u_h, q\rangle = \langle r, q\rangle && \forall q \in M . \end{aligned}$$

Soient $F \in X'$ et $G \in M'$ définies par $\langle F, v\rangle = \langle f + R, v\rangle$ et $\langle G, q\rangle = \langle r, q\rangle$ alors d'après (3.16) :

$$\|u - u_h\| + |p - p_h| \leq C(\|F - f\|_* + |G - 0|_*) = C(\|R\|_* + |r|_*) . \quad \square$$

Il suffit donc d'estimer les résidus pour en déduire une estimation de l'erreur. L'estimation de r est directe puisque $r = \operatorname{div} u_h$ dans $M' = L_0^2(\Omega)$ et donc $|r|_* = |\operatorname{div} u_h|$ c'est-à-dire :

$$|r|_* = \left(\sum_{K \in T_h} |\operatorname{div} u_h|_{0,K}^2\right)^{1/2} . \tag{3.24}$$

On suppose que $f \in L^2(\Omega)$, alors (3.21) s'écrit, en notant pour simplifier μ_h au lieu de $\mu(D_\| (u_h))$:

$$\langle R, v \rangle = \sum_{K \in T_h} \left(\int_k 2\, \mu_h\, D_{ij}(u_h)\, D_{ij}(v) - \int_k p_h \operatorname{div} v - \int_K f v \right).$$

En appliquant la formule de Green sur chaque K on a :

$$\langle R, v \rangle = \sum_{K \in T_h} \left\{ \int_K (A_i(u_h) + \partial_i p_h - f_i)\, v_i + \int_{\partial k} (2\, \mu_h\, D_{ij}(u_h)\, n_j - p_h\, n_i)\, v_i \right.$$

$$\left. = \sum_{K \in T_h} \int_K (A_i(u_h) + \partial_i\, p_h - f_i)\, v_i + \sum_{t \in \Gamma_I} \int_t [2\, \mu_h\, D_{ij}(u_h)\, n_j - p_h\, n_i]_t\, v_i \right\}$$

où Γ_I est la réunion des côtés de tous les triangles internes de T_h.

Comme $\langle R, v_h \rangle = 0$ pour tout $v_h \in X_h$, alors pour $v_h = \pi_h\, v$ on a :

$$\langle R, v \rangle = \langle R, v - \pi_h\, v \rangle = \sum_{K \in T_h} \int_K (A_i(u_h) + \partial_i p_h - f_i)(v - \pi_h\, v)_i$$

$$+ \sum_{t \in \Gamma_I} \int_t [2\, \mu_h\, D_{ij}(u_h)\, n_j - p_h\, n_i]_t\, (v - \pi_h\, v)_i$$

d'où :

$$\langle R, v \rangle \leqslant \sum_{K \in T_h} |A(u_h) + \nabla p_h - f|_{0,K} \cdot |v - \pi_h\, v|_{0,K}$$
$$+ \sum_{t \in \Gamma_I} \left| [2\, \mu_h\, D_{ij}(u_h)\, n_j - p_h\, n_i]_t \right|_{0,t} \cdot \left| (v - \pi_h\, v)_i \right|_{0,t}. \tag{3.25}$$

On majore les deux termes du second membre séparément.

A. *Majoration du 1*[er] *terme*

$$\sum_K |A(u_h) + \nabla p_h - f|_{0,K} \cdot |v - \pi_h\, v|_{0,K} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_K h_K^2 |A(u_h) + \nabla p_h - f|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_K h_K^{-2} |v - \pi_h\, v|_{0,K}^2 \right)^{1/2}$$

et d'après (1.2) avec $m = 0$:

$$\leqslant C \left(\sum_K h_K^2 |A(u_h) + \nabla p_h - f|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|v\|.$$

B. *Majoration du 2^e^ terme*

Pour alléger l'écriture introduisons le vecteur s de composantes :

$$(3.26) \quad s_i = \left| [2\,\mu_h\, D_{ij}(u_h)\, n_j - p_h\, n_i]_t \right|_{0,t} = \\ = \left| [\sigma_{ij}(u_h, p_h)\, n_j]_t \right|_{0,t} = \left| [\sigma_{ij}^h\, n_j]_t \right|_{0,t}.$$

Le 2^e^ terme s'écrit :

$$\sum_{t \in \Gamma_l} s_i \left| (v - \pi_h v)_i \right|_{0,t} \leqslant \left(\sum_{t \in \Gamma_l} h_t |s|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{t \in \Gamma_l} h_t^{-1} |v - \pi_h v|_{0,t}^2 \right)^{1/2}.$$

Le facteur $\left(\sum_{t \in \Gamma_l} h_t^{-1} |v - \pi_h v|_{0,t}^2 \right)^{1/2}$ est majoré par :

$$\left(\sum_{K \in T_h} \sum_{t \subset \partial k} h_t^{-1} |v - \pi_h v|_{0,t}^2 \right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_K C h_K^{-1} \sum_{t \subset \partial k} |v - \pi_h v|_{0,t}^2 \right)^{1/2} = C \left(\sum_{K \in T_h} h_K^{-1} |v - \pi_h v|_{0,\partial k}^2 \right)^{1/2}$$

et d'après le lemme 1.1 (avec $\beta = 2$) :

$$\leqslant C \left(\sum_K h_K^{-2} |v - \pi_h v|_{0,K}^2 + h_K^2 |v - \pi_h v|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \\ \leqslant C \left(\sum_{K \in T_h} |v|_{1,K}^2 \right)^{1/2} = C \|v\|.$$

Le deuxième terme est donc majoré par :

$$C \left(\sum_{t \in \Gamma_l} h_t \left| [\sigma_{ij}^h\, n_j]_t \right|_{0,t}^2 \right)^{1/2} \|v\|$$

d'où :

$$\langle R, v \rangle \leqslant C \left\{ \left(\sum_K h_K^2 |A(u_h) + \nabla p_h - f|_{0,K}^2 \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \left(\sum_{t \in \Gamma_l} h_t \left| [\sigma_{ij}^h\, n_j]_t \right|_{0,t}^2 \right)^{1/2} \right\} \|v\|$$

ou encore :

$$(3.27) \quad \|R\|_* \leqslant C \left\{ \sum_K \left(h_K^2 |A(u_h) + \nabla p_h - f|_{0,K}^2 + \sum_{t \subset \partial K} h_t \left| [\sigma_{ij}^h\, n_j]_t \right|_{0,t}^2 \right) \right\}^{1/2}$$

on a alors le :

THÉORÈME 3.1 : *Il existe une constante C indépendante de h telle que :*

$$\|u - u_h\| + |p - p_h| \leq C \left(\sum_{K \in T_h} \eta(K)^2 \right)^{1/2} \quad \textit{où} \tag{3.28}$$

$$(\eta (K)^2 = h_K^2 |A(u_h) + \nabla p_h - f|_{0,K}^2 + \tag{3.29}$$

$$+ \sum_{t \subset \partial K} h_t \sum_{i,j=1}^{n} |[\sigma_{ij}^h n_j]_t|_{0,t}^2 + |\operatorname{div} u_h|_{0,K}^2 .$$

Preuve : Il suffit de rassembler (3.25) et (3.27) et utiliser (3.23). □

Remarque 3.2 : On peut considérer des modèles pour lesquels la dépendance de la viscosité par rapport au deuxième invariant est plus fortement non linéaire ; par exemple on peut considérer la loi de Carreau avec $\mu_\infty = 0$ ou la loi puissance :

$$\mu(z) = (g/2)\ |z|^{(\beta - 2)/2} .$$

Dans ces conditions $X = W_0^{1,\beta}(\Omega)$ et $M = L_0^{\beta'}(\Omega)$ (β' exposant conjugué de β) et on doit utiliser à la fois les méthodes des §§ 2 et 3 et remplacer le théorème 3.1 par une version non linéaire. Voir Baranger et El Amri [1989].

RÉFÉRENCES

E. ABDALASS [1987], *Résolution Performante du Problème de Stokes par Mini-Élément, Maillage Auto-Adaptatifs et Méthodes Multigrilles Applications.* Thèse de Doctorat, École Centrale de Lyon.

E. ABDALASS, J. F. MAITRE & F. MUSY [1987], *A finite element solution of Stokes problem with an adaptive procedure,* 1st ICIAM Paris.

I. BABUSKA & W. C. RHEINBOLTD [1978] *a*), *Error Estimates for Adaptative Finite Element Computations.* SIAM J. Numer. Anal. Vol. 15, n° 4.

I. BABUSKA & W. C. RHEINBOLTD [1978] *b*), *A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method.* Int. J. Numer. Meth. Engng., 12, 1597-1615.

I. BABUSKA & W. C. RHEINBOLTD [1979], *Analysis of Optimal Finite Element Meshes in* ℝ. Math. of Computation, 33, 435-463.

R. E. BANK [1986], *Analysis of a Local a posteriori Error Estimate for Elliptic Equations.* Dans « Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations », Edit. Babuska, I., Zienkiewicz, O. C., Gago, J. et Oliveira, A.

R. E. BANK & A. H. SHERMAN [1980], *The use of Adaptive Grid Refinement for Badly Behaved Elliptic Partial Differential Equations.* Math. and Computer XXII, pp. 18-24.

J. BARANGER & H. EL AMRI [1989], *A posteriori error estimators for mixed finite element approximation of some quasi-newtonian flows. Invited lecture at the* Workshop on innovative finite element methods. Rio de Janeiro Nov. 27 to Dec. 1st.

J. BARANGER & K. NAJIB [1989], *Analyse numérique d'une méthode d'éléments finis mixtes vitesse-pression pour le calcul d'écoulements quasi-newtoniens.* 2^e^ Congrès Franco-Chilien et Latino-Américain de mathématiques Appliquées, Santiago de Chile, décembre.

C. BERNARDI [1984], *Optimal Finite Element Interpolation on Curved Domains.* Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Pierre et Marie Curie, n° 17.

P. G. CIARLET [1978], *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* Studies in Mathematics and its Applications, Volume 4, North-Holland.

Ph. CLÉMENT [1975], *Approximation by Finite Element Functions using Local Regularization.* R.A.I.R.O. n° 2, pp. 77-84.

P. GEORGET [1985], *Contribution à l'étude des équations de Stokes à viscosité variable.* Thèse de Doctorat. Université de Lyon I.

V. GIRAULT, P. A. RAVIART [1986], *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.* Theory and Algorithms. Amsterdam, North-Holland.

R. GLOWINSKI, A. MARROCCO [1975], *Sur l'approximation par éléments finis d'ordre 1 et la résolution par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires.* R-2 R.A.I.R.O. Analyse Numérique, pp. 41-76.

K. NAJIB [1988], *Analyse Numérique de Modèles d'Écoulements Quasi-Newtoniens.* Thèse de Doctorat. Université de Lyon I.

J. T. ODEN, L. DEMKOWICZ, Ph. DELVOO & T. STROUBOULIS [1986], *Adaptive Methods for Problems in Solid and Fluid Mechanics.* Dans « Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations », Edit. Babuska, I., Zienkiewicz, O. C., Gago, J. et Oliveira, A.

M. C. RIVARA [1984], *Adaptive Multigrid Software for the Finite Element Method.* PhD thesis University Leuven, 1984.

I. G. ROSENBERG & F. STENGER [1975], *A lower bound on the angles of triangles constructed by bisecting the longest side.* Math. Comp. 29, pp. 390-395, 1975.

B. SCHEURER [1977], *Existence et approximation de points selles pour certains problèmes non linéaires.* R.A.I.R.O., Volume 11, n° 4, Analyse Numérique, pp. 369-400.

R. VERFÜRTH [1989], *A posteriori error estimators for the Stokes equations.* Numerische Mathematik. Volume 55, n° 3, 1989, pp. 309-325.