

CHRISTINE BERNARDI

YVON MADAY

Relèvement polynômial de traces et applications

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 24, n° 5 (1990), p. 557-611

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1990__24_5_557_0

© AFCET, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



RELÈVEMENT POLYNÔMIAL DE TRACES ET APPLICATIONS (*)

par Christine BERNARDI ⁽¹⁾ et Yvon MADAY ⁽²⁾

Communiqué par P G CIARLET

Resume — Dans un carré, nous montrons des résultats de stabilité pour le relèvement par un polynôme de traces polynômiales sur les quatre côtés, dans les espaces de Sobolev ordinaires et à poids de Jacobi. L'application présentée ici est l'amélioration des estimations d'erreur existantes sur la pression, lorsque le problème de Stokes est discrétisé par une méthode de collocation spectrale.

Abstract — In a square, we prove stability results for the lifting of polynomial traces on the four edges by a global polynomial function, in standard and weighted Sobolev spaces. We apply them to improve the already known error bound for the pressure which comes from the discretization of the Stokes problem by a spectral collocation method.

INTRODUCTION

Dans un domaine carré, on peut définir sur chaque espace de Sobolev d'ordre entier un opérateur de traces [LM, Chap. 1] et caractériser son image comme un produit d'espaces de Sobolev sur la frontière avec des conditions de compatibilité aux coins [G, Chap. 1]; on démontre alors l'existence d'un relèvement continu à droite de cet opérateur. Ces propriétés s'étendent [BM1, § II] au cas des espaces de Sobolev à poids utilisés dans l'approximation spectrale d'équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire lorsque le poids est une puissance, comprise entre -1 et 1 , du produit des distances aux côtés. Le principal but de ce travail est de démontrer des

(*) Reçu en décembre 1988

(¹) C N R S et Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Tour 55-65, 5^e étage, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

(²) Massachusetts Institute of Technology et Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Tour 55-65, 5^e étage, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

résultats similaires dans des espaces de polynômes de haut degré : plus précisément, étant donnés des polynômes de degré fixé sur les côtés du domaine, on indiquera quelles conditions de compatibilité ils doivent vérifier aux coins pour être les traces d'un polynôme de même degré par rapport à chaque variable sur le carré et quelles sont les propriétés de stabilité de ce relèvement en fonction du degré et des normes de Sobolev considérées.

On peut imaginer de nombreuses applications à ce type de résultats, en particulier dans l'analyse numérique de la p -version de la méthode des éléments finis et aussi des méthodes spectrales ; nous allons en citer quelques-unes dans ce cadre (nous référerons à [CHQZ] pour les propriétés générales de ces méthodes). Le premier exemple est l'obtention de majorations d'erreur entre la solution exacte d'un problème elliptique avec des conditions aux limites non homogènes, et la solution approchée obtenue par une méthode de collocation spectrale (*cf.* [BM1, § V] dans le cas d'un problème modèle du second ordre ou [BCMM, § III] pour le problème de Stokes) ; un théorème général d'approximation sera énoncé dans ce but. Le deuxième exemple est l'analyse numérique des méthodes avec partition du domaine d'origine, comme les éléments spectraux avec raccords non conformes ou le couplage de l'approximation spectrale avec une discrétisation par éléments finis ; nous référerons à [BMP] pour le premier type, à [BMS] pour le second. La troisième application est l'amélioration des bornes d'erreur sur la pression, lors de l'approximation du problème de Stokes par méthodes de collocation spectrale ; elle sera traitée en détail dans le cas d'un algorithme à une seule grille étudié dans [BMM] [BCaM] [BCMM] et dans celui d'un algorithme à trois grilles décalées étudié dans [BM2], le résultat étant lié à une meilleure estimation de la constante de condition inf-sup de Bakuška et Brezzi.

Le plan de l'article est le suivant. Le premier paragraphe est consacré à rappeler quelques notations et résultats sur les espaces de Sobolev à poids dans un carré. Dans le second paragraphe, sont d'abord établies les propriétés d'un opérateur de relèvement polynômial d'une trace donnée sur un seul côté du carré ; puis le théorème général est énoncé, démontré et appliqué à un résultat d'approximation. L'application au calcul d'erreur sur la pression dans la discrétisation spectrale du problème de Stokes est l'objet du troisième paragraphe, dans les cas d'une ou trois grilles de collocation. Deux résultats d'équivalence de normes d'interpolation sur les polynômes sont présentés en annexe.

I. RAPPELS SUR LES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

Pour tout ouvert Δ de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 , on considère les espaces de Sobolev habituels $H^s(\Delta)$, munis de la norme $\|\cdot\|_{s,\Delta}$, pour tout réel $s \geq 0$, ainsi que

de la semi-norme $|\cdot|_{s, \Delta}$ lorsque s est entier. On note $H_0^s(\Delta)$ l'adhérence dans $H^s(\Delta)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Delta)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Δ . Lorsque $s - 1/2$ est entier, on définit $H_{00}^s(\Delta)$ comme l'espace d'interpolation d'indice $1/2$ entre $H_0^{s+1/2}(\Delta)$ et $H_0^{s-1/2}(\Delta)$, et on désigne par $\|\cdot\|_{s, \Delta}$ sa norme.

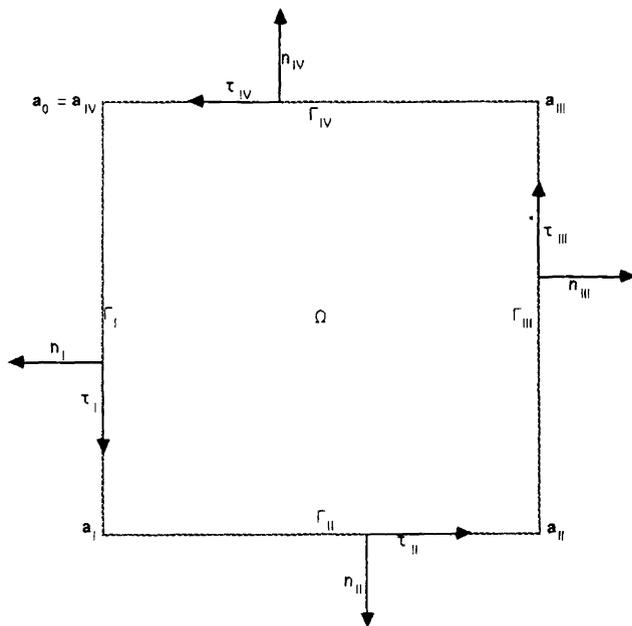


Figure I.1. — Numérotation des coins et des côtés dans le carré Ω .

Soit maintenant Λ l'intervalle ouvert $] - 1, 1[$, et Ω le carré Λ^2 . Le point générique de $\bar{\Lambda}$ sera désigné par ζ , celui de $\bar{\Omega}$ sera écrit $x = (x, y)$. On note $a_J, J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, les coins de $\bar{\Omega}$, où a_J suit a_{J+1} dans le sens trigonométrique ; on désigne par $\Gamma_J, J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, le côté d'extrémités a_{J-1} et a_J . Sur tout côté $\Gamma_J, J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, n_J est le vecteur unitaire normal à Γ_J et extérieur à Ω et τ_J est le vecteur unitaire directement orthogonal à n_J (voir fig. I.1 ci-dessus).

Précisons les notations des espaces de Sobolev à poids que nous allons utiliser. Dans tout ce qui suit, α est un nombre réel $> - 1$.

Sur l'intervalle Λ , on pose

$$(I.1) \quad \forall \zeta \in \Lambda, \quad \rho_\alpha(\zeta) = (1 - \zeta^2)^\alpha.$$

On introduit l'espace des fonctions de carré intégrable associé à la mesure $\rho_\alpha(\zeta) d\zeta$, c'est-à-dire

$$(I.2) \quad L_\alpha^2(\Lambda) = \left\{ v : \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{-1}^1 v^2(\zeta) \rho_\alpha(\zeta) d\zeta < +\infty \right\},$$

puis, pour tout entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev

$$(I.3) \quad H_\alpha^m(\Lambda) = \{ v \in L_\alpha^2(\Lambda) ; d^r v / d\zeta^r \in L_\alpha^2(\Lambda), 0 \leq r \leq m \};$$

cet espace est muni de la norme

$$(I.4) \quad \|v\|_{m, \alpha, \Lambda} = \left[\int_{-1}^1 \sum_{r=0}^m (d^r v / d\zeta^r)^2 \rho_\alpha(\zeta) d\zeta \right]^{1/2}$$

et de la semi-norme

$$(I.5) \quad |v|_{m, \alpha, \Lambda} = \left[\int_{-1}^1 (d^m v / d\zeta^m)^2 \rho_\alpha(\zeta) d\zeta \right]^{1/2}.$$

Pour tout réel $s \geq 0$ non entier, l'espace de Hilbert $H_\alpha^s(\Lambda)$ est défini par interpolation entre $H_\alpha^{[s]}(\Lambda)$ et $H_\alpha^{[s]+1}(\Lambda)$, où $[s]$ désigne la partie entière de s , et sa norme est notée $\|\cdot\|_{s, \alpha, \Lambda}$. Pour tout réel $s \geq 0$, $H_{\alpha, 0}^s(\Lambda)$ est l'adhérence dans $H_\alpha^s(\Lambda)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Lambda)$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Λ . Par translation et rotation, on construit des espaces de Sobolev semblables $H_\alpha^s(\Gamma)$ et $H_{\alpha, 0}^s(\Gamma)$, $s \geq 0$, sur tout segment ouvert Γ de \mathbb{R}^2 de longueur 2, et on note $\|\cdot\|_{s, \alpha, \Gamma}$ leurs normes.

Enfin, sur le carré Ω , on pose

$$(I.6) \quad \forall \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad \omega_\alpha(\mathbf{x}) = (1 - x^2)^\alpha (1 - y^2)^\alpha.$$

On introduit l'espace

$$(I.7) \quad L_\alpha^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_\Omega v^2(\mathbf{x}) \omega_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty \right\},$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(I.8) \quad (u, v)_\alpha = \int_\Omega u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \omega_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Pour tout entier $m \geq 0$, on introduit l'espace de Sobolev

$$(I.9) \quad H_\alpha^m(\Omega) = \{ v \in L_\alpha^2(\Omega) ; \partial^{p+q} v / \partial x^p \partial y^q \in L_\alpha^2(\Omega), (p, q) \in \mathbb{N}^2, p+q \leq m \};$$

on le munit de la norme

$$(I.10) \quad \|v\|_{m, \alpha, \Omega} = \left[\int_{\Omega} \sum_{p+q \leq m} (\partial^{p+q} v / \partial x^p \partial y^q)^2 \omega_{\alpha}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right]^{1/2}$$

et de la semi-norme

$$(I.11) \quad |v|_{m, \alpha, \Omega} = \left[\int_{\Omega} \sum_{p+q=m} (\partial^{p+q} v / \partial x^p \partial y^q)^2 \omega_{\alpha}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right]^{1/2}.$$

Pour tout réel $s \geq 0$ non entier, l'espace de Hilbert $H_{\alpha}^s(\Omega)$ est défini par interpolation entre $H_{\alpha}^{[s]}(\Omega)$ et $H_{\alpha}^{[s]+1}(\Omega)$, où $[s]$ désigne la partie entière de s , et sa norme est notée $\|\cdot\|_{s, \alpha, \Omega}$. Finalement, pour tout réel $s \geq 0$, $H_{\alpha,0}^s(\Omega)$ est l'adhérence dans $H_{\alpha}^s(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω .

Les principales propriétés de ces espaces ont été étudiées dans [BM1, § II] auquel nous référerons lorsque ce sera nécessaire.

Nous commençons par rappeler les résultats sur les traces de fonctions de $H_{\alpha}^m(\Omega)$. Pour tout entier $m \geq 1$, on définit sur $\mathcal{C}^{m-1}(\bar{\Omega})$ l'opérateur T_m de traces :

$$(I.12) \quad u \rightarrow T_m u = (u|_{\Gamma_J} \partial u / \partial n_J, \dots, \partial^{m-1} u / \partial n_J^{m-1})_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}.$$

Puis, pour tout triplet d'entiers (k, r, p) tel que $0 \leq k+r \leq p$, étant donné un élément $\Phi = (\varphi_J^0, \varphi_J^1, \dots, \varphi_J^p)_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ de $\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^p \mathcal{C}^{p-k}(\bar{\Gamma}_J)$, on note

$(C)_{k,r}$ la condition suivante :

$$(C)_{k,r} \quad \forall J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J) = (-1)^k (d^k \varphi_{J+1}^r / d\tau_{J+1}^k)(\mathbf{a}_J).$$

Le théorème qui suit est établi dans [BM1, Thm. II.3 and II.4].

THÉORÈME I.1 : *Soit α un nombre réel strictement compris entre -1 et 1 , non nul. Pour tout entier $m \geq 1$, l'opérateur de traces T_m , défini sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, se prolonge en un opérateur linéaire continu surjectif de l'espace $H_{\alpha}^m(\Omega)$ sur le sous-espace de*

$$\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{m-1} H_{\alpha}^{m-k-(1+\alpha)/2}(\Gamma_J)$$

formé des éléments vérifiant les conditions $(C)_{k,r}$ pour

$$(I.13) \quad 0 \leq k+r \leq m-1 \text{ si } \alpha < 0 \text{ et } 0 \leq k+r \leq m-2 \text{ si } \alpha > 0.$$

Il admet un relèvement continu à droite.

Comme on le voit, le cas $\alpha = 0$ des espaces de Sobolev habituels est un cas limite. Pour un triplet d'entiers (k, p, r) tel que $0 \leq k + r \leq p$, on doit introduire, pour tout élément $\Phi = (\varphi_J^0, \varphi_J^1, \dots, \varphi_J^p)_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ de

$\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^p H^{p-k}(\Gamma_J)$, la condition faible $(\tilde{C})_{k,r}$ suivante :

$$(\tilde{C})_{k,r} \left\{ \begin{array}{l} \forall J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} , \\ \int_0^2 [(d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J - t\boldsymbol{\tau}_J) \\ - (-1)^k (d^k \varphi_{J+1}^r / d\tau_{J+1}^k)(\mathbf{a}_{J+1} + t\boldsymbol{\tau}_{J+1})]^2 dt / t < + \infty . \end{array} \right.$$

Remarque I.1 : Lorsque l'élément Φ appartient à $\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^p \mathcal{C}^{p-k}(\bar{\Gamma}_J)$, il est facile de voir que la condition $(\tilde{C})_{k,r}$ est équivalente à la condition $(C)_{k,r}$.

Le théorème suivant est un cas particulier de [G, Th 1.5.2.8].

THÉORÈME I.2 : *Pour tout entier $m \geq 1$, l'opérateur de traces T_m , défini sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, se prolonge en un opérateur linéaire continu surjectif de l'espace*

$H^m(\Omega)$ sur le sous-espace de $\prod_{j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{m-1} H^{m-k-1/2}(\Gamma_j)$ formé des éléments vérifiant les conditions $(C)_{k,r}$ pour $0 \leq k + r \leq m - 2$ et les conditions $(\tilde{C})_{k,r}$ pour $k + r = m - 1$. Il admet un relèvement continu à droite.

Soit n un entier ≥ 0 . On note $P_n(\Lambda)$ l'espace des restrictions à Λ des polynômes sur \mathbb{R} de degré $\leq n$, et $P_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω de polynômes sur \mathbb{R}^2 de degré $\leq n$ par rapport à chaque variable. Étant donné un entier $m \geq 1$, on note $P_n^{0,m}(\Lambda)$ (resp. $P_n^{0,m}(\Omega)$) l'espace $P_n(\Lambda) \cap H_0^m(\Lambda)$ (resp. $P_n(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$) ; il est formé des polynômes de $P_n(\Lambda)$ dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m - 1$ s'annulent en ± 1 (resp. des polynômes v de $P_n(\Omega)$ tels que $T_m v$ soit nul). Enfin, si k est un autre entier ≥ 0 , $P_{k,n}(\Omega)$ désigne l'espace des restrictions à Ω des polynômes de degré $\leq k$ par rapport à x et de degré $\leq n$ par rapport à y .

On aura besoin d'une base de $P_n(\Lambda)$ formée de polynômes qui soient deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire de $L_\alpha^2(\Lambda)$. Il s'agit des $(n + 1)$ premiers éléments de la famille des polynômes de Jacobi $(J_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$: le polynôme J_n^α , $n \in \mathbb{N}$, est de degré n et satisfait la condition

$$(I.14) \quad J_n^\alpha(\pm 1) = (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} .$$

Citons rapidement quelques propriétés de ces polynômes qui seront utiles

par la suite [DR, § 1.13] [H, Chap. 22]. Ils sont donnés par la formule de récurrence

$$(I.15) \quad \begin{cases} (n+1)(n+2\alpha+1) J_{n+1}^\alpha = (2n+2\alpha+1)(n+\alpha+1) \zeta J_n^\alpha \\ \quad - (n+\alpha)(n+\alpha+1) J_{n-1}^\alpha \quad n \geq 1, \\ J_0^\alpha(\zeta) = 1 \quad \text{et} \quad J_1^\alpha(\zeta) = (\alpha+1) \zeta. \end{cases}$$

Ils vérifient l'équation différentielle

$$(I.16) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\rho_{\alpha+1} J_n^\alpha)' + n(n+2\alpha+1) \rho_\alpha J_n^\alpha = 0,$$

et leurs normes sont données par

$$(I.17) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-1}^1 J_n^\alpha(\zeta)^2 \rho_\alpha(\zeta) d\zeta = \frac{2^{2\alpha+1} \Gamma(n+\alpha+1)^2}{(2n+2\alpha+1) n! \Gamma(n+2\alpha+1)}.$$

On utilisera enfin la formule [BM1, Lemma IV.1]

$$(I.18) \quad \forall n \geq 1, \quad \int J_n^\alpha(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2n+2\alpha+1} \left[\frac{n+2\alpha+1}{n+\alpha+1} J_{n+1}^\alpha - \frac{n+\alpha}{n+2\alpha} J_{n-1}^\alpha \right],$$

où $\int J_n^\alpha(\zeta) d\zeta$ désigne la primitive de J_n^α d'intégrale nulle pour la mesure $\rho_\alpha(\zeta) d\zeta$.

Soit N un entier fixé ; dans ce qui suit, on désigne par c une constante pouvant varier d'une ligne à l'autre mais toujours indépendante de N . On aura besoin de la notation suivante : pour tout entier $m \geq 1$, pour tout réel s strictement compris entre 0 et m , la norme d'interpolation d'indice $1 - s/m$ entre l'espace $P_N^{0,m}(\Lambda)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{m, \alpha, \Lambda}$ et ce même espace muni de la norme $\|\cdot\|_{0, \alpha, \Lambda}$ sera désignée par ${}_{m,N} \|\cdot\|_{s, \alpha, \Lambda}$; ceci peut s'écrire [LM, Chap. 1, Th. 10.1] de la façon suivante : pour tout φ_N dans $P_N^{0,m}(\Lambda)$,

$$(1.19) \quad {}_{m,N} \|\varphi_N\|_{s, \alpha, N} = \inf \left\{ \left\| t^{1/2-s/m} v \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H_\alpha^m(\Lambda))} + \left\| t^{1/2-s/m} \partial v / \partial t \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+; L_\alpha^2(\Lambda))} ; v(t, \cdot) \in P_N^{0,m}(\Lambda) \text{ et } v(0, \cdot) = \varphi_N \right\}.$$

Il est bien évident que l'on a

$$(I.20) \quad \forall \varphi_N \in P_N^{0,m}(\Lambda), \quad \|\varphi_N\|_{s, \alpha, N} \leq {}_{m,N} \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda} \leq c_s(N) \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda},$$

où la constante $c_s(N)$ minimale dépend a priori de m, s, α et N . Des majorations de cette constante, pour m égal à 1 et 2, sont données en annexe.

Avec les notations précédentes, le problème qui est l'objet du paragraphe suivant s'énonce ainsi : étant donné un élément Φ de $\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{m-1} P_N(\Gamma_J)$, $m \geq 1$, que doit-il vérifier pour qu'il existe un polynôme v_N de $P_N(\Omega)$ tel que $T_m v_N$ soit égal à Φ ? Si ces conditions sont satisfaites, comment peut-on majorer la norme $\|v_N\|_{m, \alpha, \Omega}$ en fonction de Φ ? Nous commençons par le cas un peu plus facile où les composantes de Φ sont nulles sauf celles sur un seul côté Γ_J .

II. RÉSULTATS DE RELÈVEMENT

II.1. Relèvement d'une trace unilatérale

Soit $\Phi_{N,J} = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^{m-1})$ un élément de $\prod_{r=0}^{m-1} P_N^{0,m}(\Gamma_J)$. Le but de ce paragraphe est de construire un polynôme $Q_{N,J}^m \Phi_{N,J}$ de $P_N(\Omega)$ tel que :

- 1) $T_m Q_{N,J}^m \Phi_{N,J}$ soit égal à $(\Psi_{N,I}, \Psi_{N,II}, \Psi_{N,III}, \Psi_{N,IV})$, où $\Psi_{N,J}$ est égal à $\Phi_{N,J}$ et où $\Psi_{N,K}$ est nul pour $K \neq J, K \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;
- 2) la norme de $Q_{N,J}^m \Phi_{N,J}$ dans $H_\alpha^m(\Omega)$ soit majorée en fonction de certaines normes de $\Phi_{N,J}$.

Les résultats seront énoncés pour J quelconque dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; toutefois, pour simplifier, les démonstrations, qui sont exactement identiques dans les quatre cas au signe et à l'échange des variables près, seront faites dans le cas $J = I$. On rappelle que le côté Γ_I est le segment ouvert $\{-1\} \times]-1, 1[$.

Soit m un entier ≥ 1 fixé ; on suppose dans ce qui suit que N est $\geq 2m - 1$. Nous allons construire deux bases de polynômes appropriées à notre problème, en adaptant une idée de C. Canuto et D. Funaro [CF, § 2]. Puisque la forme bilinéaire :

$$(\varphi, \psi) \rightarrow \int_{-1}^1 (d^m \varphi / d\xi^m)(d^m \psi / d\xi^m)(1 - \zeta^2)^\alpha d\xi$$

est elliptique sur $H_{\alpha,0}^m(\Lambda)$, le problème aux valeurs propres d'ordre $2m$, consistant à trouver ψ dans $P_N^{0,m}(\Lambda)$ solution de

(II.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \chi \in P_N^{0,m}(\Lambda), \\ \int_{-1}^1 (d^m \psi / d\xi^m)(d^m \chi / d\xi^m)(1 - \zeta^2)^\alpha d\xi = \lambda \int_{-1}^1 \psi(\zeta) \chi(\zeta)(1 - \zeta^2)^\alpha d\xi, \end{array} \right.$$

D'autre part, pour tout réel $\beta > -1$, il découle de l'équation (I.16) que le polynôme J_n^β , $n \geq 1$, est parallèle au polynôme $J_{n-1}^{\beta+1}$ et vérifie, d'après [BM1, (V.28)], (I.16), (I.17), (I.14) et la formule de Stirling,

$$\|J_n^{\beta'}\|_{0, \beta, \Lambda} / |J_n^{\beta'}(-1)| \leq c(n^{3/2}/n^2) \|J_n^\beta\|_{0, \beta, \Lambda} / |J_n^\beta(-1)| \leq c' n^{-1-\beta}.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} \|\tilde{\xi}_n^k\|_{0, \alpha, \Lambda} &= \frac{c \|(1-\zeta)^{m-k} (d^{2k+1} J_{n+1-m}^\alpha / d\zeta^{2k+1})\|_{0, \alpha+2k, \Lambda}}{|(d^{2k+1} J_{n+1-m}^\alpha / d\zeta^{2k+1})(-1)|} \\ &\leq c \|J_{n+1-m-2k}^{\alpha+2k}\|_{0, \alpha+2k, \Lambda} / |J_{n+1-m-2k}^{\alpha+2k}(-1)|, \end{aligned}$$

donc

$$(II.5) \quad \|\tilde{\xi}_n^k\|_{0, \alpha, \Lambda} \leq c' n^{-2k-1-\alpha}.$$

On construit maintenant les polynômes ξ_n^k par récurrence inverse sur k . On note d'abord que le polynôme $\xi_n^{m-1} = \tilde{\xi}_n^{m-1}$ vérifie (II.3) et que $\|\xi_n^{m-1}\|_{0, \alpha, \Lambda}$ est $\leq cn^{-2m+1-\alpha}$. Puis, supposant connus les polynômes ξ_n^r , $k+1 \leq r \leq m-1$, on pose

$$\xi_n^k = \tilde{\xi}_n^k - \sum_{r=k+1}^{m-1} (d^r \tilde{\xi}_n^k / d\zeta^r)(-1) \xi_n^r.$$

Le polynôme ξ_n^k vérifie les conditions aux limites (II.3) et, de plus,

$$\begin{aligned} \|\xi_n^k\|_{0, \alpha, \Lambda} &\leq \|\tilde{\xi}_n^k\|_{0, \alpha, \Lambda} + \sum_{r=k+1}^{m-1} |(d^r \tilde{\xi}_n^k / d\zeta^r)(-1)| \|\xi_n^r\|_{0, \alpha, \Lambda} \\ &\leq cn^{-2k-\alpha-1} \left(1 + \sum_{r=k+1}^{m-1} |(d^r \tilde{\xi}_n^k / d\zeta^r)(-1)| n^{2(k-r)} \right). \end{aligned}$$

Mais on sait que

$$\begin{aligned} |(d^r \tilde{\xi}_n^k / d\zeta^r)(-1)| &= \frac{|d^{r-k}([(1-\zeta)^m / 2^m] (d^{2k+1} J_{n+1-m}^\alpha / d\zeta^{2k+1})) / d\zeta^{r-k}|}{|(d^{2k+1} J_{n+1-m}^\alpha / d\zeta^{2k+1})(-1)|} \\ &\leq c \sup_{0 \leq s \leq r-k} \frac{|(d^{s+2k+1} J_{n+1-m}^\alpha / d\zeta^{s+2k+1})(-1)|}{|(d^{2k+1} J_{n+1-m}^\alpha / d\zeta^{2k+1})(-1)|}. \end{aligned}$$

On montre par récurrence sur s que, pour tout entier $\beta > -1$,

$$2(\beta + s)(d^s J_n^\beta / d\zeta^s)(-1) = - (n - s + 1)(n + 2\beta + s)(d^{s-1} J_n^\beta / d\zeta^{s-1})(-1),$$

donc que

$$(d^s J_n^\beta / d\zeta^s)(-1) = (-1)^s [\Gamma(\beta + 1) / 2^s \Gamma(\beta + s + 1)] [n(n-1) \dots (n-s+1)] [(n+2\beta+1)(n+2\beta+2) \dots (n+2\beta+s)] J_n^\beta(-1),$$

ce qui implique

$$|(d^r \tilde{\xi}_n^k / d\zeta^r)(-1)| \leq cn^{2(r-k)}.$$

On en déduit que $\|\xi_n^k\|_{0, \alpha, \Lambda}$ est $\leq cn^{-2k-\alpha-1}$.

Finalement, la seconde inégalité de (II.4) est une conséquence immédiate de l'inégalité inverse [BM1, Cor. V.3], vraie pour tout entier $k \geq 0$ et tout réel $s \geq k$,

$$(II.6) \quad \forall \varphi_N \in P_N(\Lambda), \quad \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda} \leq cN^{2(s-k)} \|\varphi_N\|_{k, \alpha, \Lambda}.$$

Ceci nous permet d'estimer les normes des fonctions φ_ℓ^k .

LEMME II.2 : Pour tous entiers ℓ et k , $1 \leq \ell \leq N(m)$, $0 \leq k \leq m-1$, les polynômes φ_ℓ^k vérifient

$$(II.7) \quad |\varphi_\ell^k|_{m, \alpha, \Lambda}^2 + \lambda_\ell \|\varphi_\ell^k\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \leq c\lambda_\ell^{1-(2k+1+\alpha)/2m}.$$

Démonstration : Pour tout polynôme ξ^k vérifiant les conditions aux limites (II.3), en choisissant χ dans (II.2) égal à $\varphi_\ell^k - \xi^k$, on obtient

$$|\varphi_\ell^k|_{m, \alpha, \Lambda}^2 + \lambda_\ell \|\varphi_\ell^k\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \leq |\varphi_\ell^k|_{m, \alpha, \Lambda} |\xi^k|_{m, \alpha, \Lambda} + \lambda_\ell \|\varphi_\ell^k\|_{0, \alpha, \Lambda} \|\xi^k\|_{0, \alpha, \Lambda},$$

d'où

$$(II.8) \quad |\varphi_\ell^k|_{m, \alpha, \Lambda}^2 + \lambda_\ell \|\varphi_\ell^k\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \leq c(|\xi^k|_{m, \alpha, \Lambda}^2 + \lambda_\ell \|\xi^k\|_{0, \alpha, \Lambda}^2).$$

Maintenant, on choisit χ dans (II.1) égal à ψ_ℓ et on applique l'inégalité inverse (II.6), ce qui donne

$$(II.9) \quad \lambda_\ell = |\psi_\ell|_{m, \alpha, \Lambda}^2 \leq c_0 N^{4m};$$

il existe donc un entier $N_\ell \leq N$ tel que

$$c_0(N_\ell - 1)^{4m} < \lambda_\ell \leq c_0 N_\ell^{4m}.$$

On choisit alors ξ^k égal au polynôme $\xi_{N_\ell}^k$ défini dans le Lemme II.1, et on obtient

$$|\varphi_\ell^k|_{m, \alpha, \Lambda}^2 + \lambda_\ell \|\varphi_\ell^k\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \leq c (|\xi_{N_\ell}^k|_{m, \alpha, \Lambda}^2 + c_0 N_\ell^{4m} \|\xi_{N_\ell}^k\|_{0, \alpha, \Lambda}^2) \leq c' N_\ell^{2(2m-2k-1-\alpha)},$$

d'où le résultat.

Considérons enfin un élément quelconque $\Phi_{N,I} = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^{m-1})$ de l'espace $\prod_{r=0}^{m-1} P_N^{0,m}(\Gamma_I)$. On développe chaque polynôme φ^k , $0 \leq k \leq m-1$, dans la base $\{\psi_\ell\}_{1 \leq \ell \leq N(m)}$ de $P_N^{0,m}(\Gamma_I)$

$$(II.10) \quad \varphi^k(y) = \sum_{\ell=1}^{N(m)} \hat{\varphi}_\ell^k \psi_\ell(y), \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Puis on définit le relèvement $Q_{N,I}^m \Phi_{N,I}$ par

$$(II.11) \quad Q_{N,I}^m \Phi_{N,I}(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{N(m)} \hat{\varphi}_\ell^k \varphi_\ell^k(x) \psi_\ell(y)$$

et on vérifie que $T_m Q_{N,I}^m \Phi_{N,I}$ est bien égal à $(\Phi_{N,I}, 0, 0, 0)$. On est maintenant en mesure d'énoncer le premier résultat.

PROPOSITION II.1 : Soit α un nombre réel strictement supérieur à -1 . Pour tout entier $m \geq 1$, il existe un opérateur $Q_{N,J}^m$ de $\prod_{r=0}^{m-1} P_N^{0,m}(\Gamma_J)$ dans $P_N(\Omega)$ tel que, pour tout élément $\Phi_{N,J} = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^{m-1})_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ de $\prod_{r=0}^{m-1} P_N^{0,m}(\Gamma_J)$, on ait

$$(II.12) \quad T_m Q_{N,J}^m \Phi_{N,J} = (\Psi_{N,I}, \Psi_{N,II}, \Psi_{N,III}, \Psi_{N,IV}),$$

où $\Psi_{N,J}$ est égal à $\Phi_{N,J}$ et où $\Psi_{N,K}$ est nul pour $K \neq J$, $K \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et

$$(II.13) \quad \|Q_{N,J}^m \Phi_{N,J}\|_{m, \alpha, \Omega} \leq c \sum_{k=0}^{m-1} N^{2m-2k-1-\alpha} \|\varphi^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J}.$$

Démonstration : Dans le cas $J = I$, le polynôme $Q_{N,I}^m \Phi_{N,I}$ est défini par (II.10) et (II.11). De plus, l'espace $H_\alpha^m(\Omega)$ coïncidant avec l'espace $L_\alpha^2(\Lambda, H_\alpha^m(\Lambda)) \cap H_\alpha^m(\Lambda, L_\alpha^2(\Lambda))$, on a

$$\|Q_{N,I}^m \Phi_{N,I}\|_{m, \alpha, \Omega} \leq c (\|Q_{N,I} \Phi_{N,I}\|_{L_\alpha^2(\Lambda, H_\alpha^m(\Lambda))} + \|Q_{N,I} \Phi_{N,I}\|_{H_\alpha^m(\Lambda, L_\alpha^2(\Lambda))}),$$

d'où

$$\begin{aligned} & \| Q_{N,I}^m \Phi_{N,I} \|_{m, \alpha, \Omega}^2 \\ & \leq c \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{N(m)} |\hat{\phi}_\ell^k|^2 (\| \phi_\ell^k \|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \| \psi_\ell \|_{m, \alpha, \Lambda}^2 + \| \phi_\ell^k \|_{m, \alpha, \Lambda}^2 \| \psi_\ell \|_{0, \alpha, \Lambda}^2). \end{aligned}$$

Du Lemme II.2, on conclut

$$(II.14) \quad \| Q_{N,I}^m \Phi_{N,I} \|_{m, \alpha, \Omega}^2 \leq c \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{N(m)} |\hat{\phi}_\ell^k|^2 \lambda_\ell^{1 - (2k+1+\alpha)/2m},$$

ou encore, d'après (II.9),

$$\| Q_{N,I}^m \Phi_{N,I} \|_{m, \alpha, \Omega}^2 \leq c \sum_{k=0}^{m-1} N^{2(2m-2k-1-\alpha)} \| \phi^k \|_{0, \alpha, \Gamma_I}^2.$$

Remarque II.1 : Bien entendu, on aurait pu définir d'autres relèvements v_N que le polynôme $Q_{N,I}^m \Phi_{N,I}$, par exemple

$$v_N(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{N(m)} \hat{\phi}_\ell^k \xi_{N_\ell}^k(x) \psi_\ell(y)$$

ou

$$v_N(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{N(m)} \hat{\phi}_\ell^k \xi_{N_\ell}^k(x) \psi_\ell(y) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_N^k(x) \phi^k(y);$$

ces polynômes satisfont encore la majoration (II.13). Toutefois on peut déjà noter que le polynôme $Q_{N,I}^m \Phi_{N,I}$ vérifie en plus l'équation

(II.15)

$$\left\{ \begin{aligned} & \forall w_N \in P_N^{0,m}(\Omega), \\ & \int_{\Omega} [(\partial^m v / \partial x^m)(\partial^m w_N / \partial x^m) + (\partial^m v / \partial y^m)(\partial^m w_N / \partial y^m)] \omega_\alpha(x) dx = 0. \end{aligned} \right.$$

De surcroît, le choix que nous avons fait est nécessaire pour la propriété de stabilité démontrée plus loin.

Remarque II.2 : Étant donné un autre entier $M \geq 2m$, on peut également relever $\Phi_{N,I}$ par un polynôme de $P_{M,N}(\Omega)$. Plus précisément, si l'on pose

$$Q_{MN,I}^m \Phi_{N,I}(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_M^k(x) \phi^k(y),$$

on vérifie que $T_m \mathcal{Q}_{MN,I}^m \Phi_{N,I}$ est bien égal à $(\Phi_{N,I}, 0, 0, 0)$ et on a l'estimation

$$(II.16) \quad \|\mathcal{Q}_{MN,I}^m \Phi_{N,I}\|_{m,\alpha,\Omega} \leq c \sup \{M, N\}^{2m} \sum_{k=0}^{m-1} M^{-2k-1-\alpha} \|\varphi^k\|_{0,\alpha,\Gamma_I}.$$

PROPOSITION II.2 : Soit α un nombre réel strictement supérieur à -1 . Pour tout entier $m \geq 1$, pour tout élément

$$\Phi_{N,J} = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^{m-1})_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \in \prod_{r=0}^{m-1} P_N^{0,m}(\Gamma_J)$$

on a

$$(II.17) \quad \|\mathcal{Q}_{N,J}^m \Phi_{N,J}\|_{m,\alpha,\Omega} \leq c \sum_{k=0}^{m-1} m_{,N} \|\varphi^k\|_{m-k-(1+\alpha)/2,\alpha,\Gamma_J}.$$

Démonstration : Si le développement d'un polynôme quelconque φ_N de $P_N^{0,m}(\Lambda)$ s'écrit $\varphi_N = \sum_{\ell=1}^{N(m)} \hat{\varphi}_\ell \psi_\ell$, on a

$$\|\varphi_N\|_{0,\alpha,\Lambda} = \left(\sum_{\ell=1}^{N(m)} \hat{\varphi}_\ell^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad |\varphi_N|_{m,\alpha,\Lambda} = \left(\sum_{\ell=1}^{N(m)} \lambda_\ell \hat{\varphi}_\ell^2 \right)^{1/2}.$$

Par interpolation, on en déduit pour tout réel s , $0 \leq s \leq m$,

$$(II.18) \quad \forall \varphi_N \in P_N^{0,m}(\Lambda), \quad \left(\sum_{\ell=1}^{N(m)} \hat{\varphi}_\ell^2 \lambda_\ell^{s/m} \right)^{1/2} \leq c_{m,N} \|\varphi_N\|_{s,\alpha,\Lambda}.$$

La proposition est une conséquence immédiate de cette inégalité et de (II.14).

Remarque II.3 : Dans le cas où α est < 1 , il faut noter que les normes discrètes intervenant dans la Proposition II.2 correspondent précisément à celles des espaces de Sobolev des Théorèmes I.1 et I.2. De plus, l'estimation (II.17) est optimale par rapport à la définition (I.19) des normes discrètes comme normes de trace d'une fonction définie sur un domaine bidimensionnel : en effet, dans le cas $m = 1$, pour $J = I$, en choisissant v dans (I.19) égal à un prolongement de $\mathcal{Q}_{N,I}^1 \Phi_{N,I}$ et en faisant le changement de variable $t = 1 + x$, on a

$$\begin{aligned} 1,N \|\varphi^0\|_{(1-\alpha)/2,\alpha,\Gamma_I} &\leq c \left(\|(1+x)^{\alpha/2} \mathcal{Q}_{N,I}^1 \Phi_{N,I}\|_{L^2(\Lambda; H_\alpha^1(\Lambda))} \right. \\ &\quad \left. + \|(1+x)^{\alpha/2} \partial \mathcal{Q}_{N,I}^1 \Phi_{N,I} / \partial x\|_{L^2(\Lambda, L_\alpha^2(\Lambda))} \right) \\ &\leq c \|\mathcal{Q}_{N,I}^1 \Phi_{N,I}\|_{1,\alpha,\Omega}; \end{aligned}$$

dans certains cas, on peut étendre ce résultat à m quelconque.

II.2. Théorème principal

Le but de ce paragraphe est de construire explicitement un relèvement, par un polynôme de degré $\leq N$, des traces polynômiales de même degré vérifiant les conditions de compatibilité. On commence par noter que les conditions de raccord des Théorèmes I.1 et I.2, qui sont nécessaires, ne sont pas suffisantes. En effet, pour toute fonction u de $\mathcal{C}^{2(m-1)}(\bar{\Omega})$, en particulier pour tout polynôme, si on note $\Phi = T_m u$, on voit que, en tout coin $\mathbf{a}_J, J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
 (\pm 1)(\partial^{k+r}u/\partial x^k \partial y^r)(\mathbf{a}_J) &= (d^r\phi_J^k/d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J) \\
 &= (-1)^k (d^k\phi_{J+1}^r/d\tau_{J+1}^k)(\mathbf{a}_J) \quad \text{si } J \text{ est impair,}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\pm 1)(\partial^{k+r}u/\partial x^r \partial y^k)(\mathbf{a}_J) &= (d^r\phi_J^k/d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J) \\
 &= (-1)^k (d^k\phi_{J+1}^r/d\tau_{J+1}^k)(\mathbf{a}_J) \quad \text{si } J \text{ est pair,}
 \end{aligned}$$

pour tout couple (k, r) tel que $0 \leq k, r \leq m - 1$.

On est amené à introduire pour tout entier $m \geq 1$ l'espace $B_N^m(\partial\Omega)$

(II.19) $B_N^m(\partial\Omega)$

$$= \left\{ \Phi_N \in \prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{m-1} P_N(\Gamma_J) \text{ vérifiant } (C)_{k,r}, 0 \leq k, r \leq m - 1 \right\}.$$

Dans tout ce qui suit, on supposera

(II.20) $N \geq 2m$.

On commence par établir un résultat d'inégalité inverse.

LEMME II.3 : *Tout polynôme φ_N de $P_N(\Lambda)$ vérifie l'inégalité*

(II.21) $\forall \zeta \in \bar{\Lambda}, |\varphi_N(\zeta)| \leq cN^{\sup\{1+\alpha, 1/2\}} \|\varphi_N\|_{0,\alpha,\Lambda}.$

Démonstration : On décompose le polynôme φ_N dans la base $(J_n^\alpha)_{0 \leq n \leq N}$:

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^N \hat{\varphi}_n J_n^\alpha.$$

On a donc pour tout ζ dans $\bar{\Lambda}$

$$\begin{aligned}
 |\varphi_N(\zeta)| &\leq \sum_{n=0}^N |\hat{\varphi}_n| |J_n^\alpha(\zeta)| \\
 &\leq \left(\sum_{n=0}^N \hat{\varphi}_n^2 \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^N |J_n^\alpha(\zeta)|^2 / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \|\varphi_N\|_{0,\alpha,\Lambda} \left(\sum_{n=0}^N |J_n^\alpha(\zeta)|^2 / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Or on sait [H, Chap. 22] que le polynôme J_n^α est borné par $cn^{\sup\{\alpha, -1/2\}}$. En utilisant cette estimation, la formule (I.17) et la formule de Stirling, on obtient

$$\left(\sum_{n=0}^N |J_n^\alpha(\xi)|^2 / \|J_n^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \right)^{1/2} \leq c \left(\sum_{n=0}^N n^{\sup\{2\alpha + 1, 0\}} \right)^{1/2} \leq c' N^{\sup\{1 + \alpha, 1/2\}}.$$

Remarque II.4 : Il est facile de voir que la majoration (II.21) est optimale, en considérant par exemple, pour $\alpha \geq -1/2$, le polynôme $\varphi_N = \sum_{n=1}^N J_n^\alpha / \|J_n^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}$, dont la norme $\|\varphi_N\|_{0, \alpha, \Lambda}$ est égale à $N^{1/2}$ et qui vérifie

$$\begin{aligned} |\varphi_N(+1)| &= (1/\Gamma(\alpha + 1)) \sum_{n=1}^N (\Gamma(n + \alpha + 1)/n! \|J_n^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}) \\ &\geq c \sum_{n=1}^N n^{\alpha + 1/2} \geq c' N^{\alpha + 3/2}. \end{aligned}$$

On considère maintenant un élément $\Phi_N = (\varphi_J^0, \varphi_J^1, \dots, \varphi_J^{m-1})_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ de $B_N^m(\partial\Omega)$. En utilisant les polynômes ξ_N^k , $0 \leq k \leq m-1$, introduits dans le Lemme II.1, on lui associe alors un autre élément $\tilde{\Phi}_N = (\tilde{\varphi}_J^0, \tilde{\varphi}_J^1, \dots, \tilde{\varphi}_J^{m-1})_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ de $B_N^m(\partial\Omega)$ par

$$(II.22) \left\{ \begin{aligned} \tilde{\varphi}_I^k(y) &= \varphi_I^k(y) - \sum_{r=0}^{m-1} [(d^r \varphi_I^k / d\tau_I^r)(\mathbf{a}_0) \xi_N^r(-y) \\ &\quad + (-1)^r (d^r \varphi_I^k / d\tau_I^r)(\mathbf{a}_I) \xi_N^r(y)] \\ \tilde{\varphi}_{II}^k(x) &= \varphi_{II}^k(x) - \sum_{r=0}^{m-1} [(d^r \varphi_{II}^k / d\tau_{II}^r)(\mathbf{a}_I) \xi_N^r(x) \\ &\quad + (-1)^r (d^r \varphi_{II}^k / d\tau_{II}^r)(\mathbf{a}_{II}) \xi_N^r(-x)] \\ \tilde{\varphi}_{III}^k(y) &= \varphi_{III}^k(y) - \sum_{r=0}^{m-1} [(d^r \varphi_{III}^k / d\tau_{III}^r)(\mathbf{a}_{II}) \xi_N^r(y) \\ &\quad + (-1)^r (d^r \varphi_{III}^k / d\tau_{III}^r)(\mathbf{a}_{III}) \xi_N^r(-y)] \\ \tilde{\varphi}_{IV}^k(x) &= \varphi_{IV}^k(x) - \sum_{r=0}^{m-1} [(d^r \varphi_{IV}^k / d\tau_{IV}^r)(\mathbf{a}_{III}) \xi_N^r(-x) \\ &\quad + (-1)^r (d^r \varphi_{IV}^k / d\tau_{IV}^r)(\mathbf{a}_{IV}) \xi_N^r(x)], \end{aligned} \right.$$

pour $0 \leq k \leq m-1$. On définit aussi les éléments

$$\tilde{\Phi}_{N,J} = (\tilde{\varphi}_J^0, \tilde{\varphi}_J^1, \dots, \tilde{\varphi}_J^{m-1}) \in \prod_{r=0}^{m-1} P_N^0{}^m(\Gamma_J), \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

L'opérateur de relèvement Q_N^m est construit par la formule

(II.23)

$$\begin{aligned}
 Q_N^m \Phi_N(\mathbf{x}) &= \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} Q_{N,J}^m \tilde{\Phi}_{N,J}(\mathbf{x}) \\
 &+ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^{k+r} [(d^r \varphi_I^k / d\tau_I^r)(\mathbf{a}_I) \xi_N^r(y) \xi_N^k(x) \\
 &\quad + (d^r \varphi_{II}^k / d\tau_{II}^r)(\mathbf{a}_{II}) \xi_N^r(-x) \xi_N^k(y) \\
 &\quad + (d^r \varphi_{III}^k / d\tau_{III}^r)(\mathbf{a}_{III}) \xi_N^r(-y) \xi_N^k(-x) \\
 &\quad + (d^r \varphi_{IV}^k / d\tau_{IV}^r)(\mathbf{a}_{IV}) \xi_N^r(x) \xi_N^k(-y)] .
 \end{aligned}$$

On vérifie aisément en utilisant les propriétés des opérateurs $Q_{N,J}^m$, $J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et les conditions $(C)_{k,r}$, $0 \leq k, r \leq m-1$, que $T_m Q_N^m \Phi_N$ est bien égal à Φ_N ; par exemple, on a

$$\begin{aligned}
 (\partial^k Q_N^m \Phi_N / \partial n_I^k)(-1, y) &= \tilde{\varphi}_I^k(y) + \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r [(d^r \varphi_O^k / d\tau_O^r)(\mathbf{a}_O) \xi_N^r(-y) \\
 &\quad + (d^r \varphi_I^k / d\tau_I^r)(\mathbf{a}_I) \xi_N^r(y)] = \varphi_I^k(y) .
 \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant, qui constitue le résultat principal de notre étude. Une version légèrement différente a été établie dans [BM1, Prop. V.1] pour le cas particulier $m = 1$.

THÉORÈME II.1 : *Soit α un nombre réel strictement compris entre -1 et 1 . Pour tout entier $m \geq 1$, il existe un opérateur Q_N^m de $B_N^m(\partial\Omega)$ dans $P_N(\Omega)$ tel que, pour tout élément $\Phi_N = (\varphi_{J^0}, \varphi_{J^1}, \dots, \varphi_{J^{m-1}})_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ de $B_N^m(\partial\Omega)$, on ait*

$$(II.24) \quad T_m Q_N^m \Phi_N = \Phi_N ,$$

et

$$(II.25) \quad \|Q_N^m \Phi_N\|_{m, \alpha, \Omega} \leq c \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} N^{2m-2k-1-\alpha-\inf\{0, 1/2+\alpha\}} \|\varphi_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J} .$$

Démonstration : Il reste à vérifier l'inégalité (II.25). Des formules (II.22) et (II.23), en utilisant la Proposition II.1, on déduit la majoration

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_N^m \Phi_N\|_{m, \alpha, \Omega} &\leq c \left[\sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} (N^{2m-2k-1-\alpha} \|\tilde{\varphi}_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^{m-1} |(d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J)| \|\xi_N^k(x) \xi_N^r(y)\|_{m, \alpha, \Omega} \right] \\ &\leq c \left[\sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} (N^{2m-2k-1-\alpha} \|\varphi_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^{m-1} |(d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J)| \right. \\ &\quad \left. (\|\xi_N^k(x) \xi_N^r(y)\|_{m, \alpha, \Omega} + N^{2m-2k-1-\alpha} \|\xi_N^r\|_{0, \alpha, \Lambda}) \right]. \end{aligned}$$

D'après le Lemme II.1 et comme l'espace $H_\alpha^\ell(\Lambda)$, $1 \leq \ell \leq m$, coïncide avec l'espace d'interpolation d'indice $1 - \ell/m$ entre l'espace $H_\alpha^m(\Lambda)$ et l'espace $L_\alpha^2(\Lambda)$ [M, § 3], on a

$$\|d^\ell \xi_N^k / d\xi^\ell\|_{0, \alpha, \Lambda} \leq c N^{2\ell-2k-1-\alpha},$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\xi_N^k(x) \xi_N^r(y)\|_{m, \alpha, \Omega} &\leq c \sup_{\ell+s=m} \|d^\ell \xi_N^k / d\xi^\ell\|_{0, \alpha, \Lambda} \|d^s \xi_N^r / d\xi^s\|_{0, \alpha, \Lambda} \\ &\leq c' N^{2m-2k-2r-2-2\alpha}. \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois le Lemme II.1, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_N^m \Phi_N\|_{m, \alpha, \Omega} &\leq c \left[\sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} (N^{2m-2k-1-\alpha} \|\varphi_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^{m-1} |(d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J)| (N^{2m-2k-2r-2-2\alpha} \right. \\ &\quad \left. + N^{2m-2k-1-\alpha} N^{-2r-1-\alpha}) \right], \end{aligned}$$

d'où

$$(II.26) \quad \left\{ \begin{aligned} \|\mathcal{Q}_N^m \Phi_N\|_{m, \alpha, \Omega} &\leq c \left[\sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} (N^{2m-2k-1-\alpha} \|\varphi_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^{m-1} N^{2m-2k-2r-2-2\alpha} |(d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J)| \right]. \end{aligned} \right.$$

L'inégalité inverse du Lemme II.3 et l'inégalité inverse habituelle (II.6) impliquent

$$|(d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J)| \leq c N^{\sup\{1 + \alpha, 1/2\}} \|d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r\|_{0, \alpha, \Lambda} \leq c' N^{\sup\{1 + \alpha, 1/2\}} N^{2r} \|\varphi_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J},$$

d'où

$$\|Q_N^m \Phi_N\|_{m, \alpha, \Omega} \leq c \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} N^{\sup\{2m - 2k - 1 - \alpha, 2m - 2k - 3/2 - 2\alpha\}} \|\varphi_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J}$$

ce qui conclut la démonstration du théorème.

Remarque II.5 : On pourrait également écrire une estimation analogue à celle de la Proposition II.2, en construisant un opérateur légèrement différent de l'opérateur Q_N^m . Toutefois, ceci nous obligerait à introduire les normes discrètes d'interpolation entre l'espace $P_N(\Lambda)$ tout entier muni de la norme $\|\cdot\|_{m, \alpha, \Lambda}$ et ce même espace muni de la norme $\|\cdot\|_{0, \alpha, \Lambda}$. Nous n'en avons pas vu l'intérêt car ceci n'améliore en rien les résultats qui suivent.

Remarque II.6 : Soit $a(., .)$ une forme bilinéaire continue sur $H_\alpha^m(\Omega) \times H_{\alpha, 0}^m(\Omega)$ et elliptique sur $H_{\alpha, 0}^m(\Omega)$. Pour tout élément Φ_N de $B_N^m(\partial\Omega)$, le problème consistant à trouver un polynôme u_N de $P_N(\Omega)$ tel que

$$(II.27) \quad \begin{cases} \forall v_N \in P_N^{0, m}(\Omega), & a(u_N, v_N) = 0, \\ T_m u_N = \Phi_N & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution unique, qui vérifie également l'estimation

$$(II.28) \quad \|u_N\|_{m, \alpha, \Omega} \leq c \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} N^{2m - 2k - 1 - \alpha - \inf\{0, 1/2 + \alpha\}} \|\varphi_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J}.$$

Pour l'étude de certaines méthodes, il s'avère utile d'avoir un résultat de relèvement par un polynôme de degrés différents par rapport à chaque variable. Pour cela, étant donné un autre entier $M \geq 2m$, on pose

$$(II.29) \quad B_{MN}^m(\partial\Omega) = \left\{ \Phi_N \in \prod_{k=0}^{m-1} P_N(\Gamma_I) \times P_M(\Gamma_{II}) \times P_N(\Gamma_{III}) \times P_M(\Gamma_{IV}) \right. \\ \left. \text{vérifiant } (C)_{k, r}, \quad 0 \leq k, r \leq m - 1 \right\}.$$

On démontre la

PROPOSITION II.3 : *Soit α un nombre réel strictement supérieur à -1 . Pour tout entier $m \geq 1$, il existe un opérateur Q_{MN}^m de $B_{MN}^m(\partial\Omega)$ dans $P_{M, N}(\Omega)$ tel que, pour tout élément $\Phi_{MN} = (\varphi_J^0, \varphi_J^1, \dots, \varphi_J^{m-1})_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ de $B_{MN}^m(\partial\Omega)$, on ait*

$$(II.30) \quad T_m Q_{MN}^m \Phi_{MN} = \Phi_{MN},$$

et

$$\begin{aligned}
 \text{(II.31)} \quad & \| Q_{MN}^m \Phi_{MN} \|_{m, \alpha, \Omega} \\
 & \leq c \sup \{M, N\}^{2m} \sum_{k=0}^{m-1} (M^{-2k-1-\alpha} N^{-\inf\{0, 1/2+\alpha\}} \| \phi_J^k \|_{0, \alpha, \Gamma_J} \\
 & \quad + N^{-2k-1-\alpha} M^{-\inf\{0, 1/2-\alpha\}} \| \phi_{II}^k \|_{0, \alpha, \Gamma_{II}} \\
 & \quad + M^{-2k-1-\alpha} N^{-\inf\{0, 1/2+\alpha\}} \| \phi_{III}^k \|_{0, \alpha, \Gamma_{III}} \\
 & \quad + N^{-2k-1-\alpha} M^{-\inf\{0, 1/2+\alpha\}} \| \phi_{IV}^k \|_{0, \alpha, \Gamma_{IV}}) .
 \end{aligned}$$

Démonstration : Comme dans (II.22), on pose

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}_J^k(x_J) = \varphi_J^k(x_J) - \sum_{r=0}^{m-1} [(d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_{J-1}) \xi_L^r(-x_J) \\
 + (-1)^r (d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J) \xi_L^r(x_J)] ,
 \end{aligned}$$

avec L égal à N si J est impair et à M si J est pair, et le couple (x_J, y_J) est égal à $(\pm y, \pm x)$ si J est impair et à $(\pm x, \pm y)$ si J est pair. Puis, suivant (II.23), on définit

$$\begin{aligned}
 Q_{MN}^m \Phi_{MN}(\mathbf{x}) \\
 = Q_{MN, I}^m \tilde{\Phi}_{N, I}(\mathbf{x}) + Q_{MN, II}^m \tilde{\Phi}_{M, II}(\mathbf{x}) \\
 + Q_{MN, III}^m \tilde{\Phi}_{N, III}(\mathbf{x}) + Q_{MN, IV}^m \tilde{\Phi}_{M, IV}(\mathbf{x}) \\
 + \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^{k+r} [(d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J) \xi_L^r(x_J) \xi_{M+N-L}^k(y_J)] ,
 \end{aligned}$$

où $Q_{MN, II}^m$, $Q_{MN, III}^m$ et $Q_{MN, IV}^m$ sont construits par analogie avec l'opérateur $Q_{MN, I}^m$ de la Remarque II.2. Les mêmes arguments que dans la démonstration précédente conduisent alors à la majoration (II.31).

II.3. Application à un résultat d'approximation

Soit $\{\xi_j, 1 \leq j \leq N - 2m + 1\}$ un ensemble de $N - 2m + 1$ points distincts de Λ , et soit i_N l'opérateur d'interpolation généralisé défini comme suit : pour toute fonction v de $\mathcal{C}^{m-1}(\bar{\Lambda})$, $i_N v$ appartient à $P_N(\Lambda)$ et vérifie

$$\text{(II.32)} \quad \begin{cases} i_N v(\xi_j) = v(\xi_j), & 1 \leq j \leq N - 2m + 1, \\ (d^k(i_N v) / d\xi^k)(\pm 1) = (d^k v / d\xi^k)(\pm 1), & 0 \leq k \leq m - 1. \end{cases}$$

L'opérateur i_N peut être par exemple défini par l'interpolation aux points de Gauss dans le cas $m = 0$, aux points de Gauss-Lobatto dans le cas $m = 1$; on donnera plus tard un exemple d'opérateur i_N pour m quelconque. On notera encore i_N les opérateurs d'interpolation définis sur les côtés $\Gamma_j, J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, par translation et rotation.

On peut énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION II.4 : Soit α un nombre réel strictement supérieur à -1 . Pour toute fonction v de $H_\alpha^m(\Omega)$ tel que $T_m v$ appartienne à $\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{m-1} \mathcal{C}^{m-1}(\bar{\Gamma}_J)$, pour tout polynôme v_N de $P_N(\Omega)$, il existe un polynôme $R_N^m v$ de $P_N(\Omega)$ tel que

$$(II.33) \quad \begin{cases} T_m R_N^m v(\pm 1, \xi_j) = v(\pm 1, \xi_j) \text{ et } T_m R_N^m v(\xi_j, \pm 1) = v(\xi_j, \pm 1), \\ \hspace{15em} 1 \leq j \leq N - 2m + 1, \\ (\partial^{k+r} R_N^m v / \partial x^k \partial y^r) / (\mathbf{a}_J) = (\partial^{k+r} v / \partial x^k \partial y^r) (\mathbf{a}_J), \\ \hspace{15em} 1 \leq k, r \leq m - 1, J \in \mathbb{Z} / 4\mathbb{Z}, \end{cases}$$

et que l'estimation suivante soit satisfaite

$$(II.34) \quad \begin{cases} \|v - R_N^m v\|_{m, \alpha, \Omega} \\ \leq \|v - v_N\|_{m, \alpha, \Omega} + c \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} N^{2m-2k-1-\alpha-\inf\{0, 1/2+\alpha\}} \\ (\|\partial^k v / \partial n_J^k - \partial^k v_N / \partial n_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J} + \|\partial^k v / \partial n_J^k - i_N(\partial^k v / \partial n_J^k)\|_{0, \alpha, \Gamma_J}). \end{cases}$$

Démonstration : Il suffit de choisir $R_N^m v$ égal à la somme de v_N et du relèvement de

$$(i_N v |_{\Gamma_j} - v_N |_{\Gamma_j} i_N(\partial v / \partial n_j) - \partial v_N / \partial n_{j, \dots}, i_N(\partial^{m-1} v / \partial n_j^{m-1}) - \partial^{m-1} v_N / \partial n_j^{m-1})_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$$

par l'opérateur Q_N^m . La condition (II.33) résulte de (II.24) et de (II.32), tandis que l'estimation (II.25) implique

$$\begin{aligned} \|v - R_N^m v\|_{m, \alpha, \Omega} &\leq \|v - v_N\|_{m, \alpha, \Omega} \\ &+ c \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} N^{2m-2k-1-\alpha-\inf\{0, 1/2+\alpha\}} \\ &\|i_N(\partial^k v / \partial n_J^k) - \partial^k v_N / \partial n_J^k\|_{0, \alpha, \Gamma_J}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque II.7 : Si le polynôme v_N vérifie

$$(II.35) \quad (\partial^{k+r} v_N) / (\partial x^k \partial y^r)(\mathbf{a}_J) = (\partial^{k+r} v / \partial x^k \partial y^r)(\mathbf{a}_J), \quad 1 \leq k, r \leq m-1, \quad J \in \mathbb{Z} / 4\mathbb{Z},$$

on déduit de l'inégalité (II.26) que la majoration (II.34) peut être remplacée par

$$(II.36) \quad \left\{ \begin{aligned} \|v - R_N^m v\|_{m, \alpha, \Omega} &\leq \|v - v_N\|_{m, \alpha, \Omega} + c \sum_{J \in \mathbb{Z} / 4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} N^{2m-2k-1-\alpha} \\ &\quad (\| \partial^k v / \partial n_J^k - \partial^k v_N / \partial n_J^k \|_{0, \alpha, \Gamma_J} + \| \partial^k v / \partial n_J^k - i_N(\partial^k v / \partial n_J^k) \|_{0, \alpha, \Gamma_J}). \end{aligned} \right.$$

Quelles sont les applications de ce théorème ? Nous allons en détailler une, dans un cadre relativement général : l'approximation par collocation d'un problème elliptique avec conditions aux limites de Dirichlet non homogènes. Tout d'abord on choisit comme $\xi_j, 1 \leq j \leq N - 2m + 1$, les zéros du polynôme $J_{N-2m+1}^{\alpha+m}$ (qui sont aussi les zéros du polynôme $d^m J_{N-2m+1}^{\alpha} / d\xi^m$ par (I.16)). On sait alors [BM3, Section II] qu'il existe des poids positifs $\rho_j, 1 \leq j \leq N - 2m + 1$, et $\rho_k^*, 0 \leq k \leq m - 1$, tels que, si on approche l'intégrale $\int_{-1}^1 U(\xi) \rho_{\alpha}(\xi) d\xi$ par la formule de quadrature

$$(II.37) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{J}_N^m(U) &= \sum_{j=1}^{N-2m+1} U(\xi_j) \rho_j \\ &\quad \sum_{k=0}^{m-1} [(d^k U / d\xi^k)(-1) + (-1)^k (d^k U / d\xi^k)(+1)] \rho_k^*, \end{aligned} \right.$$

on ait égalité pour tout U dans $P_{2N+2m-1}(\Lambda)$.

On sait [BM1, Cor. IV.2] [BM3, Appendix A] construire un opérateur $\pi_{N, \alpha}^m$ de $H_{\alpha}^m(\Lambda)$ sur $P_N(\Lambda)$ tel que, pour toute fonction φ de $H_{\alpha}^{\sigma}(\Lambda), \sigma \geq m, (d^k \pi_{N, \alpha}^m \varphi / d\xi^k)(\pm 1)$ soit égal à $(d^k \varphi / d\xi^k)(\pm 1), 0 \leq k \leq m - 1$, et que

$$(II.38) \quad \|\varphi - \pi_{N, \alpha}^m \varphi\|_{m, \alpha, \Lambda} + N^m \|\varphi - \pi_{N, \alpha}^m \varphi\|_{0, \alpha, \Lambda} \leq c N^{m-\sigma} \|\varphi\|_{\sigma, \alpha, \Lambda}.$$

On démontre également que, pour toute fonction φ de $H_{\alpha}^{\sigma}(\Lambda), \sigma \geq m,$

$$(II.39) \quad \|\varphi - i_N \varphi\|_{0, \alpha, \Lambda} \leq c N^{1/2-\sigma} \|\varphi\|_{\sigma, \alpha, \Lambda}.$$

On peut alors appliquer la majoration (II.36) et, en choisissant v_N égal à $(\pi_{N, \alpha}^m \otimes \pi_{N, \alpha}^m) v$, on montre que, pour toute fonction v de

$H_\alpha^\sigma(\Omega)$ telle que $T_m v$ appartienne à $\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{m-1} H_\alpha^{\tau_k}(\Gamma_J)$,

$$(II.40) \quad \left\{ \begin{aligned} \|v - R_N^m v\|_{m, \alpha, \Omega} &\leq c \left(N^{m-\sigma} \|v\|_{\sigma, \alpha, \Omega} \right. \\ &\left. + \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} N^{2m-2k-1/2-\alpha-\tau_k} \|\partial^k v / \partial n_J^k\|_{\tau_k, \alpha, \Gamma_J} \right). \end{aligned} \right.$$

Exemple : Supposons que l'on ait à approcher le problème suivant, pour un entier $m \geq 1$:

$$(II.41) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial^k u / \partial n_J^k = \varphi_J^k & \text{sur } \Gamma_J, \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

On suppose que la distribution f est dans le dual de l'espace $H_{\alpha,0}^m(\Omega)$ et que l'élément $\Phi = (\varphi_J^0, \varphi_J^1, \dots, \varphi_J^{m-1})_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ est dans

$$\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{m-1} H_\alpha^{m-k-(1+\alpha)/2}(\Gamma_J) \cap \mathcal{C}^{m-1}(\bar{\Gamma}_J)$$

et vérifie les conditions aux limites $(C)_{k,r}$ pour tout couple (k,r) tel que $0 \leq k, r \leq m-1$. Le problème (II.41) admet alors la formulation variationnelle suivante : trouver u dans $H_\alpha^m(\Omega)$, avec $u - u_b$ dans $H_{\alpha,0}^m(\Omega)$, tel que

$$(II.42) \quad \forall v \in H_{\alpha,0}^m(\Omega), \quad a_{m,\alpha}(u, v) = \langle f, v \rangle,$$

où u_b est une fonction de $H_\alpha^m(\Omega)$ telle que $T_m u_b$ soit égal à Φ , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H_{\alpha,0}^m(\Omega)$ et son dual et la forme bilinéaire $a_{m,\alpha}(\cdot, \cdot)$ est définie sur $H_\alpha^m(\Omega) \times H_{\alpha,0}^m(\Omega)$ par

$$(II.43) \quad a_{m,\alpha}(u, v) = \begin{cases} \int_\Omega \Delta^{m/2} u \cdot \Delta^{m/2}(v \omega_\alpha) \, dx & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \int_\Omega \nabla(\Delta^{(m-1)/2} u) \cdot \nabla(\Delta^{(m-1)/2}(v \omega_\alpha)) \, dx & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

La forme $a_{m,\alpha}(\cdot, \cdot)$ est bien sûr continue sur $H_\alpha^m(\Omega) \times H_{\alpha,0}^m(\Omega)$. On sait qu'elle est elliptique sur $H_{\alpha,0}^m(\Omega)$, pour tout m lorsque α est nul, et pour tout $\alpha, -1 < \alpha < 1$, lorsque m est égal à 1 [BM1, Lemma III.5] ou 2 [BCoM].

Les points $\xi_j, 1 \leq j \leq N-2m+1$, étant définis comme précédemment, on pose $\xi_0 = -1, \xi_{N-2m+2} = +1$, et on définit la grille

$$(II.44) \quad \Xi_N = \{(\xi_j, \xi_\ell), 0 \leq j, \ell \leq N-2m+2\};$$

on approche alors l'équation de la façon suivante : on cherche un polynôme u_N de $P_N(\Lambda)$ tel que

(II.45)

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u_N(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Xi_N \cap \Omega, \\ (\partial^k u_N / \partial n_J^k)(\mathbf{x}) = \varphi_J^k(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Xi_N \cap \Gamma_J, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, 0 \leq k \leq m-1, \\ (\partial^{k+r} u_N / \partial n_J^k \partial \tau_J^r)(\mathbf{a}_J) = (d^r \varphi_J^k / d\tau_J^r)(\mathbf{a}_J), & J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, 0 \leq k, r \leq m-1. \end{cases}$$

Ce problème admet la formulation variationnelle suivante : trouver u_N dans $P_N(\Omega)$, avec $u_N - R_N^m u$ dans $P_N^{0,m}(\Omega)$, tel que

(II.46) $\forall v_N \in P_N^{0,m}(\Omega), \quad a_{N,m,\alpha}(u_N, v_N) = \langle f, v_N \rangle_N,$

avec le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ défini sur $\mathcal{C}^0(\Omega) \times P_N^{0,m}(\Omega)$ par

(II.47)

$$\langle f, v_N \rangle_N = (\mathfrak{J}_N^m \otimes \mathfrak{J}_N^m)(f v_N) = \sum_{j=1}^{N-2m+1} \sum_{\ell=1}^{N-2m+1} f(\xi_j, \xi_\ell) v_N(\xi_j, \xi_\ell) \rho_j \rho_\ell,$$

et la forme $a_{N,m,\alpha}(\cdot, \cdot)$ définie sur $\mathcal{C}^{2m}(\Omega) \times P_N^{0,m}(\Omega)$ par

(II.48) $a_{N,m,\alpha}(u, v_N) = \langle (-\Delta)^m u, v_N \rangle_N.$

Lorsque m est égal à 1 [BM1, Lemma V.2] ou 2 [BCoM], on sait que la forme $a_{N,m,\alpha}(\cdot, \cdot)$ est continue sur le produit $P_N(\Lambda) \times P_N^{0,m}(\Lambda)$ (chacun des espaces étant muni de la norme $\|\cdot\|_{m,\alpha,\Omega}$), de norme indépendante de N , et vérifie la propriété d'ellipticité

(II.49) $\forall v_N \in P_N^{0,m}(\Omega), \quad a_{N,m,\alpha}(v_N, v_N) \geq c N^{1-m} \|v_N\|_{m,\alpha,\Omega}^2.$

On en déduit que le problème (II.45) admet une solution unique dans $P_N(\Omega)$. Finalement, grâce à la majoration (II.40), si la solution u du problème (II.41) appartient à $H_\alpha^\sigma(\Omega)$, $\sigma \geq 2m$, si la donnée f est dans $H_\alpha^\rho(\Omega)$, $\rho \geq 2$, et si la donnée au bord Φ est dans $\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{m-1} H_\alpha^{\tau_k}(\Gamma_J)$,

$\tau_k \geq 1$ on obtient la majoration d'erreur

(II.50)
$$\left\{ \begin{aligned} \|u - u_N\|_{m,\alpha,\Omega} &\leq c N^{m-1} \left(N^{m-\sigma} \|u\|_{\sigma,\alpha,\Omega} + N^{1-\rho} \|f\|_{\rho,\alpha,\Omega} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} N^{2m-2k-1/2-\alpha-\tau_k} \|\varphi_J^k\|_{\tau_k,\alpha,\Gamma_J} \right). \end{aligned} \right.$$

III. APPLICATION AU CALCUL DE LA PRESSION PAR COLLOCATION SPECTRALE

Dans le carré $\Omega =]-1, 1[^2$, on considère le problème de Stokes consistant à trouver une vitesse \mathbf{u} et une pression p telles que

$$(III.1) \quad \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega; \end{cases}$$

dans ces équations, la viscosité ν est un paramètre > 0 donné et \mathbf{f} représente une densité de forces volumiques. On ajoute à ce système la condition aux limites que l'on prend homogène pour simplifier

$$(III.2) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega$$

(nous référons à [BCMM] pour le traitement de la condition aux limites non homogène). Il est bien connu [GR, Chapter 1, § 5] [BCaM, Section II] que ce problème admet les formulations variationnelles suivantes pour α nul et α égal à $-1/2$. Trouver (\mathbf{u}, p) dans $H^1_{\alpha,0}(\Omega)^2 \times L^2_{\alpha}(\Omega)$ tel que

$$(III.3) \quad \begin{cases} \forall \mathbf{w} \in H^1_{\alpha,0}(\Omega)^2, \\ \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{w} \omega_{\alpha}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \text{div} (\mathbf{w} \omega_{\alpha}) p \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{\alpha}, \\ \forall q \in L^2_{\alpha}(\Omega), \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u}) q \omega_{\alpha}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \end{cases}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha}$ désigne le produit de dualité entre $H^1_{\alpha,0}(\Omega)^2$ et son dual. On en déduit que, pour \mathbf{f} dans le dual de $H^1_{\alpha,0}(\Omega)^2$, il admet une solution unique (\mathbf{u}, p) dans $H^1_{\alpha,0}(\Omega)^2 \times L^2_{\alpha}(\Omega)$ vérifiant $\int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \omega_{\alpha}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$.

Nous allons étudier deux discrétisations différentes de ce problème dans le cadre suivant. Soit N un entier fixé ≥ 4 . On considère deux espaces de polynômes X_N et M_N tels que

$$(III.4) \quad P_N^{0,1}(\Omega)^2 \subset X_N \subset P_{N+1}^{0,1}(\Omega)^2 \quad \text{et} \quad M_N \subset P_N(\Omega).$$

On introduit ensuite trois ensembles finis de points contenus dans $\bar{\Omega}$, que l'on note Ξ_{N_x} , Ξ_{N_y} et Ξ'_N . Pour $\mathbf{f} = (f, g)$ donné maintenant dans $(\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}))^2$, le problème de collocation consiste à trouver un couple (\mathbf{u}_N, p_N) dans $X_N \times M_N$, $\mathbf{u}_N = (u_N, v_N)$, tel que

$$(III.5) \quad \begin{cases} -\nu (\Delta u_N)(\mathbf{x}) + (\partial p_N / \partial x)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Xi_{N_x}, \\ -\nu (\Delta v_N)(\mathbf{x}) + (\partial p_N / \partial y)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Xi_{N_y}, \\ (\text{div } \mathbf{u}_N)(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Xi'_N. \end{cases}$$

Suivant la théorie de [B], une condition de compatibilité entre les espaces X_N et M_N est qu'il existe une constante $\beta_N > 0$ telle que

$$(III.6) \quad \forall q_N \in M_N, \quad \exists \mathbf{w}_N \in X_N / b_N(\mathbf{w}_N, q_N) \geq \beta_N \|\mathbf{w}_N\|_{1, \alpha, \Omega} \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega},$$

où la forme bilinéaire b_N est soit l'application :

$$(\mathbf{w}, q) \rightarrow - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w} \omega_{\alpha}) q \, dx,$$

soit une approximation de cette forme obtenue en remplaçant l'intégrale par une formule de quadrature numérique ; elle apparaît dans la formulation variationnelle du problème discret (III.5). La condition (III.6) est nécessaire pour que le problème discret soit bien posé.

On appelle mode parasite pour la pression tout polynôme q_N de $P_N(\Omega)$ tel que

$$(III.7) \quad \forall \mathbf{w}_N \in X_N, \quad b_N(\mathbf{w}_N, q_N) = 0,$$

et on note Z_N le sous-espace vectoriel formé par ces modes ; bien entendu, l'espace M_N devra être contenu dans un supplémentaire de Z_N pour que les espaces X_N et M_N soient compatibles.

Suivant la terminologie de H. Vandeven [V], on appelle suite de modes faiblement parasites toute suite $(q_N)_N$ telle que q_N appartienne à $P_N(\Omega)$ et que

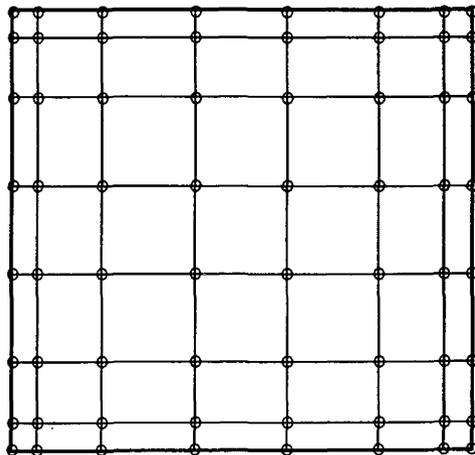
$$(III.8) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{\mathbf{w}_N \in X_N} \frac{b_N(\mathbf{w}_N, q_N)}{\|\mathbf{w}_N\|_{1, \alpha, \Omega} \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega}} = 0;$$

l'existence d'une telle suite, avec q_N appartenant à M_N , empêche la constante β_N d'être minorée par une constante strictement positive indépendante de N . Dans ce qui suit, nous allons nous efforcer d'obtenir des minoration optimales pour β_N .

III.1. Algorithme à une seule grille

Cet algorithme, le plus simple a priori, a été étudié successivement dans les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = -1/2$, pour le problème de Stokes et les équations de Navier-Stokes, avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes ou non homogènes [BMM] [BCaM] [BCMM]. Nous référons à [Mé] pour des résultats numériques dans le cas des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles.

Dans ce paragraphe, α est soit nul soit égal à $-1/2$. On désigne par ξ_j^{α} , $0 \leq j \leq N$, les zéros du polynôme $(1 - \zeta^2) J_N^{\alpha}$, rangés par ordre

Figure III.1. — La grille Ξ_N^α pour $N = 7$ dans le cas $\alpha = 0$.

croissant, et on rappelle [DR, § 2.7] qu'il existe des poids $\rho_j^\alpha > 0$, $0 \leq j \leq N$, tels que la formule de quadrature de Gauss-Lobatto

$$(III.9) \quad \int_{-1}^1 U(\zeta) \rho_\alpha(\zeta) d\zeta \approx \sum_{j=0}^N U(\xi_j^\alpha) \rho_j^\alpha$$

soit exacte sur $P_{2N-1}(\Lambda)$. On définit la grille

$$(III.10) \quad \Xi_N^\alpha = \{(\xi_j^\alpha, \xi_\ell^\alpha), 0 \leq j, \ell \leq N\}.$$

Le problème de collocation que nous considérons est le problème (III.5), avec

$$(III.11) \quad \begin{cases} X_N = P_N^{0,1}(\Omega)^2 & \text{et } P_N(\Omega) = M_N \oplus Z_N, \\ \Xi_{Nx} = \Xi_{Ny} = \Xi_N^\alpha \cap \Omega & \text{et } \Xi'_N = \Xi_N^\alpha. \end{cases}$$

Ce problème admet alors une solution unique [BCMM, Section III]; de plus, si la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes (III.1) (III.2) appartient à $H_\alpha^\sigma(\Omega)^2 \times H_\alpha^{\sigma-1}(\Omega)$ pour un réel $\sigma \geq 1$ et si la force \mathbf{f} appartient à $H_\alpha^\rho(\Omega)^2$ pour un réel $\rho > 1$, on a la majoration d'erreur

$$(III.12) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{1, \alpha, \Omega} \leq c(N^{1-\sigma} \|\mathbf{u}\|_{\sigma, \alpha, \Omega} + N^{1+2\alpha-\rho} \|\mathbf{f}\|_{\rho, \alpha, \Omega}).$$

Le but est maintenant d'obtenir une estimation pour $\|p - p_N\|_{0, \alpha, \Omega}$.

Sur l'espace $P_N(\Omega) \times P_N(\Omega)$, on définit la forme bilinéaire

$$(III.13) \quad (u_N, v_N)_{\alpha N} = \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^N u_N(\xi_j^\alpha, \xi_\ell^\alpha) v_N(\xi_j^\alpha, \xi_\ell^\alpha) \rho_j^\alpha \rho_\ell^\alpha,$$

qui est en fait un produit scalaire [CQ, § 3] vérifiant

$$(III.14) \quad \forall u_N \in P_N(\Omega), \quad \|u_N\|_{0, \alpha, \Omega}^2 \leq (u_N, u_N)_{\alpha N} \leq 9 \|u_N\|_{0, \alpha, \Omega}^2.$$

La forme $b_N(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$(III.15) \quad \forall \mathbf{w}_N \in P_N^{0,1}(\Omega)^2, \quad \forall q_N \in P_N(\Omega), \\ b_N(\mathbf{w}_N, q_N) = - (\omega_\alpha^{-1} \operatorname{div}(\mathbf{w}_N \omega_\alpha), q_N)_{\alpha N}.$$

On rappelle que l'espace Z_N est de dimension 8, engendré par l'ensemble

$$\{J_0^\alpha J_0^\alpha, J_0^\alpha J_N^\alpha, J_N^\alpha J_0^\alpha, J_N^\alpha J_N^\alpha\} \cup \{J_N^{\alpha'} J_N^{\alpha'}, x J_N^{\alpha'} J_N^{\alpha'}, y J_N^{\alpha'} J_N^{\alpha'}, xy J_N^{\alpha'} J_N^{\alpha'}\},$$

et on note Z_N^\perp l'orthogonal de Z_N pour le produit scalaire discret $(\cdot, \cdot)_{\alpha N}$. On suppose enfin que l'espace M_N vérifie les deux hypothèses suivantes :

1) l'opérateur de projection orthogonale Π_N de M_N sur Z_N^\perp pour le produit scalaire discret $(\cdot, \cdot)_{\alpha N}$ vérifie

$$(III.16) \quad \forall q_N \in M_N, \quad \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega} \leq c \|\Pi_N q_N\|_{0, \alpha, \Omega};$$

2) il existe un réel $\lambda, 0 < \lambda < 1$, tel que

$$(III.17) \quad \left\{ q_N \in P_{[\lambda N]}(\Omega); \int_\Omega q_N(\mathbf{x}) \omega_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\} \subset M_N,$$

où $[\lambda N]$ désigne la partie entière de λN .

Des exemples d'espaces M_N satisfaisant ces deux hypothèses ont été donnés dans [BMM, Prop. V.5] [BCaM, (IV.49) (IV.61)]. Sous les hypothèses de régularité précédentes, on sait alors que

$$\|p - p_N\|_{0, \alpha, \Omega} \leq (c/\beta_N) \left\{ N^{1-\sigma} (\|\mathbf{u}\|_{\sigma, \alpha, \Omega} + \|p_N\|_{\sigma-1, \alpha, \Omega}) + N^{1+2\alpha-\rho} \|\mathbf{f}\|_{\rho, \alpha, \Omega} \right\}.$$

Il s'agit d'obtenir une minoration pour la constante β_N .

Dans ce but, on introduit la suite de polynômes $K_n^\alpha, n \geq 2$, définie par

$$(III.18) \quad K_n^\alpha(\xi) = \rho_{-\alpha}(\xi) \int_{-1}^\xi J_{n-1}^\alpha(\xi) \rho_\alpha(\xi) d\xi;$$

d'après la formule (I.16), on a

$$(III.19) \quad K_n^\alpha(\xi) = - (1/(n-1)(n+2\alpha))(1-\xi^2) J_{n-1}^{\alpha'}(\xi),$$

donc K_n^α est un polynôme de degré n s'annulant en ± 1 .

LEMME III.1 : Soit α vérifiant $\alpha > -1$. Pour tout entier $n \geq 2$, le polynôme K_n^α est donné par

$$(III.20) \quad K_n^\alpha = \frac{1}{2n + 2\alpha - 1} \left[\frac{n}{n + \alpha} J_n^\alpha - \frac{n + \alpha - 1}{n - 1} J_{n-2}^\alpha \right].$$

Démonstration : Écrivant le développement de K_n^α sous la forme $K_n^\alpha = \sum_{m=0}^n \alpha_m J_m^\alpha$, on a par intégration par parties

$$\alpha_m = \int_{-1}^1 J_{n-1}(\xi) \left(\int J_m^\alpha(\xi) d\xi \right) \rho_\alpha(\xi) d\xi / \|J_m^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 ;$$

d'après la formule (I.18), on en déduit que les α_m sont nuls sauf pour $m = n$ et $m = n - 2$.

D'après (III.19), le coefficient du terme ζ^n dans K_n^α est égal au coefficient de ζ^{n-1} dans J_{n-1}^α divisé par $n + 2\alpha$; la formule (I.15) implique que

$$\alpha_n = n / (2n + 2\alpha - 1)(n + \alpha).$$

Le coefficient α_{n-2} s'obtient finalement en écrivant que K_n^α s'annule en ± 1 et en utilisant (I.14).

On note que le système $\{J_0^\alpha, J_1^\alpha, \dots, J_{N-1}^\alpha, K_N^\alpha\}$ constitue une base de $P_N(\Lambda)$, de sorte que tout polynôme de $P_N(\Lambda)$ peut s'écrire

$$(III.21) \quad \varphi_N = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n J_n^\alpha + \beta K_N^\alpha.$$

COROLLAIRE III.1 : Soit α vérifiant $\alpha > -1$. Tout polynôme φ_N de $P_N(\Lambda)$ s'écrivant sous la forme (III.21) vérifie

$$(III.22) \quad \left\{ \begin{aligned} c \left(\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n^2 / (n + 1/2) + \beta^2 / (N + 1/2)^3 \right) &\leq \| \varphi_N \|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \\ &\leq c' \left(\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n^2 / (n + 1/2) + \beta^2 / (N + 1/2)^3 \right). \end{aligned} \right.$$

Démonstration : Le Lemme III.1 montre que le polynôme K_N^α est orthogonal à tous les J_n^α , $0 \leq n \leq N - 1$, $n \neq N - 2$. On a donc

$$\| \varphi_N \|_{0, \alpha, \Lambda}^2 = \sum_{n=0, n \neq N-2}^{N-1} \alpha_n^2 \| J_n^\alpha \|_{0, \alpha, \Lambda}^2 + \| \alpha_{N-2} J_{N-2}^\alpha + \beta K_N^\alpha \|_{0, \alpha, \Lambda}^2 ;$$

en utilisant (I.17) et la formule de Stirling, on en déduit

$$c \left(\sum_{n=0, n \neq N-2}^{N-1} \alpha_n^2 / (n + 1/2) + \|\alpha_{N-2} J_{N-2}^\alpha + \beta K_N^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \right) \leq \|\Phi_N\|_{0, \alpha, \Lambda}^2$$

$$\leq c' \left(\sum_{n=0, n \neq N-2}^{N-1} \alpha_n^2 / (n + 1/2) + \|\alpha_{N-2} J_{N-2}^\alpha + \beta K_N^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \right).$$

Il reste à évaluer le terme $\|\alpha_{N-2} J_{N-2}^\alpha + \beta K_N^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2$. Le Lemme III.1 implique

$$\|\alpha_{N-2} J_{N-2}^\alpha + \beta K_N^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2$$

$$= (\alpha_{N-2} - \beta(N + \alpha - 1) / (2N + 2\alpha - 1)(N - 1))^2 \|J_{N-2}^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2$$

$$+ \beta^2 (N / (2N + 2\alpha - 1)(N + \alpha))^2 \|J_N^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2.$$

En posant $\gamma = \beta(N + \alpha - 1) / (2N + 2\alpha - 1)(N - 1)$, on obtient

$$\|\alpha_{N-2} J_{N-2}^\alpha + \beta K_N^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 = \|J_{N-2}^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 [\alpha_{N-2}^2 - 2\alpha_{N-2}\gamma + \gamma^2$$

$$+ \gamma^2(2N + 2\alpha - 3)N(N - 1) / (2N + 2\alpha + 1)(N + 2\alpha)(N + 2\alpha - 1)];$$

on en déduit, en utilisant le fait que la quantité $-2\alpha_{N-2}\gamma$ est $\geq - (2/3)\alpha_{N-2}^2 - (3/2)\gamma^2$ et $-2\alpha_{N-2}\gamma \leq \alpha_{N-2}^2 + \gamma^2$,

$$c \|J_{N-2}^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 (\alpha_{N-2}^2 + \gamma^2) \leq \|\alpha_{N-2} J_{N-2}^\alpha + \beta K_N^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \leq$$

$$\leq c' \|J_{N-2}^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 (\alpha_{N-2}^2 + \gamma^2).$$

Une fois de plus, (I.17) et la formule de Stirling donnent

$$c(\alpha_{N-2}^2 / (N - 3/2) + \beta^2 / (N + 1/2)^3) \leq \|\alpha_{N-2} J_{N-2}^\alpha + \beta K_N^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda}^2$$

$$\leq c'(\alpha_{N-2}^2 / (N - 3/2) + \beta^2 / (N + 1/2)^3),$$

ce qui permet de conclure.

Le résultat principal de ce paragraphe est énoncé dans la proposition suivante. Sa démonstration utilise une idée de S. Jensen et M. Vogelius [JV, Prop. 1] qui ont prouvé un résultat semblable dans le cas $\alpha = 0$ et sans conditions aux limites.

PROPOSITION III.1: *Soit α vérifiant $\alpha > -1$. Pour tout polynôme q_N de $P_N(\Omega)$ orthogonal à $J_0^\alpha J_0^\alpha, J_0^\alpha J_N^\alpha, J_N^\alpha J_0^\alpha$ et $J_N^\alpha J_N^\alpha$ dans $L_\alpha^2(\Omega)$, il existe un*

polynôme z_N de $P_N(\Omega)^2$ tel que

$$(III.23) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(z_N \omega_\alpha) = q_N \omega_\alpha & \text{dans } \Omega, \\ z_N \cdot \mathbf{n}_J = 0 & \text{sur } \Gamma_J, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{cases}$$

et

$$(III.24) \quad \|z_N\|_{1, \alpha, \Omega} \leq cN \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega}.$$

Démonstration : On écrit le polynôme q_N sous la forme

$$q_N = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn} J_m^\alpha J_n^\alpha + \sum_{n=1}^{N-1} \beta_{Nn} K_N^\alpha J_n^\alpha + \sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mN} J_m^\alpha K_N^\alpha,$$

de sorte que, d'après le Corollaire III.1,

$$(III.25) \quad \|q_N\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 \geq c \left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn}^2 / (m+1/2)(n+1/2) + (1/(N+1/2)^3) \left[\sum_{n=1}^{N-1} \beta_{Nn}^2 / (n+1/2) + \sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mN}^2 / (m+1/2) \right] \right).$$

On choisit le polynôme z_N égal à (z_N, t_N) , avec

$$(III.26) \quad \begin{cases} z_N = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=n, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn} K_{m+1}^\alpha J_n^\alpha + \sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mN} K_{m+1}^\alpha K_N^\alpha, \\ t_N = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=m+1}^{N-1} \alpha_{mn} J_m^\alpha K_{n+1}^\alpha + \sum_{n=1}^{N-1} \beta_{Nn} K_N^\alpha K_{n+1}^\alpha. \end{cases}$$

De la formule (III.18), on déduit que, en tout point $\mathbf{x} = (x, y)$ de Ω ,

$$\operatorname{div}(z_N \omega_\alpha)(\mathbf{x}) = (\partial(z_N \rho_\alpha) / \partial x)(\mathbf{x}) \rho_\alpha(y) + (\partial(t_N \rho_\alpha) / \partial y)(\mathbf{x}) \rho_\alpha(x) = q_N(\mathbf{x}) \omega_\alpha(\mathbf{x}),$$

ainsi que la majoration

$$\|\partial(z_N \rho_\alpha) / \partial x\|_{L^2_{-\alpha}(\Lambda), L^2_{\alpha}(\Lambda)} + \|\partial(t_N \rho_\alpha) / \partial y\|_{L^2_{\alpha}(\Lambda), L^2_{-\alpha}(\Lambda)} \leq c \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega}.$$

D'après la formule (III.19), $z_N(\pm 1, \cdot)$ et $t_N(\cdot, \pm 1)$ sont nuls, ce qui a trois conséquences. La première est que $z_N \cdot \mathbf{n}_J$ est nul sur Γ_J , $J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ce qui achève la démonstration de (III.23); ensuite, comme l'application : $\varphi \rightarrow \varphi \rho_\alpha$ est un isomorphisme de $H^1_{\alpha, 0}(\Lambda)$ sur $H^1_{-\alpha, 0}(\Lambda)$, on déduit de l'estimation précédente

$$(III.27) \quad \|\partial z_N / \partial x\|_{0, \alpha, \Omega} + \|\partial t_N / \partial y\|_{0, \alpha, \Omega} \leq c \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega};$$

finalemt, comme la semi-norme $|\cdot|_{1, \alpha, \Lambda}$ est une norme sur $H^1_{\alpha, 0}(\Lambda)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1, \alpha, \Lambda}$, on a aussi

$$(III.28) \quad \|z_N\|_{0, \alpha, \Omega} + \|t_N\|_{0, \alpha, \Omega} \leq c \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega}.$$

On calcule alors

$$\begin{cases} \partial z_N / \partial y = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=n, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn} K_{m+1}^\alpha J_n^{\alpha'} + \sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mN} K_{m+1}^\alpha K_N^{\alpha'}, \\ \partial t_N / \partial x = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=m+1}^{N-1} \alpha_{mn} J_m^{\alpha'} K_{n+1}^\alpha + \sum_{n=1}^{N-1} \beta_{nN} K_N^{\alpha'} K_{n+1}^\alpha. \end{cases}$$

On sait [BM1, (V.28)] que $\|J_n^{\alpha'}\|_{0, \alpha, \Omega}$ est $\leq cn$, $0 \leq n \leq N$, et on a également, comme K_N^α appartient à $H^1_{\alpha, 0}(\Lambda)$,

$$\|K_N^{\alpha'}\|_{0, \alpha, \Lambda} \leq c \|d(K_N^\alpha \rho_\alpha) / d\xi\|_{0, -\alpha, \Lambda} = c \|J_{N-1}^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda} \leq c'(N + 1/2)^{-1/2};$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \|\partial z_N / \partial y\|_{0, \alpha, \Omega}^2 &\leq c \left(\sum_{n=0}^{N-1} n \left\| \sum_{m=n, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn} K_{m+1}^\alpha \right\|_{0, \alpha, \Lambda} \right)^2 \\ &\quad + (c' / (N + 1/2)) \left\| \sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mN} K_{m+1}^\alpha \right\|_{0, \alpha, \Omega}^2 \end{aligned}$$

Pour $1 \leq m \leq N$, K_m^α est orthogonal à tous les K_r^α , sauf pour $r = m - 2$, $r = m$ et $r = m + 2$; comme $\|K_m^\alpha\|_{0, \alpha, \Lambda} \leq cm^{-3/2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\partial z_N / \partial y\|_{0, \alpha, \Omega}^2 &\leq c \left[\sum_{n=0}^{N-1} n \left(\sum_{m=n, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn}^2 / (m + 1/2)^3 \right)^{1/2} \right]^2 \\ &\quad + [c' / (N + 1/2)] \left[\sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mN}^2 / (m + 1/2) \right] \\ &\leq c \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=n, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn}^2 / (m + 1/2) \right)^{1/2} \right]^2 \\ &\quad + [c' / (N + 1/2)] \left[\sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mN}^2 / (m + 1/2) \right] \\ &\leq cN \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn}^2 / (m + 1/2) \\ &\quad + [c' / (N + 1/2)] \left[\sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mN}^2 / (m + 1/2) \right], \end{aligned}$$

et finalement d'après (III.25),

$$\begin{aligned} \|\partial z_N/\partial y\|_{0, \alpha, \Omega}^2 &\leq cN^2 \left[\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn}^2 / (m+1/2)(n+1/2) \right. \\ &\quad \left. + (1/(N+1/2))^3 \left(\sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{mN}^2 / (m+1/2) \right) \right] \\ &\leq cN^2 \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega}^2. \end{aligned}$$

En effectuant le même calcul pour $\|\partial t_N/\partial x\|_{0, \alpha, \Omega}$, on conclut

$$(III.29) \quad \|\partial z_N/\partial y\|_{0, \alpha, \Omega} + \|\partial t_N/\partial x\|_{0, \alpha, \Omega} \leq cN \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega}.$$

Les estimations (III.27) à (III.29) entraînent (III.24).

COROLLAIRE III.2 : *Sous les hypothèses de la Proposition III.1 et avec les mêmes notations, le polynôme z_N vérifie*

$$(III.30) \quad \|z_N \cdot \tau_J\|_{0, \alpha, \Gamma_J} \leq cN^{\sup\{0, \alpha\}} \|q_N\|_{0, \alpha, \Omega}, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Démonstration : D'après la formule (III.26), on voit que

$$\begin{cases} z_N(\cdot, \pm 1) = \sum_{n=0}^{N-1} J_n^\alpha(\pm 1) \sum_{m=n, m+n \neq 0}^{N-1} \alpha_{mn} K_{m+1}^\alpha, \\ t_N(\pm 1, \cdot) = \sum_{m=0}^{N-1} J_m^\alpha(\pm 1) \sum_{n=m+1}^{N-1} \alpha_{mn} K_{n+1}^\alpha. \end{cases}$$

En inversant l'ordre de sommation et en utilisant (I.14) avec la formule de Stirling, on a

$$\begin{aligned} \|z_N(\cdot, \pm 1)\|_{0, \alpha, \Lambda}^2 &\leq c \sum_{m=0}^{N-1} (1/(m+1/2))^3 \left(\sum_{n=0, m+n \neq 0}^m \alpha_{mn} n^\alpha \right)^2 \leq \\ &\leq c \sum_{m=0}^{N-1} (1/(m+1/2))^3 \left(\sum_{n=0, m+n \neq 0}^m \alpha_{mn}^2 / (n+1/2) \right) \left(\sum_{n=0}^m n^{2\alpha+1} \right) \\ &\leq c \left(\sum_{m=0}^{N-1} m^{2\alpha} \sum_{n=0, m+n \neq 0}^m \alpha_{mn}^2 / (m+1/2)(n+1/2) \right), \end{aligned}$$

où $m^{2\alpha}$ est borné pour $\alpha \leq 0$ et majoré par $N^{2\alpha}$ pour $\alpha > 0$. On effectue le même calcul pour $\|t_N(\pm 1, \cdot)\|_{0, \alpha, \Lambda}$ et on obtient (III.30).

On revient maintenant au problème discret (III.5) (III.11) et on rappelle que l'espace M_N vérifie l'hypothèse (III.16). On commence par le cas $\alpha = 0$.

PROPOSITION III.2 : Lorsque α est nul, pour tout polynôme q_N de M_N , il existe un polynôme \mathbf{w}_N de $P_N^{0,1}(\Omega)^2$ tel que

$$(III.31) \quad b_N(\mathbf{w}_N, q_N) \geq cN^{-1} \|\mathbf{w}_N\|_{1,\Omega} \|q_N\|_{0,\Omega}.$$

Démonstration : Soit q_N un polynôme de M_N . Par définition de Z_N^\perp , $\Pi_N q_N$ est orthogonal à $J_0^0 J_0^0$, $J_0^0 J_N^0$, $J_N^0 J_0^0$ et $J_N^0 J_N^0$ pour le produit scalaire discret $(\cdot, \cdot)_{0,N}$ mais également pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. La Proposition III.1 nous permet alors de construire un polynôme \mathbf{z}_N de $P_N^{0,1}(\Omega)^2$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{z}_N = \Pi_N q_N & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{z}_N \cdot \mathbf{n}_J = 0 & \text{sur } \Gamma_J, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{cases}$$

avec

$$(III.32) \quad \|\mathbf{z}_N\|_{1,\Omega} \leq cN \|\Pi_N q_N\|_{0,\Omega}$$

et

$$(III.33) \quad \|\mathbf{z}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J\|_{0,\Gamma_J} \leq c \|\Pi_N q_N\|_{0,\Omega}, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

D'autre part, on désire appliquer le Théorème II.1 à l'élément $\Phi_N = (0, -\mathbf{z}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J)_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ de $\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} P_N(\Gamma_J) \times P_N(\Gamma_J)$ dans le cas $m = 2$.

La condition de compatibilité $(C)_{0,0}$ est évidente, les conditions $(C)_{1,0}$ et $(C)_{0,1}$ viennent du fait que \mathbf{z}_N s'annule en \mathbf{a}_J , $J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; la condition $(C)_{1,1}$ s'écrit

$$(\operatorname{div} \mathbf{z}_N)(\mathbf{a}_J) = 0, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

et résulte du fait que

$$\begin{aligned} \Pi_N q_N(\mathbf{a}_J) &= \Pi_N q_N(\pm 1, \pm 1) \\ &= (1/\rho_0)^2 (\Pi_N q_N, (1 \pm x)(1 \pm y) J_N^0 J_N^0)_{0,N} = 0 \end{aligned}$$

par définition de Z_N^\perp . On déduit alors du Théorème II.1 que la fonction $\psi_N = Q_N^2 \Phi_N$ est telle que

$$\psi_N = 0 \quad \text{sur } \Gamma_J \quad \text{et} \quad \partial \psi_N / \partial n_J = -\mathbf{z}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J \quad \text{sur } \Gamma_J, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

et vérifie

$$(III.34) \quad \|\psi_N\|_{2,\Omega} \leq cN \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \|\mathbf{z}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J\|_{0,\Gamma_J}.$$

Finalement, on choisit $\mathbf{w}_N = -\mathbf{z}_N + \text{rot } \psi_N$. Le polynôme \mathbf{w}_N appartient à $P_N^{0,1}(\Omega)^2$ et on calcule

$$b_N(\mathbf{w}_N, q_N) = -(\text{div } \mathbf{w}_N, q_N)_{0N} = (\text{div } \mathbf{z}_N, \Pi_N q_N)_{0N} = (\Pi_N q_N, \Pi_N q_N)_{0N},$$

ce qui, d'après la propriété (III.14) et l'hypothèse (III.16), implique

$$b_N(\mathbf{w}_N, q_N) \geq c \|\Pi_N q_N\|_{0,\Omega} \|q_N\|_{0,\Omega}.$$

Pour conclure, il reste à écrire que

$$\|\mathbf{w}_N\|_{1,\Omega} \leq \|\mathbf{z}_N\|_{1,\Omega} + \|\psi_N\|_{2,\Omega}$$

et à utiliser (III.32), (III.33) et (III.34).

Remarque III.1 : La même démonstration que précédemment implique également que, pour tout polynôme q_N de M_N , il existe un polynôme \mathbf{w}_N de $P_N^{0,1}(\Omega)^2$ tel que

$$(III.35) \quad - \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{w}_N q_N \, dx \geq cN^{-1} \|\mathbf{w}_N\|_{1,\Omega} \|q_N\|_{0,\Omega}.$$

En outre, il faut noter que la minoration de la constante β_N obtenue dans [BMM, Lemme V.5] était en cN^{-2} , ce que le résultat ci-dessus améliore nettement.

Remarque III.2 : Dans le cas $\alpha = 0$, H. Vandeven [V] a exhibé une suite de modes faiblement parasites prouvant que l'estimation (III.31) est optimale. En effet, soient λ_{Ni} , $1 \leq i \leq N - 1$, les valeurs propres du système : trouver ψ_N dans $P_N^{0,1}(\Lambda)$ tel que

$$(III.36) \quad \forall \chi_N \in P_N^{0,1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 \psi'_N(\xi) \chi'_N(\xi) \, d\xi = \lambda \int_{-1}^1 \psi_N(\xi) \chi_N(\xi) \, d\xi,$$

que l'on suppose rangées par ordre croissant, et soient ψ_{Ni} , $1 \leq i \leq N$, des vecteurs propres associés. On suppose N pair, on fixe un entier k tel que ψ_{Nk} soit une fonction impaire et on choisit

$$(III.37) \quad q_N(\mathbf{x}) = J_N^0(x) \psi'_{Nk}(y);$$

on peut alors vérifier que

$$\forall \mathbf{w}_N \in P_N^{0,1}(\Omega)^2, \quad b_N(\mathbf{w}_N, q_N) \leq cN^{-1} \|\mathbf{w}_N\|_{1,\Omega} \|q_N\|_{0,\Omega}.$$

On étudie maintenant le cas $\alpha = -1/2$.

PROPOSITION III.3 : Lorsque α est égal à $-1/2$, pour tout polynôme q_N de M_N , il existe un polynôme \mathbf{w}_N de $P_N^{0,1}(\Omega)^2$ tel que

$$(III.38) \quad b_N(\mathbf{w}_N, q_N) \geq cN^{-3/2} \|\mathbf{w}_N\|_{1, -1/2, \Omega} \|q_N\|_{0, -1/2, \Omega}.$$

Démonstration : La démonstration est identique à celle de la Proposition III.2, à quelques détails techniques près. Soit q_N un polynôme de M_N . Par définition de Z_N^\perp , on peut d'après la Proposition III.1 construire un polynôme $\mathbf{z}_N = (z_N, t_N)$ de $P_N^{0,1}(\Omega)^2$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{z}_N \omega_{-1/2}) = (\Pi_N q_N) \omega_{-1/2} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{n}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J = 0 & \text{sur } \Gamma_J, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{cases}$$

avec

$$(III.39) \quad \|\mathbf{z}_N\|_{1, -1/2, \Omega} \leq cN \|\Pi_N q_N\|_{0, -1/2, \Omega}$$

et

$$(III.40) \quad \|\mathbf{z}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J\|_{0, -1/2, \Gamma_J} \leq c \|\Pi_N q_N\|_{0, -1/2, \Omega}, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

D'autre part, on cherche un polynôme ψ_N de $P_N(\Omega)$ tel que

$$(III.41) \quad \omega_{1/2} \operatorname{rot}(\psi_N \omega_{-1/2}) = \mathbf{z}_N \quad \text{sur } \Gamma_J, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

On observe la propriété suivante

$$(III.42) \quad \forall \chi_N \in P_N^{0,1}(\Lambda), \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm 1} \rho_{1/2}(d/d\xi)(\chi_N \rho_{-1/2}) = (1/2) \chi'_N(\pm 1).$$

La condition (III.41) équivaut alors à

$$\psi_N = 0 \quad \text{sur } \Gamma_J \quad \text{et} \quad \partial \psi_N / \partial n_J = -2 \mathbf{z}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J \quad \text{sur } \Gamma_J, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Pour appliquer le Théorème II.1 à l'élément $\tilde{\Phi}_N = (0, -2 \mathbf{z}_N, \boldsymbol{\tau}_J)_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ de $\prod_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} P_N(\Gamma_J) \times P_N(\Gamma_J)$ dans le cas $m = 2$, on doit vérifier les quatre

conditions de compatibilité $(C)_{0,0}$, $(C)_{1,0}$, $(C)_{0,1}$ et $(C)_{1,1}$. Là encore, les trois premières sont évidentes, la quatrième équivaut à

$$(\operatorname{div} \mathbf{z}_N)(\mathbf{a}_J) = 0, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Grâce à la propriété (III.42), on note que $(\operatorname{div} \mathbf{z}_N)(\mathbf{a}_J)$ est égal à 2 fois la quantité $[\omega_{1/2} \operatorname{div}(\mathbf{z}_N \omega_{-1/2})](\mathbf{a}_J)$, c'est-à-dire à $2 \Pi_N q_N(\mathbf{a}_J)$ qui est nul par définition de Z_N^\perp . D'après le Théorème II.1, la fonction $\psi_N = Q_N^2 \tilde{\Phi}_N$ satisfait les conditions aux limites cherchées et vérifie

$$(III.43) \quad \|\psi_N\|_{2, \Omega} \leq cN^{3/2} \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \|\mathbf{z}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J\|_{0, \Gamma_J}.$$

Finalement, on choisit $\mathbf{w}_N = -\mathbf{z}_N + \text{rot } \psi_N$. Le polynôme \mathbf{w}_N appartient à $P_N^{0,1}(\Omega)^2$; comme précédemment, on a

$$b_N(\mathbf{w}_N, q_N) \geq c \|\Pi_N q_N\|_{0,\Omega} \|q_N\|_{0,\Omega}.$$

et on écrit la majoration

$$\|\mathbf{w}_N\|_{1,\Omega} \leq \|\mathbf{z}_N\|_{1,\Omega} + \|\psi_N\|_{2,\Omega} \leq cN^{3/2} \|\Pi_N q_N\|_{0,\Omega}.$$

Remarque III.3 : Ici également, le résultat est meilleur que dans [BCaM, Prop. V.5], où la minoration de la constante β_N était en cN^{-2} . Toutefois, dans le cas $\alpha = -1/2$, on ignore si la minoration (III.38) fournit une estimation optimale de β_N .

En conclusion, si l'espace M_N vérifie l'hypothèse (III.16) et (III.17), si la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes (III.1) (III.2) appartient à l'espace $H_\alpha^\sigma(\Omega)^2 \times H_\alpha^{\sigma-1}(\Omega)$ pour un réel $\sigma \geq 1$ et si la force \mathbf{f} appartient à $H_\alpha^\rho(\Omega)^2$ pour un réel $\rho > 1$, on a la majoration d'erreur

(III.44)

$$\|p - p_N\|_{0,\alpha,\Omega} \leq c \{ N^{2-\alpha-\sigma} (\|\mathbf{u}\|_{\sigma,\alpha,\Omega} + \|p\|_{\sigma-1,\alpha,\Omega}) + N^{2+\alpha-\rho} \|\mathbf{f}\|_{\rho,\alpha,\Omega} \}.$$

III.2. Algorithme à trois grilles

Cet algorithme n'a été étudié que dans le cas $\alpha = 0$ [BM2], sa justification dans le cas $\alpha = -1/2$ est en cours.

Pour simplifier les notations, les polynômes de Legendre J_n^0 , $n \in \mathbb{N}$, seront simplement désignés par L_n . Dans ce paragraphe, on note ζ_i , $1 \leq i \leq N$, les zéros du polynôme L_N et ξ_j , $0 \leq j \leq N$, les zéros du polynôme $(1 - \zeta^2) L'_N$, rangés par ordre croissant; on rappelle [DR, § 2.7] qu'il existe des poids $\omega_i > 0$, $1 \leq i \leq N$, et $\rho_j > 0$, $0 \leq j \leq N$, tels que les formules de quadrature de Gauss et de Gauss-Lobatto

$$(III.45) \quad \int_{-1}^1 U(\zeta) d\zeta \approx \sum_{i=1}^N U(\zeta_i) \omega_i \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 U(\zeta) d\zeta \approx \sum_{j=0}^N U(\xi_j) \rho_j$$

soient exactes sur $P_{2N-1}(\Lambda)$. On définit les grilles

$$(III.46) \quad \begin{cases} \Xi_{Nx} = \{(\xi_i, \zeta_j), 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N\}, \\ \Xi_{Ny} = \{(\zeta_i, \xi_j), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N-1\}, \\ \Xi'_N = \{(\zeta_i, \zeta_j), 1 \leq i, j \leq N\}. \end{cases}$$

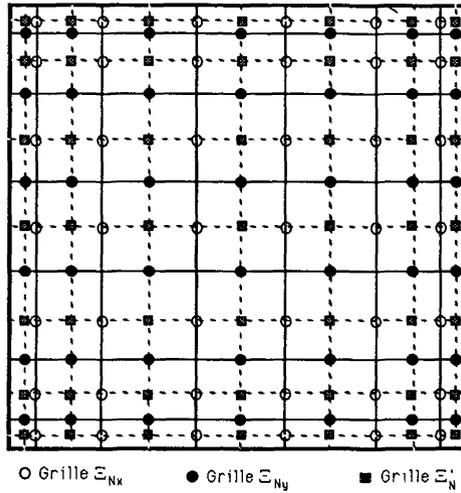


Figure III.2. — Les grilles Ξ_{N_x} , Ξ_{N_y} et Ξ'_N pour $N = 7$.

Le problème de collocation que nous considérons est le problème (III.5), avec

$$(III.47) \quad \begin{cases} X_N = [P_N^{0,1}(\Lambda) \otimes P_{N+1}^{0,1}(\Lambda)] \times [P_{N+1}^{0,1}(\Lambda) \otimes P_N^{0,1}(\Lambda)] \text{ et} \\ M_N = \left\{ q_N \in P_{N-1}(\Lambda) ; \int_{\Omega} q_N(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}, \\ \Xi_{N_x}, \Xi_{N_y} \text{ et } \Xi'_N \text{ définis par (III.46)}. \end{cases}$$

Ce problème admet alors une solution unique [BM2, Thm 1] ; de plus, si la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes (III.1) (III.2) appartient à l'espace $H^\sigma(\Omega)^2 \times H^{\sigma-1}(\Omega)$ pour un réel $\sigma \geq 1$ et si la force \mathbf{f} appartient à $H^\rho(\Omega)^2$ pour un réel $\rho > 1$, on a la majoration d'erreur

$$(III.48) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{1,\Omega} \leq c(N^{2-\sigma} \|\mathbf{u}\|_{\sigma,\Omega} + N^{2-\rho} \|\mathbf{f}\|_{\rho,\Omega}).$$

Le but est maintenant d'obtenir une estimation pour $\|p - p_N\|_{0,\Omega}$.

La forme b_N est définie par

$$(III.49) \quad \begin{cases} \forall \mathbf{w}_N = (w_N, z_N) \in X_N, \quad \forall q_N \in P_{N-1}(\Omega), \\ b_N(\mathbf{w}_N, q_N) = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=1}^N w_N(\xi_i, \zeta_j) (\partial q_N / \partial x)(\xi_i, \zeta_j) \rho_i \omega_j \\ \quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{N+1} z_N(\zeta_i, \xi_j) (\partial q_N / \partial y)(\zeta_i, \xi_j) \omega_i \rho_j, \end{cases}$$

et l'exactitude des formules de quadrature permet de montrer la propriété essentielle suivante

$$(III.50) \quad \begin{cases} \forall \mathbf{w}_N \in X_N, \quad \forall q_N \in P_{N-1}(\Omega), \\ b_N(\mathbf{w}_N, q_N) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\operatorname{div} \mathbf{w}_N)(\zeta_i, \zeta_j) q_N(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j. \end{cases}$$

On rappelle que l'espace M_N ne contient aucun mode parasite et, par conséquent, que la constante β_N est > 0 . Sous les hypothèses de régularité précédentes, on sait alors que

$$\|p - p_N\|_{0,\Omega} \leq (c/\beta_N) \{ N^{2-\sigma} (\|\mathbf{u}\|_{\sigma,\Omega} + \|p_N\|_{\sigma-1,\Omega}) + N^{2-\rho} \|\mathbf{f}\|_{\rho,\Omega} \}.$$

Il s'agit d'obtenir une minoration pour la constante β_N .

On commence par démontrer un résultat technique. Soit π_N^N l'opérateur d'interpolation aux points de Gauss : pour toute fonction φ de $\mathcal{C}^0(\bar{\Lambda})$, $\pi_N^N \varphi$ appartient à $P_{N-1}(\Lambda)$ et vérifie

$$(III.51) \quad \pi_N^N \varphi(\zeta_i) = \varphi(\zeta_i), \quad 1 \leq i \leq N,$$

ou, de façon équivalente,

$$(III.52) \quad \forall \chi_N \in P_{N-1}(\Lambda), \quad \sum_{i=1}^N (\pi_N^N \varphi - \varphi)(\zeta_i) \chi_N(\zeta_i) \omega_i = 0.$$

LEMME III.2 : L'opérateur π_N^N vérifie la propriété de stabilité suivante

$$(III.53) \quad \forall \varphi_N \in P_{N+1}^{0,1}(\Lambda), \quad \|\varphi_N\|_{0,\Lambda} \leq cN^{1/2} \|\pi_N^N \varphi_N\|_{0,\Lambda}.$$

Démonstration : On vérifie facilement que π_N^N est égal à l'identité sur $P_{N-1}(\Lambda)$ et que $\pi_N^N L_N$ est nul. En utilisant la formule (I.15), on constate aussi que $\pi_N^N L_{N+1}$ est égal à $-NL_{N-1}/(N+1)$. Tout polynôme φ_N de $P_{N+1}^{0,1}(\Lambda)$ s'écrit sous la forme

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n L_n,$$

de sorte que

$$\pi_N^N \varphi_N = \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n L_n + (\alpha_{N-1} - N\alpha_{N+1}/(N+1)) L_{N-1}.$$

Ceci entraîne

$$\|\pi_N^N \varphi_N\|_{0,\Lambda}^2 = \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^2 / (n+1/2) + (\alpha_{N-1} - N\alpha_{N+1}/(N+1))^2 / (N-1/2).$$

Le fait que $\varphi_N(\pm 1)$ soit nul s'écrit

$$\alpha_N + \alpha_{N-2} + \alpha_{N-4} + \dots = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{N+1} + \alpha_{N-1} + \alpha_{N-3} + \dots = 0.$$

De la première équation, on tire

$$\begin{aligned} |\alpha_N| &= |\alpha_{N-2} + \alpha_{N-4} + \dots| \leq \left[\sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^2 / (n+1/2) \right]^{1/2} \left[\sum_{n=0}^{N-2} (n+1/2) \right]^{1/2} \\ &\leq cN \|\pi_N^N \varphi_N\|_{0,\Lambda}. \end{aligned}$$

On écrit la seconde équation

$$\begin{aligned} (1 + N/(N+1)) \alpha_{N+1} \\ = -(\alpha_{N-1} - N\alpha_{N+1}/(N+1)) - \alpha_{N-3} - \alpha_{N-5} - \dots \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |\alpha_{N+1}| &\leq (1 + N/(N+1)) |\alpha_{N+1}| \\ &\quad |(\alpha_{N-1} - N\alpha_{N+1}/(N+1)) + \alpha_{N-3} + \alpha_{N-5} + \dots| \\ &\leq cN \|\pi_N^N \varphi_N\|_{0,\Lambda}. \end{aligned}$$

On note alors que

$$\begin{aligned} \|\varphi_N\|_{0,\Lambda}^2 &\leq 2(\|\pi_N^N \varphi_N\|_{0,\Lambda}^2 + \|\varphi_N - \pi_N^N \varphi_N\|_{0,\Lambda}^2) \\ &\leq 2(\|\pi_N^N \varphi_N\|_{0,\Lambda}^2 + \|\alpha_N L_N \\ &\quad + \alpha_{N+1}(L_{N+1} + NL_{N-1}/(N+1))\|_{0,\Lambda}^2) \\ &\leq 2\|\pi_N^N \varphi_N\|_{0,\Lambda}^2 + (c/N)(\alpha_N^2 + \alpha_{N+1}^2), \end{aligned}$$

d'où

$$\|\varphi_N\|_{0,\Lambda}^2 \leq cN \|\pi_N^N \varphi_N\|_{0,\Lambda}^2.$$

On désigne maintenant par Π_N^N l'opérateur $\pi_N^N \otimes \pi_N^N$. Le résultat suivant a été énoncé dans [Sj, Lemma 2.5] et démontré dans [S] avec l'opérateur Π_{N-1}^0 de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $P_{N-1}(\Omega)$ à la place de l'opérateur Π_N^N .

COROLLAIRE III.2 : *L'opérateur Π_N^N vérifie la propriété de stabilité suivante*

$$(III.54) \quad \forall \psi_N \in P_{N+1}^{0,1}(\Omega), \quad \|\Delta \psi_N\|_{0,\Omega} \leq cN^{1/2} \|\Pi_N^N(\Delta \psi_N)\|_{0,\Omega}.$$

Démonstration : On commence par noter que

$$\int_{\Omega} \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial x^2) \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial y^2) \, dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial x^2)(\zeta_i, \zeta_j) \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial y^2)(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j ;$$

en utilisant le fait que l'opérateur π_N^N soit égal à l'identité sur $P_{N-1}(\Lambda)$ puis sa définition (III.52), on en déduit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial x^2) \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial y^2) \, dx &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (id \otimes \pi_N^N)(\partial^2 \psi_N / \partial x^2)(\zeta_i, \zeta_j) (\pi_N^N \otimes id)(\partial^2 \psi_N / \partial y^2)(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\partial^2 \psi_N / \partial x^2)(\zeta_i, \zeta_j) (\partial^2 \psi_N / \partial y^2)(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j . \end{aligned}$$

On développe alors le polynôme ψ_N sous la forme

$$\psi_N(x, y) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_{mn} (L_{m+1} - L_{m-1})(x) (L_{n+1} - L_{n-1})(y) ,$$

de sorte que, d'après les formules (I.16) et (I.18),

$$\begin{aligned} (\partial^2 \psi_N / \partial x^2)(x, y) &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_{mn} ((2m+1)(2n+1)/n(n+1)) L'_m(x) (1-y^2) L'_n(y) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial^2 \psi_N / \partial y^2)(x, y) &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_{mn} ((2m+1)(2n+1)/m(m+1)) (1-x^2) L'_m(x) L'_n(y) . \end{aligned}$$

On voit que, pour $k + \ell \leq 2N - 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (1 - \zeta_i^2) L'_k(\zeta_i) L'_\ell(\zeta_i) \omega_i &= \int_{-1}^1 (1 - \zeta^2) L'_k(\zeta) L'_\ell(\zeta) \, d\zeta = (k(k+1)/(k+1/2)) \delta_{k\ell} \end{aligned}$$

tandis que

$$\sum_{i=1}^N (1 - \zeta_i^2) L'_N(\zeta_i)^2 \omega_i \geq 0 ;$$

on en déduit que

$$\int_{\Omega} \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial x^2) \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial y^2) \, d\mathbf{x} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_{mn}^2 \lambda_m \lambda_n,$$

où les constantes λ_k , $1 \leq k \leq N$, sont ≥ 0 , et, par conséquent,

$$(III.55) \quad \int_{\Omega} \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial x^2) \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial y^2) \, d\mathbf{x} \geq 0.$$

On calcule maintenant, en utilisant le Lemme III.2,

$$\begin{aligned} \|\Delta \psi_N\|_{0,\Omega}^2 &\leq 2 \int_{\Omega} [(\partial^2 \psi_N / \partial x^2)^2 + (\partial^2 \psi_N / \partial y^2)^2] \, d\mathbf{x} \\ &\leq cN \int_{\Omega} [(id \otimes \pi_N^N)(\partial^2 \psi_N / \partial x^2)]^2 \\ &\quad + ((\pi_N^N \otimes id)(\partial^2 \psi_N / \partial y^2))^2] \, d\mathbf{x}; \end{aligned}$$

donc, comme π_N^N est égal à l'identité sur $P_{N-1}(\Lambda)$ et grâce à (III.55), on a

$$\begin{aligned} \|\Delta \psi_N\|_{0,\Omega}^2 &\leq cN \int_{\Omega} [(\Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial x^2))^2 + (\Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial y^2))^2] \, d\mathbf{x} \\ &\leq cN \int_{\Omega} [(\Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial x^2))^2 + (\Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial y^2))^2 \\ &\quad + 2 \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial x^2) \Pi_N^N(\partial^2 \psi_N / \partial y^2)] \, d\mathbf{x} \\ &\leq cN \|\Pi_N^N(\Delta \psi_N)\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de démontrer la

PROPOSITION III.4 : *Pour tout polynôme q_N de M_N , il existe un polynôme \mathbf{w}_N de X_N tel que*

$$(III.56) \quad b_N(\mathbf{w}_N, q_N) \geq cN^{-7/8} \|\mathbf{w}_N\|_{1,\Omega} \|q_N\|_{0,\Omega}.$$

Démonstration : Soit q_N un polynôme de M_N . La construction de \mathbf{w}_N , assez longue, comporte trois étapes.

1) Étant donné un élément r_N de $P_N(\Omega)$, on considère le problème : trouver $\psi_N = T_N r_N$ dans $P_{N+1}^{0,1}(\Omega)$ tel que

$$(III.57) \quad \forall \chi_N \in P_{N-1}(\Omega), \quad - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\Delta \psi_N + r_N)(\zeta_i, \zeta_j) \chi_N(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j = 0.$$

Il s'agit d'un système linéaire de N^2 équations à N^2 inconnues, qui admet une solution si et seulement si cette solution est unique. Or, comme r_N est égal à $\Pi_N^N(\Delta\psi_N)$, on déduit du Corollaire III.2

$$\|\psi_N\|_{2,\Omega} \leq c \|\Delta\psi_N\|_{0,\Omega} \leq c' N^{1/2} \|r_N\|_{0,\Omega},$$

donc le problème (III.57) admet une solution unique. On choisit maintenant ψ_N égal à $T_N q_N$, de sorte que

$$(III.58) \quad \|\psi_N\|_{2,\Omega} \leq cN^{1/2} \|q_N\|_{0,\Omega}.$$

2) On pose alors

$$\lambda_J = \int_{\Gamma_J} (\partial\psi_N/\partial n_J)(\sigma) d\sigma, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Pour J dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on définit les polynômes $\tilde{\varphi}_J^0$ par

$$\tilde{\varphi}_J^0(\mathbf{a}_{J-1} + t\boldsymbol{\tau}_J) = - \int_0^t (\partial\psi_N/\partial n_J)(\mathbf{a}_{J-1} + s\boldsymbol{\tau}_J) ds + \lambda_J \xi^{0*}(1-t),$$

où ξ^{0*} est le polynôme de degré 3 vérifiant les conditions aux limites (II.3) dans le cas $m = 2$, et on vérifie qu'ils appartiennent à $P_{N+2}^{0,2}(\Gamma_J)$. Finalement on choisit

$$\begin{aligned} \chi_N = \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} Q_{N+2,J}^2(\tilde{\varphi}_J^0, 0) - \lambda_I \xi^{0*}(x) \xi^{0*}(y) - (\lambda_I + \lambda_{II}) \xi^{0*}(-x) \xi^{0*}(y) \\ - (\lambda_I + \lambda_{II} + \lambda_{III}) \xi^{0*}(-x) \xi^{0*}(-y). \end{aligned}$$

Grâce à la condition de compatibilité $(C)_{0,0}$

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \lambda_J &= \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \int_{\Gamma_J} (\partial\psi_N/\partial n_J)(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} (\Delta\psi_N)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q_N(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

on voit que le polynôme χ_N est tel que

$$(III.59) \quad \begin{cases} \mathbf{rot} \chi_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J = - \partial\chi_N/\partial n_J = 0 = - \mathbf{grad} \psi_N \cdot \boldsymbol{\tau}_J & \text{sur } \Gamma_J, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ \mathbf{rot} \chi_N \cdot \mathbf{n}_J = \partial\chi_N/\partial \tau_J = - \mathbf{grad} \psi_N \cdot \mathbf{n}_J & \text{sur } \Gamma_J, \quad J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

D'autre part, de la Proposition II.2, on déduit

$$\|\chi_N\|_{2,\Omega} \leq c \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} ({}_{2,N+2} \|\tilde{\varphi}_J^0\|_{3/2,\Gamma_J} + \lambda_J).$$

On utilise alors le Corollaire A.2 (voir Remarque A.3), ce qui donne

$$\|\chi_N\|_{2,\Omega} \leq c \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (N^{3/8} \|\tilde{\varphi}_J^0\|_{3/2^*, \Gamma_J} + \lambda_J).$$

D'après l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, l'application : $\psi \rightarrow \int_{-1}^{\xi} \psi(\xi) d\xi$ est linéaire continue de l'espace des fonctions de $L^2(\Lambda)$ à moyenne nulle dans $H_0^1(\Lambda)$ et de l'espace des fonctions de $H_0^1(\Lambda)$ à moyenne nulle dans $H_0^2(\Lambda)$; donc, d'après [LM, Chap. 1, Thm 13.3], elle est linéaire continue des fonctions de $H_{00}^{1/2}(\Lambda)$ à moyenne nulle dans $H_{00}^{3/2}(\Lambda)$. On applique ce résultat à la fonction :

$$\zeta \rightarrow (\partial\psi_N/\partial n_J)(\mathbf{a}_{J-1} + (1 + \zeta) \boldsymbol{\tau}_J) + \lambda_J \xi^{0*'}(-\zeta)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \|\chi_N\|_{2,\Omega} &\leq c \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} N^{3/8} (\|\partial\psi_N/\partial n_J\|_{1/2^*, \Gamma_J} + \lambda_J) \\ &\leq c N^{3/8} \sum_{J \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (\|\partial\psi_N/\partial n_J\|_{1/2^*, \Gamma_J} + \|\partial\psi_N/\partial n_J\|_{0, \Gamma_J}). \end{aligned}$$

Maintenant, sur le côté Γ_I par exemple, on a d'après [LM, Chap. 1, Th. 10.1]

$$\begin{aligned} \|\partial\psi_N/\partial n_I\|_{1/2^*, \Gamma_I} &= \|\partial\psi_N/\partial x\|_{1/2^*, \Gamma_I} \\ &\leq \|\partial\psi_N/\partial x\|_{L^2(\Lambda, H_0^1(\Gamma_I))} + \|\partial\psi_N/\partial x\|_{H^1(\Lambda, L^2(\Gamma_I))} \\ &\leq c \|\psi_N\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

En utilisant un argument identique pour les trois autres côtés, on arrive à

$$(III.60) \quad \|\chi_N\|_{2,\Omega} \leq c N^{3/8} \|\psi_N\|_{2,\Omega}.$$

3) Le polynôme $\mathbf{z}_N = (z_N, t_N)$, défini comme la somme de **grad** ψ_N et de **rot** χ_N , appartient à $[P_{N+2}^{0,1}(\Lambda) \otimes P_{N+1}^{0,1}(\Lambda)] \times [P_{N+1}^{0,1}(\Lambda) \otimes P_{N+2}^{0,1}(\Lambda)]$, on désire le modifier légèrement pour diminuer son degré. Pour cela, on l'écrit sous la forme

$$(III.61) \quad \begin{cases} z_N(x, y) = (1 - x^2) \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n(y) L_n'(x), \\ t_N(x, y) = (1 - y^2) \sum_{n=1}^{N+1} \beta_n(x) L_n'(y), \end{cases}$$

et on choisit e_N égal à (e_N, f_N) , avec

$$(III.62) \begin{cases} e_N(x, y) = (1 - x^2)[\alpha_N(y) L'_N(x) \\ \quad + \alpha_{N+1}(y)(L'_{N+1}(x) + (N + 2) L'_{N-1}(x)/(N - 1))] \\ f_N(x, y) = (1 - y^2)[\beta_N(x) L'_N(y) \\ \quad + \beta_{N+1}(x)(L'_{N+1}(y) + (N + 2) L'_{N-1}(y)/(N - 1))] . \end{cases}$$

Le polynôme e_N appartient à $P_{N+2}^{0,1}(\Omega)^2$ il faut majorer sa norme. On calcule d'abord, d'après la formule (I.16),

$$\partial z_N / \partial x = - \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n(y) n(n+1) L_n(x)$$

et

$$\begin{aligned} \partial e_N / \partial x = & - \alpha_N(y) N(N+1) L_N(x) \\ & - \alpha_{N+1}(y)(N+2)[(N+1) L_{N+1}(x) + N L_{N-1}(x)] , \end{aligned}$$

de sorte que $\|\partial e_N / \partial x\|_{0, \Omega}$ est $\leq \|\partial z_N / \partial x\|_{0, \Omega}$. Le même raisonnement appliqué à $\partial f_N / \partial y$ montre que

$$\|\partial e_N / \partial x\|_{0, \Omega} + \|\partial f_N / \partial y\|_{0, \Omega} \leq |z_N|_{1, \Omega} .$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} \partial z_N / \partial y = & - \sum_{n=1}^{N+1} \alpha'_n(y)(L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)) n(n+1)/(2n+1) \\ \partial e_N / \partial y = & - \alpha'_N(y)(L_{N+1}(x) - L_{N-1}(x)) N(N+1)/(2N+1) \\ & - \alpha'_{N+1}(y)[(L_{N+2}(x) - L_N(x))(N+1)(N+2)/(2N+3) \\ & + (L_N(x) - L_{N-2}(x))(N+2) N/(2N-1)] \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\|\partial z_N / \partial y\|_{0, \Omega}^2 \geq cN (\|\alpha'_N\|_{0, \Lambda}^2 + \|\alpha'_{N+1}\|_{0, \Lambda}^2)$$

et

$$\|\partial e_N / \partial y\|_{0, \Omega}^2 \leq cN (\|\alpha'_N\|_{0, \Lambda}^2 + \|\alpha'_{N+1}\|_{0, \Lambda}^2) \leq c \|\partial z_N / \partial y\|_{0, \Omega}^2 .$$

On fait également le même calcul pour $\partial f_N / \partial x$ et on obtient

$$\|\partial e_N / \partial y\|_{0, \Omega} + \|\partial f_N / \partial x\|_{0, \Omega} \leq c |z_N|_{1, \Omega} .$$

Ces deux estimations, avec l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, donnent

$$(III.63) \quad \|\mathbf{e}_N\|_{1,\Omega} \leq c \|\mathbf{z}_N\|_{1,\Omega} \leq c' (\|\psi_N\|_{2,\Omega} + \|\chi_N\|_{2,\Omega}).$$

Finalement, on pose

$$(III.64) \quad \mathbf{w}_N = \mathbf{grad} \psi_N + \mathbf{rot} \chi_N - \mathbf{e}_N.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} b_N(\mathbf{w}_N, q_N) &= - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\Delta \psi_N)(\zeta_i, \zeta_j) q_N(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\operatorname{div} \mathbf{e}_N)(\zeta_i, \zeta_j) q_N(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j. \end{aligned}$$

On note que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e}_N &= -\alpha_N(y) N(N+1) L_N(x) - \alpha_{N+1}(y) (N+2)(2N+1) x L_N(x) \\ &\quad - \beta_N(x) N(N+1) L_N(y) - \beta_{N+1}(x) (N+2)(2N+1) y L_N(y), \end{aligned}$$

de sorte que $\operatorname{div} \mathbf{e}_N$ s'annule en (ζ_i, ζ_j) , $1 \leq i, j \leq N$. Ceci et le fait que q_N appartienne à $P_{N-1}(\Lambda)$ entraînent

$$b_N(\mathbf{w}_N, q_N) = \|q_N\|_{0,\Omega}^2.$$

Finalement, la définition (III.64), avec (III.58), (III.60) et (III.63), implique

$$\|\mathbf{w}_N\|_{1,\Omega} \leq cN^{7/8} \|q_N\|_{0,\Omega},$$

d'où le résultat.

Remarque III.4. La minoration de la constante β_N obtenue dans [BM2, Prop. 5] était en $cN^{-5/2}$; là encore, l'amélioration est grande.

En conclusion, si la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes (III.1) (III.2) appartient à $H^\sigma(\Omega)^2 \times H^{\sigma-1}(\Omega)$ pour un réel $\sigma \geq 1$ et si la force \mathbf{f} appartient à $H^\rho(\Omega)^2$ pour un réel $\rho > 1$, on a la majoration d'erreur

$$(III.65) \quad \|p - p_N\|_{0,\Omega} \leq cN^{7/8} \{ N^{2-\sigma} (\|\mathbf{u}\|_{\sigma,\Omega} + \|p\|_{\sigma-1,\Omega}) + N^{2-\rho} \|\mathbf{f}\|_{\rho,\Omega} \}.$$

La convergence est donc légèrement moins bonne que pour l'algorithme à une seule grille. Toutefois, on sait [G, Thm 3.3.3.1] que, si la donnée \mathbf{f} est suffisamment régulière, la solution (\mathbf{u}, p) du problème (III.1) (III.2) appartient à $H^{\sigma_0}(\Omega)^2 \times H^{\sigma_0-1}(\Omega)$ pour $\sigma_0 = 3,7396$; il y a donc convergence de la pression discrète vers la pression exacte.

ANNEXE

On démontre ici des résultats de stabilité sur différents opérateurs de projection. Une conséquence immédiate est la majoration de certaines constantes minimales $c_s(N)$ définies en (I.20).

On rappelle que $\pi_{N,0}$ désigne l'opérateur de projection orthogonale de $L^2_\alpha(\Lambda)$ sur $P_N(\Lambda)$. L'opérateur $\pi_{N,1}^{0,1}$ est défini de $H^1_{\alpha,0}(\Lambda)$ dans $P_N^{0,1}(\Lambda)$ de la façon suivante : pour toute fonction φ de $H^1_{\alpha,0}(\Lambda)$, le polynôme $\pi_{N,1}^{0,1} \varphi$ appartient à $P_N^{0,1}(\Lambda)$ et vérifie

$$(A.1) \quad \forall \psi_N \in P_N^{0,1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 ((\varphi - \pi_{N,1}^{0,1} \varphi) \rho_\alpha)' \psi_N' d\xi = 0$$

(on réfère à [BM1, § IV] pour les propriétés d'approximation de cet opérateur). Le lemme suivant généralise des résultats de [CQ, Thm 2.4] et de [SV, Lemma III.1].

LEMME A.1 : *L'opérateur de projection $\pi_{N,1}^{0,1}$ se prolonge en un opérateur défini sur $L^2_\alpha(\Lambda)$ qui vérifie*

$$(A.2) \quad \forall \varphi \in L^2_\alpha(\Lambda), \quad \|\pi_{N,1}^{0,1} \varphi\|_{0,\alpha,\Lambda} \leq cN^{1/2} \|\varphi\|_{0,\alpha,\Lambda}.$$

De plus, l'opérateur de projection $\pi_{N,0}$ vérifie

$$(A.3) \quad \forall \varphi \in H^1_{\alpha,0}(\Lambda), \quad \|\pi_{N,0} \varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} \leq cN^{1/2} \|\varphi\|_{1,\alpha,\Lambda}.$$

Démonstration : Soit φ une fonction de $H^1_{\alpha,0}(\Lambda)$. De la définition (A.1), on tire

$$\forall \psi_N \in P_N^{0,1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 (\varphi - \pi_{N,1}^{0,1} \varphi) \psi_N'' \rho_\alpha d\xi = 0.$$

L'application : $\psi_N \rightarrow \psi_N''$ est linéaire et injective de $P_N^{0,1}(\Lambda)$ dans $P_{N-2}(\Lambda)$, elle est donc surjective. On en déduit qu'il existe deux coefficients α_{N-1} et α_N tels que

$$(A.4) \quad \pi_{N,1}^{0,1} \varphi = \pi_{N-2,0} \varphi + \alpha_{N-1} J_{N-1}^\alpha + \alpha_N J_N^\alpha.$$

Pour calculer les coefficients α_n , $n = N - 1$ et $n = N$, on écrit

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_{-1}^1 \pi_{N,1}^{0,1}(\varphi) J_n^\alpha \rho_\alpha d\xi / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \\ &= \int_{-1}^1 (\pi_{N,1}^{0,1}(\varphi) \rho_\alpha)' \left(\int J_n^\alpha d\xi \right) d\xi / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2. \end{aligned}$$

D'après la formule (I.18), ceci donne

$$\alpha_n = -\frac{1}{2n+2\alpha+1} \int_{-1}^1 (\pi_{N,1}^{0,1}(\varphi) \rho_\alpha)' \left[\frac{n+2\alpha+1}{n+\alpha+1} J_n^\alpha - \frac{n-\alpha}{n+2\alpha} J_{n-1}^\alpha \right] d\xi / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2.$$

Comme $\rho_{-\alpha}(\pi_{N,1}^{0,1}(\varphi) \rho_\alpha)'$ est un polynôme de degré $\leq N-1$, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_n &= [(n+\alpha)/(2n+2\alpha+1)(n+2\alpha)] \\ &\quad \int_{-1}^1 (\pi_{N,1}^{0,1}(\varphi) \rho_\alpha)' J_{n-1}^\alpha d\xi / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \\ &= [(n+\alpha)/(2n+2\alpha+1)(n+2\alpha)] \\ &\quad \int_{-1}^1 (\pi_{N,1}^{0,1}(\varphi) \rho_\alpha)' \left(J_{n-1}^\alpha - (1/2) \int_{-1}^1 J_{n-1}^\alpha(\xi) d\xi \right) d\xi / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2. \end{aligned}$$

D'après la définition (A.1), ceci entraîne

$$\alpha_n = [(n+\alpha)/(2n+2\alpha+1)(n+2\alpha)] \int_{-1}^1 (\varphi \rho_\alpha)' \left(J_{n-1}^\alpha - (1/2) \int_{-1}^1 J_{n-1}^\alpha(\xi) d\xi \right) d\xi / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2,$$

d'où finalement, pour n égal à $N-1$ ou N ,

$$(A.5) \quad \alpha_n = \begin{cases} [(n+\alpha)/(2n+2\alpha+1)(n+2\alpha)] \int_{-1}^1 (\varphi \rho_\alpha)' J_{n-1}^\alpha d\xi / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \\ - [(n+\alpha)/(2n+2\alpha+1)(n+2\alpha)] \int_{-1}^1 \varphi J_{n-1}^{\alpha'} \rho_\alpha d\xi / \|J_n^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2. \end{cases}$$

De la formule (A.4) et de la seconde partie de la formule (A.5), on déduit que l'opérateur $\pi_{N,1}^{0,1} \varphi$ se prolonge de façon naturelle à l'espace $L_\alpha^2(\Lambda)$ et qu'on a pour toute fonction φ de $L_\alpha^2(\Lambda)$

$$\begin{aligned} \|\pi_{N,1}^{0,1} \varphi\|_{0,\alpha,\Lambda} &\leq \|\pi_{N-2,0} \varphi\|_{0,\alpha,\Lambda} + |\alpha_{N-1}| \|J_{N-1}^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda} + |\alpha_N| \|J_N^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda} \\ &\leq \|\varphi\|_{0,\alpha,\Lambda} [1 + cN^{-1} (\|J_{N-2}^{\alpha'}\|_{0,\alpha,\Lambda} / \|J_{N-1}^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda} \\ &\quad + \|J_{N-1}^{\alpha'}\|_{0,\alpha,\Lambda} / \|J_N^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda})]. \end{aligned}$$

La majoration (A.2) découle alors de [BM1, (V.28)], de (I.17) et de la formule de Stirling. De façon similaire, on déduit de (A.4) et de la première

partie de (A.5) que, pour toute fonction φ de $H_{\alpha,0}^1(\Lambda)$,

$$\begin{aligned} \|\pi_{N-2,0} \varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} &\leq \|\pi_{N,1}^{0,1} \varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} + |\alpha_{N-1}| \|J_{N-1}^\alpha\|_{1,\alpha,\Lambda} + |\alpha_N| \|J_N^\alpha\|_{1,\alpha,\Lambda} \\ &\leq c \|\varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} [1 + N^{-1} (\|J_{N-2}^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda} \|J_{N-1}^\alpha\|_{1,\alpha,\Lambda} / \|J_{N-1}^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \\ &\quad + \|J_{N-1}^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda} \|J_N^\alpha\|_{1,\alpha,\Lambda} / \|J_N^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2)], \end{aligned}$$

et l'on obtient

$$\|\pi_{N-2,0} \varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} \leq cN^{1/2} \|\varphi\|_{1,\alpha,\Lambda},$$

ce qui est la majoration (A.3) avec N remplacé par $N - 2$.

On désigne maintenant par $\pi_{N,0}^{0,1}$ l'opérateur de projection orthogonale de $L_\alpha^2(\Lambda)$ sur $P_N^{0,1}(\Lambda)$. Le résultat suivant a été démontré dans [BMS, Lemma III.1] dans le cas particulier $\alpha = 0$.

LEMMA A.2 : *L'opérateur de projection $\pi_{N,0}^{0,1}$ vérifie*

$$(A.6) \quad \forall \varphi \in H_{\alpha,0}^1(\Lambda), \quad \|\pi_{N,0}^{0,1} \varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} \leq cN^{1/2} \|\varphi\|_{1,\alpha,\Lambda}.$$

Démonstration : Grâce à la formule (I.16), on voit que l'orthogonal de $P_N^{0,1}(\Lambda)$ dans $P_N(\Lambda)$ pour le produit scalaire de $L_\alpha^2(\Lambda)$ est engendré par $J_N^{\alpha'}$ et $J_{N+1}^{\alpha'}$. Donc, pour toute fonction φ de $L_\alpha^2(\Lambda)$, il existe deux réels β_N et β_{N+1} tels que

$$(A.7) \quad \pi_{N,0}^{0,1} \varphi = \pi_{N,0} \varphi + \beta_N J_N^{\alpha'} + \beta_{N+1} J_{N+1}^{\alpha'},$$

avec, pour $n = N$ et $n = N + 1$,

$$(A.8) \quad \beta_n = - \int_{-1}^1 \varphi J_n^{\alpha'} \rho_\alpha d\zeta / \|J_n^{\alpha'}\|_{0,\alpha,\Lambda}^2.$$

Si la fonction φ appartient à $H_{\alpha,0}^1(\Lambda)$, on obtient par intégration par parties

$$\begin{aligned} \|\pi_{N,0}^{0,1} \varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} &\leq \|\pi_{N,0} \varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} + \|\varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} (\|J_N^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda} \|J_N^{\alpha'}\|_{1,\alpha,\Lambda} / \|J_N^{\alpha'}\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \\ &\quad + \|J_{N+1}^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda} \|J_{N+1}^{\alpha'}\|_{1,\alpha,\Lambda} / \|J_{N+1}^{\alpha'}\|_{0,\alpha,\Lambda}^2). \end{aligned}$$

On applique alors la majoration (A.3) et l'inégalité inverse (II.6), ce qui donne

$$\begin{aligned} \|\pi_{N,0}^{0,1} \varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} &\leq c \|\varphi\|_{1,\alpha,\Lambda} (N^{1/2} + N^2 \|J_N^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda} / \|J_N^{\alpha'}\|_{0,\alpha,\Lambda} \\ &\quad + N^2 \|J_{N+1}^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda} / \|J_{N+1}^{\alpha'}\|_{0,\alpha,\Lambda}). \end{aligned}$$

Le résultat se déduit alors de [BM1, (V.28)].

COROLLAIRE A.1 : *Pour tout nombre réel s , $0 \leq s \leq 1$, $s \neq (1 + \alpha)/2$, pour tout polynôme φ_N de $P_N^{0,1}(\Lambda)$, on a l'équivalence de normes*

$$(A.9) \quad \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda} \leq {}_{1, N} \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda} \leq cN^{\inf\{s, 1-s\} / 2} \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda}.$$

Démonstration : D'après le Lemme A.1, l'opérateur $\pi_{N,1}^{0,1}$ est linéaire continu de $H_{\alpha,0}^1(\Lambda)$ dans $P_N^{0,1}(\Lambda)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{1, \alpha, \Lambda}$, de norme $\leq c$, et de $L_\alpha^2(\Lambda)$ dans $P_N^{0,1}(\Lambda)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{0, \alpha, \Lambda}$, de norme $\leq cN^{1/2}$. En interpolant ces deux résultats [LM, Chap. 1, Th. 5.1], on voit qu'il est linéaire continu de $H_{\alpha,0}^s(\Lambda)$ dans $P_N^{0,1}(\Lambda)$ muni de la norme ${}_{1, N} \|\cdot\|_{s, \alpha, \Lambda}$, de norme $\leq cN^{(1-s)/2}$. En appliquant ce résultat à n'importe quel polynôme φ_N de $P_N(\Lambda)$, on obtient

$${}_{1, N} \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda} \leq cN^{(1-s)/2} \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda}.$$

Grâce au Lemme A.2, le même argument utilisé pour l'opérateur $\pi_{N,0}^{0,1}$ donne la seconde majoration.

Remarque A.1 : L'inégalité (A.9) s'étend au cas $s = (1 + \alpha)/2$, à condition de remplacer la norme $\|\cdot\|_{(1+\alpha)/2, \alpha, \Lambda}$ par la norme d'interpolation d'indice $(1 - \alpha)/2$ entre $H_{\alpha,0}^1(\Lambda)$ et $L_\alpha^2(\Lambda)$.

Remarque A.2 : Dans le cas simple $\alpha = 0$, on montre en utilisant [BS, Thm 7.5] que

$$\forall \varphi_N \in P_N^{0,1}(\Lambda), \quad \|\varphi_N\|_{1/2, 0, \Lambda} \leq {}_{1, N} \|\varphi_N\|_{1/2, 0, \Lambda} \leq c \|\varphi_N\|_{1/2, 0, \Lambda}.$$

L'extension de cette démonstration aux espaces avec poids est en cours d'étude.

Nous allons maintenant établir des résultats du même type à l'ordre 2. Les techniques de démonstration sont essentiellement les mêmes. On définit l'opérateur $\pi_{N,2}^{0,2}$ de la façon suivante : pour toute fonction φ de $H_{\alpha,0}^2(\Lambda)$, le polynôme $\pi_{N,2}^{0,2} \varphi$ appartient à $P_N^{0,2}(\Lambda)$ et vérifie

$$(A.10) \quad \forall \psi_N \in P_N^{0,2}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 ((\varphi - \pi_{N,2}^{0,2} \varphi) \rho_\alpha)^n \psi_N'' d\xi = 0.$$

LEMME A.3 : *L'opérateur de projection $\pi_{N,2}^{0,2}$ se prolonge en un opérateur défini sur $L_\alpha^2(\Lambda)$ qui vérifie*

$$(A.11) \quad \forall \varphi \in L_\alpha^2(\Lambda), \quad \|\pi_{N,2}^{0,2} \varphi\|_{0, \alpha, \Lambda} \leq cN^{3/2} \|\varphi\|_{0, \alpha, \Lambda}.$$

De plus, l'opérateur de projection $\pi_{N,0}$ vérifie

$$(A.12) \quad \forall \varphi \in H_{\alpha,0}^2(\Lambda), \quad \|\pi_{N,0} \varphi\|_{2,\alpha,\Lambda} \leq cN^{3/2} \|\varphi\|_{2,\alpha,\Lambda}.$$

Démonstration : Pour toute fonction φ de $H_{\alpha,0}^2(\Lambda)$, on a

$$\forall \psi_N \in P_N^{0,2}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 (\varphi - \pi_{N,2}^{0,2} \varphi) \varphi_N^{(IV)} \rho_\alpha d\xi = 0.$$

Comme l'application : $\psi_N \rightarrow \psi_N^{(IV)}$ est linéaire injective et donc surjective de $P_N^{0,2}(\Lambda)$ dans $P_{N-4}(\Lambda)$, il existe quatre constantes γ_{N-3} , γ_{N-2} , γ_{N-1} et γ_N telles que

$$(A.13) \quad \pi_{N,2}^{0,2} \varphi = \pi_{N-4,0} \varphi + \gamma_{N-3} J_{N-3}^\alpha + \gamma_{N-2} J_{N-2}^\alpha + \gamma_{N-1} J_{N-1}^\alpha + \gamma_N J_N^\alpha.$$

Pour évaluer les constantes γ_m , $N-3 \leq m \leq N$, on applique deux fois la formule (I.18) et on obtient

$$(A.14) \quad \iint J_n^\alpha d\xi = \lambda_n J_{n+2}^\alpha + \mu_n J_{n-2}^\alpha - 2 \nu_n J_n^\alpha,$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{1}{(2n+2\alpha+1)(2n+2\alpha+3)} \frac{(n+2\alpha+1)(n+2\alpha+2)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+2)} \\ \mu_n &= \frac{1}{(2n+2\alpha-1)(2n+2\alpha+1)} \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha)}{(n+2\alpha-1)(n+2\alpha)} \\ \nu_n &= \frac{1}{(2n+2\alpha-1)(2n+2\alpha+3)}. \end{aligned}$$

Chacun de ces coefficients est majoré par cn^{-2} . On calcule alors

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \int_{-1}^1 \pi_{N,2}^{0,2}(\varphi) J_m^\alpha \rho_\alpha d\xi / \|J_m^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \\ &= - \int_{-1}^1 (\pi_{N,2}^{0,2}(\varphi) \rho_\alpha)^n \left(\iint J_m^\alpha d\xi \right) d\xi / \|J_m^\alpha\|_{0,\alpha,\Lambda}^2, \end{aligned}$$

d'où, d'après (I.17) et la formule de Stirling, en posant

$$\delta_n = \int_{-1}^1 (\pi_{N,2}^{0,2}(\varphi) \rho_\alpha)^n J_n^\alpha d\xi,$$

$$(A.15) \quad \gamma_m \leq cm^{-1} (|\delta_{m-2}| + |\delta_m| + |\delta_{m+2}|), \quad N-3 \leq m \leq N.$$

Comme $\rho_{-\alpha}(\pi_{N,2}^{0,2}(\varphi) \rho_{\alpha})''$ est un polynôme de degré $\leq N-2$, les δ_n sont nuls pour $n \geq N-1$. Lorsque n est compris entre 2 et $N-2$, il existe deux constantes λ et μ telles que le polynôme

$$M_{n+2}^{\alpha}(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\xi} (J_n^{\alpha} + \lambda J_0^{\alpha} + \mu J_1^{\alpha}) d\eta d\xi$$

appartienne à $P_N^{0,2}(\Lambda)$. On a alors

$$\begin{aligned} \delta_n &= \int_{-1}^1 (\pi_{N,2}^{0,2}(\varphi) \rho_{\alpha})'' M_{n+2}^{\alpha} d\xi \\ &= \int_{-1}^1 (\varphi \rho_{\alpha})'' M_{n+2}^{\alpha} d\xi = \int_{-1}^1 (\varphi \rho_{\alpha})'' J_n^{\alpha} d\xi. \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on peut définir les δ_n , $N-5 \leq n \leq N-2$, et donc le polynôme $\pi_{N,2}^{0,2} \varphi$ pour toute fonction φ de $L_{\alpha}^2(\Lambda)$. De plus, comme $\|J_n^{\alpha}\|_{0,\alpha,\Lambda} \leq cn^3$, on obtient les majorations

$$(A.16) \quad |\delta_n| \leq cn^3 \|\varphi\|_{0,\alpha,\Lambda} \quad \text{et} \quad |\delta_n| \leq cn^{-1/2} \|\varphi\|_{2,\alpha,\Lambda}.$$

On déduit alors de (A.13), (A.15) et (A.16) la majoration (A.11), ainsi que la majoration (A.12) en remplaçant $N-4$ par N .

On étudie alors la stabilité de l'opérateur $\pi_{N,0}^{0,2}$ de projection orthogonale de $L_{\alpha}^2(\Lambda)$ sur $P_N^{0,2}(\Lambda)$.

LEMME A.4 : L'opérateur de projection $\pi_{N,0}^{0,2}$ vérifie

$$(A.17) \quad \forall \varphi \in H_{\alpha,0}^2(\Lambda), \quad \|\pi_{N,0}^{0,2} \varphi\|_{2,\alpha,\Lambda} \leq cN^{3/2} \|\varphi\|_{2,\alpha,\Lambda}.$$

Démonstration : On commence par étudier la stabilité de l'opérateur $\pi_{N,0}^{0,1}$. Des formules (A.7) et (A.8), on déduit que, pour toute fonction φ de $H_{\alpha,0}^2(\Lambda)$,

$$\|\pi_{N,0}^{0,1} \varphi\|_{2,\alpha,\Lambda} \leq \|\pi_{N,0} \varphi\|_{2,\alpha,\Lambda} + |\beta_N| \|J_N^{\alpha'}\|_{2,\alpha,\Lambda} + |\beta_{N+1}| \|J_{N+1}^{\alpha'}\|_{2,\alpha,\Lambda}$$

avec, d'après la formule (I.18),

$$\begin{aligned} \beta_n &= - \int_{-1}^1 \varphi'' \left(\int J_n^{\alpha} d\xi \right) d\xi / \|J_n^{\alpha}\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \\ &\leq cn^{-1} \|\varphi\|_{2,\alpha,\Lambda} (\|J_{n+1}^{\alpha}\|_{0,\alpha,\Lambda} + \|J_{n-1}^{\alpha}\|_{0,\alpha,\Lambda}) / \|J_n^{\alpha}\|_{0,\alpha,\Lambda}^2 \\ &\leq cn^{-7/2} \|\varphi\|_{2,\alpha,\Lambda}. \end{aligned}$$

On obtient, d'après l'inégalité inverse (II.6),

$$\| \pi_{N,0}^{0,1} \varphi \|_{2, \alpha, \Lambda} \leq cN^{3/2} \| \varphi \|_{2, \alpha, \Lambda} .$$

Maintenant, on note que l'orthogonal de $P_N^{0,2}(\Lambda)$ dans $P_N^{0,1}(\Lambda)$ pour le produit scalaire de $L_\alpha^2(\Lambda)$ est engendré par $(1 - \zeta^2) J_N^{\alpha(III)}$ et $(1 - \zeta^2) J_{N+1}^{\alpha(III)}$. On a donc

$$(A.18) \quad \pi_{N,0}^{0,2} \varphi = \pi_{N,0}^{0,1} \varphi + \varepsilon_N (1 - \zeta^2) J_N^{\alpha(III)} + \varepsilon_{N+1} (1 - \zeta^2) J_{N+1}^{\alpha(III)} ,$$

avec, pour n égal à N et à $N + 1$,

$$(A.19) \quad \varepsilon_n = - \int_{-1}^1 \varphi (1 - \zeta^2) J_n^{\alpha(III)} \rho_\alpha d\zeta / \| (1 - \zeta^2) J_n^{\alpha(III)} \|_{0, \alpha, \Lambda}^2 .$$

On note d'abord que, d'après (I.16) et (I.14), $J_n^{\alpha(III)}$ est égal à $(n + 2\alpha + 1)(n + 2\alpha + 2) J_n^{\alpha+2} / 4$ et on en déduit [BM1, (V.28)]

$$(A.20) \quad cn^3 \leq \| (1 - \zeta^2) J_n^{\alpha(III)} \|_{0, \alpha, \Lambda} \leq c' n^3 ,$$

et, grâce à l'inégalité inverse (II.6),

$$(A.21) \quad \| (1 - \zeta^2) J_n^{\alpha(III)} \|_{2, \alpha, \Lambda} \leq cn^7 .$$

D'autre part, en utilisant (I.16) et en dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} (1 - \zeta^2) J_n^{\alpha(III)} &= 2(\alpha + 2) \zeta J_n^{\alpha''} - (n - 1)(n + 2\alpha + 2) J_n^{\alpha'} \\ &= 2(\alpha + 2)(\zeta J_n^{\alpha''}) - (n^2 + (2\alpha + 1)n + 2(\alpha + 3)) J_n^{\alpha'} . \end{aligned}$$

À partir des formules (I.15) et (I.18) respectivement, on écrit $(\zeta J_n^{\alpha''})$ et $J_n^{\alpha'}$ en fonction de $J_{n+1}^{\alpha''}$ et $J_{n-1}^{\alpha''}$. On constate que

$$(1 - \zeta^2) J_n^{\alpha(III)} = \eta_n J_{n+1}^{\alpha''} + \theta_n J_{n-1}^{\alpha''} ,$$

avec des constantes η_n et θ_n majorées par cn . On en déduit par (A.20) que

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n| &= \left| \int_{-1}^1 (\varphi \rho_\alpha)'' (\theta_n J_{n+1}^{\alpha''} + \eta_n J_{n-1}^{\alpha''}) d\zeta \right| / \| (1 - \zeta^2) J_n^{\alpha(III)} \|_{0, \alpha, \Lambda}^- \\ &\leq cn^{-11/2} \| \varphi \|_{2, \alpha, \Lambda} . \end{aligned}$$

On déduit la majoration (A.17) de (A.18), (A.21) et de la ligne précédente.

On applique les mêmes arguments que dans la démonstration du Corollaire A.1 successivement aux opérateurs $\pi_{N,2}^{0,2}$ et $\pi_{N,0}^{0,2}$. On obtient ainsi la majoration suivante de la norme ${}_{2,N} \| \cdot \|_{s, \alpha, \Lambda}$.

COROLLAIRE A.2 : *Pour tout nombre réel s , $0 \leq s \leq 2$, $s \neq (1 + \alpha)/2$ et $s \neq (3 + \alpha)/2$, pour tout polynôme φ_N de $P_N^{0,2}(\Lambda)$, on a l'équivalence de normes*

$$(A.22) \quad \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda} \leq 2, N \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda} \leq cN^{(3/4)\inf\{s, 2-s\}} \|\varphi_N\|_{s, \alpha, \Lambda}.$$

Remarque A.3 : L'inégalité (A.22) s'étend aux cas $s = (1 + \alpha)/2$ et $s = (3 + \alpha)/2$, à condition de remplacer la norme $\|\cdot\|_{(1+\alpha)/2, \alpha, \Lambda}$ par la norme d'interpolation d'indice $(3 - \alpha)/4$ entre $H_{\alpha,0}^2(\Lambda)$ et $L_{\alpha}^2(\Lambda)$ et la norme $\|\cdot\|_{(3+\alpha)/2, \alpha, \Lambda}$ par la norme d'interpolation d'indice $(1 - \alpha)/4$ entre $H_{\alpha,0}^2(\Lambda)$ et $L_{\alpha}^2(\Lambda)$.

REMERCIEMENTS

Les résultats de ce papier n'auraient pu être démontrés sans les fructueuses discussions que nous avons eues avec Vivette Girault, Manil Suri, Hervé Vandeven et Rüdiger Verfürth.

RÉFÉRENCES

- [BS] I. BABUŠKA & M. SURI, The h - p Version of the Finite Element Method with Quasiuniform Meshes, *Modél. Math. et Anal. Numér.* **21** (1987), 199-238.
- [BCaM] C. BERNARDI, C. CANUTO & Y. MADAY, Generalized Inf-Sup Conditions for Chebyshev Spectral Approximation of the Stokes Problem. *SIAM J. Numer. Anal.* **25** (1988), 1237-1271.
- [BCMM] C. BERNARDI, C. CANUTO, Y. MADAY & B. MÉTIVET, Single-Grid Spectral Collocation for the Navier-Stokes Equations, *IMA J. Numer. Anal.* **9** (1990).
- [BCoM] C. BERNARDI, G. COPPOLETTA & Y. MADAY, Some Spectral Approximations of Multidimensional Fourth-Order Problems, en préparation.
- [BM1] C. BERNARDI & Y. MADAY, Properties of some Weighted Sobolev Spaces, and Application to Spectral Approximations, *SIAM J. Numer. Anal.* **26** (1989), 769-829.
- [BM2] C. BERNARDI & Y. MADAY, A Collocation Method over Staggered Grids for the Stokes Problem, *Int. J. for Num. Methods in Fluids* **8** (1988), 537-557.
- [BM3] C. BERNARDI & Y. MADAY, Some Spectral Approximations of One-Dimensional Fourth-Order Problems, à paraître dans *J. Approx. Theory*.
- [BMM] C. BERNARDI, Y. MADAY & B. MÉTIVET, Calcul de la pression dans la résolution spectrale du problème de Stokes, *La Recherche Aérospatiale* **1** (1987), 1-21.

- [BMP] C. BERNARDI, Y. MADAY & A. T. PATERA, A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method, à paraître dans *Nonlinear P.D.E.s and their Applications*, Collège de France Seminar, H. Brezis & J.-L. Lions eds. (1990).
- [BMS] C. BERNARDI, Y. MADAY & G. SACCHI LANDRIANI, Non Conforming Matching Conditions for Coupling Spectral and Finite Element Methods, *J. Applied Numer. Math.* **6** (1989-1990), 65-84.
- [B] F. BREZZI, On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrange Multipliers, *RAIRO Anal. Numér.* **8**, R2 (1974), 129-151.
- [CF] C. CANUTO & D. FUNARO, The Schwarz Algorithm for Spectral Methods, *SIAM J. Numer. Anal.* **25** (1988), 24-40.
- [CHQZ] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI & T. A. ZANG, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag (1987).
- [CQ] C. CANUTO & A. QUARTERONI, Approximation Results for Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces, *Math. of Comp.* **38** (1982), 67-86.
- [DR] P. J. DAVIS & P. RABINOWITZ, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press (1985).
- [GR] V. GIRAULT & P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag (1986).
- [G] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman (1985).
- [H] *Handbook of Mathematical Functions*, M. Abramowitz & I. A. Stegun eds., Dover Publications (1970).
- [JV] S. JENSEN & M. VOGELIUS, Divergence Stability in Connection with the p -Version of the Finite Element Method, soumis à *Numer. Math.*
- [LM] J.-L. LIONS & E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Volume 1, Dunod (1968).
- [M] Y. MADAY, Analysis of Spectral Operators in One-Dimensional Domains, *Math. of Comp.* (1990).
- [Mé] B. MÉTIVET, *Résolution des équations de Navier-Stokes par méthodes spectrales*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie (1987).
- [N] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson (1967).
- [S] G. SACCHI LANDRIANI, Communication personnelle.
- [SV] G. SACCHI LANDRIANI & H. VANDEVEN, Polynomial Approximation of Divergence-Free Functions, *Math. of Comp.* **52** 185 (1989), 103-130.
- [Sj] SHEN JIE, *Résolution numérique des équations de Stokes et de Navier-Stokes par les méthodes spectrales*, Thèse, Université Paris Sud (1987).
- [V] H. VANDEVEN, Compatibilité des espaces discrets pour l'approximation spectrale du problème de Stokes périodiques/non périodique, *Modél. Math. et Anal. Num.* **23** (1989), 649-688.