

P. LAURENT-GENGOUX

D. NEVEU

**Calcul des singularités par la méthode
des éléments finis**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 24, n° 1 (1990), p. 85-101

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1990__24_1_85_0

© AFCET, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CALCUL DES SINGULARITÉS
 PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS (*)**

P. LAURENT-GENGOUX ⁽¹⁾, D. NEVEU ⁽¹⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *Nous présentons une méthode de calcul numérique des grandeurs caractéristiques des singularités dans les équations aux dérivées partielles : exposants et facteurs d'intensité de contrainte. La méthode présentée peut être utilisée comme un « post-processeur » très général n'utilisant que les résultats fournis par une approximation usuelle de l'équation par la méthode des éléments finis.*

Abstract. — *A new method is given to compute some of the characteristic values (the exponents and the so called stress intensity factors) describing the singular behaviour at the boundary of any solution of an elliptic partial differential equation. This numerical method may be used in very general situations, combined to any finite element package.*

PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Nous nous limiterons dans la présentation de la méthode à des conditions aux limites particulières. Les expériences numériques sont réalisées sur des exemples plus réalistes. Nous considérons sur \mathbb{R}^N un système de m équations aux dérivées partielles à coefficients constants pour m fonctions inconnues, ne comportant que des termes du second ordre. Nous supposons que l'opérateur aux dérivées partielles associé, noté L , est elliptique. Soit Ω l'intersection de la boule unité de \mathbb{R}^N et de l'intérieur d'un cône de sommet O . Nous étudions le comportement local autour du « coin » O d'une solution du problème :

$$(1) \quad \begin{aligned} L(u) &= 0(\Omega), \\ u &\in H^1(\Omega), \\ u &= 0(\Gamma_0), \end{aligned}$$

(*) Reçu en octobre 1987, révisé en mai 1988.

(¹) École Centrale des Arts et Manufactures, Grande Voie des Vignes, 92295 Châtenay-Malabry Cedex.

où Γ_0 désigne la frontière de Ω formée par les génératrices du cône. On note Γ la frontière de Ω formée par la calote sphérique, et on suppose que Γ et Γ_0 sont régulières.

Nous résumons dans le § 1 les résultats théoriques présentés dans [6] et nous y ajoutons dans le § 2 une expression théorique des facteurs d'intensité de contrainte. Nous présentons dans le § 3 la discrétisation du problème à l'aide d'une approximation par la méthode des éléments finis qui conduit à une méthode de calcul numérique des exposants et des facteurs d'intensité de contrainte. Quelques exemples et une discussion des résultats sont enfin présentés dans le § 4.

Notations

* *Cadre fonctionnel* : Afin d'alléger l'écriture, nous noterons $H^k(\Omega)$ (resp. $H^k(\Gamma)$) les espaces de fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^m notés usuellement $H^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, (resp. $H^k(\Gamma, \mathbb{R}^m)$).

On note $H_0(\Omega)$ le sous-espace des éléments de $H^1(\Omega)$ dont la trace sur Γ_0 est nulle, $H_0^{1/2}(\Gamma)$ le sous-espace de $H^{1/2}(\Gamma)$ formé par les traces sur Γ des éléments de $H_0(\Omega)$ c'est-à-dire encore, la restriction à Γ des éléments de $H^{1/2}(\Gamma \cup \Gamma_0)$ nuls sur Γ_0 . L'espace $H_0(\Omega)$ est muni de la norme usuelle de $H_0^1(\Omega)$. Le sous-espace V de $H_0(\Omega)$ formé par les solutions du problème (1), muni de la norme induite est un sous-espace fermé de $H_0(\Omega)$.

* *Opérateur L* . L'opérateur du second ordre L s'écrit sous la forme générale :

$$L(u) = \operatorname{div} (A \cdot \nabla u) = \partial_j (A_{ijkl} \cdot \partial_l u_k),$$

où A est un tenseur d'ordre quatre à coefficients constants. On lui associe le produit scalaire sur $H_0(\Omega)$, équivalent au produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$ défini par :

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega} A_{ijkl} \cdot \partial_l u_k \cdot \partial_j v_i \, dx.$$

On note tr l'application trace de $H_0(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Par dualité, on définit l'application dérivée normale (associée à l'opérateur A) de $H_0(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ par :

$$\sigma(u) \cdot n = A_{ijkl} \cdot \partial_l u_k \cdot n_j(\Gamma),$$

où n désigne la normale unitaire extérieure au domaine Ω . D'après la formule de Green, on a :

$$\langle L(u), v \rangle_0 + \langle u, v \rangle_1 = \langle \sigma(u) \cdot n, v \rangle, \quad \forall u, v \in H_0(\Omega),$$

où $\langle \dots \rangle_0$ désigne le produit scalaire dans l'espace $L^2(\Omega)$,
 et $\langle \dots \rangle$ le produit de dualité entre les espaces $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$.

* *Coordonnées sphériques.* On désigne par r la distance du point x de Ω au coin O , et par φ le vecteur unitaire tel que $x = r\varphi$.

I. MÉTHODE DES HOMOTHÉTIES

I.1. Régularité des solutions

Les résultats de régularité pour les problèmes elliptiques du second ordre permettent d'établir que les solutions u du problème (1) sont régulières au sens H^2_{loc} . Plus précisément, si B désigne la bande dans Ω définie par :

$$B = \{x \in \Omega / R_1 < r < R_2\}, \quad \text{où } 0 < R_1 < R_2 \leq 1,$$

alors u appartient à $H^2(B)$. Mais, si C est un voisinage du coin, u n'est pas en général dans $H^2(C)$, ni donc dans $H^2(\Omega)$. Nous appelons solutions singulières celles qui n'appartiennent pas à $H^2(C)$.

Le comportement asymptotique de ces solutions au voisinage du coin peut être entièrement déterminé par la connaissance de solutions particulières : les « singularités pures ». Celles-ci sont elles mêmes caractérisées comme des vecteurs propres des opérateurs « d'homothétie » par rapport au sommet O du coin. Nous résumons ci-dessous les résultats théoriques établis dans [6].

I.2. Homothéties

Les homothéties T_λ de rapport λ , avec $\lambda \leq 1$, sont définies sur $H_0(\Omega)$ par :

$$T_\lambda u(r, \varphi) = \lambda^{N/2-1} \cdot u(\lambda r, \varphi)$$

(le facteur de normalisation $\lambda^{N/2-1}$ est tel que si Ω_λ est l'intersection de Ω avec la boule de rayon λ , on ait $\int_\Omega \|\nabla T_\lambda u\|^2 dx = \int_{\Omega_\lambda} \|\nabla u\|^2 dx$).

Ces homothéties forment un semi-groupe de contraction (en remplaçant λ par le paramètre $t \geq 0$ tel que $\lambda = e^{-t}$) et laissent invariant l'espace V des solutions du problème (1). Elles laissent également invariant le sous-espace des solutions régulières, qui sont dans H^2 au voisinage du coin. Pour étudier ces homothéties nous introduisons un opérateur équivalent S_λ :

Soit tr l'application trace de $H_0(\Omega)$ dans $H_0^{1/2}(\Gamma)$ et s l'application qui à une fonction g de $H_0^{1/2}(\Gamma)$ associe la solution u du problème (1) dont la trace

sur Γ est égale à g . Ces applications sont des isomorphismes réciproques entre les espaces V et $H_0^{1/2}(\Gamma)$. On définit alors l'opérateur S_λ sur $H_0^{1/2}(\Gamma)$ par :

$$S_\lambda = \text{tr} \circ T_\lambda \circ s .$$

Si nous identifions les fonctions définies sur la couronne de rayon λ aux fonctions définies sur Γ , S_λ est intuitivement l'opérateur qui, à une fonction donnée g sur le bord extérieur Γ , associe la solution du problème (1), puis la trace de cette solution sur la couronne de rayon $r = \lambda$.

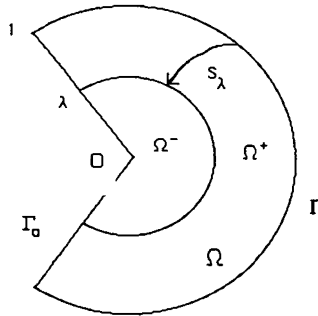


Figure 1.

I.3. Propriétés spectrales des homothéties

Les deux opérateurs S_λ et T_λ ont les mêmes propriétés spectrales et admettent les mêmes valeurs propres. Les vecteurs propres de T_λ sont de la forme :

$$u(r, \varphi) = r^\beta f(\varphi) ,$$

plusieurs fonctions angulaires $f(\varphi)$ pouvant être associées à une même valeur de β ; ces fonctions angulaires étant les vecteurs propres de S_λ . La valeur propre correspondante est λ^α , où $\alpha = \beta - 1 + N/2$. S'il existe des blocs de Jordan non dégénérés, les sous-espaces caractéristiques associés sont engendrés par des fonctions de la forme :

$$u(r, \varphi) = r^\beta f(\varphi), r^\beta((\text{Log } r) f(\varphi) + h(\varphi)), \dots .$$

Ces fonctions appartiennent à $H_0(\Omega)$ si $\text{Re } \alpha > 0$, ou si $\text{Re } \alpha = 0$ et $k = 0$. Elles appartiennent en outre à $H^2(C)$ si $\text{Re } \alpha > 1$, ou si $\text{Re } \alpha = 1$ et $k = 0$. On appelle singularités pures, les vecteurs propres ou éléments

caractéristiques qui n'appartiennent pas à $H^2(C)$. Nous allons montrer que les solutions du problème (1) s'écrivent comme somme d'une fonction de $H^2(C)$ et d'une combinaison linéaire finie de singularités pures.

I.4. Propriétés des singularités pures

Les valeurs propres de T_λ et S_λ sont inférieures ou égales à 1 en module (ce sont des opérateurs de contraction), elles définissent des singularités pures si elles sont de module supérieur à λ .

PROPRIÉTÉ 1 : *L'opérateur S_λ est compact de $H_0^{1/2}(\Gamma)$ dans lui-même (pour $\lambda \leq 1$). L'opérateur T_λ est compact de V dans lui-même.*

En utilisant la décomposition spectrale des opérateurs compacts on en déduit la propriété 2 :

PROPRIÉTÉ 2 : *Toutes les solutions du problème (1) s'écrivent comme somme d'une fonction de $H^2(C)$ et d'une combinaison linéaire finie de singularités pures.*

Ces singularités pures définissent donc complètement le comportement singulier des solutions. Le premier problème numérique est donc de déterminer les plus grandes valeurs propres des opérateurs d'homothétie pour connaître les valeurs propres de module supérieur à λ . Soit $\{S_i\}_{i=1,p}$ une base de sous-espace formé par les singularités pures, une solution u quelconque admet donc une décomposition de la forme :

$$u = \sum K_i \cdot s_i + u_R,$$

où u_R est une fonction de $H^2(C)$. Les coefficients K_i sont appelés facteurs d'intensité. Le deuxième problème numérique est de déterminer ces coefficients. Leur expression est décrite au chapitre suivant.

II. LES FACTEURS D'INTENSITÉ

Les facteurs d'intensité s'expriment simplement à l'aide des vecteurs propres des opérateurs S_λ et S_λ^* , l'opérateur transposé étant pris au sens de la dualité entre les espaces $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H_0^{1/2}(\Gamma)$. Si T_λ^* est le transposé de T_λ au sens de la dualité sur l'espace V des solutions, les deux opérateurs sont reliés par la relation :

$$S_\lambda^* = s^* \circ T_\lambda^* \circ \text{tr}^*$$

où tr^* est l'opérateur qui à une fonction g de $H^{-1/2}(\Gamma)$ associe la solution u de l'équation telle que $\sigma(u) \cdot n = g$ sur le bord Γ tandis que s^* est l'opérateur qui à une solution u de l'équation associe $\sigma(u) \cdot n$.

Remarque : Pour simplifier, nous supposons que la restriction de l'opérateur T_λ au sous-espace des singularités pures est diagonalisable. Les fonctions s_i peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$s_i(r, \varphi) = r^{\alpha_i} \cdot f_i(\varphi),$$

et la trace de la solution u sur le bord Γ se décompose en :

$$\text{tr } u = \sum K_i \cdot f_i + \text{tr } u_R.$$

II.1. Expression des facteurs d'intensité

On notera $\{\Sigma_i\}_{i=1,p}$ les vecteurs propres de l'opérateur transposé T_λ^* associés aux mêmes valeurs propres que les singularités pures. Ces vecteurs propres vérifient la propriété classique d'orthogonalité :

PROPRIÉTÉ 3 : *Le sous-espace de vecteurs propres $\{\Sigma_i\}_{i=1,p}$ de l'opérateur T_λ^* est orthogonal à l'ensemble des solutions régulières du problème (1).*

On a donc de même :

PROPRIÉTÉ 4 : *Les traces duales $\{g_i\}_{i=1,p}$, où $g_i = \sigma(\Sigma_i)$, n sur le bord Γ sont des vecteurs propres de l'opérateur transposé S_λ^* , et sont orthogonales aux traces duales des fonctions régulières.*

En outre, les fonctions Σ_i peuvent être choisies de telle sorte que, sur le bord Γ , on ait les relations d'orthogonalité :

$$\langle\langle g_i, f_j \rangle\rangle = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

L'expression des facteurs d'intensité s'en déduit alors par :

$$K_i = \frac{\langle\langle g_i, u \rangle\rangle}{\langle\langle g_i, f_i \rangle\rangle}.$$

II.2. L'opérateur transposé S_λ^*

Dans ce paragraphe, on explicite l'expression de l'opérateur transposé S_λ^* au sens de la dualité des espaces $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H_0^{1/2}(\Gamma)$. Soit g un élément de $H^{-1/2}(\Gamma)$, $S_\lambda^*(g)$ est caractérisé par la relation :

$$\langle\langle S_\lambda^*(g), f \rangle\rangle = \langle\langle g, S_\lambda(f) \rangle\rangle, \quad \forall f \in H^{1/2}(\Gamma).$$

On rappelle que l'opérateur S_λ est défini sur $H_0^{1/2}(\Gamma)$ par :

$$S_\lambda(f) = u(\lambda, \varphi),$$

où u est la solution du problème (1) vérifiant $\text{tr } u = f$ sur le bord Γ . On considère la solution w du problème variationnel suivant :

$$(E) \quad \begin{aligned} w &\in H_0^1(\Omega), \\ \langle w, v \rangle_1 &= - \langle g, v(\lambda, \varphi) \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

La fonction w est également la solution faible du problème aux limites :

$$(2) \quad \begin{aligned} L(w) &= 0 \quad (\Omega_\lambda^+ \cup \Omega_\lambda^-), \\ \lambda(\sigma^+(w) \cdot n - \sigma^-(w) \cdot n) &= g \quad (\Gamma_\lambda), \\ w &\in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

où Ω_λ^+ (resp. Ω_λ^-) désigne le sous domaine $\Omega \cap \{x/r = \|x\| > \lambda\}$ (resp. $\Omega \cap \{x/r = \|x\| < \lambda\}$) de Ω , et Γ_λ la couronne $\Omega \cap \{x, r = \lambda\}$ (cf. fig. 1). L'expression $(\sigma^+(w) \cdot n - \sigma^-(w) \cdot n)$ représente la discontinuité de dérivée normale sur le bord Γ_λ .

Le second membre de l'égalité (E) ci dessus s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle g, S_\lambda(f) \rangle &= \langle g, u(\lambda, \varphi) \rangle \\ &= \langle \lambda(\sigma^+(w) \cdot n - \sigma^-(w) \cdot n), u(\lambda, \varphi) \rangle \quad (\Gamma), \\ &= \langle \sigma^+(w) \cdot n - \sigma^-(w) \cdot n, u(\lambda, \varphi) \rangle \quad (\Gamma_\lambda). \end{aligned}$$

D'après les problèmes aux limites vérifiés par u et w , on obtient, à l'aide de la formule de Green :

$$\langle g, S_\lambda(f) \rangle = \langle \sigma(w) \cdot n, u \rangle,$$

d'où :

$$S_\lambda^*(g) = \sigma(w) \cdot n,$$

où w est la solution du problème aux limites (2) associé à la fonction g .

Remarque : Lorsque les équations sont celles de l'élasticité linéaire, l'opérateur S_λ^* admet une interprétation mécanique simple : soit un solide de forme Ω fixé sur le bord Γ_0 , à une densité d'efforts imposés sur la couronne de rayon λ , $S_\lambda^*(g)$ associe la réaction sur le bord Γ_0 du solide en équilibre.

III. DISCRÉTISATION DU PROBLÈME

III.1. Construction

Le principe de la méthode numérique des homothéties est de discrétiser l'opérateur S_λ décrit ci-dessus, puis de calculer les plus grandes valeurs propres et les vecteurs propres associés de l'opérateur discrétisé. Nous construisons donc une approximation du problème (1) par la méthode des éléments finis sur un maillage radial autour du coin du type de celui qui est présenté dans la figure [5].

Le problème discrétisé s'écrit :

$$(2) \quad L_h(u_h) = 0 \quad (\Omega_h).$$

L'opérateur S_λ est approché par l'opérateur Σ_λ qui, à une donnée discrète γ sur le bord Γ , associe la valeur de la solution u_h du problème discret sur la sphère de rayon λ .

III.2. Méthode de calcul des valeurs propres

Nous calculons les éléments propres de l'opérateur Σ_λ par la méthode d'itération groupée avec réorthogonalisation. On peut procéder de même pour l'opérateur transposé décrit dans le § 2. On obtient ainsi avec une bonne précision les valeurs propres réelles ou complexes. Remarquons que si dans le problème (1) les conditions aux limites sur le bord Γ_0 du coin sont des conditions de bord libres, l'opérateur Σ_λ admettra la valeur propre 1, associée aux solutions constantes, qui sera donc la plus grande valeur propre ; il faudra donc calculer les valeurs propres suivantes pour obtenir les singularités. Si l'on veut diminuer le temps de calcul on peut aussi éliminer les constantes par déflation. Remarquons enfin que l'existence éventuelle de solutions analytiques au problème (1) implique l'existence de valeurs propres évidentes correspondant à des exposants α entiers. Pour des problèmes bidimensionnels on peut calculer la matrice de l'opérateur Σ_λ qui est une matrice pleine de petite taille.

Les valeurs propres de S_λ sont de la forme $\lambda^\alpha i$, si bien qu'elles sont d'autant mieux séparées que λ est petit, ce qui influence favorablement la convergence de la méthode d'itération. En revanche la solution du problème d'élément fini est moins précise sur les sphères de rayon petit, voisines du point singulier.

III.3. Méthode de calcul des facteurs d'intensité de contraintes

Nous considérons des problèmes pour lesquels le domaine décrit ci-dessus ne représente qu'une partie du domaine complet. Nous supposons connus

les vecteurs propres ϕ_i et γ_i de S_λ et Σ_λ . On résout d'abord le problème sur le domaine complet par une approximation par la M.E.F. Il suffit ensuite de calculer les valeurs de la solution sur une couronne de rayon λ_0 autour du coin O , les facteurs d'intensité de contrainte se déterminent alors par la relation :

$$K_i = \frac{\langle \gamma_i, u \rangle}{\lambda_0 \alpha_i \langle \gamma_i, \phi_i \rangle}.$$

où les produits scalaires sont des produits scalaires discrets.

IV. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Nous présentons, pour tester la méthode, des résultats de calculs effectués en dimension 2 sur divers problèmes d'élasticité linéaire pour des matériaux homogènes ou bien formés de deux composants distincts. Ces problèmes ont été étudiés par des méthodes analytiques ou semi-analytiques par divers auteurs (*cf.* [7]).

IV.1. Influence des paramètres

Nous avons étudié l'influence des caractéristiques du maillage, du type d'éléments finis et du rayon λ sur la précision du résultat dans le cas classique du fond de fissure. Les résultats sont synthétisés dans la figure (2). Il s'en dégage les conclusions suivantes :

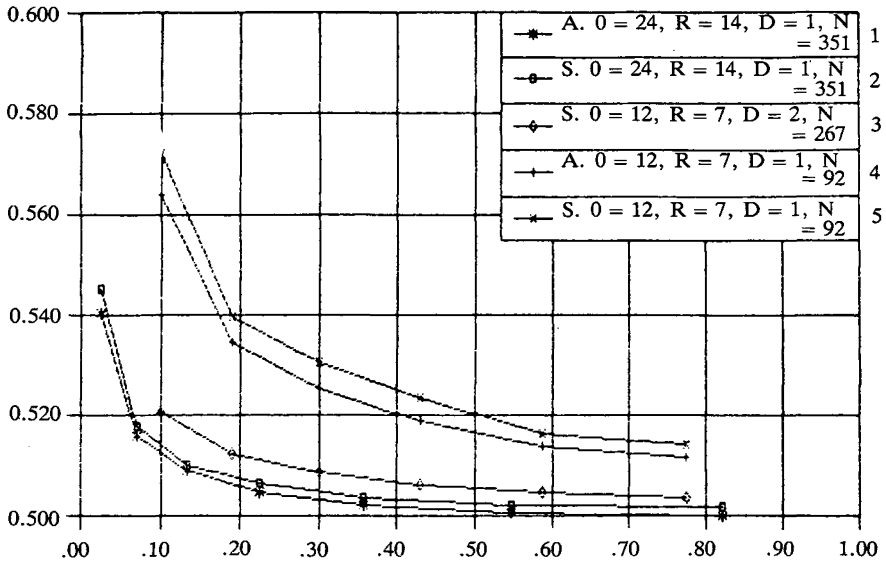
— la précision des calculs croît avec le rayon λ . Compte tenu de la remarque du § III ci-dessus, il semble que $\lambda = 0.5$ soit un bon compromis entre la vitesse de convergence des itérations et la précision.

— Pour le même nombre de degrés de liberté les éléments affines donnent d'aussi bon résultats que les éléments quadratiques.

— différents essais sur le nombre d'éléments pris sur un rayon et sur la circonférence ont montré que l'influence du nombre de points pris sur la couronne est beaucoup moins déterminante que celle du nombre de points radiaux.

IV.2. Exemples de calcul des exposants et des singularités pures

Nous présentons les résultats correspondant à quelques cas classiques où les solutions sont connues analytiquement ou numériquement. Nous calculons les exposants β ($= \alpha$ en dimension 2) sans nous limiter aux singularités. Les exemples présentés sont des problèmes d'élasticité en déformation plane (E est le module d'Young du matériau et ν le coefficient de Poisson).



ÉLÉMENTS AFFINES 1 : singularité pure antisymétrique ; 351 nœuds
2 : singularité pure symétrique ; 351 nœuds.

ÉLÉMENTS QUADRATIQUES 3 : singularité pure symétrique ; 267 nœuds.
ÉLÉMENTS AFFINES 4 : singularité pure antisymétrique ; 92 nœuds
5 : singularité pure symétrique ; 92 nœuds.

θ nombre de points sur la circonférence.
 R nombre de points sur le rayon.

Figure 2.

Fond de fissure (bord libre)

Maillage : 15 points radiaux, 25 points sur la circonférence.
 Exposants calculés

0 0 0.502 0.503 1 1 1.495 1.499 1.992 2.015 2.481 2.562

Exposants exacts (calcul analytique)

0 0 0.500 0.500 1 1 1.500 1.500 2.000 2.000 2.500 2.500

Coin homogène

Étude de la singularité au voisinage d'un angle rentrant de $3\pi/2$.
 Maillage : 15 points radiaux, 20 points sur la circonférence.

Exposants calculés

$$0 \quad 0 \quad 0.547 \quad 0.908 \quad 1.000 \quad 1.631 \pm i \, 0.234$$

Exposants exacts (calcul analytique)

$$0 \quad 0 \quad 0.545 \quad 0.908 \quad 1.000 \quad 1.629 \pm i \, 0.231$$

Nous avons visualisé dans les figures [3], [4] les fonctions angulaires propres de S_λ et S_λ^* correspondantes, les déplacements à l'intérieur du domaine [5] et les contraintes qui s'en déduisent [6].

Bord droit, conditions aux limites mixtes

Étude de la singularité au voisinage du point frontière entre un bord fixé et un bord libre.

Maillage : 22 points radiaux, 13 points sur la circonférence.

Caractéristiques du matériau : $E = 1$, $\nu = 0.3$.

Exposants calculés

$$0.504 \pm i \, 0.108 \quad 1.500 \pm i \, 0.112 \quad 2.511 \pm i \, 0.112$$

Exposants exacts (calcul analytique)

$$0.500 \pm i \, 0.116 \quad 1.500 \pm i \, 0.116 \quad 2.500 \pm i \, 0.116$$

Bord droit, bimatériaux

Étude de la singularité au voisinage d'un point du bord à la jonction de deux matériaux.

Maillage : 15 points radiaux, 13 points sur la circonférence.

Caractéristiques du matériau 1 : $E_1 = 10$, $\nu_1 = 0.3$.

Caractéristiques du matériau 2 : $E_2 = 1$, $\nu_2 = 0.3$.

Exposants calculés

$$0 \quad 0 \quad 0.796 \quad 0.996 \quad 1.749 \pm i \, 0.494$$

Exposants calculés par Y. Ousset [7]

$$0 \quad 0 \quad 0.8 \quad 1.000 \quad \text{n.c.}$$

Coin, bimatériaux

Étude de la singularité au voisinage d'un coin rentrant à la jonction de deux matériaux (conformément à la fig. [9]).

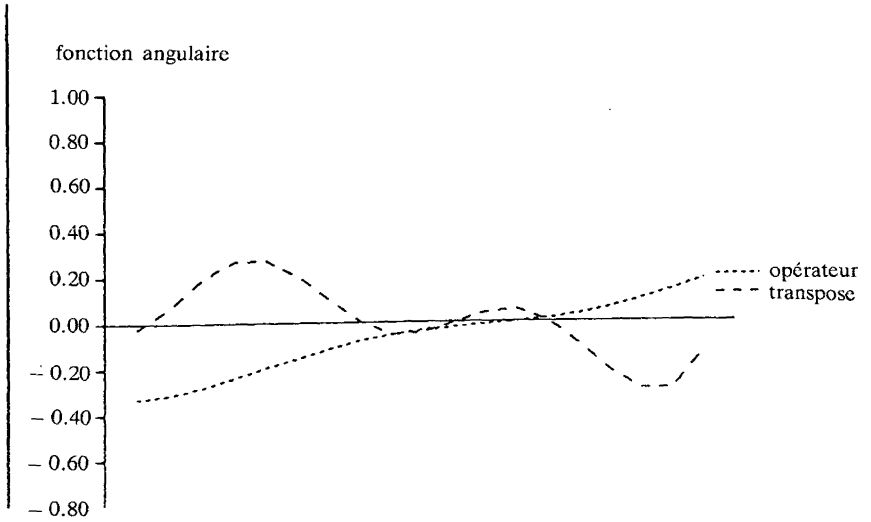


Figure 3. — COIN HOMOGENÈME : Fonction angulaire propre de S_λ et S_λ^* ; $\beta = 0,547$.

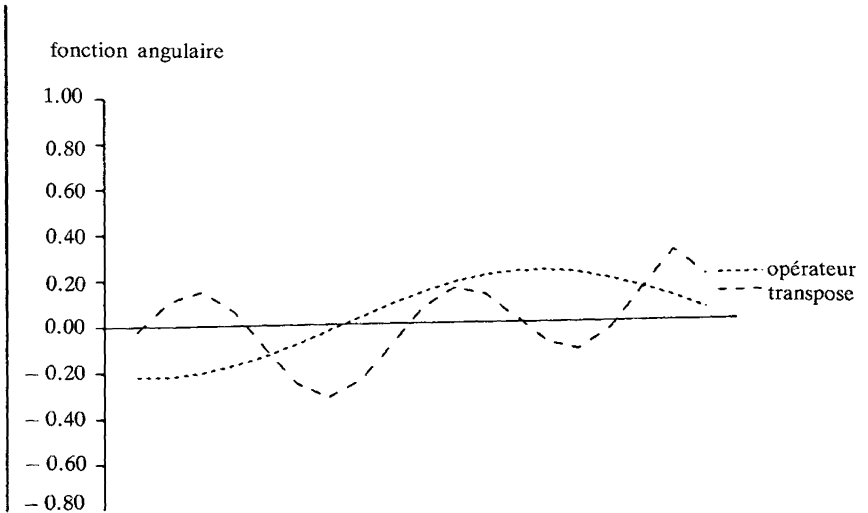


Figure 4. — Fonction angulaire propre de S_λ et S_λ^* ; $\beta = 0,908$.

Figure 5. — COIN HOMOGÈNE : Visualisation des déplacements $\beta = 0,547$.

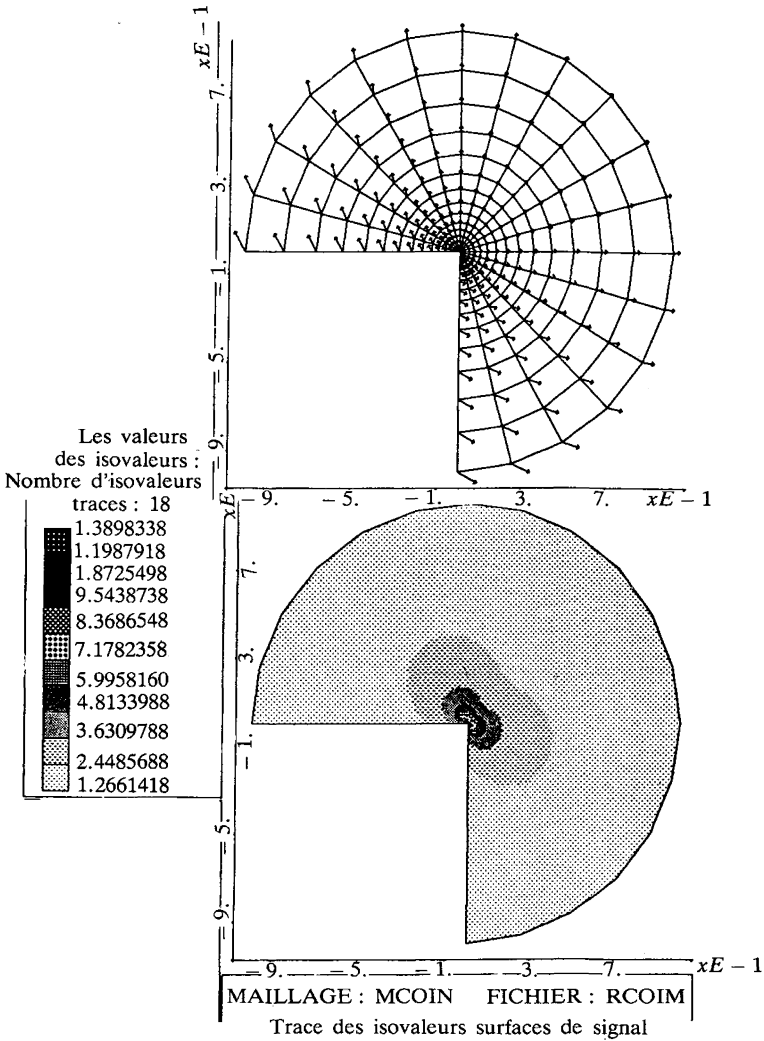


Figure 6. — COIN HOMOGÈNE : Visualisation des contraintes $B = 0,547$.

Maillage : 15 points radiaux, 20 points sur la circonférence.
 Caractéristiques du matériau 1 : $E_1 = 200$, $\nu_1 = 0.3$.
 Caractéristiques du matériau 2 : $E_2 = 3.4$, $\nu_2 = 0.35$.
 Exposants calculés

0 0 0.672 1.001 0.999

Exposants exacts (d'après Y. Ousset [7])

0 0 0.673 1.000 1.000

IV.3. Calculs des facteurs d'intensité

Nous donnons deux exemples tests de ces calculs pour le fond de fissure et pour un problème de joint collé.

Le fond de fissure

Pour des déplacements imposés sur le bord nous calculons le facteur d'intensité de contraintes, puis les contraintes σ_y mesurées sur la solution singulière correspondante (avec $E = 1$ et $\nu = 0.3$). Nous comparons ces résultats avec un calcul direct de la solution par une approximation par éléments finis.

En différents points de l'axe de symétrie :

abscisses (en mm)	0.4	0.6	0.8
Solution singulière $K_i s_i, \sigma_y =$	- 2.3	- 1.9	- 1.8
Solution éléments finis, $\sigma_y =$	- 2.3	- 1.85	- 1.7

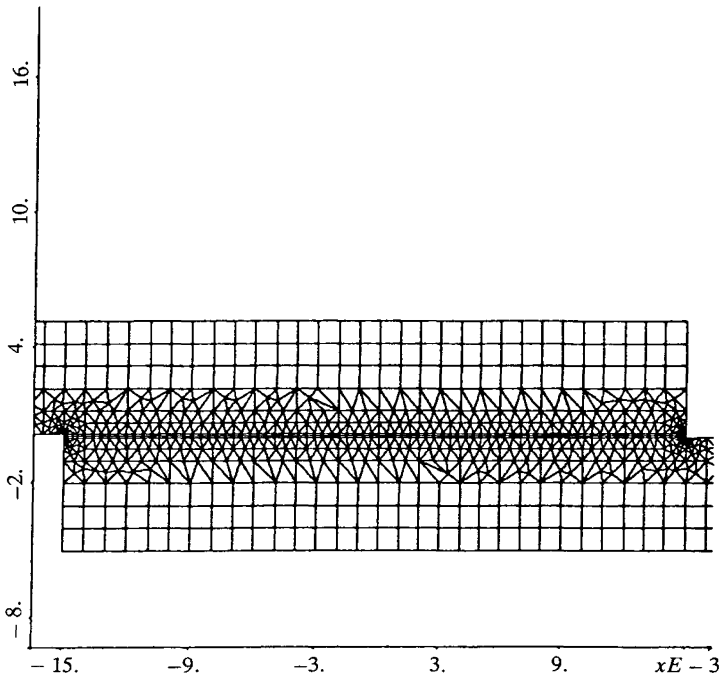


Figure 7. — JOINT COLLE : maillage global.

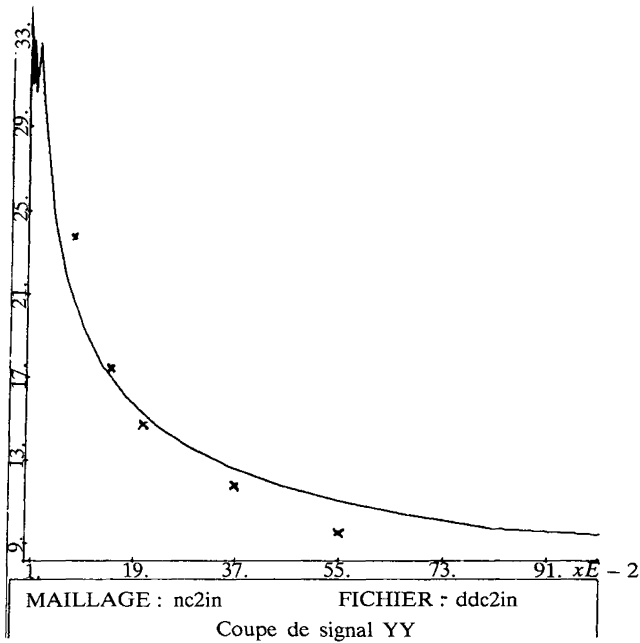


Figure 8. — JOINT COLLE : Contraintes calculées sur la partie singulière $K_i u_i$ (X : calculs par la méthode des éléments finis).

Le joint collé

Nous avons étudié les singularités à la jonction d'une plaque métallique et d'un joint souple. Ce problème correspond au maillage représenté figure [7]. Le « coin » correspondant est exactement le coin avec deux matériaux qui est étudié ci-dessus. Une résolution par éléments finis sur toute la structure nous permet d'estimer les déplacements sur une couronne. La formule du § III.3 ci-dessus nous permet alors de calculer le facteur d'intensité de contraintes. Nous représentons figure [8] les valeurs des contraintes σ_y pour la solution singulière correspondante. Nous avons reporté sur le même graphique les valeurs calculées par une approximation éléments finis directe.

IV.4. Conclusion

La méthode des homothéties fournit, outre une présentation simple et naturelle de la théorie des singularités, la possibilité de réaliser un « post processeur » très général pour calculer les exposants caractéristiques, les

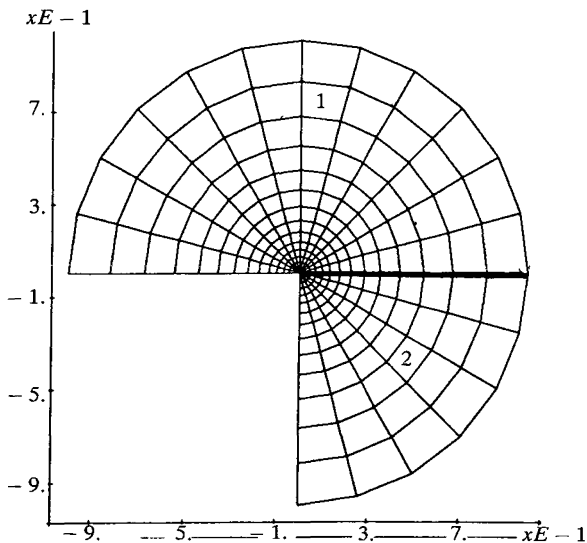


Figure 9. — COIN BIMATÉRIAUX.

solutions singulières et les facteurs d'intensité de contrainte. Les calculs sont, pour des situations particulières, plus lourds que dans les méthodes semi-analytiques là où elles sont utilisables (*cf.* [7]). Mais la généralité de la méthode permet à partir d'un code très simple de traiter les problèmes les plus divers, isotropes ou anisotropes, en dimension 2 ou 3 dès lors que l'on dispose d'une approximation par éléments finis du problème.

RÉFÉRENCES

- [1] I. BABUSKA, A. MILLER, *The post-processing approach in the finite element method*. International Journal For Numerical Method in Engineering, Vol. 20 (1984).
- [2] R. DAUTRAY, J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Coll. CEA (1984) Masson.
- [3] P. DESTUYNDER, M. DJAOUA, *Estimation de l'erreur dans les coins*. RAIRO vol. 14 n° 3 (1980) p. 239 à 248.
- [4] P. GRISVARD, *Elliptic problems in non smooth domain* (1985) Pitman.
- [5] GRISVARD, WENDLAND, Whitman editor *Singularities and constructive methods for their treatments*. Lecture notes 1127 ; (1984) Springer.

- [6] P. LAURENT-GENGOUX, *Singularités au bord dans les équations aux dérivées partielles*. C.R.A.S. t. 305, Série I, p. 175-178 (1987).
- [7] Y. OUSSET, Rapport CETIM Senlis (1986).
- [8] I. J. TADJBAKHSI, J. R. YEH, *Stress singularities in composite laminates by finite element method*; *Journal of Composite Materials*. Vol. 20-July 1986.
- [9] TOLKSDORF, *On the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equation in domain with conical boundary point*. Commun. partial diff. Equ. 8, 713-817 (1983).
- [10] Y. YAMADA, H. OKUMURA, *Finite element analysis of stress and strain singularity eigenstate in inhomogeneous media or composite materials*. in *Hybrid and mixed finite element methods*; Atluri, Gallagher, Zienkiewicz Ed. (1983) John Wiley.