M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

HERVÉ VANDEVEN

Compatibilité des espaces discrets pour l'approximation spectrale du problème de Stokes périodique/non périodique

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 23, nº 4 (1989), p. 649-688

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1989__23_4_649_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 23, n° 4, 1989, p. 649-688)

COMPATIBILITÉ DES ESPACES DISCRETS POUR L'APPROXIMATION SPECTRALE DU PROBLÈME DE STOKES PÉRIODIQUE/NON PÉRIODIQUE (*)

par Hervé VANDEVEN [1]

Communiqué par R. TEMAM

Résumé — *Nous résolvons le problème de la compatibilité entre les espaces discrets intervenant dans l'approximation par méthodes spectrales d'un problème de Stokes Nous montrons comment choisir ces espaces pour qu'une condition inf-sup soit vérifiée uniformément par rapport au paramètre de discrétisation*

Abstract. — *We solve the compatibility problem between the discrete spaces which intervene in the spectral approximations of a Stokes problem We show how to choose these spaces in order that an inf-sup condition is satisfied uniformely with respect to the parameter associated with the discretization*

I. INTRODUCTION

Récemment, de nombreux algorithmes utilisant les méthodes spectrales ont été mis au point pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} -\nu\,\Delta\mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \end{cases} \tag{I.1}$$

pour des conditions aux limites soit périodiques, soit de Dirichlet homogènes dans certaines directions et périodiques dans les autres. Ici, $\mathbf{f}$ représente une densité de force et ν est la viscosité. Les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p.

(*) Reçu en juillet 1987, révisé en juillet 1988.

[1] Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Tour 55-65, 5[e] étage, 4, place Jussieu, F75230 Paris Cedex 05, France

Le problème de Stokes, obtenu en négligeant dans (I 1) le terme non linéaire, s'écrit sous une forme variationnelle du type trouver $(\mathbf{u}, p)$ dans $\mathbf{X} \times \mathbf{M}$ de sorte que l'on ait

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X} , & a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = L(\mathbf{v}) , \\ \forall q \in \mathbf{M} , & b(\mathbf{u}, q) = 0 , \end{cases} \tag{I 2}$$

$\mathbf{X}$ et $\mathbf{M}$ désignant les espaces des vitesses et des pressions, a et b étant deux formes bilinéaires sur $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ et $\mathbf{X} \times \mathbf{M}$ et L étant une forme linéaire sur $\mathbf{X}$ L'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (I 2) sont obtenues en utilisant le théoreme classique du point-selle (voir par exemple [4, Corollary 1 1] ou [8, Chap I, Corollary 4 1]) , il s'agit de vérifier plusieurs propriétés des formes bilinéaires a et b et notamment la condition de compatibilité suivante entre les espaces $\mathbf{X}$ et $\mathbf{M}$

$$\inf_{q \in \mathbf{M}} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_X \|q\|_M} = C , \tag{I 3}$$

pour une constante C strictement positive

Nous nous intéressons dans cet article à l'approximation spectrale du probleme (I 1) par une méthode de grilles décalées , nous referons à [6] ainsi qu'à [3] et aux références qui s'y trouvent

Le principe de ces méthodes est de définir des espaces discrets $\mathbf{X}_h$ pour la vitesse et $\mathbf{M}_h$ pour la pression, constitues de polynômes trigonométriques ou algébriques (h désigne un parametre lié à la discrétisation) , on introduit des formes bilinéaires discretes a_h et b_h sur $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ et $\mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h$, une forme linéaire discrète L_h sur $\mathbf{X}_h$ et on résout un problème variationnel discret du type trouver $(\mathbf{u}_h, p_h)$ dans $\mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h$ de sorte que l'on ait

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h , & a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = L_h(\mathbf{v}_h) , \\ \forall q_h \in \mathbf{M}_h , & b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \end{cases} \tag{I 4}$$

Toujours afin d'assurer l'existence et l'unicité du probleme variationnel (I 4), l'espace $\mathbf{X}_h$ étant fixé, l'espace $\mathbf{M}_h$ doit être choisi de sorte qu'une condition du type

$$\inf_{q_h \in \mathbf{M}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{X_h} \|q_h\|_{M_h}} = C_h , \tag{I 5}$$

soit satisfaite pour une constante C_h strictement positive

On appelle mode parasite de la pression tout élément q_h de $\mathbf{M}_h$ tel que $b_h(\mathbf{v}_h, q_h)$ soit nul pour tout élément $\mathbf{v}_h$ de $\mathbf{X}_h$ Pour que la condition (I 5) soit satisfaite pour une constante C_h strictement positive, il faut et il suffit bien sûr que l'espace $\mathbf{M}_h$ ne contienne aucun des modes parasites

C. Bernardi, Y. Maday et B. Métivet [2] puis C. Bernardi, C. Canuto et Y. Maday [1] ont mis en évidence les modes parasites de la pression pour chacun des trois types de conditions aux limites et pour différents types de méthodes spectrales (méthodes de Legendre dans [2] et méthodes de Tchébycheff dans [1]).

Les modes parasites étant éliminés se pose alors le problème de la dépendance en h de la constante C_h intervenant dans (I.5) : cette constante apparaît en effet dans les estimations d'erreur concernant la pression. Dans [2] plusieurs choix de l'espace $\mathbf{M}_h$ sont proposés et des estimations des constantes C_h correspondantes sont démontrées ; sauf dans le cas de conditions aux limites totalement périodiques, ces estimations dépendent de h.

Dans cet article, nous nous plaçons dans le cas particulier de conditions aux limites périodiques dans toutes les directions sauf une ; la méthode de grilles décalées que nous étudions a été mise au point par M. R. Malik, T. A. Zang et M. Y. Hussaini [9] et analysée par C. Bernardi, Y. Maday et B. Métivet [2]. Le but de l'article est de préciser l'étude faite dans [2] en analysant pour quels types d'espaces $\mathbf{M}_h$ la constante C_h est minorée par une constante strictement positive et indépendante de h. Nous mettons en évidence l'existence de modes faiblement parasites pour la pression : l'appartenance de ces modes à l'espace $\mathbf{M}_h$ fournit une constante C_h strictement positive mais tendant vers 0 avec h. Si l'espace $\mathbf{M}_h$ ne contient ni les modes parasites ni les modes faiblement parasites alors la constante C_h est minorée par une constante strictement positive et indépendante de h ; avec ce choix d'espaces, des estimations d'erreur optimales concernant la pression sont obtenues.

La même étude dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet homogènes dans toutes les directions est plus difficile et est actuellement en cours.

Le plan de l'article est le suivant : dans la partie II nous présentons un théorème abstrait que nous appliquons dans les parties III et V. La partie III est consacrée au calcul explicite de la constante C intervenant dans la relation (I.3). Dans la partie IV, nous annonçons les résultats de compatibilité entre les espaces $\mathbf{X}_h$ et $\mathbf{M}_h$ pour une méthode spectrale de Galerkin et pour une méthode spectrale de collocation. La partie V est consacrée à la démonstration de ces résultats. Rappelons que nous nous plaçons dans le cas de conditions aux limites périodiques dans toutes les directions sauf une ; enfin, par souci d'alléger les notations, nous étudions le système de Stokes dans $\mathbb{R}^2$, tout ce qui suit s'étend de façon naturelle au système de Stokes dans $\mathbb{R}^3$.

Notations : Dans toute la suite, Λ désigne l'intervalle $]-1, 1[$. Nous notons $(\cdot\,,\cdot)_{0,\Lambda}$ et $\|\cdot\|_{0,\Lambda}$ le produit scalaire et la norme de $\mathbf{L}^2(\Lambda)$.

L'espace $\mathbf{H}^1(\Lambda)$ est muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_{1,\Lambda}$ et de la semi-norme $|\cdot|_{1,\Lambda}$; nous rappelons que $\mathbf{H}_0^1(\Lambda)$ est l'adhérence dans $\mathbf{H}^1(\Lambda)$ de l'espace $\mathbf{D}(\Lambda)$ des fonctions indéfiniment dérivables, à support compact dans Λ, et que $|\cdot|_{1,\Lambda}$ est une norme sur cet espace, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Lambda}$. Pour tout entier N positif nous notons $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ l'espace des polynômes sur Λ, de degré au plus égal à N et nous désignons par $\mathbf{P}_N^0(\Lambda)$ le sous-espace de $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ constitué des polynômes nuls en -1 et en 1. Nous notons $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Legendre définis par

$$\begin{cases} L_0(y) = 1\,, \quad L_1(y) = y\,, \\ \forall n \geqslant 2\,, \quad nL_n(y) = (2n-1)\,yL_{n-1}(y) - (n-1)\,L_{n-2}(y)\,. \end{cases} \tag{I.6}$$

Ces polynômes vérifient les relations suivantes (voir par exemple [7, Chap. 1, § 3]) :

$$\forall n \geqslant 1\,, \quad \frac{L'_{n+1} - L'_{n-1}}{2n+1} = L_n\,, \tag{I.7}$$

$$\forall n \geqslant 0\,,\ \forall m \geqslant 0\,, \quad (L_n, L_m)_{0,\Lambda} = \delta_{n,m}\frac{2}{2n+1}\,, \tag{I.8}$$

où $\delta_{n,m}$ désigne le symbole de Kronecker. De plus, on sait que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $\mathbf{L}^2(\Lambda)$, on a donc

$$\forall \varphi \in \mathbf{L}^2(\Lambda)\,, \quad \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2}\,(\varphi, L_n)_{0,\Lambda}\, L_n\,. \tag{I.9}$$

Les réels $(\varphi, L_n)_{0,\Lambda}$ sont les coefficients de Legendre de la fonction φ. Pour N entier, on note $(y_m)_{0\leqslant m\leqslant N}$ les poids correspondants. Les points $(y_m)_{0\leqslant m\leqslant N}$ sont les zéros du polynôme $(1-y^2)\,L'_N(y)$. La formule de quadrature s'écrit

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt \simeq \sum_{m=0}^{N} \rho_m\,\varphi(y_m)\,, \tag{I.10}$$

et on sait qu'elle est exacte sur $\mathbf{P}_{2N-1}(\Lambda)$. De plus, en introduisant sur $\mathbf{C}^0(\bar{\Lambda}) \times \mathbf{C}^0(\bar{\Lambda})$ la forme bilinéaire symétrique

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{N,\Lambda} = \sum_{m=0}^{N} \rho_m\,\varphi(y_m)\,\psi(y_m)\,, \tag{I.11}$$

on a (voir [5])

$$\forall (\varphi, \psi) \in [\mathbf{P}_N(\Lambda)]^2\,, \quad \langle \varphi, \psi \rangle_{N,\Lambda} = (\varphi, \psi)_{0,\Lambda} + \\ + \frac{2N+1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right)(\varphi, L_N)_{0,\Lambda}(\psi, L_N)_{0,\Lambda}\,. \tag{I.12}$$

La forme bilinéaire $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{N,\Lambda}$ est donc un produit scalaire sur $\mathbf{P}_N(\Lambda)\times\mathbf{P}_N(\Lambda)$.

Soit maintenant Θ l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Pour tout espace de Banach $\mathbf{Z}$, $\mathbf{C}^{\infty}_{\#}(\bar{\Theta},\mathbf{Z})$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de $\bar{\Theta}$ dans $\mathbf{Z}$ et de période 2π ainsi que leurs dérivées. Nous notons $\mathbf{H}^1_{\#}(\Theta,\mathbf{Z})$ l'adhérence de $\mathbf{C}^{\infty}_{\#}(\bar{\Theta},\mathbf{Z})$ dans l'espace de Hilbert classique $\mathbf{H}^1(\Theta,\mathbf{Z})$. Si v est une fonction de $\mathbf{H}^1_{\#}(\Theta,\mathbf{Z})$, on définit ses coefficients de Fourier $\hat{v}^k$ dans $\mathbf{Z}$ par

$$v=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{v}^k e^{\imath kx}\,,\quad \text{avec}\quad \hat{v}^k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(t)\,e^{-\imath kt}\,dt\,.$$

Pour chaque entier K positif, on note $\mathbf{S}_K(\Theta)$ l'espace des polynômes trigonométriques sur Θ, de degré au plus égal à K, c'est-à-dire

$$\mathbf{S}_K(\Theta)=\left\{v=\sum_{|k|\leq K}\hat{v}^k e^{\imath kx}\,;\quad \forall k,\ |k|\leq K,\ \hat{v}^k\in\mathbb{C}\right\}.$$

Enfin, la norme d'un espace de Banach $\mathbf{Z}$ pourra être notée $\|\cdot\|_{\mathbf{Z}}$.

II. UN THÉORÈME ABSTRAIT

Dans cette partie, $\mathbf{H}$ désigne un espace de Hilbert. Nous considérons une forme bilinéaire symétrique a^*, continue et coercive sur $\mathbf{H}$ et une forme linéaire L continue sur $\mathbf{H}$. Nous notons u^* la solution du problème : trouver u^* dans $\mathbf{H}$ tel que l'on ait

$$\forall v\in\mathbf{H}\,,\quad a^*(u^*,v)=L(v)\,. \tag{II.1}$$

Dans le théorème suivant nous donnons une caractérisation de u^*.

THÉORÈME II.1 : *L'élément u^* vérifie*

$$\sup_{v\in\mathbf{H}}\frac{\{L(v)\}^2}{a^*(v,v)}=a^*(u^*,u^*)\,. \tag{II.2}$$

De plus, si u est un élement de $\mathbf{H}$ vérifiant

$$\sup_{v\in\mathbf{H}}\frac{\{L(v)\}^2}{a^*(v,v)}=\frac{\{L(u)\}^2}{a^*(u,u)}\,,$$

alors u et u^* sont colinéaires.

Démonstration : En utilisant (II.1), nous avons

$$\forall v \in \mathbf{H}\,, \quad \frac{\{L(v)\}^2}{a^*(v,v)} = \frac{\{a^*(u^*,v)\}^2}{a^*(v,v)}\,. \tag{II.3}$$

Or la forme bilinéaire a^* étant symétrique, continue et coercive sur **H**, elle induit sur **H** un produit scalaire. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (II.3), nous obtenons

$$\forall v \in \mathbf{H}\,, \quad \frac{\{L(v)\}^2}{a^*(v,v)} \leq a^*(u^*,u^*)\,,$$

avec égalité si et seulement si v et u^* sont colinéaires. Ceci démontre entièrement le théorème.

III. LE PROBLÈME DE STOKES CONTINU

Dans toute la suite, Ω est le domaine $\Theta \times \Lambda$ de $\mathbb{R}^2$. Le point courant de $\mathbb{R}^2$ est noté $\mathbf{x} = (x, y)$. Le problème de Stokes auquel nous nous intéressons est le suivant : trouver $(\mathbf{u}, p)$ solution de

$$\begin{cases} -\nu\,\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{dans} \quad \Omega\,, \end{cases} \tag{III.1}$$

pour les conditions aux limites suivantes : périodique dans la première direction

$$\forall y \in \bar{\Lambda}\,, \quad \mathbf{u}(-\pi, y) = \mathbf{u}(\pi, y)\,, \tag{III.2}$$

et de Dirichlet homogène dans la deuxième direction

$$\forall x \in \bar{\Theta}\,, \quad \mathbf{u}(x, -1) = \mathbf{u}(x, 1) = 0\,. \tag{III.3}$$

On cherche la vitesse $\mathbf{u}$ dans le sous-espace $\mathbf{X}$ de $[\mathbf{H}^1(\Omega)]^2$ des fonctions satisfaisant les conditions aux limites (III.2) et (III.3) ; on a ainsi

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{L}^2(\Theta, \mathbf{H}_0^1(\Lambda)) \cap \mathbf{H}_\#^1(\Theta, \mathbf{L}^2(\Lambda))\}^2\,. \tag{III.4}$$

On cherche la pression p dans l'espace

$$\mathbf{M} = \left\{q \in \mathbf{L}^2(\Omega)\,;\, \int_\Omega q(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0\right\}\,. \tag{III.5}$$

On désigne par $(.,.)$ aussi bien le produit scalaire de $(\mathbf{L}^2(\Omega))^2$ que le crochet de dualité entre $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}'$. Les formes bilinéaires a et b sont définies par

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}\,,\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\,,\quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) \tag{III.6}$$

et

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\,,\ \forall q \in \mathbf{M}\,,\quad b(\mathbf{v}, q) = -(\operatorname{div} \mathbf{v}, q)\,. \tag{III.7}$$

Grâce aux formules de Green on a

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}\,,\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\,,\quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\nu(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{III.8}$$

et

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\,,\ \forall q \in \mathbf{M}\,,\quad b(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{v}, \nabla q)\,. \tag{III.9}$$

Pour $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ dans $\mathbf{X}'$, le problème de Stokes (III.1) est équivalent au problème variationnel suivant : trouver $(\mathbf{u}, p)$ dans $\mathbf{X} \times \mathbf{M}$ tel que l'on ait

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\,,\quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})\,, \\ \forall q \in \mathbf{M}\,,\quad b(\mathbf{u}, q) = 0\,. \end{cases} \tag{III.10}$$

Remarque III.1 : D'après l'inégalité de Poincaré-Friedrich's, il est bien connu que la semi-norme $\mathbf{u} \to (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})$ est une norme sur $\mathbf{X}$, équivalente à celle induite par $(\mathbf{H}^1(\Omega))^2$. Dans toute la suite, on note $\|\,.\,\|_{\mathbf{X}}$ cette semi-norme.

Comme nous l'avons dit dans la partie I, l'existence et l'unicité de la solution du problème (III.10) découle, entre autres, de la propriété suivante :

$$\inf_{q \in \mathbf{M}} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_X \|q\|_M} = C\,,$$

pour une constante C strictement positive.

Dans cette partie, nous calculons la constante C. Pour cela nous introduisons quelques notations. Rappelons que l'opérateur $-d^2/dy^2$ autoadjoint dans $\mathbf{H}_0^1(\Lambda)$ admet pour vecteurs propres les éléments de la suite $(\varphi)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\quad \varphi_n(y) = \sin\left[\frac{n\pi}{2}(y-1)\right]\,;$$

pour n entier non nul, nous notons $\lambda_n = (n\pi/2)^2$ la valeur propre associée au vecteur propre φ_n. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall m \in \mathbb{N}^*\,,\quad (\varphi_n, \varphi_m)_{0,\Lambda} = \delta_{n,m}\,, \tag{III.11}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall m \in \mathbb{N}^*\,,\quad (\varphi_n', \varphi_m')_{0,\Lambda} = \lambda_n\,\delta_{n,m}\,, \tag{III.12}$$

et

$$\forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Lambda)\,,\quad \begin{cases} u = \sum_{n=1}^{+\infty} (u, \varphi_n)_{0,\Lambda}\, \varphi_n, \ \|u\|_{0,\Lambda}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (u, \varphi_n)_{0,\Lambda}^2\,, \\ |u|_{1,\Lambda}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (u, \varphi_n)_{0,\Lambda}^2\,. \end{cases} \tag{III.13}$$

Pour ξ réel non nul, nous posons

$$\forall y \in \Lambda\,,\quad \zeta_\xi(y) = \left(\frac{\xi}{\operatorname{sh}(2\,\xi)}\right)^{1/2} e^{\xi y}\,, \tag{III.14}$$

de sorte que l'on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*\,,\quad \|\zeta_\xi\|_{0,\Lambda} = 1,\ (\zeta_\xi, \zeta_{-\xi})_{0,\Lambda} = \frac{2\,\xi}{\operatorname{sh}(2\,\xi)}\,. \tag{III.15}$$

Si q est un élement de $\mathbf{M}$ nous posons

$$S(q) = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}} \frac{b(v, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}}\,. \tag{III.16}$$

En utilisant le théorème II.1 avec $\mathbf{H} = \mathbf{X}$, les formes L et a^* étant définies par

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\,,\quad L(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, q)\,, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\,,\ \forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}\,,\quad a^*(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w})\,, \end{cases}$$

nous obtenons

$$\forall q \in \mathbf{M}\,,\quad S(q) = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}}\,, \tag{III.17}$$

où $\mathbf{u}$ est la solution du problème : trouver $\mathbf{u}$ dans $\mathbf{X}$ tel que l'on ait

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\,,\quad (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, q)\,. \tag{III.18}$$

Nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION III.1 : *Pour tout élément q de $\mathbf{M}$, nous avons*

$$S(q)^2 = \|\hat{q}^0\|_{0,\Lambda}^2$$
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left[\|\hat{q}^k\|_{0,\Lambda}^2 - \frac{1}{2} (\hat{q}^k, \zeta_k)_{0,\Lambda}^2 - \frac{1}{2} (\hat{q}^k, \zeta_{-k})_{0,\Lambda}^2\right] \tag{III.19}$$

Démonstration : Soit q un élément de $\mathbf{M}$. Nous cherchons la solution $\mathbf{u}$ du problème (III.18) sous la forme $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ avec

$$\forall j \in \{1, 2\} , \ \forall \mathbf{x} \in \Omega , \quad u_j(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{j,k}(y) \, e^{ikx} . \tag{III.20}$$

Le problème (III.18) s'écrit alors : pour chaque entier k, trouver $u_{1,k}$ et $u_{2,k}$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Lambda)$ tels que l'on ait

$$\begin{cases} - u''_{1,k} + k^2 u_{1,k} = ik\hat{q}^k , \\ - u''_{2,k} + k^2 u_{2,k} = (\hat{q}^k)' . \end{cases} \tag{III.21}$$

Pour chaque entier k et pour $j = 1$ ou 2, on pose

$$u_{j,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{j,k,n} \, \varphi_n . \tag{III.22}$$

Les relations (III.11), (III.12) et (III.21) apportent

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{1,k,n} = \frac{ik(\hat{q}^k, \varphi_n)_{0,\Lambda}}{\lambda_n + k^2} , \ u_{2,k,n} = \frac{-(\hat{q}^k, \varphi'_n)_{0,\Lambda}}{\lambda_n + k^2} . \tag{III.23}$$

Remarquons que l'on a

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{2} [k^2 \|u_{j,k}\|_{0,\Lambda}^2 + \|u'_{j,k}\|_{0,\Lambda}^2] .$$

Ainsi, en utilisant (III.13), (III.17), (III.22) et (III.23) on obtient

$$S(q)^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^2(\hat{q}^k, \varphi_n)_{0,\Lambda}^2 + (\hat{q}^k, \varphi'_n)_{0,\Lambda}^2}{\lambda_n + k^2} ,$$

d'où nous déduisons

$$S(q)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\hat{q}^k, \frac{k\varphi_n + \varphi'_n}{[\lambda_n + k^2]^{1/2}} \right)_{0,\Lambda}^2 + \left(\hat{q}^k, \frac{-k\varphi_n + \varphi'_n}{[\lambda_n + k^2]^{1/2}} \right)_{0,\Lambda}^2 \right] .$$

En utilisant (III.11) et (III.12), nous remarquons que pour chaque entier k, la famille $\left(\dfrac{k\varphi_n + \varphi'_n}{[\lambda_n + k^2]^{1/2}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormée. Elle est totale dans l'orthogonal de l'espace $\mathbf{E}_k$ défini par :

$$\mathbf{E}_k = \{\varphi \in \mathbf{L}^2(\Lambda) \, ; \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ (\varphi, k\varphi_n + \varphi'_n)_{0,\Lambda} = 0\} .$$

Ainsi, en notant Π_k l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathbf{E}_k$, nous obtenons

$$S(q)^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \| \hat{q}^k \|_{0,\Lambda}^2 - \frac{1}{2} \| \Pi_k(\hat{q}^k) \|_{0,\Lambda}^2 - \frac{1}{2} \| \Pi_{-k}(\hat{q}^k) \|_{0,\Lambda}^2 \right\} . \quad \text{(III.24)}$$

Or nous avons

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, \mathbf{E}_k &= \left\{ \varphi \in \mathbf{L}^2(\Lambda) \,;\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (k\varphi - \varphi', \varphi_n)_{0,\Lambda} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \varphi \in \mathbf{L}^2(\Lambda) \,;\, \forall \psi \in \mathbf{H}_0^1(\Lambda),\ (k\varphi - \varphi', \psi)_{0,\Lambda} = 0 \right\} , \end{aligned}$$

et l'espace $\mathbf{H}_0^1(\Lambda)$ étant dense dans $\mathbf{L}^2(\Lambda)$, nous obtenons finalement

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbf{E}_k = \{ \mathrm{f} \in \mathbf{L}^2(\Lambda) \,;\, k\varphi - \varphi' = 0 \} .$$

De façon claire, $\mathbf{E}_0$ est la droite engendrée par la fonction : $y \in \Lambda \to 1$, et, pour k entier non nul, $\mathbf{E}_k$ est la droite engendrée par la fonction ζ_k définie en (III.14). Ainsi, compte tenu du fait que l'on a : $\hat{q}^0 \in \mathbf{E}_0^{\perp}$, nous déduisons (III.19) de (III.24).

Nous établissons maintenant un lemme de nature géométrique.

LEMME III.1 : *Soient α et β deux éléments linéairement indépendants d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$, *vérifiant*

$$\|\alpha\| = \|\beta\| = 1,\ (\alpha, \beta) > 0 . \quad \text{(III.25)}$$

Pour tout élément q de $\mathbf{H}$, *nous avons*

$$(q, \alpha)^2 + (q, \beta)^2 \leqslant [1 + (\alpha, \beta)] \|q\|^2 , \quad \text{(III.26)}$$

et l'inégalité est une égalité si et seulement si q et $\alpha + \beta$ sont colinéaires.

Démonstration : Soit $\mathbf{P}$ le plan engendré par α et β. On décompose chaque élément q de $\mathbf{H}$ en $q = q_1 + q_2$, avec $q_1 \in \mathbf{P}$ et $q_2 \in \mathbf{P}^{\perp}$. On a

$$\frac{(q, \alpha)^2 + (q, \beta)^2}{\|q\|^2} = \frac{(q_1, \alpha)^2 + (q_1, \beta)^2}{\|q_1\|^2 + \|q_2\|^2} \leqslant \frac{(q_1, \alpha)^2 + (q_1, \beta)^2}{\|q_1\|^2} ,$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $q_2 = 0$. Ainsi, il suffit de démontrer (III.26) lorsque q est un élément de $\mathbf{P}$. Soit donc $q = \lambda\alpha + \mu\beta$ un élément de $\mathbf{P}$; on a

$$\begin{cases} \|q\|^2 = \lambda^2 + 2\,\lambda\mu\,(\alpha, \beta) + \mu^2 , \\ (q, \alpha)^2 + (q, \beta)^2 = \lambda^2[1 + (\alpha, \beta)^2] + 4\,\lambda\mu\,(\alpha, \beta) + \mu^2[1 + (\alpha, \beta)^2] , \end{cases}$$

et on obtient

$$(q,\alpha)^2+(q,\beta)^2-[1+(\alpha,\beta)]\|q\|^2=[(\alpha,\beta)^2-(\alpha,\beta)](\lambda,\mu)^2\,. \quad \text{(III.27)}$$

Or, puisque α et β sont linéairement indépendants, on a avec (III.25) $0<(\alpha,\beta)<1$ et (III.26) découle de (III.27).

De plus on a $(q,\alpha)^2+(q,\beta)^2=[1+(\alpha,\beta)]\|q\|^2$ si et seulement si $\lambda=\mu$ c'est-à-dire si et seulement si q et $\alpha+\beta$ sont colinéaires.

Nous établissons maintenant le résultat le plus important de cette partie.

THÉORÈME III.1 : *On a*

$$\inf_{q\in \mathbf{M}}\sup_{\mathbf{v}\in \mathbf{X}}\frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_X\,\|q\|_M}=\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\operatorname{sh}2}\right)\right]^{1/2}. \quad \text{(III.28)}$$

De plus on a

$$\inf_{q\in \mathbf{M}}\sup_{\mathbf{v}\in \mathbf{X}}\frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_X\,\|q\|_M}=\frac{b(\mathbf{u},p)}{\|\mathbf{u}\|_X\,\|p\|_M} \quad \text{(III.29)}$$

si et seulement si il existe trois réels A_1, A_2 et B tels que la pression p et la vitesse $\mathbf{u}$ soient définies par

$$\forall \mathbf{x}\in\Omega,\ p(\mathbf{x})=(A_1\cos x+A_2\sin x)\operatorname{ch}y\,, \quad \text{(III.30)}$$

et

$$\mathbf{u}\in \mathbf{H}_0^1(\Omega),\ -\Delta\mathbf{u}=B\,\nabla p\,. \quad \text{(III.31)}$$

Démonstration : Avec la notation (III.16) nous avons

$$\inf_{q\in \mathbf{M}}\sup_{\mathbf{v}\in \mathbf{X}}\frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_X\,\|q\|_M}=\left(\inf_{q\in \mathbf{M}}\frac{S(q)^2}{\|q\|_M^2}\right)^{1/2}. \quad \text{(III.32)}$$

Soit q un élément de $\mathbf{M}$. En utilisant (III.15), (III.19) et (III.26), on obtient

$$S(q)^2\geqslant \|\hat{q}^0\|_{0,\Lambda}^2+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[1-\frac{2k}{\operatorname{sh}(2k)}\right]\|\hat{q}^k\|_{0,\Lambda}^2 \quad \text{(III.33)}$$

puis

$$S(q)^2\geqslant\frac{1}{2}\left\{\inf_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[1-\frac{2k}{\operatorname{sh}(2k)}\right]\right\}\|q\|_M^2\,, \quad \text{(III.34)}$$

et ceci démontre (III.28) en remarquant que la fonction paire : $x\to 2x/(\operatorname{sh}(2x))$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Soit maintenant $(\mathbf{u}, p)$ un élément de $\mathbf{X} \times \mathbf{M}$ tel que l'égalité (III.29) ait lieu. Par (III.32) nous avons donc

$$\inf_{q \in \mathbf{M}} \frac{S(q)^2}{\|q\|_M^2} = \frac{S(p)^2}{\|p\|_M^2}.$$

Les inégalités dans (III.33) et (III.34) sont donc des égalités. En utilisant le Lemme III.1, on voit donc que la pression p vérifie

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}, \quad \hat{p}^k = 0, \\ \exists (A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2, \forall y \in \Lambda, \quad \hat{p}^1(y) = A_1 \operatorname{ch} y, \quad \hat{p}^{-1}(y) = A_2 \operatorname{ch} y. \end{cases}$$

Le Théorème II.1 indique maintenant que la vitesse $\mathbf{u}$ doit être colinéaire à la solution du problème : trouver $\mathbf{u}$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que l'on ait $-\Delta \mathbf{u} = \nabla p$.

Réciproquement, si la pression p et la vitesse $\mathbf{u}$ sont définies par les formules (III.30) et (III.31), il est clair que l'égalité (III.29) a lieu. Ceci achève la démonstration du théorème.

IV. COMPTABILITÉ DES ESPACES DISCRETS POUR L'APPROXIMATION DU PROBLÈME DE STOKES

IV.1. Présentation des problèmes discrets

Nous allons considérer deux problèmes discrets pour approcher le problème de Stokes (III.1), (III.2), (III.3). Le premier correspond à une méthode spectrale de Galerkin, le second à une méthode spectrale de collocation.

Pour ces deux problèmes, on considère deux entiers K et N avec $K \geqslant 1$ et $N \geqslant 2$ et on pose $h = (K^{-1}, N^{-1})$. On définit l'espace $\mathbf{X}_h$ des vitesses par

$$\mathbf{X}_h = \{\mathbf{S}_K(\Theta) \otimes \mathbf{P}_N^0(\Lambda)\}^2, \tag{IV.1}$$

on a ainsi

$$\mathbf{X}_h = \left\{ v_h \,;\, v_h(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leqslant K} e^{ikx} \hat{v}^k(y),\ \hat{v}^k \in \mathbf{P}_N^0(\Lambda) \right\}^2.$$

L'espace $\mathbf{M}_h$ des pressions devra être choisi comme sous-espace de

$$\tilde{\mathbf{M}}_h = \left\{ q_h \,;\, q_h(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leqslant K} e^{ikx} \hat{q}^k(y),\ \hat{q}^0 \in \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda), \right.$$
$$\left. \int_{-1}^{1} \hat{q}^0(t)\, dt = 0, \quad \forall k, 1 \leqslant |k| \leqslant K,\ \hat{q}^k \in \mathbf{P}_N(\Lambda) \right\}.$$

Nous munissons l'espace $\mathbf{C}^0(\bar\Lambda) \times \mathbf{C}^0(\bar\Lambda)$ de l'une ou l'autre des formes bilinéaires symetriques $(.\,,.)_{0\,\Lambda}$ et $\langle .\,,.\rangle_{N\,\Lambda}$, on note $(.\,,.)_N$ la forme bilinéaire choisie et $\|.\|_N$ la forme quadratique correspondante On définit alors sur $\mathbf{C}^0(\bar\Omega) \times \mathbf{C}^0(\bar\Omega)$ une forme bilinéaire symetrique par

$$(\varphi, \psi)_h = \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(x,.), \psi(x,.))_N \, dx , \qquad \text{(IV 3)}$$

et nous notons $\|.\|_h$ la forme quadratique correspondante La forme bilinéaire $(.\,,.)_h$ est un produit scalaire sur $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ On introduit maintenant sur $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ et $\mathbf{X}_h \times \hat{\mathbf{M}}_h$ les formes bilinéaires discretes suivantes

$$\forall \mathbf{u}_h \in \mathbf{X}_h, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \quad a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_h \qquad \text{(IV 4)}$$

et

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \forall q_h \in \tilde{\mathbf{M}}_h, \quad b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = -\,(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_h \qquad \text{(IV 5)}$$

Grâce à l'exactitude de la formule de quadrature (I 10) sur $\mathbf{P}_{2N-1}(\Lambda)$, nous avons

$$\forall \mathbf{u}_h \in \mathbf{X}_h, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \quad a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = -\,\nu(\Delta \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \qquad \text{(IV 6)}$$

et

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \forall q_h \in \tilde{\mathbf{M}}_h, \quad b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = (\nabla q_h, \mathbf{v}_h)_h \qquad \text{(IV 7)}$$

La formulation variationnelle des problèmes discrets que nous analysons est trouver $(\mathbf{u}_h, p_h)$ dans $\mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h$ de sorte que l'on ait

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \, a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_h , \\ \forall q_h \in \mathbf{M}_h, \, b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 , \end{cases} \qquad \text{(IV 8)}$$

l'espace $\mathbf{M}_h$ devant être choisi pour que la condition inf-sup discrete

$$\inf_{q_h \in \mathbf{M}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_h \, \|q_h\|_h} = C_h , \qquad \text{(IV 9)}$$

soit satisfaite pour une constante C_h strictement positive Nous montrons comment choisir l'espace $\mathbf{M}_h$ pour que la constante C_h soit minorée par une constante C strictement positive et indépendante de h

Remarque IV 1 Lorsque les produits scalaires $(.,.)_N$ et $(.,.)_{0\,\Lambda}$ coincident, nous avons $a_h = a$ et $b_h = b$, le probleme discret (IV 8) est alors un problème spectral de Galerkin. Par contre lorsque les produits scalaires $(.,.)_N$ et $\langle .,. \rangle_{N,\Lambda}$ coincident, c'est un problème spectral de collocation qui consiste à satisfaire les équations (III.1) en un nombre fini de points de $\bar{\Omega}$ (voir [2] pour davantage de détails).

Remarque IV.2 : Comme cela a été constaté dans [2], les deux formes bilinéaires b_h et b coïncident sur l'espace

$$\mathbf{X}_h \times [\{\mathbf{S}_K(\Theta) \otimes \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)\} \cap \mathbf{M}].$$

Remarque IV.3 : C. Bernardi, Y. Maday et B. Métivet [2] ont choisi a priori l'espace $\{\mathbf{S}_K(\Theta) \otimes \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)\} \cap \mathbf{M}$ comme espace des pressions et ont démontré que la constante C_h de (IV.9) vérifie alors $C_h > C/K$ pour une constante C strictement positive et indépendante de h. Nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de fixer l'espace des pressions de cette manière pour que la constante C_h soit strictement positive. En revanche nous démontrerons que c'est suffisant pour qu'elle ne tende pas vers 0 avec $|h|$.

Remarque IV.4 : Il a été démontré dans [2] que dans le cadre du problème spectral de Galerkin, l'espace $\mathbf{M}_h$ ne doit pas contenir l'élément $q_h(\mathbf{x}) = L_N(y)$ qui est un mode parasite de la pression. On démontre de la même manière que ce mode est également un mode parasite de la pression pour le problème spectral de collocation. Cela justifie le fait que l'on doit choisir l'espace $\mathbf{M}_h$ comme sous-espace de l'espace $\tilde{\mathbf{M}}_h$ défini en (IV.2). Nous verrons que l'espace $\tilde{\mathbf{M}}_h$ ne contient aucun autre mode parasite que la pression nulle.

Dans le paragraphe suivant nous annonçons les résultats essentiels de cet article, la partie **V** est consacrée à leur démonstration.

IV.2. Compatibilité entre les espaces discrets X_h et M_h

Pour chaque entier k vérifiant $1 \leq |k| \leq K$, nous notons $q_{h,k}$ l'élément de l'espace $\tilde{\mathbf{M}}_h$ défini par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega,\ q_{h,k}(\mathbf{x}) = L_N(y)\, e^{ikx}.$$

Nous avons les trois théorèmes suivants :

THÉORÈME IV.1 : *Il existe une constante C strictement positive et indépendante de h telle que l'on ait*

$$\forall k,\ 1 \leq |k| \leq K, \quad 0 < \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_{h,k})}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_h \, \|q_{h,k}\|_h} \leq C \frac{|k|}{N}. \quad \text{(IV.10)}$$

Ce théorème démontre que chacun des modes q_{h,k_0} où k_0 est un entier non nul fixé est un mode faiblement parasite de la pression : si l'espace $\mathbf{M}_h$ contient l'un d'eux alors on a

$$\lim_{|h| \to 0} \inf_{q_h \in \mathbf{M}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_h \, \|q_h\|_h} = 0 .$$

Le théorème suivant précise le cas où l'espace $\mathbf{M}_h$ ne contient aucun de ces modes.

THÉORÈME IV. 2 : *Si l'espace discret* $\mathbf{M}_h$ *est égal* à

$$\{\mathbf{S}_K(\Theta) \times \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)\} \cap \mathbf{M} ,$$

alors il existe deux constantes C_1 *et* C_2 *strictement positives et indépendantes de* h *telles que sous l'hypothèse* $K < C_1 N$ *on ait*

$$\inf_{q_h \in \mathbf{M}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_h \, \|q_h\|_h} \geqslant C_2 . \tag{IV.11}$$

Le Théorème IV.2 montre que sous la contrainte $K \leqslant C_1 N$, l'espace $\{\mathbf{S}_K(\Theta) \otimes \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)\} \cap \mathbf{M}$ ne contient aucun mode faiblement parasite. C'est donc un choix optimal de l'espace discret des pressions. Comme nous l'indiquons dans la remarque suivante, ce théorème permet d'améliorer les estimations obtenues dans [2] concernant l'erreur commise sur la pression p du problème (III.1) en l'approchant par la pression p_h solution du problème discret (IV.8).

Remarque IV.5 : Supposons que l'espace discret $\mathbf{M}_h$ soit égal à $\{\mathbf{S}_K(\Theta) \otimes \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)\} \cap \mathbf{M}$ et que l'on ait $K < C_1 N$ où C_1 est la constante intervenant dans le Théorème IV.2. Nous désignons par $(\mathbf{u}_{h,G}, p_{h,G})$ et $(\mathbf{u}_{h,C}, p_{h,C})$ les solutions des problèmes discrets de Galerkin et de collocation décrits en (IV.8). Compte-tenu de (IV.11), les estimations concernant $p - p_{h,G}$ et $p - p_{h,C}$ obtenues dans [2], peuvent immédiatement être améliorées de la façon suivante :

1) Pour tout réel $\sigma \geqslant 0$ il existe une constante C strictement positive et indépendante de h telle que si l'on suppose que $\mathbf{f}$ appartient à l'espace $(\mathbf{H}^{\sigma}_{\#}(\Omega))^2$ alors on a

$$\|p - p_{h,G}\|_M \leqslant C\,(K^{-\sigma-1} + N^{-\sigma-1}) \|\mathbf{f}\|_{(H^{\sigma}_{\#}(\Omega))^2} .$$

2) Pour tout réel $\sigma > 3/2$ il existe une constante C strictement positive et indépendante de h telle que si l'on suppose que $\mathbf{f}$ appartient à l'espace $(\mathbf{H}^{\sigma}_{\#}(\Omega))^2$ alors pour tout réel $\mu > 1$ on a

$$\|p - p_{h,C}\|_M \leqslant C\,\{K^{-\sigma} + (1 + K^{-\mu} N^{\mu})\, N^{-\sigma+1/2}\} \|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{H}^{\sigma}_{\#}(\Omega))^2} .$$

(Pour la définition des espaces $(\mathbf{H}^{\sigma}_{\#}(\Omega))^2$ nous renvoyons à [2]). Comme cela a été dit dans la partie **I**, ces résultats s'étendent tout de suite au problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$.

Enfin nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME IV.3 : *Si l'espace discret* $\mathbf{M}_h$ *est égal à* $\{\mathbf{S}_K(\Theta) \otimes \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)\} \cap \mathbf{M}$, *alors il existe deux constantes* C_1 *et* C_2 *strictement positives et indépendantes de h telles que sous l'hypothèse* $K \geqslant C_1 N^2$ *on ait*

$$\inf_{q_h \in \mathbf{M}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_h \|q_h\|_h} \leqslant C_2 N^2/K . \tag{IV.12}$$

Ce théorème démontre que lorsque l'espace discret $\mathbf{M}_h$ est égal à $\{\mathbf{S}_K(\Theta) \otimes \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)\} \cap \mathbf{M}$, alors pour toute suite $(h_\ell = (K_\ell^{-1}, N_\ell^{-1}))_{\ell \in \mathbb{N}}$ avec

$$\lim_{\ell \to +\infty} |h_\ell| = 0, \quad \lim_{\ell \to +\infty} N_\ell^2/K_\ell = 0$$

on a

$$\lim_{\ell \to +\infty} \inf_{q_h \in \mathbf{M}_{h_\ell}} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{h_\ell}} \frac{b_{h_\ell}(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{h_\ell} \|q_h\|_{h_\ell}} = 0 .$$

Ainsi, pour obtenir (IV.11), il est nécessaire d'avoir une contrainte du type $K \leqslant CN^2$ pour une constante C strictement positive et indépendante de h. Le Théorème IV.2 montre que (IV.11) est obtenue lorsque l'on a $K \leqslant CN$. A présent nous ignorons si l'on peut démontrer (IV.11) lorsque l'on a $CN \leqslant K \leqslant C' N^2$, pour deux constantes C et C' strictement positives et indépendantes de h.

V. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES IV.1, IV.2 ET IV.3

V.1. Une proposition préliminaire

Si q_h est un élément de $\tilde{\mathbf{M}}_h$, nous posons

$$S_h(q_h) = \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{w}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{w}_h\|_h} . \tag{V.1}$$

Le Théorème II.1 appliqué avec $\mathbf{H} = \mathbf{X}_h$, les formes L et a^* étant définies par

$$\begin{cases} \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h, L(\mathbf{w}_h) = b_h(\mathbf{w}_h, q_h) , \\ \forall \mathbf{w}_h \in X_h, \forall \mathbf{z}_h \in \mathbf{X}_h, a^*(\mathbf{w}_h, \mathbf{z}_h) = (\nabla \mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{z}_h)_h , \end{cases}$$

nous apprend que l'on a

$$\forall q_h \in \tilde{\mathbf{M}}_h,\ S_h(q_h) = \|\nabla \mathbf{v}_h\|_h\,, \tag{V.2}$$

où $\mathbf{v}_h$ est la solution du problème : trouver $\mathbf{v}_h$ dans $\mathbf{X}_h$ de sorte que l'on ait

$$\forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h,\ (\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{w}_h)_h = b_h(\mathbf{w}_h, q_h)\,. \tag{V.3}$$

Dans la proposition suivante nous donnons une expression de $S_h(q_h)$. Pour cela, nous commençons par introduire quelques notations. Pour k entier nous définissons un sous-espace $\mathbb{P}_{k,N}$ de $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ par

$$\mathbb{P}_{k,N} = \left\{\varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda)\ ;\ \forall \psi \in \mathbf{P}_N^0(\Lambda),\ (\varphi' - k\varphi, \psi\ )_N = 0\right\}\,. \tag{V.4}$$

L'exactitude de la formule de quadrature (I.10) sur $P_{2N-1}(\Lambda)$ entraîne l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}_{k,N} = \left\{\varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda)\ ;\ \forall \psi \in \mathbf{P}_N^0(\Lambda),\ (\varphi, \psi' + k\psi\ )_N = 0\right\}\,. \tag{V.5}$$

Pour chaque entier k, nous notons $\Pi_{k,N}$ la projection orthogonale de $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_{k,N}$, $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ étant muni du produit scalaire $(\cdot\,,\cdot)_N$.

Remarque V.1 : La formule (V.5) et l'exactitude de la formule de quadrature (I.10) montrent que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{0,N} &= \left\{\varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda)\ ;\ \forall \psi \in \mathbf{P}_N^0(\Lambda),\ (\varphi, \psi')_{0,\Lambda} = 0\right\} \\
&= \left\{\varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda)\ ;\ \forall \psi \in \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda),\ \int_{-1}^{1} \psi(t)\,dt = 0,\ (\varphi, \psi)_{0,\Lambda} = 0\right\} \\
&= \left\{\varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n \leq N-1\ ,\ (\varphi, L_n)_{0,\Lambda} = 0\right\}\,,
\end{aligned}$$

ainsi $\mathbb{P}_{0,N}$ est le plan engendré par L_0 et L_N.

PROPOSITION V.1 : *Pour tout élément q_h de $\tilde{\mathbf{M}}_h$, nous avons la formule*

$$S_h(q_h)^2 = \|\hat{q}_h^0\|_N^2 + \sum_{1 \leq |k| \leq K} \left[\|\hat{q}_h^k\|_N^2 - \frac{1}{2}\,\|\Pi_{k,N}(\hat{q}_h^k)\|_N^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\,\|\Pi_{-k,N}(\hat{q}_h^k)\|_N^2\right]. \tag{V.6}$$

Démonstration : Soit q_h un élément de $\tilde{\mathbf{M}}_h$. En utilisant (IV.6) et (IV.7), nous voyons que le problème (V.3) s'écrit : trouver $\mathbf{v}_h$ dans $\mathbf{X}_h$ de sorte que l'on ait

$$\forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h\,,\quad (-\Delta \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)_h = (\nabla q_h, \mathbf{w}_h)_h\,. \tag{V.7}$$

Nous cherchons la solution de (V.7) sous la forme $\mathbf{v}_h = (v_{h,1}, v_{h,2})$ avec

$$\forall j \in \{1,2\}\ ,\ \forall \mathbf{x} \in \Omega\ ,\quad v_{h,j}(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leq K} v_{h,j,k}(y)\, e^{ikx}\,. \quad \text{(V.8)}$$

Le problème (V.7) s'écrit alors : pour chaque entier k vérifiant $|k| \leq K$, trouver $v_{h,1,k}$ et $v_{h,2,k}$ dans $\mathbf{P}_N^0(\Lambda)$ tels que l'on ait

$$\forall \varphi \in \mathbf{P}_N^0(\Lambda)\quad \begin{cases} (-v''_{h,1,k} + k^2 v_{h,1,k}, \varphi)_N = ik(\hat{q}_h^k, \varphi)_N\ , \\ (-v''_{h,2,k} + k^2 v_{h,2,k}, \varphi)_N = ((\hat{q}_h^k)', \varphi)_N\,. \end{cases} \quad \text{(V.9)}$$

Nous remarquons maintenant que l'opérateur $-d^2/dy^2$ est autoadjoint, positif et inversible sur $\mathbf{P}_N^0(\Lambda)$. Il existe donc une base $(\varphi_{N,m})_{1 \leq n \leq N-1}$ de $\mathbf{P}_N^0(\Lambda)$ et des réels strictement positifs $(\lambda_{N,m})_{1 \leq n \leq N-1}$ tels que l'on ait

$$\forall n, \forall m, 1 \leq n, m \leq N-1\ ,\quad (\varphi_{N,n}, \varphi_{N,m})_N = \delta_{n,m} \quad \text{(V.10)}$$

et

$$\forall n, 1 \leq n \leq N-1, \forall \varphi \in \mathbf{P}_N^0(\Lambda)\ ,\quad (-\varphi''_{N,m}, \varphi)_N = \lambda_{N,n}(\varphi_{N,m}, \varphi)_N\,.$$

De ces deux relations on déduit

$$\forall n, \forall m, 1 \leq n, m \leq N-1 \quad (\varphi'_{N,n}, \varphi'_{N,m})_N = \lambda_{N,n}\, \delta_{n,m}\,. \quad \text{(V.11)}$$

Pour chaque entier k vérifiant $|k| \leq K$ et pour $j = 1$ ou 2, nous posons

$$v_{h,j,k} = \sum_{n=1}^{N-1} v_{h,j,k,n}\, \varphi_{N,n}\,. \quad \text{(V.12)}$$

A partir des relations (V.9), (V.10) et (V.11) et de l'exactitude de la formule de quadrature (I.10), nous obtenons

$\forall k,\ |k| \leq K, \forall n, 1 \leq n \leq N-1$,

$$\begin{cases} v_{h,1,k,n} = \dfrac{ik(\hat{q}_h^k, \varphi_{N,n})_N}{\lambda_{N,n} + k^2} \\ v_{h,2,k,n} = \dfrac{((\hat{q}_h^k)', \varphi_{N,n})_N}{\lambda_{N,n} + k^2} = \dfrac{(\hat{q}_h^k, \varphi'_{N,n})_N}{\lambda_{N,n} + k^2}\,. \end{cases} \quad \text{(V.13)}$$

Or nous avons

$$\|\nabla \mathbf{v}_h\|_h^2 = \sum_{|k| \leq K} \sum_{j=1}^{2} [k^2 \|v_{h,j,k}\|_N^2 + \|(v_{h,j,k})'\|_N^2]\ ,$$

d'où, en utilisant (V.2), (V.10), (V.11), (V.12) et (V.13)

$$S_h(q_h)^2 = \sum_{|k| \leq K} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{k^2(\hat{q}_h^k, \varphi_{N,n})_N^2 + (\hat{q}_h^k, \varphi'_{N,n})_N^2}{\lambda_{N,n} + k^2}, \quad (V.14)$$

c'est-à-dire

$$S_h(q_h)^2 = \frac{1}{2} \sum_{|k| \leq K} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \left(\left(\hat{q}_h^k, \frac{k\varphi_{N,n} + \varphi'_{N,n}}{[\lambda_{N,n} + k^2]^{1/2}} \right) \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\left(\hat{q}_h^k, \frac{-k\varphi_{N,n} + \varphi'_{N,n}}{[\lambda_{N,n} + k^2]^{1/2}} \right) \right)^2 \right\}. \quad (V.15)$$

Or nous remarquons à partir de (V.10) et (V.11) que pour chaque entier k, la famille

$$\left(\frac{k\varphi_{N,n} + \varphi'_{N,n}}{[\lambda_{N,n} + k^2]^{1/2}} \right)_{1 \leq n \leq N-1}$$

est orthonormée. Elle forme une base de l'orthogonal de l'espace $\mathbf{Q}_{k,N}$ défini par

$$\mathbf{Q}_{k,N} = \{\varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda) ; \forall n, 1 \leq n \leq N-1, \ (\varphi, \varphi'_{N,n} + k\varphi_{N,n})_N = 0\}.$$

Or, grâce à la relation (V.5), l'espace $\mathbf{Q}_{k,N}$ coïncide avec l'espace $\mathbb{P}_{k,N}$. De plus, puisque nous avons : $\hat{q}^0 \in \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)$ et $\int_{-1}^{1} \hat{q}^0(t)\, dt = 0$, nous déduisons de la Remarque V.1 que $\hat{q}^0$ est un élément de $\mathbb{P}_{0,N}^{\perp}$. Ainsi la formule (V.6) est une conséquence de (V.15).

Remarque V.2 : La formule (V.6) montre que si q_h est un élément de $\tilde{\mathbf{M}}_h$, alors q_h est un mode parasite de la pression si et seulement si on a

$$\begin{cases} \hat{q}^0 = 0\,, \\ \forall k \in \mathbb{Z}^*,\ |k| \leq K, \quad 2\|\hat{q}_N^k\|_N^2 = \|\Pi_{k,N}(\hat{q}_n^k)\|_N^2 + \|\Pi_{-k,N}(\hat{q}_h^k)\|_N^2 . \end{cases}$$

Or pour k entier non nul et pour $\hat{q}_h^k$ élément de $P_N(\Lambda)$, on a

$$2\|\hat{q}_h^k\|_N^2 = \|\Pi_{k,N}(\hat{q}_h^k)\|_N^2 + \|\Pi_{-k,N}(\hat{q}_h^k)\|_N^2$$

si et seulement si $\hat{q}_h^k$ est un élément de $\mathbb{P}_{k,N} \cap \mathbb{P}_{-k,N}$. La formule (V.4) montre facilement que pour tout entier k non nul, l'espace $\mathbb{P}_{k,N} \cap \mathbb{P}_{-k,N}$ ne contient que le polynôme nul. On déduit ainsi que l'espace $\tilde{\mathbf{M}}_h$ aucun autre mode parasite que la pression nulle.

Nous dégageons maintenant une remarque technique traduisant le fait que $q_{h,1}$ est un mode faiblement parasite de la pression. Cette remarque nous sera utile pour généraliser ce travail au cas de conditions aux limites de Dirichlet homogène dans toutes les directions d'espace.

Remarque V.3 :

1) Le résultat du Théorème IV.1, la définition (V.1) et la formule (V.14) montrent qu'il existe une constante strictement positive et indépendante de h telle que l'on ait

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(L_N, \varphi_{N,n})_N^2}{\lambda_{N,n} + 1} \leqslant C/N^3 .$$

2) On remarque qu'il existe une constante C' strictement positive et indépendante de h telle que l'on ait

$$\forall n, 1 \leqslant n \leqslant N-1 , \quad \lambda_{N,n} \geqslant C' .$$

En effet, en désignant par $\lambda_{N,1}$ la plus petite des valeurs propres discrètes $\lambda_{N,n}$, on sait que l'on a

$$\lambda_{N,1} = \inf_{\varphi \in \mathbf{P}_N^0(\Lambda)} \frac{\|\varphi'\|_N^2}{\|\varphi\|_N^2} ;$$

or la formule (I.12) montre que l'on a

$$\forall \varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda) \quad \|\varphi\|_{N,\Lambda}^2 \leqslant 3\|\varphi\|_{0,\Lambda}^2 ,$$

de sorte qu'en utilisant l'exactitude de la formule de quadrature (I.10) sur $\mathbf{P}_{2N-1}(\Lambda)$ il vient

$$\lambda_{N,1} \geqslant \inf_{\varphi \in \mathbf{P}_N^0(\Lambda)} \frac{\|\varphi'\|_{0,\Lambda}^2}{3\|\varphi\|_{0,\Lambda}^2} \geqslant \inf_{\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Lambda)} \frac{\|\varphi'\|_{0,\Lambda}^2}{3\|\varphi\|_{0,\Lambda}^2} = \pi^2/12 .$$

3) Des points 1) et 2), on déduit qu'il existe une constante C strictement positive et indépendante de h telle que l'on ait

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(L_N, \varphi_{N,n})_N^2}{\lambda_{N,n}} \leqslant C/N^3 .$$

V.2. Une première base des espaces $\mathbb{P}_{k,N}$

Afin d'étudier les opérateurs $\mathcal{R}_{k,N}$, nous allons maintenant exhiber une base des espaces $\mathbb{P}_{k,N}$. Pour cela, pour k et n entiers vérifiant $k \neq 0$ et $n \geqslant 1$, nous définissons un élément $A_{k,n}$ de $\mathbf{P}_{n-1}(\Lambda)$ par

$$A'_{k,n} - kA_{k,n} = -kL'_n . \tag{V.16}$$

Si $(\cdot\,,\,\cdot)_N$ désigne le produit scalaire $(\cdot\,,\,\cdot)_{0,\Lambda}$, nous posons $e_N = 1$ et si $(\cdot\,,\,\cdot)_N$ désigne le produit scalaire $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{N,\Lambda}$, nous posons

$$e_N = 2 + 1/N .$$

Pour k entier non nul, nous notons $B_{k,N}$ l'élément de $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ défini par

$$B_{k,N} = A_{k,N+1} + (e_N - 1)\,A_{k,N-1} . \tag{V.17}$$

Nous avons la caractérisation suivante des espaces $\mathbb{P}_{k,N}$.

LEMME V. 1 : *Si k est un entier non nul, alors $\mathbb{P}_{k,N}$ est le plan engendré par les polynômes $A_{k,N}$ et $B_{k,N}$.*

Démonstration : Il découle des formules (I.8) et (I.11) que l'orthogonal de $\mathbf{P}_N^0(\Lambda)$ dans $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ est le plan de base (L'_N, L'_{N+1}) (respectivement (L'_N, yL'_N)) lorsque $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ est muni du produit scalaire $(\cdot\,,\,\cdot)_{0,\Lambda}$ (respectivement $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{N,\Lambda}$). Nous distinguons deux cas.

1) Supposons que $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ soit muni du produit scalaire $(\cdot\,,\,\cdot)_{0,\Lambda}$. Nous déduisons de (V.4) la relation

$$\mathbb{P}_{k,N} = \left\{\varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda)\,;\, \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi' - k\varphi = \lambda L'_N + \mu L'_{N+1}\right\} .$$

Pour k entier non nul, $\mathbb{P}_{k,N}$ est donc un plan qui, par (V.16), contient les deux éléments $A_{k,N}$ et $A_{k,N+1}$. Ces deux polynômes sont évidemment linéairement indépendants, et par suite, dans le cas étudié, le lemme est démontré en remarquant qu'on a $e_N = 1$ donc $B_{k,N} = A_{k,N+1}$.

2) Supposons que $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ soit muni du produit scalaire $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{N,\Lambda}$. En procédant comme dans le cas précédent, pour k entier non nul, nous obtenons

$$\mathbb{P}_{k,N} = \left\{\varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda)\,;\, \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi = \lambda A_{k,N} + \mu \tilde{B}_{k,N}\right\}$$

où $\tilde{B}_{k,N}$ est l'élément de $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ défini par

$$(\tilde{B}_{k,N})' - k\tilde{B}_{k,N} = -\,ke_N\,yL'_N .$$

Or, nous déduisons des formules (I.6) et (I.7) la relation

$$(2N + 1)\,yL'_N = NL'_{N+1} + (N + 1)\,L'_{N-1} .$$

Ainsi, à partir de (V.16) et (V.17), nous obtenons

$$\tilde{B}_{k,N} = A_{k,N+1} + (1 + 1/N)\,A_{k,N-1} = B_{k,N} ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque V.4 : En utilisant (V.16) on montre facilement par récurrence la formule

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_{k,n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{L_n^{(j)}}{k^{j-1}}. \tag{V.18}$$

V.3. Démonstration du théorème IV.3

En posant

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad D_{k,N} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impair}}}^{N} \frac{L_N^{(j)}}{k^j},$$

la formule (V.18) montre que l'on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad A_{k,N} = kD_{k,N} + (D_{k,N})'.$$

On sait que L_N est un polynôme qui a la même parité que N. Nous constatons donc que pour tout entier k non nul, $D_{k,N}$ est un élément de $\mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)$ vérifiant

$$\forall x \in \Lambda, \quad D_{k,N}(-x) = (-1)^{N+1} D_{k,N}(x), D_{k,N}(x) = -D_{-k,N}(x).$$

On a donc

$$\|A_{K,N}\|_{0,\Lambda}^2 = \|A_{-K,N}\|_{0,\Lambda}^2 = K^2 \|D_{K,N}\|_{0,\Lambda}^2 + |D_{K,N}|_{1,\Lambda}^2$$

et

$$|(A_{K,N}, A_{-K,N})_{0,\Lambda}| = \left| K^2 \|D_{K,N}\|_{0,\Lambda}^2 - |D_{K,N}|_{1,\Lambda}^2 \right|,$$

ce qui donne

$$\frac{|(A_{K,N}, A_{-K,N})_{0,\Lambda}|}{\|A_{K,N}\|_{0,\Lambda} \|A_{-K,N}\|_{0,\Lambda}} = \left| \frac{1 - |D_{K,N}|_{1,\Lambda}^2 / (K^2 \|D_{K,N}\|_{0,\Lambda}^2)}{1 + |D_{K,N}|_{1,\Lambda}^2 / (K^2 \|D_{K,N}\|_{0,\Lambda}^2)} \right|. \tag{V.19}$$

Nous rappelons (voir [5]) qu'il existe une constante C indépendante de N telle que l'on ait

$$\forall q \in \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda), \quad |q|_{1,\Lambda} \leq CN^2 \|q\|_{0,\Lambda} \tag{V.20}$$

et nous remarquons que la fonction $\sigma : x \to |(1-x)/(1+x)|$ est décroissante sur $[0, 1]$. Ainsi, sous l'hypothèse $K > \sqrt{C}N^2$, on déduit de (V.19) et (V.20)

$$\frac{|(A_{K,N}, A_{-K,N})_{0,\Lambda}|}{\|A_{K,N}\|_{0,\Lambda} \|A_{-K,N}\|_{0,\Lambda}} \geq \sigma(CN^4/K^2). \tag{V.21}$$

On remarque maintenant que l'on a : $\forall x \in [0, 1]$, $\sigma(x) \geqslant 1 - 2x$. L'inégalité (V.21) apporte donc

$$\frac{|(A_{K,N}, A_{-K,N})_{0,\Lambda}|}{\|A_{K,N}\|_{0,\Lambda} \|A_{-K,N}\|_{0,\Lambda}} \geqslant 1 - 2\,CN^4/K^2 . \tag{V.22}$$

On pose maintenant

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega , \quad q(\mathbf{x}) = A_{K,N}(y)\, e^{iKx} .$$

La pression q ainsi définie est un élément de l'espace $\{\mathbf{S}_K(\Theta) \odot \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)\} \cap \mathbf{M}$.

D'après (V.1) et (V.6), nous avons

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{[b_h(\mathbf{w}_h, q)]^2}{\|\nabla \mathbf{w}_h\|_h^2} = \|A_{K,N}\|_N^2 - \frac{1}{2}\, \| \Pi_{K,N}(A_{K,N})\|_N^2 - \frac{1}{2}\, \| \Pi_{-K,N}(A_{K,N})\|_N^2 .$$

Or nous avons

$$\| \Pi_{K,N}(A_{K,N})\|_N^2 + \| \Pi_{-K,N}(A_{K,N})\|_N^2 \geqslant \left(A_{K,N}, \frac{A_{K,N}}{\|A_{K,N}\|_N}\right)_N^2 + \left(A_{K,N}, \frac{A_{-K,N}}{\|A_{-K,N}\|_{0,\Lambda}}\right)_N^2$$

et

$$\|q\|_h^2 = 2\,\pi\, \|A_{K,N}\|_N^2 .$$

Par suite, en utilisant l'exactitude de la formule de quadrature (I.10) sur $\mathbf{P}_{2N-1}(\Lambda)$ on obtient

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in X_h} \frac{[b_h(\mathbf{w}_h, q)]^2}{\|\nabla \mathbf{w}_h\|_h^2 \|q\|_h^2} \leqslant \frac{1}{4\,\pi} \left(1 - \frac{(A_{K,N}, A_{-K,N})_{0,\Lambda}^2}{\|A_{K,N}\|_{0,\Lambda}^2 \|A_{-K,N}\|_{0,\Lambda}^2}\right) . \tag{V.23}$$

Ainsi sous l'hypothèse $K > \sqrt{C} N^2$, nous déduisons de (V.22) et (V.23)

$$\inf_{q_h \in \mathbf{M}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_h \|q_h\|_h} \leqslant (C/4\,\pi)^{1/2} N^2/K ,$$

ce qui démontre (IV.12).

V.4. Une seconde base des espaces $\mathbf{P}_{k,N}$

Pour k entier non nul, nous allons construire une base orthonormée du plan $\mathbb{P}_{k,N}$. Pour cela, nous définissons l'angle $\Theta_{k,N}$ entre $A_{k,N}$ et $B_{k,N}$ par

$$\cos \Theta_{k,N} = \frac{(Z_{k,N}, B_{k,N})_N}{\|A_{k,N}\|_N \|B_{k,N}\|_N}, \quad 0 < \Theta_{k,N} < \pi, \tag{V.24}$$

et nous posons

$$\begin{cases} B_{k,N}^* = \dfrac{1}{\sin \Theta_{k,N}} \left[\dfrac{B_{k,N}}{\|B_{k,N}\|_N} - \dfrac{A_{k,N}}{\|A_{k,N}\|_N} \cos \Theta_{k,N} \right], \\ A_{k,N}^* = \dfrac{A_{k,N}}{\|A_{k,N}\|_N}. \end{cases} \tag{V.25}$$

Nous avons ainsi

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad \begin{cases} (A_{k,N}^*, B_{k,N}^*)_N = 0, \\ \|A_{k,N}^*\|_N = \|B_{k,N}^*\|_N = 1. \end{cases} \tag{V.26}$$

Dans ce paragraphe nous étudions le comportement asymptotique de $B_{k,N}^*$. Dans la proposition suivante nous commençons par comparer la norme des polynômes $A_{k,N}$ et $B_{k,N}$. Nous faisons d'abord deux remarques et établissons un lemme.

Remarque V.5 : On sait que les coefficients de Legendre des polynômes $L_n^{(j)}$ sont positifs ou nuls. Ainsi, la formule (V.18) montre qu'en posant

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_{k,n} = \sum_{p=0}^{n} \frac{2p+1}{2} A_{k,n}^p L_p, \tag{V.27}$$

on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} A_{k,n}^n = 0, \\ \forall p, 0 \leq p \leq n-1, \quad A_{k,n}^p \geq 0. \end{cases} \tag{V.28}$$

Remarque V.6 : On sait que pour chaque entier n, L_n est un polynôme qui a la même parité que n. Ainsi on déduit de (V.17) et de (V.18) les formules

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \ \forall y \in \Lambda, \quad \begin{cases} A_{k,N}(-y) = (-1)^{N+1} A_{-k,N}(y), \\ B_{k,N}(-y) = (-1)^N B_{-k,N}(y). \end{cases} \tag{V.29}$$

LEMME V.2 : *On a la relation*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \quad \frac{A_{k,n+1} - A_{k,n-1}}{2n+1} = \frac{A_{k,n}}{k} + L_n . \quad \text{(V.30)}$$

Démonstration : Posons $\varepsilon = (A_{k,n+1} - A_{k,n-1})/(2n+1)$. Des formules (V.16) et (I.7) nous déduisons

$$\varepsilon' - k\varepsilon = -kL_n ,$$

nous avons donc

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^{n} \frac{L_n^{(j)}}{k^j} .$$

Ainsi (V.30) se déduit de (V.18).

PROPOSITION V.2 : *Il existe une constante C strictement positive et indépendante de h telle que l'on ait*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\quad 1 - C\left(\frac{|k|}{N}\right)^2 \leqslant \frac{2N+1}{|k|} \frac{\|A_{k,N}\|_N}{\|B_{k,N}\|_N} \leqslant 1 . \quad \text{(V.31)}$$

Démonstration : Grâce aux formules (V.29), on peut se contenter de démontrer (V.31) pour k positif. Compte-tenu de (V.17), la formule (V.30) appliquée successivement avec $n = N$ et $n = N-1$ apporte

$$B_{k,N} = \frac{2N+1}{k} A_{k,N} + e_N A_{k,N-1} + (2N+1) L_N \quad \text{(V.32)}$$

et

$$A_{k,N} = \frac{2N-1}{k} A_{k,N-1} + A_{k,N-2} + (2N-1) L_{N-1} . \quad \text{(V.33)}$$

Puisque k est positif, la relation (V.28) indique que les coefficients de Legendre des polynômes qui interviennent dans ces deux égalités sont positifs. On déduit donc de (V.32) l'inégalité

$$\frac{2N+1}{k} \|A_{k,N}\|_N \leqslant \|B_{k,N}\|_N , \quad \text{(V.34)}$$

ce qui démontre la seconde inégalité dans (V.31). De même, par (V.33) on obtient

$$\|A_{k,N-1}\|_N \leqslant \frac{k}{2N-1} \|A_{k,N}\|_N \quad \text{(V.35)}$$

et

$$(2N-1)\|L_{N-1}\|_N \leqslant \|A_{k,N}\|_N .$$

Compte tenu de (I.8) et de l'exactitude de la formule de quadrature (I.10) sur $\mathbf{P}_{2N-1}(\Lambda)$, cette dernière relation s'écrit

$$2(2N-1) \leqslant \|A_{k,N}\|_N^2 . \tag{V.36}$$

L'inégalité (V.35) donne

$$\|A_{k,N}\|_N^2 \geqslant \frac{(2N-1)^2}{k^2} \|A_{k,N-1}\|_N^2$$

et avec (V.36) où l'on change N en $N-1$, il vient

$$\|A_{k,N}\|_N^2 \geqslant 2(2N-1)^2 (2N-3)/k^2 . \tag{V.37}$$

On observe maintenant que le réel e_N est inférieur à 3. Ainsi, par (I.12) on obtient

$$(2N+1)^2 \|L_N\|_N^2 \leqslant 3(2N+1)^2 \|L_N\|_{0,\Lambda}^2 \leqslant 6(2N+1) .$$

Les relations (V.34) et (V.36) assurent donc l'existence d'une constante C_1 strictement positive et indépendante de h telle que l'on ait

$$(2N+1)^2 \|L_N\|_N^2 \leqslant C_1 \left(\frac{k}{N}\right)^4 \|B_{k,N}\|_N^2 . \tag{V.38}$$

La formule (V.32) nous donne maintenant

$$\left\| B_{k,N} - \frac{2N+1}{k} A_{k,N} \right\|_N^2 = e_N^2 \|A_{k,N-1}\|_N^2 + (2N+1)^2 \|L_N\|_N^2 .$$

En utilisant (V.34), (V.35) et (V.38), on obtient

$$\begin{aligned}\left\| B_{k,N} - \frac{2N+1}{k} A_{k,N} \right\|_N^2 &\leqslant \left[9 \left(\frac{k^4}{(4N^2-1)^2} \right) + C_1 \left(\frac{k}{N} \right)^4 \right] \|B_{k,N}\|_N^2 \\ &\leqslant C_2 \left(\frac{k}{N} \right)^4 \|B_{k,N}\|_N^2 ,\end{aligned}$$

pour une constante C_2 strictement positive et indépendante de h. On obtient donc

$$\|B_{k,N}\|_N - \frac{2N+1}{k} \|A_{k,N}\|_N \leqslant C_2^{1/2} \left(\frac{k}{N}\right)^2 \|B_{k,N}\|_N ,$$

ce qui achève la démonstration de l'estimation (V.31).

Dans la proposition suivante nous étudions l'angle $\Theta_{k,N}$ entre les deux polynômes $A_{k,N}$ et $B_{k,N}$. Pour cela, un réel ξ non nul étant fixé, nous commençons par établir quelques propriétés des suites $(v^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ vérifiant

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \frac{v^{p+1} - v^{p-1}}{2p+1} = -\frac{v^p}{\xi}. \tag{V.39}$$

LEMME V.3 : *Si* $(v^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ et $(w^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ *sont deux suites vérifiant* (V.39) *alors, pour tout entier positif n, on a la formule*

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{2p+1}{2} v^p w^p = \frac{\xi}{4} \{v^{-1} w^0 + v^0 w^{-1} - v^{n+1} w^n - v^n w^{n+1}\} . \tag{V.40}$$

Démonstration : En utilisant (V.39) nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} (2p+1) v^p w^p &= \xi \sum_{p=0}^{n} (v^{p-1} - v^{p+1}) w^p \\
&= \xi \sum_{p=-1}^{n} v^p w^{p+1} - \xi \sum_{p=1}^{n+1} v^p w^{p-1} \\
&= \xi \{v^{-1} w^0 + v^0 w^{-1} - v^{n+1} w^n - v^n w^{n+1}\} \\
&\quad + \xi \sum_{p=0}^{n} v^p (w^{p+1} - w^{p-1}) \\
&= \xi \{v^{-1} w^0 + v^0 w^{-1} - v^{n+1} w^n - v^n w^{n+1}\} \\
&\quad - \sum_{p=0}^{n} (2p+1) v^p w^p ,
\end{aligned}$$

et ceci démontre (V.40).

LEMME V.4 : *Si* $(v^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ *et* $(w^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ *sont deux suites vérifiant* (V.39) *alors on a*

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{Z}, v^p w^{p+1} - v^{p+1} w^p &= \\
&= (-1)^{p+q} [v^q w^{q+1} - v^{q+1} w^q] . \qquad \text{(V.41)}
\end{aligned}$$

Démonstration : Posons $\delta^p = v^p w^{p+1} - v^{p+1} w^p$. En utilisant (V.39) on obtient

$$\delta^p = v^p \left(w^{p-1} - \frac{2p+1}{\xi} w^p \right) - w^p \left(v^{p-1} - \frac{2p+1}{\xi} v^p \right) = -\delta^{p-1} .$$

On obtient (V.41) par un raisonnement par récurrence sur $p - q$.

Pour k et n entiers non nuls, la suite $(A_{k,n}^p)_{0 \leq p \leq n}$ des coefficients de Legendre du polynôme $A_{k,n}$ a été définie en (V.27). Nous avons le lemme suivant :

LEMME V.5 : *Pour k et n entiers vérifiant $k \neq 0$ et $n \geqslant 2$, on a*

$$A_{k,n}^{n} = 0, \quad A_{k,n}^{n-1} = 2 \tag{V.42}$$

et

$$\forall p, 1 \leqslant p \leqslant n-1, \frac{A_{k,n}^{p+1} - A_{k,n}^{p-1}}{2p+1} = -\frac{A_{k,n}^{p}}{k}. \tag{V.43}$$

Démonstration : La relation (V.42) résulte de (V.18) et de (I.7). De (V.16) nous déduisons

$$\forall Q \in \mathbf{H}_0^1(\Lambda), \ (A_{k,n}, Q' + kQ)_{0,\Lambda} = -k(L_n, Q')_{0,\Lambda}.$$

On obtient alors (V.43) en prenant

$$Q = (L_{p+1} - L_{p-1})/(2p+1) \ (1 \leqslant p \leqslant n-1)$$

et en utilisant (I.7).

Pour chaque entier k non nul, on prolonge la suite $(A_{k,n}^{p})_{0 \leqslant p \leqslant n}$ en une suite $(A_{k,n}^{p})_{p \in \mathbb{Z}}$ de sorte que la relation (V.43) soit vérifiée pour tout entier p. Grâce à (V.42) on a ainsi

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall n, n \geqslant 2, \quad A_{k,n}^{n+1} = 2. \tag{V.44}$$

Les formules (V.17), (V.27) et (V.42) montrent que pour k entier non nul on a

$$B_{k,N} = (2N+1) L_N + C_{k,N}, \tag{V.45}$$

où $C_{k,N}$ est un polynôme de degré $N-1$ dont la suite $(C_{k,N}^{p})_{0 \leqslant p \leqslant N-1}$ des coefficients de Legendre est définie par

$$\forall p, 0 \leqslant p \leqslant N-1, C_{k,N}^{p} = A_{k,N+1}^{p} + (e_N - 1) A_{k,N-1}^{p}. \tag{V.46}$$

Les formules (V.43) et (V.46) montrent que pour chaque entier k non nul, la suite $(C_{k,N}^{p})_{0 \leqslant p \leqslant N-1}$ vérifie

$$\forall p, 1 \leqslant p \leqslant N-2, \frac{C_{k,N}^{p+1} - C_{k,N}^{p-1}}{2p+1} = -\frac{C_{k,N}^{p}}{k}. \tag{V.47}$$

Comme précédemment, nous prolongeons la suite $(C_{k,N}^{p})_{0 \leqslant p \leqslant N-1}$ en une suite $(C_{k,N}^{p})_{p \in \mathbb{Z}}$ de sorte que la relation (V.47) soit vérifiée pour tout entier p. En utilisant (V.44), (V.46) et (V.47), on a ainsi

$$C_{k,N}^{N} = 2e_N, C_{k,N}^{N-1} = A_{k,N+1}^{N-1} = 2\frac{2N+1}{k}. \tag{V.48}$$

Nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION V.3 : *Pour k entier non nul, on a*

$$\sin^2 \Theta_{k,N} = \frac{2\, k\, e_N \cos \Theta_{k,N}}{\|A_{k,N}\|_N \; \|B_{k,N}\|_N} . \tag{V.49}$$

Démonstration : Nous remarquons que puisque $C_{k,N}$ et $A_{k,N}$ sont des polynômes de degré $N-1$, on a

$$\|A_{k,N}\|_N = \|A_{k,N}\|_{0,\Lambda}, \; \|C_{k,N}\|_N = \|C_{k,N}\|_{0,\Lambda}$$

et, en utilisant (V.45)

$$\begin{cases} \|B_{k,N}\|_N^2 = e_N (2\,N+1)^2 \|L_N\|_N^2 + \|C_{k,N}\|_{0,\Lambda}^2 \\ \qquad\qquad = 2\,(2\,N+1)\, e_N + \|C_{k,N}\|_{0,\Lambda}^2 , \\ (B_{k,N}, A_{k,N})_N = (C_{k,N}, A_{k,N})_{0,\Lambda} . \end{cases} \tag{V.50}$$

Les suites $(A_{k,N}^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ et $(C_{k,N}^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ vérifiant la relation (V.39) avec $\xi = k$, nous obtenons avec (V.40)

$$\|A_{k,N}\|_{0,\Lambda}^2 = (k/2) \left\{ A_{k,N}^{-1} A_{k,N}^0 - A_{k,N}^{N-1} A_{k,N}^N \right\} ,$$
$$\|C_{k,N}\|_{0,\Lambda}^2 = (k/2) \left\{ C_{k,N}^{-1} C_{k,N}^0 - C_{k,N}^{N-1} C_{k,N}^N \right\} ,$$

et

$$(C_{k,N}, A_{k,N})_{0,\Lambda} = (k/4) \times \\ \times \left\{ A_{k,N}^{-1} C_{k,N}^0 + C_{k,N}^{-1} A_{k,N}^0 - A_{k,N}^{N-1} C_{k,N}^N - C_{k,N}^{N-1} A_{k,N}^N \right\} ,$$

d'où, à partir de (V.42), (V.48) et (V.50)

$$\|A_{k,N}\|_{0,\Lambda}^2 = (k/2)\, A_{k,N}^{-1} A_{k,N}^0 , \tag{V.51}$$

$$\|B_{k,N}\|_N^2 = (k/2)\, C_{k,N}^{-1} C_{k,N}^0 \tag{V.52}$$

et

$$(B_{k,N}, A_{k,N})_N = (k/4) \left\{ A_{k,N}^{-1} C_{k,N}^0 + C_{k,N}^{-1} A_{k,N}^0 - 4\, e_N \right\} . \tag{V.53}$$

Utilisons maintenant (V.41). Il vient

$$A_{k,N}^{-1} C_{k,N}^0 - C_{k,N}^{-1} A_{k,N}^0 = (-1)^N \left[A_{k,N}^{N-1} C_{k,N}^N - C_{k,N}^{N-1} A_{k,N}^N \right] ,$$

ainsi, en rappelant (V.42) et (V.48), nous avons

$$A_{k,N}^{-1} C_{k,N}^0 - C_{k,N}^{-1} A_{k,N}^0 = 4\,(-1)^N e_N . \tag{V.54}$$

Nous distinguons maintenant deux cas, selon que N est pair ou impair. Nous nous contentons de poursuivre la démonstration dans le cas où N est pair, le cas où N est impair se traitant de la même manière.

L'entier N étant pair, les formules (V.53) et (V.54) apportent

$$(B_{k,N}, A_{k,N})_N = (k/2)\, C_{k,N}^{-1}\, A_{k,N}^{0} . \tag{V.55}$$

On déduit alors de (V.51), (V.52) et (V.55) la formule suivante :

$$\|A_{k,N}\|_N^2\ \|B_{k,N}\|_N^2 - (B_{k,N}, A_{k,N})_N^2 =$$

$$= \left(\frac{k}{2}\right)^2 [A_{k,N}^{-1}\, C_{k,N}^{0}\, C_{k,N}^{-1}\, A_{k,N}^{0} - (C_{k,N}^{-1}\, A_{k,N}^{0})^2]$$

$$= \left(\frac{k}{2}\right)^2 C_{k,N}^{-1}\, A_{k,N}^{0} [A_{k,N}^{-1}\, C_{k,N}^{0} - C_{k,N}^{-1}\, A_{k,N}^{0}] .$$

On obtient alors la formule (V.49) en utilisant (V.24) et à nouveau (V.54) et (V.55).

Nous établissons maintenant la proposition la plus importante de ce paragraphe.

PROPOSITION V.4 : *On a*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad \frac{|(B_{k,N}^*, L_N)_N|^2}{\|B_{k,N}^*\|_N^2\ \|L_N\|_N^2} \geqslant 1 - C\,\frac{|k|^2}{N^2}, \tag{V.56}$$

où C est la constante intervenant dans la Proposition V.2.

Démonstration : Grâce à (V.24) et (V.29) on remarque que l'on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad \Theta_{k,N} = \pi - \Theta_{-k,N} .$$

Ainsi, par (V.25) et (V.29) on obtient

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall y \in \Lambda, \quad B_{k,N}^*(-y) = B_{-k,N}^*(y) .$$

Par conséquent, on peut se contenter de démontrer (V.56) pour k positif. Soit donc k un entier positif. La formule (V.49) montre que $\cos \Theta_{k,N}$ est positif. On tire des relations (V.25) et (V.45) la formule

$$(B_{k,N}^*, L_N)_N = \frac{1}{\sin \Theta_{k,N}}\, \frac{(B_{k,N}, L_N)_N}{\|B_{k,N}\|_N} = \frac{2\, e_N}{\sin \Theta_{k,N}\, \|B_{k,N}\|_N},$$

et, par (V.26) et (V.49), il vient

$$\frac{(B_{k,N}^*, L_N)_N^2}{\|B_{k,N}^*\|_N^2\ \|L_N\|_N^2} = \frac{(2N+1)}{k}\, \frac{1}{\cos \Theta_{k,N}}\, \frac{\|A_{k,N}\|_N}{\|B_{k,N}\|_N} \geqslant \frac{(2N+1)}{k}\, \frac{\|A_{k,N}\|_N}{\|B_{k,N}\|_N},$$

ce qui permet de déduire (V.56) en utilisant (V.31).

Remarque V.7 : Sous les hypothèses de la Proposition V.4 on déduit de (V.56) l'estimation

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \ |k| \leqslant C_1 N, \ \left\| B_{k,N}^* - \frac{L_N}{\|L_N\|_N} \right\|_N \leqslant (2\,C)^{1/2} \frac{|k|}{N} . \tag{V.57}$$

V.5. Démonstration du Théorème IV.1

En utilisant les formules (V.1) et (V.6) nous voyons qu'il suffit de démontrer qu'il existe un réel C' strictement positif et indépendant de h tel que l'on ait

$$\forall k, 1 \leqslant |k| \leqslant K, \ \| \pi_{k,N}(L_N)\|_N^2 + \\ + \| \pi_{-k,N}(L_N)\|_N^2 \geqslant \{2 - C'(|k|/N)^2\} \ \|L_N\|_N^2 .$$

Pour cela nous fixons un entier k vérifiant $1 \leqslant |k| \leqslant K$. En rappelant (V.26), nous obtenons

$$\|\pi_{k,N}(L_N)\|_N^2 + \|\pi_{-k,N}(L_N)\|_N^2 = [(L_N, A_{k,N}^*)_N^2 + (L_N, A_{-k,N}^*)_N^2] \\ + [(L_N, B_{k,N}^*)_N^2] + [(L_N, B_{-k,N}^*)_N^2] ,$$

nous avons donc

$$\| \pi_{k,N}(L_N)\|_N^2 + \|\pi_{-k,N}(L_N)\|_N^2 \geqslant (L_N, B_{k,N}^*)_N^2 + (L_N, B_{-k,N}^*)_N^2 ,$$

ce qui permet de conclure immédiatement en rappelant les formules (V.26) et en utilisant l'estimation (V.56).

V.6. Comportement asymptotique des polynômes $A_{k,N}^*$.

Dans ce paragraphe, pour chaque entier k non nul, nous comparons les polynômes $A_{k,N}^*$ à la fonction ζ_k introduite en (III.14).

Pour cela, pour chaque entier n positif, nous notons $\mathbf{\Pi}_n : \mathbf{L}^2(\Lambda) \to \mathbf{P}_n(\Lambda)$ l'opérateur de projection orthogonale pour le produit scalaire $(.,.)_{0,\Lambda}$ et on commence par étudier $\mathbf{\Pi}_N(e^{\xi y})$ pour ξ réel. On pose

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall y \in \Lambda, e^{\xi y} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2p+1}{2} \alpha^p(\xi) \, L_p(y) , \tag{V.58}$$

avec

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \alpha^p(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{\xi t} L_p(t) \, dt . \tag{V.59}$$

On a ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall y \in \Lambda, \boldsymbol{\Pi}_n(e^{\xi y}) = \sum_{p=0}^{n} \frac{2p+1}{2} \alpha^p(\xi) L_p(y) .$$

Dans le lemme et la proposition qui suivent, nous établissons quelques propriétés des coefficients α^p.

LEMME V.6 : *Pour ξ réel non nul, nous avons les relations*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\alpha^{p+1} - \alpha^{p-1}}{2p+1} = -\frac{\alpha^p}{\xi}, \tag{V.60}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (2p+1)(\alpha^p)' = (p+1)\alpha^{p+1} + p\alpha^{p-1} \tag{V.61}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ [\xi^{p+1} \alpha^p]' = \xi^{p+1} \alpha^{p-1} . \tag{V.62}$$

Démonstration : La formule (V.60) découle d'une intégration par parties et de la relation (I.7). Pour démontrer (V.61), nous remarquons que l'on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \ (\alpha^p)'(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{\xi t} t L_p(t)\, dt ,$$

et nous rappelons la formule (I.6).

Démontrons maintenant (V.62). Pour ξ réel non nul, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi^{p+1}} (\xi^{p+1} \alpha^p)' &= (p+1)\frac{\alpha^p}{\xi} + (\alpha^p)' \\
&= (p+1)\left(\frac{\alpha^p}{\xi} + \frac{\alpha^{p+1}}{2p+1}\right) + p\frac{\alpha^{p-1}}{2p+1} \quad (\text{par (V.61)}) \\
&= (p+1)\frac{\alpha^{p-1}}{2p+1} + p\frac{\alpha^{p-1}}{2p+1} \quad (\text{par (V.60)}) \\
&= \alpha^{p-1} .
\end{aligned}$$

Ainsi, le lemme est démontré.

PROPOSITION V.5 : *Nous avons*

$$\forall p \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \alpha^p(-\xi) = (-1)^p \alpha^p(\xi) , \tag{V.63}$$

$$\forall p \mathbb{N}^*, \forall \xi > 0, \quad 0 \leq \alpha^p(\xi) \leq \frac{\xi}{2p} \alpha^{p-1}(\xi) \tag{V.64}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \xi > 0, \quad 0 \leqslant \alpha^p(\xi) \leqslant \frac{\|e^{\xi y}\|_{0,\Lambda}}{\sqrt{p}} . \tag{V.65}$$

Démonstration : La formule (V.63) découle immédiatement de (V.59). Pour démontrer (V.64), nous remarquons que l'on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \alpha^0(\xi) = 2\frac{\operatorname{sh} \xi}{\xi} ,$$

ainsi, α^0 est une fonction positive sur $\mathbb{R}^+$. De plus, la formule (V.62) donne

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \alpha^p(\xi) = \frac{1}{\xi^{p+1}} \int_0^\xi t^{p+1} \alpha^{p-1}(t)\, dt .$$

En raisonnant par récurrence sur p, on a donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \xi \geqslant 0, \quad \alpha^p(\xi) \geqslant 0 .$$

L'estimation (V.64) découle alors de la formule (V.60). L'estimation (V.65) est obtenue en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (V.59) et en utilisant la formule (I.8).

Nous comparons maintenant les normes de $e^{\xi y}$ et de $\mathbf{\Pi}_N(e^{\xi y})$.

PROPOSITION V.6 : *Pour ξ réel non nul, nous avons*

$$1 - \frac{|\xi|}{2N} \leqslant \frac{\|\mathbf{\Pi}_N(e^{\xi y})\|_{0,\Lambda}}{\|e^{\xi y}\|_{0,\Lambda}} \leqslant 1 \tag{V.66}$$

et

$$\|e^{\xi y} - \mathbf{\Pi}_N(e^{\xi y})\|_{0,\Lambda} \leqslant \left(\frac{|\xi|}{2N}\right)^{1/2} \|e^{\xi y}\|_{0,\Lambda} . \tag{V.67}$$

Démonstration : Nous remarquons que grâce à (V.63), on peut supposer que ξ est strictement positif. Rappelons la formule (V.60). On prolonge la suite $(\alpha^p(\xi))_{p \in \mathbb{N}}$ en une suite $(\alpha^p(\xi))_{p \in \mathbb{Z}}$ de sorte que la formule (V.39) soit vérifiée pour tout entier p. En utilisant la formule (V.40), nous obtenons

$$\|e^{\xi y}\|_{0,\Lambda}^2 = \frac{\xi}{2}\alpha^{-1}(\xi)\,\alpha^0(\xi)$$

et

$$\|\mathbf{\Pi}_N(e^{\xi y})\|_{0,\Lambda}^2 = \|e^{\xi y}\|_{0,\Lambda}^2 - \frac{\xi}{2}\alpha^N(\xi)\,\alpha^{N+1}(\xi) .$$

En utilisant (V.65), on a donc

$$1 \geqslant \frac{\|\Pi_N(e^{\xi y})\|_{0,\Lambda}^2}{\|e^{\xi y}\|_{0,\Lambda}^2} = 1 - \frac{\xi}{2}\frac{\alpha^N(\xi)\,\alpha^{N+1}(\xi)}{\|e^{\xi y}\|_{0,\Lambda}^2}$$
$$\geqslant 1 - \frac{\xi}{[2N(2N+2)]^{1/2}}$$
$$\geqslant 1 - \xi/(2N),$$

ce qui démontre (V.66) en utilisant l'inégalité $\forall x \in [0,1]$, $\sqrt{x} \geqslant x$. On a aussi en utilisant (V.65)

$$\|e^{\xi y} - \Pi_N(e^{\xi y})\|_{0,\Lambda}^2 = (\xi/2)\,\alpha^N(\xi)\,\alpha^{N+1}(\xi)$$
$$\leqslant \xi/(2N)\,\|e^{\xi y}\|_{0,\Lambda}^2,$$

ce qui démontre (V.67).

Ces résultats vont permettre de comparer $(-1)^{N+1}A_{k,N}^*$ à ζ_k. Nous établissons d'abord trois lemmes.

LEMME V.7 : *On a formule*

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{Z}^*, 2\,\Pi_m(e^{ky}) = \alpha^m(k)\,A_{k,m+1} + \alpha^{m+1}(k)\,A_{k,m}. \quad \text{(V.68)}$$

Démonstration : Soient m et k deux entiers vérifiant $m \geqslant 1$ et $k \neq 0$. Les deux suites $(A_{k,m}^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ et $(A_{k,m+1}^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ vérifient la relation (V.39) avec $\xi = k$ et sont linéairement indépendantes puisqu'en vertu de (V.42) et de (V.44) on a

$$A_{k,m}^m = A_{k,m+1}^{m+1} = 0 \quad \text{et} \quad A_{k,m}^{m+1} = A_{k,m+1}^m = 2\,. \quad \text{(V.69)}$$

Ces deux suites constituent donc une base de l'espace des suites vérifiant (V.39) avec $\xi = k$. Or, la suite $(\alpha^p(k))_{p\in\mathbb{Z}}$ appartenant à cet espace, on déduit de (V.69) la formule

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad 2\,\alpha^p(k) = \alpha^m(k)\,A_{k,m+1}^p + \alpha^{m+1}(k)\,A_{k,m}^p\,.$$

La formule (V.68) découle alors du fait que $2\,\Pi_m(e^{ky})$ et $\alpha^m(k)\,A_{k,m+1} + \alpha^{m+1}(k)\,A_{k,m}$ ont les mêmes coefficients de Legendre.

LEMME V.8 : *On a l'inégalité suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \frac{\alpha^n(k)\,\|A_{k,n+1}\|_{0,\Lambda}}{2\,\|\Pi_n(e^{ky})\|_{0,\Lambda}} \geqslant 1 - \frac{k^2}{4n^2}. \quad \text{(V.70)}$$

Démonstration : Grâce à (V.29) et à (V.63), on peut supposer que k est strictement positif. Les relations (V.28) et (V.65) indiquent alors que les coefficients de Legendre de chacun des termes de (V.68) sont positifs. En utilisant (V.68) avec $m = n - 1$, on obtient la majoration

$$\|A_{k,n}\|_{0,\Lambda} \leqslant 2 \frac{\|\mathbf{\Pi}_{n-1}(e^{ky})\|_{0,\Lambda}}{\alpha^{n-1}(k)} . \tag{V.71}$$

De plus, en utilisant (V.68) avec $m = n$, on obtient

$$\|2\,\mathbf{\Pi}_n(e^{ky}) - \alpha^n(k)\,A_{k,n+1}\|_{0,\Lambda} = \alpha^{n+1}(k)\|A_{k,n}\|_{0,\Lambda} ,$$

d'où, avec (V.71)

$$\|2\,\mathbf{\Pi}_n(e^{ky}) - \alpha^n(k)\,A_{k,n+1}\|_{0,\Lambda} \leqslant 2\frac{\alpha^{n+1}(k)}{\alpha^{n-1}(k)}\,\|\mathbf{\Pi}_{n-1}(e^{ky})\|_{0,\Lambda} .$$

On en déduit

$$2\|\mathbf{\Pi}_n(e^{ky})\|_{0,\Lambda} - \alpha^n(k)\|A_{k,n+1}\|_{0,\Lambda} \leqslant 2\frac{\alpha^{n+1}(k)}{\alpha^{n-1}(k)}\,\|\mathbf{\Pi}_n(e^{ky})\|_{0,\Lambda} ,$$

et avec (V.64) on obtient

$$2\|\mathbf{\Pi}_n(e^{ky})\|_{0,\Lambda} - \alpha^n(k)\|A_{k,n+1}\|_{0,\Lambda} \leqslant 2\left(\frac{k}{2n}\right)^2\|\mathbf{\Pi}_n(e^{ky})\|_{0,\Lambda} ,$$

ce qui démontre (V.70).

LEMME V.9 : *Supposons que les produits scalaires* $(.,.)_N$ et $(.,.)_{0,\Lambda}$ *coïncident. Alors, pour tout réel* C_1 *vérifiant* $0 < C_1 < 2$, *il existe une constante* C_2 *strictement positive et indépendante de h telle que l'on ait*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ |k| < C_1(N-1), \quad |\cos\Theta_{k,N}| \geqslant 1 - C_2\frac{|k|}{N} . \tag{V.72}$$

Démonstration : Soient C_1 un réel vérifiant $0 < C_1 < 2$ et k un entier tel que $|k| < C_1(N-1)$. La formule (V.49) fournit la majoration

$$\sin^2\Theta_{k,N} \leqslant \frac{2|k|}{\|A_{k,N}\|_{0,\Lambda}\ \|A_{k,N+1}\|_{0,\Lambda}} .$$

(Rappelons que nous avons supposé $\mathbf{P}_n(\Lambda)$ muni du produit scalaire $(.,.)_{0,\Lambda}$ et qu'on a donc $e_N = 1$ et $B_{k,N} = A_{k,N+1}$). Nous utilisons l'inégalité (V.70) avec $n = N$ et $n = N + 1$. L'hypothèse

$$|k| < C_1(N-1) < 2(N-1)$$

assure que le second membre des deux inégalités ainsi obtenues est strictement positif ; nous avons donc

$$\sin^2 \Theta_{k,N} \leqslant \frac{|k|}{2\left(1 - \dfrac{k^2}{4(N-1)^2}\right)^2} \frac{\alpha^N(k)\,\alpha^{N-1}(k)}{\|e^{ky}\|_{0,\Lambda}^2} \times$$

$$\times \frac{\|e^{ky}\|_{0,\Lambda}^2}{\|\Pi_N(e^{ky})\|_{0,\Lambda}^2\,\|\Pi_{N-1}(e^{ky})\|_{0,\Lambda}^2},$$

et avec (V.65) et (V.66) on en déduit

$$\sin^2 \Theta_{k,N} \leqslant \frac{|k|}{2(1 - C_1^2)^2} \frac{1}{N-1} \frac{1}{(1 - C_1)^2}.$$

Ainsi, en posant $C_2 = (1 - C_1^2)^{-2}(1 - C_1)^{-2}$ et en remarquant que pour $N \geqslant 2$ on a l'inégalité $1/(N-1) \leqslant 2/N$, on obtient

$$|\cos \Theta_{k,N}| \geqslant (1 - C_2|k|/N)^{1/2} \geqslant 1 - C_2|k|/N.$$

Le lemme est donc démontré.

Nous démontrons maintenant le résultat essentiel de ce paragraphe.

PROPOSITION V.7 : *Il existe deux réels strictement positifs C_3 et C_4 tels que l'on ait*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ |k| < C_3 N,\ \left\|\zeta_k - \left(\frac{k}{|k|}\right)^{N+1} A_{k,N}^*\right\|_{0,\Lambda} \leqslant$$

$$\leqslant C_4\left(\frac{|k|}{N}\right)^{1/2}. \quad \text{(V.73)}$$

Démonstration : Dans cette démonstration, nous utilisons les résultats démontrés précédemment dans le cas particulier où les produits scalaires $(.,.)_N$ et $(.,.)_{0,\Lambda}$ coïncident ; on sait qu'on a alors $e_N = 1$ et $B_{k,N} = A_{k,N+1}$.

Soient C_1 un réel vérifiant $0 < C_1 < 2$ et k un entier tel que $|k| < C_1 N$. Grâce à la formule (V.29), on peut supposer que k est un entier strictement positif. On sait alors que $\alpha^{N+1}(k)$ est positif. Utilisons la formule (V.68) avec $m = N$. On obtient

$$\frac{(\Pi_N(e^{ky}), A_{k,N})_{0,\Lambda}}{\|\Pi_N(e^{ky})\|_{0,\Lambda}\,\|A_{k,N}\|_{0,\Lambda}} = \frac{1}{2}\alpha^N(k)\cos\Theta_{k,N}\frac{\|A_{k,N+1}\|_{0,\Lambda}}{\|\Pi_N(e^{ky})\|_{0,\Lambda}}$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha^{N+1}(k)\frac{\|A_{k,N}\|_{0,\Lambda}}{\|\Pi_N(e^{ky})\|_{0,\Lambda}}$$

$$\geqslant \cos\Theta_{k,N}\frac{\alpha^N(k)\,\|A_{k,N+1}\|_{0,\Lambda}}{2\|\Pi_N(e^{ky})\|_{0,\Lambda}}.$$

Puisque k est positif, la formule (V.49) montre que $\cos \Theta_{k,N}$ est positif. Donc en utilisant les estimations (V.70) et (V.72), nous obtenons

$$\frac{(\mathbf{\Pi}_N(e^{ky}), A_{k,N})_{0,\Lambda}}{\|\mathbf{\Pi}_N(e^{ky})\|_{0,\Lambda}\|A_{k,N}\|_{0,\Lambda}} \geqslant \left(1-\frac{k^2}{4N^2}\right)\left(1-C_2\frac{k}{N}\right)$$

où C_2 est la constante intervenant dans (V.72). Nous remarquons maintenant que la fonction $\sigma: x \to (1-x^2/4)(1-C_2 x)$ vérifie $\sigma(0)=1$, $\sigma'(0)=-C_2$. Il existe donc un réel C_3 strictement positif tel que l'on ait $\forall x \in [0, C_3[$, $\sigma(x) \geqslant 1 - 2\,C_2 x$. Si k est un entier vérifiant $0 < k < C_3 N$, nous avons donc

$$\frac{(\mathbf{\Pi}_N(e^{ky}), A_{k,N})_{0,\Lambda}}{\|\mathbf{\Pi}_N(e^{ky})\|_{0,\Lambda}\|A_{k,N}\|_{0,\Lambda}} \geqslant 1-2\,C_2\frac{k}{N},$$

ce qui donne immédiatement

$$\left\|\frac{\mathbf{\Pi}_N(e^{ky})}{\|\mathbf{\Pi}_N(e^{ky})\|_{0,\Lambda}} - A^*_{k,N}\right\|_{0,\Lambda} \leqslant 2\left(C_2\frac{k}{N}\right)^{1/2}.$$

De plus, en utilisant (V.66) et (V.67), nous obtenons

$$\left\|\frac{\mathbf{\Pi}_N(e^{ky})}{\|\mathbf{\Pi}_N(e^{ky})\|_{0,\Lambda}} - \zeta^*_k\right\|_{0,\Lambda} \leqslant \left(\frac{k}{2N}\right)^{1/2} + \frac{k}{2N}.$$

L'estimation (V.73) découle des deux précédentes.

V.7. Démonstration du Théorème IV.2

Nous commençons par remarquer que la formule (I.12) donne l'encadrement

$$\forall \varphi \in \mathbf{P}_N(\Lambda), \quad \|\varphi\|^2_{0,\Lambda} \leqslant \|\varphi\|^2_{N,\Lambda} \leqslant 3\,\|\varphi\|^2_{0,\Lambda},$$

on a donc

$$\forall u \in \mathbf{S}_K(\Theta)\otimes\mathbf{P}_N(\Lambda), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \|u(x,.)\|^2_{0,\Lambda}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \|u(x,.)\|^2_{N,\Lambda}\,dx \leqslant 3\int_{-\pi}^{\pi} \|u(x,.)\|^2_{0,\Lambda}\,dx.$$

Or la Remarque IV.2 montre que sous les hypothèses du Théorème IV.2, les formes bilinéaires b_h et b coïncident. Il suffit donc de le démontrer dans le cas où $\mathbf{P}_N(\Lambda)$ est muni du produit scalaire $(.,.)_{0,\Lambda}$.

Fixons un réel C_1 vérifiant $0 < C_1 < 2$ et supposons que l'on ait $K < C_1 N$. En utilisant les formules (V.1) et (V.6) nous voyons qu'il suffit de prouver l'existence de deux constantes C et C', indépendantes de h, vérifiant $0 < C < 2$ et $C' > 0$ et telles que l'on ait

$$\forall k,\ 1 \leqslant |k| \leqslant K,\ \forall q \in \mathbf{P}_{N-1}(\Lambda),$$

$$\frac{\| \pi_{k,N}(q) \|_{0,\Lambda}^2 + \| \pi_{-k,N}(q) \|_{0,\Lambda}^2}{\| q \|_{0,\Lambda}^2} \leqslant C + C' \left(\frac{K}{N} \right)^{1/2}. \quad \text{(V.74)}$$

Pour cela nous fixons un entier k vérifiant $1 \leqslant |k| \leqslant K$ et un élément q de $\mathbf{P}_{N-1}(\Lambda)$. En rappelant les relations (V.26), nous obtenons

$$\| \pi_{k,N}(q) \|_{0,\Lambda}^2 + \| \pi_{-k,N}(q) \|_{0,\Lambda}^2 = [(q, A_{k,N}^*)_{0,\Lambda}^2 + (q, A_{-k,N}^*)_{0,\Lambda}^2] + [(q, B_{k,N}^*)_{0,\Lambda}^2 + (q, B_{-k,N}^*)_{0,\Lambda}^2] .$$

Nous majorons successivement chacun des deux termes du membre de droite dans la formule précédente.

1) La relation (V.5) montre que $A_{k,N}^*$ et $A_{-k,N}^*$ sont linéairement indépendants. En utilisant (V.26) et l'inégalité (III.26), nous obtenons donc

$$[(q, A_{k,N}^*)_{0,\Lambda}^2 + (q, A_{-k,N}^*)^2] \leqslant [1 + |(A_{k,N}^*, A_{-k,N}^*)_{0,\Lambda}|] \|q\|_{0,\Lambda}^2 .$$

Or nous avons

$$|(A_{k,N}^*, A_{-k,N}^*)_{0,\Lambda}| \leqslant$$

$$\leqslant |(\zeta_k, \zeta_{-k})0, \Lambda| + \left\| \zeta_k - \left(\frac{k}{|k|} \right)^{N+1} A_{k,N}^* \right\|_{0,\Lambda} \|A_{-k,N}^*\|_{0,\Lambda} + \|\zeta_k\|_{0,\Lambda} \left\| \zeta_{-k} - \left(\frac{-k}{|k|} \right)^{N+1} A_{-k,N}^* \right\|_{0,\Lambda},$$

d'où, sous l'hypothèse $K < C_3 N$ (où C_3 est la constante intervenant dans (V.73)), en utilisant (III.15), (V.26) et (V.73)

$$|(A_{k,N}^*, A_{-k,N}^*)_{0,\Lambda}| \leqslant \frac{2k}{\operatorname{sh}(2k)} + C_5 \left(\frac{K}{N} \right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{\operatorname{sh} 2} + C_5 \left(\frac{K}{N} \right)^{1/2},$$

pour une constante C_5 strictement positive et indépendante de h. Ainsi, on a

$$(q, A_{k,N}^*)_{0,\Lambda}^2 + (q, A_{-k,N}^*)_{0,\Lambda}^2 \leqslant \left\{ 1 + \frac{2}{\operatorname{sh} 2} + C_5 \left(\frac{K}{N} \right)^{1/2} \right\} \|q\|_{0,\Lambda}^2 . \quad \text{(V.75)}$$

2) Nous estimons maintenant le terme $[(q, B^*_{k,N})^2_{0,\Lambda} + (q, B^*_{-k,N})^2_{0,\Lambda}]$. Puisque q est un polynôme de degré au plus égal à $N-1$, nous pouvons écrire

$$(q, B^*_{k,N})^2_{0,\Lambda} = (q, B^*_{k,N} - \varepsilon_{k,N} L_N)^2_{0,\Lambda} \leq \|q\|^2_{0,\Lambda} \|B^*_{k,N} - \varepsilon_{k,N} L_N\|^2_{0,\Lambda}$$

où le réel $\varepsilon_{k,N}$ est tel que l'on ait

$$\|\varepsilon_{k,N} L_N\|_{0,\Lambda} = 1, \ (B^*_{k,N}, \varepsilon_{k,N} L_N)_{0,\Lambda} \geq 0 .$$

En notant que l'on a

$$\|B^*_{k,N} - \varepsilon_{k,N} L_N\|^2_{0,\Lambda} = 2 - 2 \frac{|(B^*_{k,N}, L_N)_{0,\Lambda}|}{\|A^*_{k,N}\|_{0,\Lambda} \|L_N\|_{0,\Lambda}}$$

et en utilisant (V.56), nous obtenons donc

$$(q, B^*_{k,N})^2_{0,\Lambda} \leq C_6 \frac{K}{N} \|q\|^2_{0,\Lambda} ,$$

pour une constante C_6 strictement positive et indépendante de h. De la même manière nous obtenons

$$(q, B^*_{-k,N})^2_{0,\Lambda} \leq C_6 \frac{K}{N} \|q\|^2_{0,\Lambda} .$$

Les deux estimations précédentes et l'inégalité (V.75) démontrent (V.74) avec $C = 1 + 2/\mathrm{sh}\ (2)$ et ceci achève la démonstration du Théorème IV.2.

RÉFÉRENCES

[1] C. BERNARDI, C. CANUTO & Y. MADAY, *Generalized Inf-Sup Condition for Chebyshev Approximation of the Navier-Stokes Equations,* à paraître dans SIAM J. Numer. Anal.

[2] C. BERNARDI, Y. MADAY & B. MÉTIVET, *Spectral Approximation of the Periodic Nonperiodic Navier-Stokes Equations* (to appear in Numer. Math.).

[3] C. BERNARDI, Y. MADAY & B. MÉTIVET, *Calcul de la pression dans la résolution spectrale du problème de Stokes,* La Recherche Aérospatiale **1** (1987), 1-21.

[4] F. BREZZI, *On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point problems Arising from Lagrange Multipliers,* RAIRO Anal. Numér. *8* (1974), 129-151.

[5] C. CANUTO & A. QUARTERONI, *Approximation Results for Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces,* Math. of Comp. *38* (1981), 67-86.

[6] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI & T. A. ZANG, *Spectral Methods in Fluid Dynamics,* Springer-Verlag in press (1987).

[7] P. J. DAVIS & P. RABINOWITZ, *Methods of Numerical Integration,* Academic Press (1985).

[8] V. GIRAULT & P.-A. RAVIART, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms,* Springer-Verlag (1986).

[9] M. R. MALIK, T. A. ZANG & M. Y. HUSSAINI, *A Spectral Collocation Method for the Navier-Stokes Equations,* Icase Report n° 84-19 (1984).