M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

D. GOGNY
P. L. LIONS

Sur les états d'équilibre pour les densités électroniques dans les plasmas

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 23, nº 1 (1989), p. 137-153

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1989__23_1_137_0>

© AFCET, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 23, n° 1, 1989, p. 137 à 153)

SUR LES ÉTATS D'ÉQUILIBRE POUR LES DENSITÉS ÉLECTRONIQUES DANS LES PLASMAS (*)

D. GOGNY (1) et P. L. LIONS (2) (3)

Résumé. — *Dans ce rapport nous analysons l'obtention des états stationnaires pour des modèles simples d'évolution de la densité électronique dans les plasmas. Nous montrons également divers résultats d'unicité et de comportement asymptotique. Enfin, nous indiquons différentes méthodes d'approximation en vue du calcul numérique de ces états.*

Abstract. — *In this paper, we derive models of equilibrium states for electron densities in plasmas. The corresponding mathematical problem is solved together with a related singular perturbations problem. We also propose various approximation methods.*

I. INTRODUCTION

Nous étudions dans cette note les états stationnaires pour des modèles simples d'évolution de la densité électronique dans les plasmas. Nous considérons un modèle du type Vlasov-Boltzmann et nous rappelons rapidement la forme des états stationnaires en la justifiant (Section II). Puis, nous montrons l'existence et l'unicité d'un tel état stationnaire (à température fixée) dans la Section III. La Section IV est consacrée à l'étude d'un problème asymptotique. Et nous décrivons dans la Section V divers procédés d'approximation.

Cette étude a pour objectif de donner une base rigoureuse à l'étude de tels états stationnaires et à leur calcul numérique.

(*) Reçu en décembre 1987.

(1) CEA, Service P.T.N., Centre d'Études de Bruyères-Le-Châtel, B.P. n° 12, 91680 Bruyères-Le-Châtel Cedex.

(2) Ceremade, Université Paris-Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16.

(3) Conseiller scientifique, DPG, Centre d'Études de Limeil, CEA.

Mathematical Modelling and Numerical Analysis © AFCET Gauthier-Villars

II. SUR LA FORME DES ÉTATS STATIONNAIRES

Nous considérons un modèle de l'évolution de la distribution de densité électronique $f(x, v, t)$ à un corps dans un plasma ; ce modèle est donné par l'équation de transport suivante (de type Vlasov-Boltzmann) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m}(E + v \wedge B) \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll.}} \tag{1}$$

où E désigne le champ électrique, B le champ magnétique, e la charge de l'électron, v (la vitesse) décrit $\mathbb{R}^3$, x décrit un domaine Ω fixé supposé être pour simplifier un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$ (domaine de confinement du plasma) et $t \in [0, \infty[$. De plus, E vérifie

$$-\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad E = \nabla U \tag{2}$$

avec $\rho = \int f(x, v, t)\, dv$, U (le potentiel) est une fonction sur Ω définie à une constante additive près vérifiant des conditions aux limites précisées ci-dessous. Enfin, la notation $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll.}}$ est la notation habituelle pour les termes de collision de Boltzmann (voir par exemple C. Cercignani [3] pour une description détaillée de ces termes de collisions) : nous noterons également $Q(f, f)$ ce terme de collisions [Q est une forme quadratique].

On déduit de la loi de conservation associée à l'entropie, à savoir

$$\frac{d}{dt}\left[\iint \{f \operatorname{Log} f - f\}\, dx\, dv\right] = \iint \operatorname{Log} f Q(f, f)\, dx\, dv \leqslant 0 \tag{3}$$

(remarquer également que $\iint f\, dx\, dv$ est un invariant du mouvement) que tout état stationnaire $f_0(x, v)$ doit annuler le membre de droite de (3). Or, pour toute fonction $g(v) \geqslant 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{Log} g Q(g, g)\, dv \leqslant 0$$

avec égalité si et seulement si $g(v) = \exp(a + b \cdot v - c|v|^2)$ (voir [3]), où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^3$, $c > 0$. Et donc $f_0(x, v)$ est nécessairement de la forme

$$f_0(x, v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m|v|^2}{2kT} + \phi(x) \cdot v + \varphi(x)\right) \tag{4}$$

où φ, ϕ, T sont des fonctions sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$, $]0,\infty[$ (nous verrons plus loin que nécessairement T est une constante positive appelée température électronique), k étant la constante de Boltzmann. De plus, $Q(f_0, f_0) = 0$ et donc en reportant dans (1) on trouve pour tous $x \in \Omega$, $v \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{m|v|^2}{2\,kT^2} v \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot v - \frac{e}{m}(E + v \wedge B) \cdot \left[- \frac{mv}{kT} + \phi(x) \right] = 0$$

d'où on déduit que T est constante et

(5) $$E \,.\, \phi(x) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \nabla U(x) \,.\, \phi(x) = 0 \text{ sur } \Omega$$

(6) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{e}{kT} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{e}{m} B \wedge \phi = 0 \text{ sur } \Omega$$

et $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ sur Ω d'où (si Ω est connexe) $\phi(x) = \phi_0 \in \mathbb{R}^3$ sur Ω. Mais alors d'après (5) ceci entraîne que U est constant sur les droites de direction ϕ_0 dans le cas où $\phi_0 \neq 0$. Et ceci contredit en général les conditions aux limites imposées sur U qui devraient alors vérifier

(7) $$U(x) - U(y) = 0 \quad \forall x, y \in \partial\Omega\,, \quad (x - y) \wedge \phi_0 = 0\,.$$

Nous supposons dans tout ce qui suit que les conditions aux limites contredisent (7) de sorte que nécessairement $\phi(x) \equiv 0$ sur Ω et (5) est vérifiée automatiquement. De plus, (6) entraîne alors

(8) $$\varphi = - \frac{e}{kT} U + \lambda_0 \text{ sur } \Omega$$

où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, ce qui combiné avec (2) donne finalement

(9) $$- \Delta U = 4\,\pi \exp\left(- \frac{e}{kT} U \right) \gamma \text{ dans } \Omega \text{ avec } \gamma = \exp(\lambda_0)\,.$$

Pour déterminer γ on rappelle que le nombre d'électrons est fixé. En fait, T et γ sont déterminés en fixant les valeurs de deux quantités invariantes à savoir d'une part

$$\iint f(x, v, t)\, dx\, dv = N$$

et d'autre part puisque $\displaystyle\iint v f_0(x, v)\, dx\, dv = 0$

$$\iint |v|^2 f(x, v, t)\, dx\, dv = M_2\,,$$

M_2 détermine évidemment T tandis que M_0 détermine γ. Plus précisément,

$$N = \int_\Omega \exp\left(-\frac{e}{kT} U\right) dx \, . \exp(\lambda_0)$$

d'où $\gamma = N\left[\int_\Omega \exp\left(-\frac{eU}{kT}\right) dx\right]^{-1}$. Et en reportant dans (9) on obtient facilement

$$(10) \quad -\Delta U = 4\,\pi N \exp\left(-\frac{eU}{kT}\right)\left(\int_\Omega \exp\left(-\frac{eU}{kT}\right) dx\right)^{-1} \text{ dans } \Omega \, .$$

De façon plus générale, quand on considère des particules chargées de masse et de charge différentes, on obtient une équation pour le potentiel U de la forme

$$(11) \quad -\Delta U = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \exp(-\mu_i U)\left(⨍_\Omega \exp(-\mu_i U)\, dx\right)^{-1} - \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j \exp(\omega_j U)\left(⨍_\Omega \exp(\omega_j U)\, dx\right)^{-1} \text{ dans } \Omega \, ;$$

avec $n_1, n_2 \geqslant 0$, $\lambda_i > 0$, $\nu_j > 0$, $\mu_i \geqslant 0$, $\omega_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n_2)$.

Typiquement, les conditions aux limites sont de la forme suivante : si $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ avec Ω_2 ouvert tel que $\bar{\Omega}_2 \subset \Omega_1$, on prescrit

$$(12) \qquad U = \text{constante sur } \partial\Omega_1 \, , \quad U = \text{constante sur } \partial\Omega_2 \text{ et}$$
$$U|_{\partial\Omega_1} - U|_{\partial\Omega_2} = V$$

où $V \in \mathbb{R}$ est donnée.

De sorte que (11)-(12) est invariant par la transformation $[U \to U +$ constante$]$ et on retrouve bien la propriété que le potentiel est défini à une constante additive près. On peut bien entendu lever cette indétermination en imposant par exemple $U = 0$ sur $\partial\Omega_2$ et donc $U = V$ sur $\partial\Omega_1$!

Nous traiterons dans tout ce qui suit des équations du type (11) avec une condition aux limites

$$(13) \qquad U = U_0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où U_0 est une fonction donnée sur $\bar{\Omega}$ (ou sur $\partial\Omega$) régulière (on pourrait tout aussi bien la prendre dans $H^1(\Omega)$ ...).

Pour conclure cette section, nous remarquons que dans le cas plus simple d'équations de type Vlasov-Poisson (i.e. pas de termes de collision $Q(f, f)$, et $B \equiv 0$) il est possible de construire « beaucoup plus » de solutions stationnaires. En effet, il convient d'observer que si les termes de collision nécessitent la forme exponentielle, il est possible lorsque ces termes ne sont plus présents (ou négligés) de chercher des états stationnaires sous la forme

$$g\left(\frac{1}{2} m|v|^2 + eU(x)\right)$$

et pour des classes très générales de nonlinéarités g ceci conduit à la « détermination » d'un potentiel U et donc d'une solution stationnaire. Bien sûr, pour les problèmes de plasmas le choix exponentiel est naturel du point de vue de la Physique (Mécanique Statistique). Il est également intéressant de noter que ce choix correspond à la seule nonlinéarité g qui respecte l'indétermination de U par l'addition de constantes. Néanmoins, et ce surtout pour les applications à certains modèles d'astrophysique, d'autres choix de g peuvent être considérés et nous renvoyons le lecteur à J. Batt, H. Berestycki, P. Degond et B. Perthame [1] ; J. Batt, W. Faltenbaches et E. Horst [2] pour plus de détails.

III. EXISTENCE ET UNICITÉ

Le résultat essentiel et élémentaire concernant le problème aux limites (11)-(13) est le suivant.

THÉORÈME 1 : *Il existe une unique solution U régulière sur $\bar{\Omega}$ du problème* (11) *et* (13). *De plus, U est le minimum sur l'espace des fonctions w satisfaisant* (13) *de la fonctionnelle*

$$(14) \quad \mathscr{E}(w) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla w|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \operatorname{Log} \left\{ \int_\Omega \exp(-\mu_i w) \, dx \right\} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{v_j}{\omega_j} \operatorname{Log} \left\{ \int_\Omega \exp(\omega_j w) \, dx \right\}$$

où on convient bien sûr que $\frac{1}{\theta} \operatorname{Log} \left\{ \int_\Omega \exp(\theta w) \, dx \right\} = \int_\Omega w \, dx$ *si* $\theta = 0$.

Remarques : 1) La structure mathématique qui est derrière le résultat d'unicité (et l'existence peut d'ailleurs en découler modulo quelques détails techniques) est que l'équation (11) est de la forme

$$(15)\quad -\Delta U = f\left(x\,;\exp(-\mu_1 U)\left(\int_\Omega \exp(-\mu_1 U)\,dx\right)^{-1},\dots,\right.$$

$$\exp(-\mu_n U)\left(\int_\Omega \exp(-\mu_n U)\,dx\right)^{-1};$$

$$\left.\exp(\omega_1 U)\left(\int_\Omega \exp(\omega_1 U)\,dx\right)^{-1},\dots,\exp(\omega_m U)\left(\int_\Omega \exp(\omega_m U)\,dx\right)^{-1}\right)$$

avec $f(x\,;t_1,\dots,t_n\,;s_1,\dots,s_m)$ croissant en t_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et décroissant en s_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

2) Signalons également que, comme nous le verrons dans la Section V, la fonctionnelle $\mathscr{E}$ est strictement convexe (en tout cas sur $U_0 + H_0^1(\Omega)$) et que donc l'équation (11) peut être abordée sous l'angle des opérateurs maximaux monotones. Nous préférons néanmoins démontrer l'unicité ci-dessous par une méthode directe car elle donne des informations supplémentaires (cf. les remarques suivant la démonstration du théorème 1). En fait, l'opérateur non linéaire intervenant dans l'équation (11) est accrétif dans $L^p(\Omega)$ $(\forall 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — et même m — accrétif — : la vérification se fait en remarquant que si, par exemple, $u, v \in L^\infty(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $\omega > 0$ (les cas $p = 1$, $p = \infty$ et $-\mu = \omega < 0$ se traitent de façon analogue), on a

$$\int_\Omega \left[\frac{e^{\omega u}}{\int e^{\omega u}} - \frac{e^{\omega v}}{\int e^{\omega v}}\right] |u - v|^{p-2}(u - v)\,dx =$$

$$= \omega \int dx\,|u - v|^{p-2}(u - v)\int_0^1 dt\left[\frac{e^{\omega w_t}}{\int e^{\omega w_t}}(u - v)\right.$$

$$\left. - \frac{e^{\omega w_t}}{\left(\int e^{\omega w_t}\right)^2}\int e^{\omega w_t}(u - v)\,dy\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{\omega}{\left(\int e^{\omega w_t}\right)^2}\,dt \cdot \left[\left(\int_\Omega e^{\omega w_t}|u - v|^p\,dx\right)\left(\int_\Omega e^{\omega w_t}\,dx\right) + \right.$$

$$\left. - \left(\int_\Omega e^{\omega w_t}(u - v)\,dx\right)\left(\int_\Omega e^{\omega w_t}|u - v|^{p-2}(u - v)\,dx\right)\right]$$

et cette dernière quantité est clairement positive au vu des inégalités de Hölder, où on a noté $w_t = v + t(u - v)$.

Démonstration : Aussi bien l'unicité que l'existence peuvent se démontrer de plusieurs manières différentes : nous démontrerons ici l'unicité par une application simple du principe du maximum classique et nous utiliserons la formulation variationnelle pour esquisser les grands traits de la démonstration de l'existence.

Soient U_1 et U_2 deux solutions de (11) et (13) : si $U_1 \not\equiv U_2$, on peut supposer sans restreindre la généralité que $\max (U_1 - U_2) > 0$. Soit x_0 un point de maximum sur $\bar{\Omega}$ de $U_1 - U_2$. D'après (13), $x_0 \in \Omega$ et donc

$$- \Delta (U_1 - U_2)(x_0) \geqslant 0 . \tag{16}$$

On peut d'autre part supposer que l'un des μ_i ou des ω_j est non nul car sinon (11) devient une équation standard et l'unicité est immédiate. Et on remarque que si $\mu \geqslant 0$ ou si $\omega \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \exp(-\mu U_1(x_0)) \exp(-\mu U_2(x)) &\leqslant \exp(-\mu U_2(x_0)) \exp(-\mu U_1(x)) \\ \exp(\omega U_1(x_0)) \exp(\omega U_2(x)) &\geqslant \exp(\omega U_2(x_0)) \exp(\omega U_1(x)) \end{aligned}$$

pour tout x dans Ω, d'où bien sûr

$$\begin{aligned} \exp(-\mu U_1(x_0)) \int_\Omega \exp(-\mu U_1)\, dx &\leqslant \exp(-\mu U_2(x_0)) \int_\Omega \exp(-\mu U_2)\, dx \\ \exp(\omega U_1(x_0)) \int_\Omega \exp(\omega U_1)\, dx &\geqslant \exp(\omega U_2(x_0)) \int_\Omega \exp(\omega U_2)\, dx \end{aligned}$$

et si μ ou $\omega > 0$ l'égalité n'a lieu que si $U_1 - U_2$ est constant sur Ω ce qui est impossible puisque d'une part $U_1 - U_2 = 0$ sur $\partial\Omega$ et d'autre part $U_1(x_0) - U_2(x_0) > 0$. En reportant ces inégalités dans (11), nous obtenons alors

$$- \Delta (U_1 - U_2)(x_0) < 0$$

ce qui contredit (16) et la contradiction prouve l'unicité.

En ce qui concerne l'existence, on minimise tout d'abord la fonctionnelle sur la classe de fonction suivante : $w \in H^1(\Omega)$, $w = U_0$ sur $\partial\Omega$ et si $n_2 \geqslant 1$, $\bar{\omega} = \underset{1 \leqslant j \leqslant n_2}{\mathrm{Max}}\ \omega_j > 0$, $\exp(\bar{\omega} w) \in L^1(\Omega)$, et de même si $n_1 \geqslant 1$,

$\bar{\mu} = \underset{1 \leqslant j \leqslant n_1}{\mathrm{Max}}\ \mu_i > 0$, $\exp(-\bar{\mu} w) \in L^1(\Omega)$.

L'existence d'un minimum U dans cette classe est un exercice d'analyse fonctionnelle. Il est facile de vérifier que U est solution de (11) (au sens des distributions). En remarquant que (11) peut se réécrire

$$- \Delta U + F(U) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{17}$$

où

$$F(\sigma) = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j \exp(\omega_j \sigma) - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \exp(-\mu_i \sigma) \quad (\forall \sigma \in \mathbb{R}),$$

avec β_j, $\alpha_i > 0$ (dépendant de u) ; on déduit de la monotonie de F des bornes sur U et la régularité de U découle de ces bornes par un argument standard de « bootstrapping » elliptique.

Remarques : 1) Si $\bar{U}$ (resp. $\underline{U}$) est une sursolution de (11) (resp. sous-solution de (11)) i.e.

$$-\Delta \bar{U} \geqslant \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \exp(-\mu_i \bar{U}) \left(\int_\Omega \exp(-\mu_i \bar{U})\, dx \right)^{-1} + \\ - \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j \exp(\omega_j \bar{U}) \left(\int_\Omega \exp(\omega_j \bar{U})\, dx \right)^{-1}$$

$$\left(\text{resp. } - \Delta \underline{U} \leqslant \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \exp(-\mu_i \underline{U}) \left(\int_\Omega \exp(-\mu_i \underline{U})\, dx \right)^{-1} + \\ - \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j \exp(\omega_j \underline{U}) \left(\int_\Omega \exp(\omega_j \underline{U})\, dx \right)^{-1} \right)$$

alors la démonstration de l'unicité prouve que

$$U \leqslant \bar{U} + \max_{\partial\Omega} (U_0 - \bar{U}) \text{ sur } \bar{\Omega}$$

$$(\text{resp. } U \geqslant \underline{U} + \min_{\partial\Omega} (U_0 - \underline{U}) \text{ sur } \bar{\Omega}).$$

2) Dans le cas de l'équilibre de charges i.e.

$$\sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i = \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j \tag{18}$$

on voit que toute constante $C \in \mathbb{R}$ est solution de (11).

IV. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Nous considérons dans cette section le cas particulier de (11) suivant

$$-\Delta u = \lambda \left(|\Omega| \exp(-u) \left(\int_\Omega \exp(-u)\, dx \right)^{-1} - 1 \right) \text{ dans } \Omega \tag{19}$$

et u vérifie toujours (13). Ceci correspond au cas particulier $n_1 = n_2 = 1$, $\omega_1 = 0$, $\mu_1 = 1$ (en fait en remplaçant U par $u = \mu_1 U$ on se ramène toujours à ce cas) et $\lambda = \lambda_1 = \mu_1$ (équilibre de charges, cf. (18)). Du point de vue physique, cela revient à considérer en plus des électrons des particules chargées positivement très chaudes (i.e. $T \to \infty$) où très lourdes (ions...).

Nous nous intéressons ici au comportement quand λ tend vers $+\infty$ de la solution u de (19) et (13). Il s'agit d'un problème de perturbations singulières et l'on s'attend bien sûr à ce que « u converge vers une racine » de

$$|\Omega| \exp(-u)\left(\int_\Omega \exp(-u)\,dx\right)^{-1} - 1 = 0 \text{ dans } \Omega \tag{20}$$

i.e. une constante. Si cela se produit, il y a bien sûr une couche limite près du bord (ou d'une partie du bord) à moins que U_0 soit constant et que donc u soit constant égal à U_0 pour tout $\lambda > 0$. Le fait que toutes les constantes soient solutions de (20) et de (19) rend la question du comportement asymptotique de u un peu délicate. Nous démontrons tout d'abord un résultat préliminaire.

THÉORÈME 2 : *On note u_λ la solution de* (19) *et* (13). *La famille $(u_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est relativement compacte dans* $C^\infty(\Omega)$ *et si $\lambda_n \underset{n}{\to} \infty$, $u_{\lambda_n} \underset{n}{\to} u$ uniformément sur tout compact alors u est constante sur Ω.*

Démonstration : D'après les résultats de la section précédente, nous savons que

$$\operatorname*{Min}_{\partial\Omega} U_0 \leq u_\lambda \leq \operatorname*{Max}_{\partial\Omega} U_0 . \tag{21}$$

Afin de simplifier les notations, nous négligerons dans le reste de la démonstration l'extraction de sous-suites. Avec ces conventions, nous pouvons supposer que u_λ converge vers u faiblement dans $L^\infty(\Omega)^*$, $A_\lambda = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int e^{-u_\lambda}\,dx \to A > 0$ et que d'après (11)

$$|\Omega|\, e^{-u_\lambda}\left(\int_\Omega e^{-u_\lambda}\,dx\right)^{-1} \to 1 \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ et donc dans } w - L^\infty .$$

quand $\lambda \to +\infty$. Soit $\xi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on note $\tilde{u}_\lambda = -\operatorname{Log} A_\lambda$ et on observe que

$$-\Delta(u_\lambda - \tilde{u}_\lambda) + \frac{\lambda}{A_\lambda}\left(e^{-\tilde{u}_\lambda} - e^{-u_\lambda}\right) = 0 \text{ dans } \Omega$$

et donc en multipliant cette équation par $\xi^2(u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)$ et en intégrant par parties on obtient

$$\int_\Omega \xi^2 |\nabla(u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)|^2 \, dx + \frac{\lambda}{A_\lambda} \int_\Omega (e^{-\tilde{u}_\lambda} - e^{-u_\lambda}) \, \xi^2 (u_\lambda - \tilde{u}_\lambda) \, dx \leqslant$$

$$\leqslant -2 \int_\Omega \nabla\xi \, . \, \nabla(u_\lambda - \tilde{u}_\lambda) \, \xi(u_\lambda - \tilde{u}_\lambda) \, dx \, ;$$

d'où d'après Cauchy-Schwarz

$$\frac{\lambda}{A_\lambda} \int_\Omega \xi^2 (e^{-\tilde{u}_\lambda} - e^{-u_\lambda})(u_\lambda - \tilde{u}_\lambda) \, dx \leqslant \int_\Omega |\nabla\xi|^2 \, (u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)^2 \, dx \, .$$

Mais on voit alors que d'après (21), il existe $\nu > 0$ tel que

$$(e^{-u_\lambda} - e^{-\tilde{u}_\lambda})(u_\lambda - \tilde{u}_\lambda) \geqslant \nu \, (u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)^2 \text{ sur } \Omega \, .$$

D'où finalement

$$\int_\Omega |\xi|^2 \, (u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)^2 \, dx \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_\Omega |\nabla\xi|^2 \, (u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)^2 \, dx \tag{22}$$

et ce pour tout $\xi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\lambda > 0$ et où C est une constante indépendante de ξ et de λ.

Ceci entraîne, bien sûr, grâce à (21)

$$\int_K (u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)^2 \, dx \leqslant C_K \, \lambda^{-1} \, , \quad \forall K \text{ compact} \subset \Omega$$

où C ne dépend que de K. En reportant successivement de telles bornes dans le membre de droite de (22) on obtient aisément

$$\int_K (u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)^2 \, dx \leqslant C_K^m \, \lambda^{-m} \, , \quad \forall m \geqslant 1, \, \forall K \text{ compact} \subset \Omega$$

où C_K^m ne dépend que de m et de K.

Le théorème s'en déduit alors aisément en observant que

$$|\Delta(u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)| \leqslant C\lambda \, |u_\lambda - \tilde{u}_\lambda| \quad \text{sur } \Omega$$

et en rappelant que $\tilde{u}_\lambda = -\operatorname{Log} A_\lambda \to -\operatorname{Log} A$ quand $\lambda \to +\infty$. ∎

Il nous reste donc à déterminer la constante vers laquelle u_λ converge. Le résultat qui suit, dû à B. Perthame, répond à cette question.

THÉORÈME 3 : *Quand* λ *tend vers* $+\infty$, u_λ *converge uniformément vers la constante* $u_0 \in \mathbb{R}$ *qui minimise la fonctionnelle suivante*

$$\mathscr{F}(c) = \int_{\partial\Omega} dS(x) \int_0^\infty \left| \frac{d\xi}{dt}(t, x, c) \right|^2 dt$$

où ξ est la solution de

$$(23) \quad -\xi'' + 1 - e^{-\xi} = 0 \quad pour \quad t \geq 0 ,$$
$$\xi(0) = \varphi(x) - c , \quad \xi(t) \to 0 \quad si \quad t \to +\infty .$$

Remarque : On vérifiera ci-dessous que $\mathcal{F}$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(c) \to +\infty$ si $|c| \to \infty$ et donc u_0 est bien l'unique minimum de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}$.

Esquisse de la démonstration : Nous nous contenterons de donner l'idée de la démonstration qui est basée sur une simple technique de couche limite. La justification de ce qui suit, bien qu'assez technique, ne pose pas de problèmes grâce aux propriétés de comparaisons de l'équation étudiée.

On note par χ_λ le terme de couche limite (le correcteur) i.e. $u_\lambda = u_0 + \chi_\lambda$ et on cherche χ_λ (dans un voisinage de $\partial\Omega$) sous la forme

$$\chi_\lambda = \xi_\lambda(\text{tn}\,(x), x) \quad x \in \partial\Omega , \quad t \geq 0 , \quad \xi_\lambda(0, x) = \varphi(x) - u_0$$

où $n(x)$ désigne la normale unitaire intérieure à $\partial\Omega$. Un simple argument d'échelle montre que ξ_λ doit être de la forme

$$\xi_\lambda \simeq \xi(\sqrt{\lambda}\, t, x, \varphi(x) - u_0)$$

où ξ est la solution de (23). En reportant dans (14) on voit que

$$\mathcal{E}(u_\lambda) \simeq \lambda \mathcal{F}(u_0) + 0(\lambda) .$$

Il nous suffit donc pour conclure de montrer que la fonction

$$c \to \tilde{\mathcal{F}}(c) = \int_0^\infty \frac{1}{2} \left| \frac{d\xi}{dt}(t, c) \right|^2 dt$$

est strictement convexe, coercive, où $\xi(t, c) = \xi(t, x, c)$ pour chaque x fixé sur $\partial\Omega$. On pose alors $c_0 = \varphi(x)$ et on observe que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = e^{-\xi} + \xi - 1 , \quad \forall t \geq 0$$

d'où on déduit aisément

$$\tilde{\mathcal{F}}(c) = \int_0^\infty e^{-\xi(t,c)} + \xi(t, c) - 1 \, dt .$$

Ceci entraîne bien sûr

$$\frac{d^2}{dc^2} \tilde{\mathcal{F}}(c) = \int_0^\infty \frac{\partial^2 \xi}{\partial c^2}(t, c)(1 - e^{-\xi(t,c)}) + e^{-\xi(t,c)} \left| \frac{\partial \xi}{\partial c}(t, c) \right|^2 dt .$$

Mais si on pose $h(t) = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial c^2}(t, c)$, on trouve facilement

$$\begin{cases} -h'' + e^{-\xi} h = e^{-\xi}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial c}\right)^2 & \text{pour } t \geq 0 \\ h(0) = 0 \;,\; h \to 0 \text{ si } t \to +\infty \;; \end{cases}$$

d'où évidemment $h(t) > 0$ pour $t > 0$.

Si $c \leq c_0$ alors $\xi(t, c) \geq 0$ et donc $\dfrac{d^2}{dc^2}\tilde{\mathcal{F}}(c) > 0$; si $c > c_0$ on trouve

$$\frac{d^2}{dc^2}\tilde{\mathcal{F}}(c) = \int_0^\infty h - h''\, dt \geq h'(0) = \frac{d^2}{dc^2}\left(\frac{d\xi}{dt}(0, c)\right).$$

D'autre part on a (toujours pour $c > c_0$)

$$\frac{d\xi}{dt}(0, c) = \sqrt{2}\left\{e^{c - c_0} + c_0 - c - 1\right\}^{1/2}$$

d'où

$$\frac{d^2}{dc^2}\left(\frac{d\xi}{dt}(0, c)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{e^{c - c_0} + c_0 - c - 1\right\}^{-3/2}\left\{e^{2(c - c_0)} + 1 - 2(c - c_0)\, e^{(c - c_0)}\right\} > 0\,,$$

ce qui permet de conclure.

V. APPROXIMATION

Nous commençons par donner un résultat qui précise la nature de la fonctionnelle $\mathcal{E}$ que nous considérerons indifféremment comme fonctionnelle sur $H_0^1(\Omega) + U_0$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ou comme fonctionnelle sur $(H_0^1(\Omega) + U_0) \cap L^\infty(\Omega)$: ce petit point technique peut être éliminé en tronquant les exponentielles mais nous ne le ferons pas pour simplifier la notation.

THÉORÈME 4 : *Si* $v \in (H_0^1(\Omega) + U_0) \cap L^\infty(\Omega)$ *et si* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$(24)\quad \mathcal{E}(v+\varphi) = \mathcal{E}(v) + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi - \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \frac{e^{-\mu_i v}}{\int e^{-\mu_i v}\,dx}\varphi + $$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j \frac{e^{\omega_j v}}{\int e^{\omega_j v}\,dx}\varphi\,dx + \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\,dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i\,\mu_i \left(\int e^{-\mu_i v}\,dx\right)^{-2} \times$$

$$\times \left[\left(\int e^{-\mu_i v}\cdot\varphi^2\,dx\right)\left(\int e^{-\mu_i v}\,dx\right) - \left(\int e^{-\mu_i v}\varphi\,dx\right)^2\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j\,\omega_j \left(\int e^{\omega_j v}\,dx\right)^{-2} \times$$

$$\times \left[\left(\int e^{\omega_j v}\varphi^2\,dx\right)\left(\int e^{\omega_j v}\,dx\right) - \left(\int e^{\omega_j v}\varphi\,dx\right)^2\right] +$$

$$+ o(\|\varphi\|_{L^\infty}^2)\,.$$

En particulier, $\mathcal{E}$ *est strictement convexe et*

$$(25)\quad \mathcal{E}(v_1) + \mathcal{E}(v_2) - 2\,\mathcal{E}\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) \geq \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2\,,$$
$$\forall v_1, v_2 \in H^1(\Omega) + U_0\,.$$

Nous ne démontrons pas ce résultat qui est un exercice de calcul différentiel : nous nous contentons d'observer que la (stricte) convexité de $\mathcal{E}$ découle de la positivité de termes comme

$$\left(\int e^\phi \varphi^2\,dx\right)\left(\int e^\phi\,dx\right) - \left(\int e^\phi \varphi\,dx\right)^2$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il convient également de noter que ce résultat montre que si $v \in (H_0^1(\Omega) + U_0) \cap L^\infty(\Omega)$ et si on note $F(v)$ l'opérateur $\left[-\Delta - \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \frac{e^{-\mu_i v}}{\int e^{-\mu_i v}\,dx} + \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j \frac{e^{\omega_j v}}{\int e^{\omega_j v}\,dx}\right]$ sur $H_0^1(\Omega)$

alors l'opérateur linéarisé, noté $F'(v)$, sur $H_0^1(\Omega)$

$$F'(v) \cdot \varphi = -\Delta\varphi + \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \mu_i \left(\int e^{-\mu_i v} dx \right)^{-2} \times$$
$$\times e^{-\mu_i v} \left[\varphi \int e^{-\mu_i v} dx - \int e^{-\mu_i v} \varphi \, dx \right] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j \omega_j \left(\int e^{\omega_j v} dx \right)^{-2} e^{\omega_j v} \left[\varphi \int e^{\omega_j v} dx - \int e^{\omega_j v} \varphi \, dx \right]$$

est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$. Il est d'ailleurs intéressant de noter que $F'(v)$ est le générateur infinitésimal d'un processus de diffusion avec sauts.

Toutes ces propriétés de $\mathscr{E}$, F, F' indiquent que l'on peut utiliser de nombreuses méthodes pour calculer la solution U de (11)-(13). On peut par exemple utiliser des méthodes de gradient (conjugué) pour minimiser $\mathscr{E}$, ou la méthode de Newton, ou bien sûr l'une des multiples variantes de ces méthodes. Signalons également que l'on peut utiliser, grâce au fait que $F'(v)$ est un isomorphisme, des méthodes de continuation, par exemple sur les λ_i, ν_j ...

Une dernière remarque sur l'approximation de U consiste à observer que la solution U est en fait un point fixe de la composée des applications suivantes : à U on associe tout d'abord les quantités suivantes

$$t_i(U) = \int \exp(-\mu_i U) \, dx , \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1$$
$$s_j(U) = \int \exp(\omega_j U) \, dx , \quad 1 \leqslant j \leqslant n_2$$

puis on résout le problème monotone (usuel) suivant

$$(26) \quad \begin{cases} -\Delta V - \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i t_i(U)^{-1} \exp(-\mu_i V) + \\ + \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j s_j(U)^{-1} \exp(\omega_j V) = 0 \text{ dans } \Omega \\ V = U_0 \text{ sur } \partial\Omega ; \end{cases}$$

et si $V \equiv U$ sur $\bar{\Omega}$, alors U est bien la solution de (11)-(13). Cette remarque conduit à considérer la méthode itérative suivante — qui admet d'ailleurs de multiples variantes moins « implicites » — : $U^0 \in (U_0 + H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega)$ est choisi de manière quelconque (même si comme toujours dans les calculs pratiques, le choix de l'initialisation est important) puis on construit pour $n \geqslant 0$ U^{n+1} comme la solution de

$$(27)\qquad \begin{cases} -\Delta U^{n+1} - \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i\, t_i (U^n)^{-1} \exp(-\mu_i\, U^{n+1}) + \\ + \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j\, s_j (U^n)^{-1} \exp(\omega_j\, U^n) = 0 \text{ dans } \Omega \\ U^{n+1} = U_0 \text{ sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

On a alors le

THÉORÈME 5 : *La suite U^n converge vers la solution U de* (11)-(13) (*dans* $C^\infty(\bar{\Omega})$).

Démonstration : D'après le théorème 1, il existe $\bar{v}$, $\underline{v} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ solutions de

$$-\Delta \bar{v} = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i\, e^{-\mu_i \bar{v}} \left(\int e^{-\mu_i \bar{v}} \right)^{-1} \quad \text{dans } \Omega,\ \bar{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$-\Delta \underline{v} = \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j\, e^{\omega_j \underline{v}} \left(\int e^{\omega_j \underline{v}} \right)^{-1} \quad \text{dans } \Omega,\ \underline{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et on introduit $\bar{U}^0 = \sup_\Omega U^0 + \bar{v}$, $\underline{U}^0 = \inf_\Omega U^0 + \underline{v}$. Enfin, on considère les suites $(\bar{U}^n)_{n \geqslant 0}$, $(\underline{U}^n)_{n \geqslant 0}$ générées par la méthode itérative précédente pour des choix initiaux donnés par $\bar{U}^0$, $\underline{U}^0$ respectivement.

On observe alors que

$$(28)\qquad \underline{U}^0 \leqslant U^0 \leqslant \bar{U}^0 \text{ sur } \bar{\Omega}$$

$$(29)\qquad \begin{cases} -\Delta \bar{U}^0 \geqslant \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i\, e^{-\mu_i \bar{U}^0} \left(\int e^{-\mu_i \bar{U}^0} \right)^{-1} - \\ - \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j\, e^{\omega_j \bar{U}^0} \left(\int e^{\omega_j \bar{U}^0} \right)^{-1} \text{ dans } \Omega \\ \bar{U}^0 \geqslant U_0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(30)\qquad \begin{cases} -\Delta \underline{U}^0 \leqslant \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i\, e^{-\mu_i \underline{U}^0} \left(\int e^{-\mu_i \underline{U}^0} \right)^{-1} - \\ - \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j\, e^{\omega_j \underline{U}^0} \left(\int e^{\omega_j \underline{U}^0} \right)^{-1} \text{ dans } \Omega \\ \underline{U}^0 \leqslant U_0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et donc d'après les remarques suivant la preuve du théorème 1

$$U^0 \leqslant U \leqslant \bar{U}^0 \text{ sur } \bar{\Omega} . \tag{31}$$

Nous allons démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$

$$\underline{U}^n \leqslant U^n \leqslant \bar{U}^n , \quad \underline{U}^{n-1} \leqslant \underline{U}^n \leqslant U \leqslant \bar{U}^n \leqslant \bar{U}^{n-1} \text{ sur } \bar{\Omega} . \tag{32}$$

Supposons donc que (32) ait lieu jusqu'à l'ordre n : on a alors

$$\begin{cases} \int e^{-\mu_i \underline{U}^n} \geqslant \int e^{-\mu_i U^n} \geqslant \int e^{-\mu_i \bar{U}^n}, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ \int e^{-\mu_i \underline{U}^{n-1}} \geqslant \int e^{-\mu_i \underline{U}^n} \geqslant \int e^{-\mu_i U} \geqslant \int e^{-\mu_i \bar{U}^n} \geqslant \int e^{-\mu_i \bar{U}^{n-1}}, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n_1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \int e^{\omega_j \underline{U}^n} \leqslant \int e^{\omega_j U^n} \leqslant \int e^{\omega_j \bar{U}^n}, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant n_2 \\ \int e^{\omega_j \underline{U}^{n-1}} \leqslant \int e^{\omega_j \underline{U}^n} \leqslant \int e^{\omega_j U} \leqslant \int e^{\omega_j \bar{U}^n} \leqslant \int e^{\omega_j \bar{U}^{n-1}}, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant n_2 . \end{cases}$$

Ces inégalités combinées avec les équations (27) et (11) permettent alors de démontrer facilement (32) à l'ordre $(n+1)$ en utilisant le principe du maximum classique : ainsi par exemple

$$- \Delta U^{n+1} = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i e^{-\mu_i U^{n+1}} \left(\int e^{-\mu_i U^n} \right)^{-1} - \\ - \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j e^{\omega_j U^{n+1}} \left(\int e^{\omega_j U^n} \right)^{-1} \text{ dans } \Omega$$

et donc d'après les inégalités précédentes

$$- \Delta U^{n+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i e^{-\mu_i U^{n+1}} \left(\int e^{-\mu_i \bar{U}^n} \right)^{-1} - \\ - \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j e^{\omega_j U^{n+1}} \left(\int e^{\omega_j \bar{U}^n} \right)^{-1} \text{ dans } \Omega$$

i.e.

$$- \Delta U^{n+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i t_i(\bar{U}^n)^{-1} e^{-\mu_i U^{n+1}} - \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j s_j(\bar{U}^n)^{-1} e^{\omega_j U^{n+1}} \text{ dans } \Omega$$

tandis que

$$- \Delta U^{n+1} = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \, t_i (\bar{U}^n)^{-1} \, e^{-\mu_i \bar{U}^{n+1}} - \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j \, s_j (\bar{U}^n) \, e^{\omega_j \bar{U}^{n+1}} \quad \text{dans } \Omega$$

et ceci entraîne grâce au principe du maximum puisque $U^{n+1} = \bar{U}^{n+1}$ sur $\partial\Omega$

$$U^{n+1} \leqslant \bar{U}^{n+1} \quad \text{sur } \Omega \, .$$

REFERENCES

[1] J. BATT, H. BERESTYCKI, P. DEGOND et B. PERTHAME, Locally isotropic time periodic and cylindrically symmetric stationary solutions of the Vlasov-Poisson system in bounded and unbounded domains. Preprint, 1986.

[2] J. BATT, W. FALTENBACHES et E. HORST, *Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics,* Arch. Rat. Mech. Anal., *53* (1986), p. 159-183.

[3] C. CERCIGNANI, *Theory and application of the Boltzmann equations,* Scottish Academic Press, Edinburgh, 1975.