M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

TAJEDDINE GUENNOUNI

Sur une méthode de calcul de structures soumises à des chargements cycliques : l'homogénéisation en temps

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 22, nº 3 (1988), p. 417-455

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1988__22_3_417_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 22, n° 3, 1988, p. 417 à 455)

SUR UNE MÉTHODE DE CALCUL DE STRUCTURES SOUMISES A DES CHARGEMENTS CYCLIQUES : L'HOMOGÉNÉISATION EN TEMPS (*)

Tajeddine GUENNOUNI [1]

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — *On présente une méthode d'homogénéisation en temps permettant le calcul des structures soumises à des chargements cycliques. Celle-ci, fondée sur les techniques des développements asymptotiques, permet le calcul au premier ordre des champs des contraintes et des déformations régnant dans la structure ou la durée de vie de celle-ci avec des coûts de calculs très réduits. Dans le cas d'un matériau élastoviscoplastique, on établit la convergence du problème mécanique initial vers un problème limite et on donne quelques résultats numériques comparant la méthode classique et celle utilisant l'homogénéisation en temps.*

Abstract. — *A time homogenization method allowing the calculation of the response of structures subjected to cyclic loadings is presented. This method, based on a two scale asymptotic expansion, allows to determine a first order estimation of the strain and stress fields of the structures and their time-life with a very reduced cost of computation. In the case of an elastoviscoplastic material, the convergence of the mechanical problem towards a limit problem is demonstrated, and some numerical results comparing the classical method and the time homogenization method are given.*

INTRODUCTION

Le calcul d'une structure soumise à un chargement cyclique sur un grand intervalle de temps est souvent abordé indépendamment du comportement au cours de chaque cycle. La difficulté vient du grand nombre de cycles à envisager pour calculer ces structures. Or, du point de vue pratique, le problème essentiel de ces structures est de calculer leur comportement à long terme :

— état des contraintes et des déformations régnant à long terme dans la structure. C'est le problème du calcul du cycle « limite » ;

— temps de rupture ou durée de vie de cette structure.

(*) Reçu en juin 1987.

(1) École Centrale Paris, grande voie des vignes, 92295 Châtenay-Malabry Cedex, France.

Le premier problème a été très largement étudié dans la littérature. Ces travaux portent soit sur l'existence du cycle limite (voir par exemple Koiter [12], Halphen [9], Wesfreid [22], Quoc Son [18] et dans un cadre plus mathématique Haraux [10], Brézis [4], Débordes et Nayroles [5], Suquet [21], Mercier [16], Johnson et Mercier [11]), soit sur le calcul du cycle limite (voir par exemple Ladeveze et Rougée [13] ou Zarka et Casier [23]). Généralement, ces travaux ne donnent que des informations sur l'état limite de la structure et ne permettent pas de suivre sa réponse pendant toute la durée d'observation de celle-ci. Par ailleurs, l'expérience montre que sous l'action de sollicitations extérieures cycliques suffisantes les matériaux s'endommagent. L'accumulation d'un tel endommagement dans les structures conduit à leur instabilité. La réponse au deuxième problème revêt donc une importance pratique considérable.

Puisqu'il est hors de question (du moins avec des coûts raisonnables) de calculer la réponse de la structure sur l'ensemble des cycles, on peut essayer d'obtenir une estimation dans un sens à définir des champs des contraintes et des déformations régnant dans la structure, donnant lieu à des coûts de calculs plus raisonnables. On peut préciser cette formulation un peu vague en remarquant que la période T de chaque cycle peut être considérée comme très petite par rapport à l'intervalle de temps T_M sur lequel on étudie la réponse de la structure ; le rapport $\frac{T}{T_M}$ peut être alors considéré comme étant un petit paramètre du problème étudié. L'identification de ce paramètre permet de donner un sens à l'estimation recherchée en définissant les champs de contraintes et de déformations recherchés comme étant la limite des champs des contraintes et des déformations régnant dans la structure quand la période T du cycle tend vers zéro (mécaniquement quand T est petit par rapport à T_M). Par analogie avec l'homogénéisation en espace, ce problème sera qualifié de problème d'homogénéisation en temps.

Dans cet article, on se propose d'illustrer ce problème et, plus précisément d'identifier le problème limite pour certaines grandes classes de comportement de matériaux. Ainsi, dans le paragraphe 2, nous examinerons le comportement élastoviscoplastique puis (§ 3) nous donnons le problème limite pour un matériau élastoplastique parfait. Dans le paragraphe 4, nous considérons le cas d'un matériau endommageable. Le paragraphe 5 est consacré à l'approche numérique du problème limite dans le cas élastoviscoplastique.

1. POSITION DU PROBLÈME. NOTATIONS

On considère une structure occupant un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ fixée sur une partie de sa frontière Γ_u. Cette structure est soumise à des forces massiques

f^T et à des tractions g^T sur la partie Γ_σ complémentaire de la frontière par rapport à Γ_u. Sous l'action des forces extérieures f^T et g^T, des champs de contraintes σ^T et de déformations ε^T règnent dans la structure. Le problème de l'homogénéisation en temps est de relier les limites σ^0 et ε^0 de σ^T et ε^T quand la période T des forces extérieures imposées tend vers zéro. La variation des forces extérieures en fonction du temps est supposée suffisamment lente pour négliger les efforts d'inertie et pour considérer qu'à chaque instant, la structure est en évolution quasi-statique. La technique que nous utiliserons dans la suite est celle des développements asymptotiques. Celle-ci est fondée sur la distinction dans la variation des sollicitations extérieures en fonction du temps de deux échelles de celui-ci : un temps « court » ou microchronologique au niveau du cycle et un temps « long » pour lequel on s'intéresse qu'à l'évolution lente du système. Par exemple en fatigue-fluage, le chargement extérieur g^T peut s'écrire

$$g^T = p(t) + A(t) \sin \frac{2\pi t}{T}$$

$p(t)$ est le chargement moyen, t le temps physique et T la période de chaque cycle. Si nous posons :

$$\tau = \frac{t}{T} \tag{1}$$

τ représentera le temps « court » ou microchronologique.

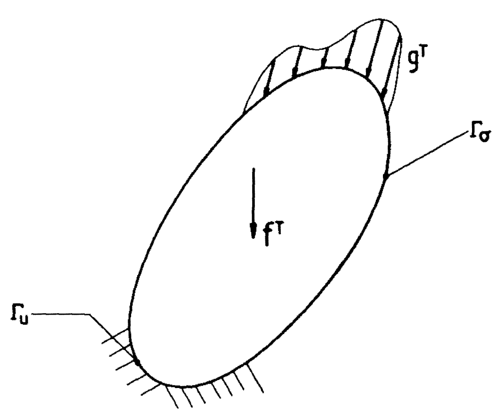

Figure 1.

Cette distinction entre le temps « court » et « long » constitue le point de départ de la méthode des échelles multiples, qui trouve son origine dans des problèmes perturbés en théorie des vibrations (voir Sanchez-Palencia [20], Roseau [19] et la bibliographie de ces travaux).

Dans la suite on introduit des termes qui sont fonctions simultanément des deux variables temps. Si $h(x, t, \tau)$ désigne un tel terme, on posera :

$$h^T(x, t) = h(x, t, \tau)$$

lorsque τ et t sont reliés par le changement d'échelle (1). L'opérateur moyenne sur une période est noté :

$$\langle h(x, t, \tau)\rangle = \int_0^1 h(x, t, \tau)\, d\tau . \tag{2}$$

On suppose que les chargements extérieurs peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} f^T(x, t) &= f(x, t, \tau) = \lambda\ (t, \tau)\, f^*(x) \\ g^T(x, t) &= g(x, t, \tau) = \mu(t, \tau)\, g^*(x) \end{aligned} \tag{3}$$

où λ et μ sont supposés τ-périodiques de période 1.

Dans la suite on utilisera souvent la relation de dérivation par rapport au temps suivante :

$$\dot{h}^T = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{T}\frac{\partial h}{\partial \tau} . \tag{4}$$

2. HOMOGÉNÉISATION EN TEMPS D'UN MATÉRIAU ÉLASTOVISCOPLASTIQUE

2.1. Équations du problème mécanique

Elles sont données par :

— les équations d'équilibre

$$\operatorname{div} \sigma^T + f^T = 0 \text{ dans } \Omega \tag{5}$$

— les conditions aux limites

$$\sigma^T n = g^T , \quad \text{sur} \quad \Gamma_\sigma \tag{6}$$

$$u^T = 0 , \quad \text{sur} \quad \Gamma_u \tag{7}$$

— les conditions initiales

$$u^T(x, 0) = \bar{u}_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{8}$$

$$\sigma^T(x, 0) = \bar{\sigma}_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega , \tag{9}$$

et la loi de comportement

$$\varepsilon(u^T) = A^T(x, t)\, \sigma^T + (\varepsilon^{an})^T \tag{10}$$

$$(\dot{\varepsilon}^{an})^T = B^T(x, t, \sigma^T) \tag{11}$$

où ε^{an} représente la déformation visqueuse ; A^T désigne le tenseur des souplesses élastiques et B^T l'opérateur de la loi d'écoulement des déformations viscoplastiques.

On suppose dans ce paragraphe que les tenseurs A^T et B^T ne dépendent pas explicitement du temps. On posera alors

$$A^T(x,t) = A(x) \quad \text{et} \quad B^T(x,t,\sigma^T) = B(x,\sigma^T)\,.$$

Le problème mécanique que nous désignerons par P^T est constitué par les équations (5) à (11). On se propose de construire le problème limite P^0 quand la période T tend vers zéro.

2.2. Identification du problème limite P^0

On utilise la méthode des développements asymptotiques comme dans Lions [14], Bensoussan, Lions et Papanicolaou [1] ou Sanchez-Palencia [20].

On pose alors :

$$u^T(x,t) = u_0(x,t,\tau) + Tu_1(x,t,\tau) + T^2 u_2(x,t,\tau) + \cdots \tag{12}$$

$$\sigma^T(x,t) = \sigma_0(x,t,\tau) + T\sigma_1(x,t,\tau) + T^2\sigma_2(x,t,\tau) + \cdots \tag{13}$$

$$(\varepsilon^{an})^T(x,t) = \varepsilon_0^{an}(x,t,\tau) + T\varepsilon_1^{an}(x,t,\tau) + T^2\varepsilon_2^{an}(x,t,\tau) + \cdots \tag{14}$$

où chaque terme du développement est supposé τ-périodique par rapport à la variable τ.

En reportant ce développement dans les équations (5) à (11), en prenant en compte la relation (4) et en identifiant les termes de même puissance en T nous obtenons :

<u>Ordre T^{-1}</u>

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\varepsilon_0^{an}(x,t,\tau) = 0\,. \tag{15}$$

<u>Ordre T^0</u>

$$\operatorname{div}\sigma_0 + f = 0 \tag{16}$$

$$\sigma_0 \,.\, n = 0 \text{ sur } \Gamma_\sigma\,, \quad u_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_u \tag{17}$$

$$\varepsilon(u_0) = A\sigma_0 + \varepsilon_0^{an} \tag{18}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_0^{an}}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon_1^{an}}{\partial\tau} = B(x,\sigma^0) \tag{19}$$

$$\sigma_0(x,0,0) = \bar\sigma_0\,, \quad u_0(x,0,0) = \bar u_0\,. \tag{20}$$

L'équation (15) traduit qu'à l'ordre zéro, l'évolution rapide des déformations visqueuses est *bloquée* :

$$\varepsilon_0^{an}(x,t,\tau) = \varepsilon_0^{an}(x,t)\,. \tag{21}$$

Posons (*) :

$$(22) \qquad \begin{cases} \Sigma(t) = \langle \sigma_0 \rangle \\ U(t) = \langle u_0 \rangle \\ \sigma_0(t, \tau) = \Sigma(t) + \chi(t, \tau) \\ u_0(t, \tau) = U(t) + W^*(t, \tau) \end{cases}$$

En prenant la moyenne des relations (16) à (19), nous obtenons :

$$(23) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \Sigma + \langle f \rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Sigma \cdot n = \langle g \rangle & \text{sur } \Gamma_\sigma \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_u \\ \varepsilon(U) = A\Sigma + \varepsilon_0^{an} & \\ \dfrac{d}{dt} \varepsilon_0^{an} = \langle B(x, \Sigma + \chi) \rangle & \end{cases}$$

En prenant en compte les relations (22), l'équation (20) devient

$$(24) \qquad \Sigma(0) + \chi(0, 0) = \bar{\sigma}_0 , \quad U(x, 0) + W^*(0, 0) = \bar{u}_0 .$$

Pour identifier complètement le problème P^0, il reste à construire les fonctions χ et W^*. Pour cela nous reportons les équations (22) et (23) dans les relations (16) à (18). Nous obtenons le problème :

$$(25) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \chi + f - \langle f \rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ \chi \cdot n = g - \langle g \rangle & \text{sur } \Gamma_\sigma \\ W^* = 0 & \text{sur } \Gamma_u \\ \varepsilon(W^*) = A\chi & \text{sur } \Gamma_u \end{cases}$$

qui correspond à un problème élastique.

Introduisons les fonctions W_f et W_g solutions des problèmes élastiques suivants :

$$(P_f) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} (A^{-1} \varepsilon(W_f)) + f^* = 0 & \text{dans } \Omega \\ A^{-1} \varepsilon(W_f) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_\sigma \\ W_f = 0 & \text{sur } \Gamma_u \end{cases}$$

$$(P_g) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} (A^{-1} \varepsilon(W_g)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ A^{-1} \varepsilon(W_g) \cdot n = g^* & \text{sur } \Gamma_\sigma \\ W_g = 0 & \text{sur } \Gamma_u . \end{cases}$$

(*) On omettra quand il n'y a pas de risque de confusion la dépendance des différents champs par rapport à x.

Nous avons alors :

(26) $W^*(t,\tau) = (\lambda(t,\tau) - \langle\lambda(t,\tau)\rangle)\, W_f + (\mu(t,\tau) - \langle\mu(t,\tau)\rangle)\, W_g$

(27) $\chi(t,\tau) = A^{-1}\,\varepsilon(W^*)$

$$(P^0)\quad \left\{\begin{array}{ll} & \operatorname{div}\Sigma + \langle f\rangle = 0 \\ & \Sigma\,.\,n = \langle g\rangle \quad \text{sur } \Gamma_\sigma \\ & U = 0 \quad \text{sur } \Gamma_u \\ (28) & \varepsilon(U) = A\Sigma + \varepsilon^{an} \\ (29) & \dfrac{d\,\varepsilon^{an}}{dt} = \langle B(x, \Sigma + A^{-1}\,\varepsilon(W^*))\rangle \\ & \Sigma(0) = \bar{\sigma}_0 - A^{-1}\,\varepsilon(W^*(0,0)) \\ & U(0) = \bar{u}_0 - W^*(0,0) \end{array}\right.$$

avec W^* donné par la relation (26).

Par analogie avec l'homogénéisation en espace, le problème (P^0) sera qualifié de problème macrochronologique ou lent et le problème (25) de microchronologique ou rapide. Les équations (28) et (29) constituent la loi de comportement homogénéisée en temps. Celle-ci est encore élastovisco-plastique ; l'opérateur donnant la loi d'écoulement des déformations visqueuses du matériau homogène équivalent en temps correspond à la moyenne en temps de celui du matériau initial. Dans le cas où B dérive d'un pseudo-potentiel de dissipation φ (matériau du type standard généralisé)

$$B(x,\sigma) = \partial\varphi(x,\sigma)$$

la relation (29) s'écrit de manière équivalente :

(30) $$\frac{d\varepsilon^{an}}{dt} = \partial\phi(x,\Sigma)$$

avec

(31) $$\phi(x,\Sigma) = \langle\varphi(x,\Sigma + A^{-1}\,\varepsilon(W^*))\rangle\ .$$

Le comportement du matériau homogène équivalent en temps dépend du chargement extérieur mais aussi de la *structure* par l'intermédiaire des champs W_f et W_g. Dans le cas le plus général ce matériau est anisotrope non homogène même si le matériau constituant la structure est isotrope homogène (i.e. ne dépendant pas de la variable x).

Du point de vue numérique, le calcul de σ_0 et u_0 nécessite la résolution du problème macrochronologique P^0 et des problèmes élastiques P_f et P_g. Les problèmes élastiques sont résolus une fois pour toutes au début, le problème lent étant discrétisé par rapport au temps « macrochronologique » (*cf.* § 6).

Remarques

1. Si

$$\langle \lambda(0,\tau)\rangle = \lambda(0,0) \quad \text{et} \quad \langle \mu(0,\tau)\rangle = \mu(0,0) \tag{32}$$

les conditions initiales du problème macrochronologique se réduisent à :

$$\Sigma(0) = \bar{\sigma}_0 \quad \text{et} \quad U(0) = \bar{u}_0$$

le problème macrochronologique vérifie alors les mêmes conditions initiales que le problème initial P^T. Dans le cas où la condition (32) n'est pas vérifiée, nous avons un saut dans la condition initiale même pour des conditions initiales indépendantes de T. Nous verrons plus loin l'interprétation de ce résultat.

2. Nous avons supposé que le déplacement était fixé sur la frontière Γ_u et que seules les forces extérieures dépendaient du temps. On aurait pu appliquer un déplacement périodique par rapport à la variable τ sur Γ_u ; la démarche suivie s'applique encore à condition d'introduire un problème auxiliaire P_u analogue aux problèmes P_f et P_g prenant en compte le déplacement imposé. On aurait pu de la même manière sans altérer la démarche suivie prendre des conditions initiales dépendant de T et supposer leur convergence dans un sens à définir vers des conditions initiales limites quand la période T tend vers zéro.

3. Quand le potentiel B est linéaire par rapport à σ, le matériau homogène équivalent en temps coïncide avec le matériau initial.

4. Dans le cas élastoviscoplastique avec une variable d'écrouissage α dont la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A\sigma^T + \varepsilon^{T_{an}} \\ (\dot{\varepsilon}^{an})^T &= B(\sigma^T, \alpha^T) \\ \dot{\alpha}^T &= C(\sigma^T, \alpha^T) \end{aligned}$$

on peut montrer que l'évolution rapide des variables internes ε^{an}, α reste bloquée :

$$\frac{\partial \varepsilon^{an}}{\partial \tau} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = 0$$

et que la loi de comportement homogénéisée en temps s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) &= A\Sigma + \varepsilon^{an} \\ \frac{d\varepsilon^{an}}{dt} &= \langle B(\Sigma + \chi, \alpha)\rangle \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \langle C(\Sigma + \chi, \alpha)\rangle \end{aligned}$$

où χ est donné par (26) et (27).

2.3. Un résultat de convergence. Énoncé du théorème

On se propose de montrer dans ce paragraphe la convergence du problème P^T vers le problème P^0 quand T tend vers zéro pour $T_M < +\infty$.

On définit les espaces :

$$\begin{aligned} S &= \{\sigma \in L^2((\Omega))^9_s \text{ div } \sigma \in (L^2(\Omega))^3\} \\ S(0) &= \{\sigma \in S, \text{div } \sigma = 0, \sigma \,.\, n = 0 \text{ sur } \Gamma_\sigma\} \\ V &= \{v / v \in (H^1(\Omega))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_u\} \end{aligned}$$

munis de leur norme naturelle, et on fait les hypothèses suivantes :

(H1) : *hypothèse sur les coefficients d'élasticité*

$$\forall i, j, k, \ell \quad A_{ijk\ell} \in L^\infty(\Omega) \tag{33}$$

$$A_{ijk\ell}(x) = A_{jik\ell}(x) = A_{ijk\ell}(x) = A_{k\ell ij}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega \tag{34}$$

$$\exists \alpha > 0 \quad A_{ijk\ell}\, e_{ij}\, e_{k\ell} \geq \alpha \|e\|_{\mathbb{R}^9_S} \quad \forall e \in \mathbb{R}^9_S\,. \tag{35}$$

(H2) : *hypothèse sur l'opérateur B*

On suppose que B dérive d'un pseudo-potentiel de dissipation φ qui est donc convexe minimum et nul en zéro. De plus on suppose que l'application :

$$\sigma \to \varphi(x, \sigma)$$

est différentiable pour presque tout $x \in \Omega$ et sa différentiable B est Lipschitzienne :

$$\exists C > 0, \ \|B(x, \sigma_1) - B(x, \sigma_2)\|_{\mathbb{R}^9_s} \leq C \,\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{R}^9_s} \qquad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^9_s \quad \text{p.p. } x \in \Omega \tag{36}$$

et que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}^9_S$, $B(.\,, \sigma)$ est une application mesurable pour la mesure de Lebesgue.

(H3) : *hypothèse sur le problème limite P^0*

On suppose qu'il existe un champ de contraintes $\bar{\Sigma} \in W^{1,\infty}(0, T_M\,; S)$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{div } \bar{\Sigma} + \langle f \rangle = 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega\,, & \forall t \in [0, T_M] \\ \bar{\Sigma} \,.\, n = \langle g \rangle \text{ sur } \Gamma_\sigma\,, & \forall t \in [0, T_M]\,. \end{cases} \tag{37}$$

(H4) : *hypothèse sur les données initiales*

On suppose que $\bar{\sigma}_0 \in S$, que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\sigma}_0 + f^T(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{\sigma}_0 \,.\, n = g^T(0) & \text{sur } \Gamma_\sigma \end{cases} \tag{38}$$

et que $\bar{u}_0 \in V$.

(H5) : *hypothèse sur les forces extérieures*

On rappelle que les forces extérieures s'écrivent :

$$f(x, t, \tau) = \lambda(t, \tau)\, f^*(x) \quad \text{et} \quad g(x, t, \tau) = \mu(t, \tau)\, g^*(x) \tag{39}$$

où λ et μ sont τ-périodiques sur $[0, 1]$ et qui peuvent être prolongés par périodicité sur $\mathbb{R}$.

De plus on suppose que :

$$f^T \in L^\infty(0, T_M ; (L^2(\Omega))^3)\,, \quad g^T \in L^\infty(0, T_M ; (L^2(\Gamma_\sigma))^3) \tag{40}$$

et que :

$$\mu(t, \tau)\,, \quad \lambda(t, \tau) \in W^{1, \infty}(0, T_M ; L^\infty(0, 1))\,. \tag{41}$$

THÉOREME 1 : *Sous les hypothèses ci-dessus, les problèmes P^T et P^0 admettent chacun une solution unique vérifiant :*

$$\Sigma, \sigma^T \in W^{1, \infty}(0, T_M ; S)$$
$$U, u^T \in W^{1, \infty}(0, T_M , V)$$

Preuve du Théorème 1 : On applique le théorème du Suquet [21] p. 58. La seule vérification à faire pour entrer dans le cadre d'application de ce théorème pour le problème P^T est d'exhiber un champ de contraintes $\bar{\sigma}^T \in W^{1, \infty}(0, T_M ; S)$ équilibrant les forces extérieures. Pour cela posons :

$$\bar{\sigma}^T = \bar{\Sigma}(t) + \chi^T(t) \tag{42}$$

où χ est donné par (26) et (27).

Grâce aux propriétés de W^*, on vérifie que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\sigma}^T + f^T = 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall t \in [0, T_M] \\ \qquad \bar{\sigma}^T \,.\, n = g^T \,. \end{cases} \tag{42'}$$

Pour montrer que $\sigma^T \in W^{1, \infty}(0, T_M ; S)$ nous avons besoin du lemme suivant dont la démonstration est donnée plus loin :

LEMME 1 : *Soit* $h \in L^\infty(0, T_M ; L^\infty(0,1))$. *h peut être prolongé par périodicité en un élément noté* $\tilde{h}$ *de* $L^\infty(0, T_M ; L^\infty(\mathbb{R}))$ *tel que si on pose*

$$h^T(t) = \tilde{h}\left(t, \frac{t}{T}\right)$$

$h^T \in L^\infty(0, T_M)$. ■

L'utilisation de ce lemme pour $\mu(t, \tau)$ et $\lambda(t, \tau)$ donne grâce à l'hypothèse (41) que μ^T, $\lambda^T \in L^\infty(0, T_M)$; qui en vertu de la régularité des solutions W_f et W_g des problèmes élastiques P_f et P_g, de celle de $\bar{\Sigma}$ et de (42), (42)' donne :

$$\bar{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T_M ; S).$$

Nous avons donc l'existence et l'unicité d'une solution $\sigma^T \in W^{1,\infty}(0, T_M ; S)$, $u^T \in W^{1,\infty}(0, T_M ; V)$ du problème P^T. Pour le problème P^0, nous avons remarqué que la loi de comportement (28) et (29) pouvait s'écrire :

$$\frac{d\varepsilon(U)}{dt} = A\,\frac{d\Sigma}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma}(x, \Sigma) \tag{43}$$

avec

$$\phi(x, \Sigma) = \langle \varphi(x, \Sigma + \chi) \rangle$$

et χ donné par les relations (26) et (27).

Posons :

$$\Sigma' = \Sigma - \bar{\Sigma}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Sigma(0) = \operatorname{div} \bar{\sigma}_0 &- (\lambda(0,0) - \langle \lambda(0,\tau) \rangle) \operatorname{div} (A^{-1} \varepsilon(W_f)) \\ &- (\mu(0,0) - \langle \mu(0,\tau) \rangle) \operatorname{div} (A^{-1} \varepsilon(W_g)) \end{aligned}$$

soit en utilisant (38) et les relations des problèmes P_f et P_g :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Sigma(0) &= f^T(0) - (\lambda(0) - \langle \lambda(0,\tau) \rangle) f^*(x) \\ &= \langle \lambda(0,\tau) f^*(x) \rangle = \langle f(0,\tau) \rangle \end{aligned} \tag{44}$$

on établit de même que :

$$\Sigma(0) \,.\, n = \langle g(0,\tau) \rangle \quad \text{sur} \quad \Gamma_\sigma . \tag{45}$$

Par suite nous avons : $\Sigma'(0) \in S(0)$.

En multipliant (43) par $R \in S(0)$ et en intégrant sur Ω nous obtenons la formulation variationnelle du problème P^0 suivante :

$$\begin{cases} \forall R \in S(0) \\ \displaystyle\int_\Omega \left(A\frac{d\Sigma'}{dt} \cdot R\right) d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(\Sigma' + \bar{\Sigma}) \cdot R \, d\Omega = -\int_\Omega \left(A\frac{d\bar{\Sigma}}{dt} \cdot R\right) d\Omega \\ \qquad\qquad \Sigma'(0) \in S(0) \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que les conditions du théorème 3.2 p. 60 de Suquet [21] s'appliquent pour Φ. Nous en déduisons alors l'existence et l'unicité d'une solution (Σ, U) tel que :

$$\Sigma \in W^{1,\infty}(0, T_M ; S), \quad U \in W^{1,\infty}(0, T_M ; V).$$

Démonstration du Lemme 1 : Le résultat est clair. En effet si on découpe $\mathbb{R}$ en segments de la forme $]n, n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$ et si on pose :

$$\tilde{h}(t, \tau) = h(t, \tau - n) \quad \text{si} \quad \tau \in]n, n+1[$$

nous avons alors :

$$\|\tilde{h}(t, \tau)\|_{L^\infty(0, T_M ; L^\infty(\mathbb{R}))} = \|h(t, \tau)\|_{L^\infty(0, T_M ; L^\infty(0,1))}$$

et

$$\|h^T(t)\|_{L^\infty(0, T_M)} = \left\|\tilde{h}\left(t, \frac{t}{T}\right)\right\|_{L^\infty(0, T_M)} \leqslant \|\tilde{h}(t, \tau)\|_{L^\infty(0, T_M ; L^\infty(\mathbb{R}))}$$

par suite : $h^T \in L^\infty(0, T_M)$. ■

THÉORÈME 2 : *Sous les hypothèses* (H1) *à* (H5), *quand la période T tend vers zéro,* σ^T *converge vers* $\Sigma(t)$ *dans* $L^\infty(0, T_M ; S)$ *faible * et* u^T *converge vers* $U(t)$ *dans* $L^\infty(0, T_M ; V)$ *faible *.*

De plus on a les estimations suivantes :

$$\|\sigma^T - \sigma_0^T\|_S \leqslant C\sqrt{T}$$
$$\|u^T - u_0^T\|_V \leqslant C\sqrt{T}.$$

2.4. Preuve du théorème 2

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

Estimation a priori 1 :

Les relations (10) et (11) conduisent à :

$$\varepsilon(u^T) = A\dot{\sigma}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(x, \sigma^T)$$

En multipliant cette relation par $\sigma^T - \bar{\sigma}^T$ ($\bar{\sigma}^T$ est donné par (42)) et intégration sur Ω nous obtenons :

$$\text{(46)} \quad \int_\Omega (A\dot{\sigma}^T, \sigma^T - \bar{\sigma}^T)\, d\Omega = -\int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T), \sigma^T - \bar{\sigma}^T \right) d\Omega + \\ + \int_\Omega (\dot{\varepsilon}(u^T), \sigma^T - \bar{\sigma}^T)\, d\Omega$$

on remarque que $\sigma^T - \bar{\sigma}^T \in S(0)$, par suite :

$$\text{(47)} \quad \int_\Omega (\dot{\varepsilon}(u^T), \sigma^T - \bar{\sigma}^T) = 0 .$$

D'autre part :

$$\left| \int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi(\sigma^T)}{\partial \sigma}, \sigma^T - \bar{\sigma}^T \right) d\Omega \right| \leqslant \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \| \sigma^T - \bar{\sigma}^T \|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

qui en vertu de la propriété de Lipschitz (36) de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$ et du fait que φ est minimum en zéro, donne :

$$\text{(48)} \quad \left| \int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi(\sigma^T)}{\partial \sigma}, \sigma^T - \bar{\sigma}^T \right) d\Omega \right| \leqslant C \left(\| \sigma^T \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \sigma^T - \bar{\sigma}^T \|^2_{L^2(\Omega)} \right) .$$

Par ailleurs nous avons par (42) :

$$(A\dot{\bar{\sigma}}^T, \sigma^T - \bar{\sigma}^T)_{L^2(\Omega)} = (A\dot{\Sigma}(t), \sigma^T - \bar{\sigma}^T)_{L^2(\Omega)} + (A\dot{\chi}^T, \sigma^T - \bar{\sigma}^T)_{L^2(\Omega)}$$

qui compte tenu de la relation (27) donne :

$$(A\dot{\bar{\sigma}}^T, \sigma^T - \bar{\sigma}^T)_{L^2(\Omega)} = (A\dot{\Sigma}(t), \sigma^T - \bar{\sigma}^T)_{L^2(\Omega)} + (\varepsilon(\dot{W}^*), \sigma^T - \bar{\sigma}^T)_{L^2(\Omega)} .$$

Celle-ci donne en remarquant que $\sigma^T - \bar{\sigma}^T \in S(0)$:

$$(A\dot{\bar{\sigma}}^T, \sigma^T - \bar{\sigma}^T)_{L^2(\Omega)} = (A\dot{\Sigma}(t), \sigma^T - \bar{\sigma}^T)_{L^2(\Omega)}$$

qui en vertu de l'hypothèse de régularité sur $\bar{\Sigma}(t)$ conduit à

$$\text{(49)} \quad |(A\dot{\bar{\sigma}}^T, \sigma^T - \bar{\sigma}^T)| \leqslant C \| \sigma^T - \bar{\sigma}^T \|_{L^2(\Omega)}$$

en regroupant (46), (47), (48) et (49) nous avons :

$$\text{(50)} \quad \left| \int_\Omega (A\dot{\sigma}^T - A\dot{\bar{\sigma}}^T, \sigma^T - \bar{\sigma}^T)\, d\Omega \right| \leqslant \\ \leqslant C \left(\| \sigma^T - \bar{\sigma}^T \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \sigma^T \|^2_{L^2(\Omega)} + 1 \right) .$$

D'autre part .

$$\|\bar{\sigma}^T\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\bar{\Sigma}(t)\|_{L^2(\Omega)} + |\lambda^T - \langle\lambda(t,\tau)\rangle| \, \|A^{-1}\varepsilon(W_f)\|_{L^2(\Omega)} + \\ + |\mu^T - \langle\mu(t,\tau)\rangle| \, \|A^{-1}\varepsilon(W_g)\|_{L^2(\Omega)}$$

qui en vertu de (41) et de la régularité de $\bar{\Sigma}$, W_f, W_g permet de montrer que

$$\|\bar{\sigma}^T\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \tag{51}$$

Par ailleurs par l'hypothèse (H1), (51) et (50) après intégration en temps nous avons

$$\alpha\|\sigma^T(t) - \bar{\sigma}^T(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \alpha\|\sigma^T(0) - \bar{\sigma}^T(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant C\left[\int_0^t \|\sigma^T(s) - \bar{\sigma}^T(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds + 1\right] \tag{52}$$

On vérifie facilement que

$$\|\sigma^T(0) - \bar{\sigma}^T(0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C$$

qui conduit par application du lemme de Gronwall à (52) à .

$$\|\sigma^T - \bar{\sigma}^T(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C$$

Soit en utilisant (51)

σ^T est borné dans $L^\infty(0, T_M, L^2(\Omega))$ indépendamment de T.

Par suite, en utilisant les équations d'équilibre (5) et l'hypothèse (40) nous avons :

$$\sigma^T \text{ borné dans } L^\infty(0, T_M, S) \tag{53}$$

Estimation a priori 2

En utilisant (10) nous avons

$$\varepsilon(u^T(t)) - \varepsilon(u^T(0)) = A\sigma^T(t) - A\sigma^T(0) + \int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T(s))\, ds \tag{54}$$

qui en vertu de (H4) et (H1) conduit a .

$$\|\varepsilon(u^T(t))\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C(\|\sigma^T(t)\|_{L^2(\Omega)} + 1) + \left\|\int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T(s))\, ds\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{55}$$

d'autre part par Cauchy-Schwartz nous avons :

$$\int_\Omega \left\| \int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T(s))\,ds \right\|^2_{\mathbb{R}^9_s} d\Omega \leqslant t^2 \int_\Omega \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T(s)) \right\|^2_{\mathbb{R}^9_s} ds \right) d\Omega$$

qui conduit en utilisant (36) à la relation :

$$\left\| \int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T(s))\,ds \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C T_M^2 \int_0^t \left(\int_\Omega \|\sigma^T(s)\|^2_{\mathbb{R}^9_s} d\Omega \right) ds$$

celle-ci donne par (53) :

(56) $$\int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T(s))\,ds \text{ borné dans } L^\infty(0, T_M\,;\, L^2(\Omega))$$

(55) conduit alors par (53) et (56) à :

$$\varepsilon(u^T) \text{ borné dans } L^\infty(0, T_M\,;\, L^2(\Omega))$$

qui grâce à l'inégalité de Korn conduit à :

(57) $$u^T \text{ borné dans } L^\infty(0, T_M\,;\, V)\,.$$

Passage à limite :

(53), (55) et (57) montrent qu'il existe

$$(\sigma^*, u^*, \varphi^*) \in L^\infty(0, T_M\,;\, S) \times L^\infty(0, T_M\,;\, V) \times L^\infty(0, T_M\,;\, L^2(\Omega))$$

tel que:

$$\begin{aligned} \sigma^T &\to \sigma^* \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T_M\,;\, S) \text{ faible } * \\ u^T &\to u^* \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T_M\,;\, V) \text{ faible } * \end{aligned}$$

$$\int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T(s))\,ds \to \varphi^* \text{ dans } L^\infty(0, T_M\,;\, L^2(\Omega)) \text{ faible } *\,.$$

Ces limites vérifient par (54) la relation :

(58) $$\varepsilon(u^*) - \varepsilon(\bar{u}_0) = A\sigma^* - A\bar{\sigma}_0 + \varphi^* \quad \text{p.p. } x, t\,.$$

Pour obtenir la loi de comportement complète il faut identifier la limite φ^* du terme non linéaire. A cette fin nous utiliserons les deux lemmes suivants qui sont établis plus loin.

LEMME 2 : *Soit X un hilbert et h une fonction de $C^0([0, T_M]\,;\, L^\infty(0,1) \times X)$. h peut être prolongé par τ-périodicité en une fonction $\tilde{h}$ de $C^0([0, T_M];\, L^\infty(\mathbb{R}) \times X)$.*

On pose :
$$h^T(t,x) = \tilde{h}\left(t, \frac{t}{T}, x\right)$$

alors

$$\lim_{T \to 0} h^T(t,x) = \langle \tilde{h}(t,\tau,x) \rangle \text{ dans } L^\infty(0, T_M ; X) \text{ faible } * . \quad \blacksquare$$

Si on pose :

$$\sigma_0(t,\tau,x) = \Sigma(t,x) + \chi(t,\tau,x)$$
$$u_0(t,\tau,x) = U(t,x) + W^*(t,\tau,x)$$
$$\varphi_0(t,\tau,x) = \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma_0(s,\tau,x))\, ds$$

où χ et W^* sont donnés par (26) et (27). On vérifie alors que σ_0, u_0, φ_0 vérifient les hypothèses du lemme 2 et peuvent être prolongés par τ-périodicité. En effet par (40) et (41) et la régularité des solutions élastiques nous avons :

$$W^* \in W^{1,\infty}(0, T_M ; L^\infty(0,1) \times V)$$

qui en vertu de la régularité des champs Σ et U montrent que :

(59) $$\sigma_0 \in W^{1,\infty}(0, T_M ; L^\infty(0,1) \times S)$$

(60) $$u_0 \in W^{1,\infty}(0, T_M ; L^\infty(0,1) \times V)$$

en particulier :

$$(\sigma_0, u_0) \in C^0([0, T_M] ; L^\infty(0,1) \times S) \times C^0([0, T_M] ; L^\infty(0,1) \times V) .$$

Par ailleurs en utilisant une démarche analogue pour établir (56) nous avons :

$$\|\varphi_0(t,\tau,x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^t \left(\int_\Omega \|\sigma_0(s,\tau,x)\|^2_{\mathbb{R}^9_s}\, d\Omega \right) ds$$

qui grâce à (59) montre que $\varphi_0 \in L^\infty(0, T_M ; L^\infty(0,1) \times L^2(\Omega))$. En remarquant que :

$$\left\| \frac{d\varphi_0}{dt} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|\sigma_0\|_{L^2(\Omega)}$$

nous avons grâce à (59) $\varphi_0 \in W^{1,\infty}(0, T_M ; L^\infty(0,1) \times L^2(\Omega))$; en particulier

(61) $$\varphi_0 \in C^0([0, T_M] ; L^\infty(0,1) \times L^2(\Omega)) .$$

LEMME 3 : *Soit* $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{u}_0, \tilde{\varphi}_0$ *les prolongements par* τ*-périodicité de* σ_0, u_0, φ_0. *Posons :*

$$\sigma_0^T = \tilde{\sigma}_0\left(t, \frac{t}{T}, x\right)$$
$$u_0^T = \tilde{u}_0\left(t, \frac{t}{T}, x\right)$$
$$\varphi_0^T = \tilde{\varphi}_0\left(t, \frac{t}{T}, x\right)$$

alors

(62) $$\|\sigma^T - \sigma_0^T\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\sqrt{T}$$

(63) $$\|u^T - u_0^T\|_V \leqslant C\sqrt{T}$$

(64) $$\left\|\int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T(s))\,ds - \varphi_0^T\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\sqrt{T}$$

Utilisation des lemmes : Nous avons grâce aux deux lemmes :

$$\lim_{T\to 0} \sigma^T = \lim_{T\to 0} \sigma_0^T = \langle\tilde{\sigma}_0\rangle \text{ dans } L^\infty(0, T_M\,; L^2(\Omega)) \text{ faible } *$$

$$\lim_{T\to 0} \varepsilon(u^T) = \lim_{T\to 0} \varepsilon(u_0^T) = \langle\varepsilon(\tilde{u}_0)\rangle \text{ dans } L^\infty(0, T_M\,; L^2(\Omega)) \text{ faible } *$$

$$\lim_{T\to 0} \int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T(s))\,ds = \lim_{T\to 0} \varphi_0^T = \langle\tilde{\varphi}_0\rangle \text{ dans } L^\infty(0, T_M\,; L^2(\Omega)) \text{ faible } *$$

Par ailleurs

$$\langle\tilde{\sigma}_0\rangle = \Sigma(t)$$
$$\langle\varepsilon(\tilde{u}_0)\rangle = \varepsilon(U)$$
$$\langle\tilde{\varphi}_0\rangle = \int_0^t \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\Sigma(s) + \chi(s,\tau))\right\rangle ds\,.$$

Ceci permet d'identifier σ^* à Σ, u^* à U et φ^* à

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\Sigma(s) + \chi(s,\tau))\right\rangle ds\,.$$

Démonstration du lemme 3 : Pour démontrer le lemme 3 nous définissons :

(65) $$\psi(t,\tau,x) = \int_0^\tau \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\tilde{\sigma}_0(t,s,x))\,ds - \tau\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\tilde{\sigma}_0(t,s,x))\,ds$$

et nous introduisons le problème auxiliaire élastique $\mathscr{P}_1$, avec précontrainte

$$(\mathscr{P}_1)\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_1 \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_\sigma \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_u \\ \varepsilon(u_1) = A\sigma_1 + \psi & \end{cases}$$

Nous allons montrer que

$$\psi(t, \tau, x) \in W^{1,\infty}(0, T_M ; L^\infty(\mathbb{R}) \times L^2(\Omega)).$$

On remarque d'abord que ψ est τ-périodique. Nous avons alors

$$\sup_{t \in]0, T_M[} \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|\psi(t, \tau, x)\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{t \in]0, T_M[} \sup_{\tau \in]0,1[} \|\psi(t, \tau, x)\|_{L^2(\Omega)} \tag{66}$$

pour $\tau \in]0, 1[$ on établit en suivant une démarche analogue pour établir (56) que :

$$\begin{aligned} \|\psi(t, \tau, x)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \left[\int_0^\tau \|\sigma_0(t, s, x)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \tau \int_0^1 \|\sigma_0(t, s, x)\|^2_{L^2(\Omega)} ds\right] \\ &\leqslant C \int_0^1 \|\sigma_0(t, s, x)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \end{aligned}$$

qui grâce à (59) et (66) permet de conclure que :

$$\psi \in L^\infty(0, T_M ; L^\infty(\mathbb{R}) \times L^2(\Omega)) . \tag{67}$$

Par ailleurs nous avons pour $\tau \in]0, 1[$ en utilisant (65) :

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\psi(t+h, \tau, x) - \psi(t, \tau, x)}{h}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{C}{h^2} \int_0^1 \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\left(\sigma_0(t+h, s, x) - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma_0(t, s, x))\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds \end{aligned}$$

qui conduit par (36) à

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\psi(t+h, \tau, x) - \psi(t, \tau, x)}{h}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{C}{h^2} \int_0^1 \|\sigma_0(t+h, s, x) - \sigma_0(t, s, x)\|^2_{L^2(\Omega)} ds . \end{aligned} \tag{68}$$

On remarque que :

$$\sigma_0(t+h, s, x) - \sigma_0(t, s, x) = \int_t^{t+h} \frac{\partial\sigma_0}{\partial t}(p, s, x)\, dp$$

En utilisant (59) et Cauchy-Schwartz, (68) conduit à

$$\left\| \frac{\psi(t+h,\tau,x)-\psi(t,\tau,x)}{h} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{h^2}\int_0^1 \left(\int_t^{t+h} \left\| \frac{\partial \sigma_0}{\partial t}(p,s,x) \right\|^2_{L^2(\Omega)} dp \right) ds \times |h| \leqslant C$$

et par suite $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^\infty(0, T_M ; L^\infty(0,1) \times L^2(\Omega))$ qui par une relation analogue à (60) montre que :

$$\text{(69)} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^\infty(0, T_M ; L^\infty(\mathbb{R}) \times L^2(\Omega)) .$$

Si on pose :

$$\psi^T(t,x) = \psi\left(t, \frac{t}{T}, x\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^T = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\left(t, \frac{t}{T}, x\right)$$

nous avons en vertu de (67) et (69) :

(70)

$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^T$ et ψ^Tsont bornés dans $L^\infty(0, T_M ; L^2(\Omega))$ indépendamment de T.

Ceci permet de montrer que :

(71)

$$\begin{cases} (\sigma_1^T, u_1^T) \text{ sont bornés dans } L^\infty(0, T_M ; S) \times L^\infty(0, T_M ; V) \\ \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}\right)^T, \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^T \text{ sont bornés dans } L^\infty(0, T_M ; S) \times L^\infty(0, T_M ; V) \end{cases}$$

Posons maintenant :

$$\sigma_r(t) = \sigma^T(t) - \sigma_0^T(t) - T\sigma_1^T(t)$$
$$u_r(t) = u^T(t) - u_0^T(t) - Tu_1^T(t) .$$

Nous avons :

$$\text{(72)} \qquad A\dot{\sigma}_r = \dot{\varepsilon}(u_r(t)) + T\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma_0^T) - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T)$$

qui conduit à

$$\text{(73)} \quad \int_\Omega (A\dot{\sigma}_r, \sigma_r)\, d\Omega = \int_\Omega (\dot{\varepsilon}(u_r(t)), \sigma_r) d\Omega + T\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^T, \sigma_r\right) d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma_0^T) - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T), \sigma^r\right) d\Omega .$$

Mais :

$$\operatorname{div} \sigma_r = 0\,, \quad \sigma_r n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\sigma$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma_0^T) - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T), \sigma^r \right) &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma_0^T) - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T), \sigma^T - \sigma_0^T \right) + \\ &\quad + T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma_0^T) - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T), \sigma_1^T \right) \\ &\leqslant T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma_0^T) - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T), \sigma_1^T \right)\end{aligned}$$

par monotonie de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$.

(73) conduit alors en vertu de H1 après intégration en temps

$$(74) \quad \begin{aligned}\alpha \|\sigma_r(t)\|^2 - \alpha\|\sigma_r(0)\|^2 &\leqslant T\left| \int_0^t \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^T, \sigma_r \right) d\Omega\, dt \right| + \\ &\quad + T\left| \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma_0^T) - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T), \sigma_1^T \right) d\Omega\, dt \right| .\end{aligned}$$

On remarque que :

$$(75) \qquad \left| \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^T, \sigma_r \right) d\Omega \right| \leqslant C(\|\sigma_r\|^2_{L^2(\Omega)} + 1)$$

par Cauchy-Schwartz et (69). On note également qu'en vertu de (36) et (71) :

$$(76) \qquad \begin{aligned}\left| \int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma_0^T) - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma^T), \sigma_1^T \right) \right| &\leqslant C(\|\sigma_0^T - \sigma^T\|^2_{L^2(\Omega)} + 1) \\ &\leqslant C\ (\|\sigma_r\|^2_{L^2(\Omega)} + 1)\end{aligned}$$

toujours par (71).

D'autre part :

$$(77) \quad \sigma_r(0) = \sigma^T(0) - \sigma_0^T(0) - T\sigma_1^T(0) = \bar{\sigma}_0 - \sigma_0(0,0) - T\sigma_1(0,0) = 0$$

car $\qquad \sigma_0(0,0) = \bar{\sigma}_0 \quad \text{et} \quad \psi(0,0,x) = 0$

En regroupant (75) à (76), (74) conduit finalement à

$$\alpha\|\sigma_r(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant TC\left(\int_0^t \|\sigma_r(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds + 1 \right)$$

qui en vertu du lemme de Gronwall permet de conclure que :

$$\|\sigma_r(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\sqrt{T}$$

et par suite en vertu de (71) :

(78) $$\|\sigma^T - \sigma_0^T\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\sqrt{T}$$

Cette inégalité permet d'obtenir immédiatement l'estimation (64).

En effet :

(79)

$$\left\|\int_0^t \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T) - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma_0^T)\right) ds\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C\int_0^t \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T) - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma_0^T)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$
$$\leqslant C\int_0^t \|\sigma^T - \sigma_0^T\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leqslant CT.$$

Pour obtenir l'estimation (63) on procède comme suit :

On multiplie (72) par $A^{-1}\varepsilon(u_r(t))$ nous obtenons :

$$\alpha\|\varepsilon(u_r(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha\|\varepsilon(u_r(0))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant T\left|\int_0^t\int_\Omega \left[\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^T, \varepsilon(u_r)\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma_0^T) - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\sigma^T), \varepsilon(u_r)\right)\right] d\Omega\, dt\right|$$

qui conduit en utilisant (78) et (79) et en remarquant que $u_r(0) = 0$ à :

$$\alpha\|\varepsilon(u_r(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant CT\left(\int_0^t \|\varepsilon(u_r(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + 1\right)$$

qui en vertu du lemme de Gronwall et de l'inégalité de Korn donne :

$$\|u_r(t)\|_V \leqslant C\sqrt{T}$$

qui grâce à (71) permet de conclure que :

$$\|u^T(t) - u_0^T(t)\| \leqslant C\sqrt{T}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 3.

Démonstration du lemme 2 : Celle-ci se fait en calquant la démonstration du lemme 6, p. 314 de Suquet [21] avec des fonctions $C^0([0, T_M]\,;\, L^\infty(0, 1) \times X)$.

Remarque 2

1. Nous n'avons pas cherché à obtenir le meilleur résultat possible mais seulement le plus simple. Il est possible ainsi d'affaiblir les hypothèses (H5) sur les forces extérieures. On peut aussi prendre des conditions initiales dépendantes de T et supposer leur convergence dans les topologies appropriées.

2. Quand la condition de compatibilité (32) n'est pas vérifiée nous avons un saut dans la condition initiale pour le problème limite P^0. Le même phénomène a été observé par Francfort [7] en homogénéisation des matériaux thermo-élastiques linéaires, et par Blanchard et Francfort [2] dans les plaques thermo-élastiques. Francfort [7] l'attribue à un phénomène d'oscillations rapides liées à des échelles de temps et d'espace différentes. Blanchard et Francfort [2] montrent que si une condition de compatibilité entre les données initiales est vérifiée alors le problème limite vérifie les mêmes conditions initiales que le problème de départ et ils avancent plusieurs hypothèses pour expliquer le changement de condition initiale quand la condition de compatibilité n'est pas vérifiée (mauvais choix de variables, couches limites en temps ?). Dans notre cas la condition de compatibilité porte sur « l'évolution » des forces extérieures à l'instant initial. Pour comprendre l'origine de ce phénomène de « couche limite » considérons la fonction g ne vérifiant pas la condition de compatibilité donnée par :

$$g^T(t) = 1 + t - \cos 2 \frac{\pi t}{T}$$

nous avons :

$$g^T(0) = 0$$

$$g^T(t) \overset{T \to 0}{\to} \langle g(t, \tau) \rangle = 1 + t$$

et par suite :

$$\langle g(t, \tau) \rangle (0) = 1$$

et donc :

$$\left(\lim_{T \to 0} g^T(t) \right) (0) \neq \lim_{T \to 0} (g^T(0)) .$$

Nous constatons que la non vérification de la condition de compatibilité (32) traduit le fait que la limite d'une fonction prise à l'instant initial peut différer de la valeur de la fonction limite à l'instant initial.

D'autre part, le problème P^T peut s'écrire sous la forme variationnelle suivante :

$$-A \frac{d\sigma^T}{\partial t} \in \partial(\psi(\sigma^T) + I_{S(f^T, g^T)}) \quad \text{dans} \quad (L^2(\Omega))^9_8 \text{ et p.p. } t \in \,]0, T_M[$$

avec

$$\psi(\sigma^T) = \int_\Omega \varphi(x, \sigma^T) \, d\Omega$$

et $I_{S(f^T, g^T)}$ l'indicatrice de l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles :

$$S(f^T, g^T) = \{\sigma \in S, \operatorname{div} \sigma + f^T = 0, \sigma \, . \, n = g^T \text{ sur } \Gamma_\sigma\} \ .$$

Remarquons que si la condition initiale du problème P^T est dans le domaine de l'opérateur associé à ce problème, celle-ci n'est dans le domaine de l'opérateur associé au problème limite *seulement* si la condition de compatibilité est vérifiée (voir (H4), (44) et (45)). Si celle-ci n'est pas vérifiée, il faut imposer une autre condition initiale à Σ pour que celle-ci soit dans le domaine de l'opérateur associé au problème limite P^0.

3. Le champ σ_0 donne une meilleure approximation du champ σ^T que le champ Σ. Il équilibre les mêmes forces extérieures et vérifie la *même condition initiale* que σ^T. Le correcteur χ^T permet d'obtenir la convergence forte et son corollaire la vérification de la condition initiale.

4. Quand les forces extérieures sont périodiques (i.e. elles sont indépendantes du temps lent), les champs (Σ, U) solutions du problème P^0 deviennent à partir d'un certain moment, indépendantes du temps. Ces champs correspondent à la moyenne du cycle limite auquel la structure tend asymptotiquement quand le temps tend vers l'infini. La méthode décrite permet donc d'obtenir la moyenne du cycle limite et d'une approximation de celui-ci par l'intermédiaire de σ_0 et u_0 (*cf.* § 2.4 et 6).

5. Par rapport au théorème général établi dans un cadre abstrait pour une classe de problème perturbés par Roseau [19], chap. 7, p. 99 ou Sanchez-Palencia [20], chap. 14, p. 283, l'inégalité (64) établit l'hypothèse de continuité de l'intégrale par rapport à T de l'opérateur associé à la formulation variationnelle en contraintes du problème P^T (voir § 2 de la présente remarque). Le théorème 2 donne une estimation d'erreur sur les contraintes en $\sqrt{T}$. Il permet donc de préciser dans le cas élastoviscoplastique les résultats de Roseau [19] et de Sanchez-Palencia [20].

3. HOMOGÉNÉISATION EN TEMPS D'UN MATÉRIAU ÉLASTOPLASTIQUE PARFAIT

Dans ce paragraphe le comportement du matériau constituant la structure est supposé élastoplastique parfait. La loi de comportement d'un tel matériau s'écrit

$$\varepsilon(u^T) = A\sigma^T + \varepsilon^{an} \tag{80}$$

$$\frac{d\varepsilon^{an}}{dt} \in \partial I_c(\sigma^T) \tag{81}$$

où I_c désigne l'indicatrice du convexe d'élasticité $C(x)$.

Les équations (80) et (81) sont équivalentes à :

$$\begin{cases} \sigma \in C(x) \\ (\dot{\varepsilon}(u^T) - A\dot{\sigma}^T, \sigma - \tau) \geqslant 0 \quad \forall \tau \in C(x) . \end{cases} \tag{82}$$

Les équations (5) à (9) et (82) constituent le problème mécanique P^T.

3.1. Identification du problème limite

Pour identifier le problème limite P^0 on utilise une démarche analogue à Suquet [21]. Nous commençons par approcher (82) par un matériau élastoviscoplastique du type Perzyna, puis nous passons à la limite en T puis en viscosité. Le pseudo-potentiel φ_β de dissipation du matériau Perzyna s'écrit :

$$\varphi_\beta(\sigma) = \frac{1}{2\beta} \|\sigma - P_c(\sigma)\|^2_{\mathbb{R}^9_s} \tag{83}$$

où $P_c(\sigma)$ désigne la projection de σ sur $C(x)$.

Quand β tend vers zéro ce potentiel tend vers le potentiel de la plasticité parfaite. On vérifie sans peine que ce potentiel vérifie l'hypothèse (H2). La loi de comportement homogénéisée en temps du problème P^0_β s'écrit alors :

$$\frac{d\varepsilon(U_\beta(t))}{dt} = A\frac{d\Sigma_\beta(t)}{dt} + \frac{\partial \phi_\beta}{\partial \Sigma} \tag{84}$$

avec

$$\phi_\beta(\Sigma) = \langle \varphi_\beta(\Sigma_\beta + \chi) \rangle \tag{85}$$

et χ donnée par (26) et (27).

On notera que χ est *indépendant* de β.

(84) et (85) donnent :

$$\begin{aligned} (\dot{\varepsilon}(U_\beta(t)) - A\dot{\Sigma}_\beta(t), \Sigma_\beta - \Sigma^*) &= \\ = \left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial \Sigma}(\Sigma_\beta), \Sigma_\beta - \Sigma^* \right) &\geqslant \phi_\beta(\Sigma_\beta) - \phi_\beta(\Sigma^*) . \end{aligned} \tag{86}$$

Choisissons maintenant Σ^* tel que :

$$\begin{cases} \Sigma^* \in \bigcap_{\tau \in]0,1[} (C(x) - \chi(t, \tau, x)) \text{ p.p. } x \in \Omega, \ \forall t \in [0, T_M] \\ \operatorname{div} \Sigma^* + \langle f \rangle = 0 \\ \Sigma^* . n = \langle g \rangle \text{ sur } \Gamma_\sigma \end{cases} \tag{87}$$

nous avons :

$$\phi_\beta(\Sigma^*) = \frac{1}{\beta}(\Sigma^* + \chi - P_c(\Sigma^* + \chi)) = 0$$

d'autre part :

$$\phi_\beta(\Sigma_\beta) \geqslant 0$$

(86) conduit alors à :

$$\int_\Omega (A\dot{\Sigma}_\beta(t), \Sigma^* - \Sigma_\beta(t))\, d\Omega \geqslant 0 \quad \forall \Sigma^* \text{ vérifiant (87)}. \tag{88}$$

Par ailleurs, si on fait l'hypothèse suivante de la charge sûre de Moreau [17] pour le problème limite P^0:
(89) $\exists \delta > 0$, $\exists \rho(t) \in W^{1,\infty}(0, T_M ; L^\infty(\Omega)^9_s)$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \rho(t) + \langle f \rangle = 0 & \text{p.p. } t \in]0, T_M[\\ \rho(t) \,.\, n = \langle g \rangle \text{ sur } \Gamma_\sigma & \text{p.p. } t \in]0, T_M[\end{array}$$

$\forall \Sigma^* \in L^\infty(\Omega)^9_s$ tel que si $\|\Sigma^*\|_{L^\infty(\Omega)^9_s} \leqslant \delta$ on ait :

$$\Sigma^* + \rho(t) + \chi(t, \tau, x) \in C(x) \quad \forall t \in [0, T_M] \text{ et } \tau \in]0, 1[, \text{ p.p. } x \in \Omega$$

il est possible de montrer les estimations suivantes :

$$\int_\Omega \phi_\beta(\Sigma_\beta)\, d\Omega \leqslant C \quad \text{et} \quad \|\Sigma_\beta(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\,.$$

En effet, (88) donne après intégration en prenant $\Sigma^* = \rho(t)$

$$\int_0^t \int_\Omega (A\dot{\Sigma}_\beta(t) - A\dot{\rho}(t), \Sigma_\beta - \rho(t))\, d\Omega\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t \int_\Omega (-A\dot{\rho}(t), \Sigma_\beta - \rho(t))\, d\Omega\, dt$$

qui grâce à l'hypothèse (H1) et celle de la charge sûre permet de montrer l'inégalité :

$$\alpha \|\Sigma_\beta(t) - \rho(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(\int_0^t \|\Sigma_\beta - \rho(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\Omega + 1 \right).$$

Celle-ci par le lemme de Gronwall et l'hypothèse de régularité (88) sur ρ donne :

$$\|\Sigma_\beta(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\,. \tag{90}$$

D'autre part (86) fournit pour $\Sigma^* = \rho$

$$\int_0^t \int_\Omega (A\dot{\Sigma}_\beta(t) - A\dot{\rho}(t), \Sigma_\beta - \rho(t))\, d\Omega\, dt + \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial \Sigma}(\Sigma_\beta), \Sigma_\beta - \rho \right) d\Omega\, dt \leqslant \int_\Omega (-A\dot{\rho}(t), \Sigma_\beta - \rho(t))\, d\Omega\, dt$$

qui par l'hypothèse (H1) et (90) montre que :

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial \Sigma}(\Sigma_\beta), \Sigma_\beta - \rho \right) d\Omega\, dt \leqslant C\,. \tag{91}$$

Comme

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_\beta(\Sigma_\beta)}{\partial \Sigma}, \Sigma_\beta - \rho \right) d\Omega\, dt \geqslant \int_0^t \int_\Omega (\phi_\beta(\Sigma_\beta) - \phi_\beta(\rho))\, d\Omega\, dt \geqslant \int_0^t \int_\Omega \phi_\beta(\Sigma_\beta)\, d\Omega\, dt$$

car $\phi_\beta(\rho) = 0$ par $\rho + \chi \in C(x)\ \forall \tau \in\,]0, 1[$, p.p. x.

Nous avons donc par (91) :

$$\int_0^t \int_\Omega \Phi_\beta(\Sigma_\beta)\, d\Omega\, dt \leqslant C \tag{92}$$

En vertu de (90), il existe Σ tel que

$$\Sigma_\beta \to \Sigma \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T_M\,; L^2(\Omega)) \text{ faible } *\,.$$

(92) donne :

$$\int_0^t \int_\Omega \left\langle \|\Sigma_\beta + \chi - P_c(\Sigma_\beta + \chi)\|^2 \right\rangle d\Omega\, dt \leqslant C\beta$$

qui conduit formellement par passage à la limite en β à :

$$\int_0^t \int_\Omega \left\langle \|\Sigma + \chi - P_c(\Sigma + \chi)\|^2 \right\rangle d\Omega\, dt = 0$$

et par suite :

$$\Sigma \in \bigcap_{\tau \in]0, 1[} (C(x) - \chi(t, \tau, x)) \tag{93}$$

Finalement la loi de comportement homogénéisée en temps s'écrit par (88) :

$$\begin{cases} \Sigma \in P(t,x) = \bigcap\limits_{\tau \in]0,1[} (C(x) - \chi(t,\tau,x)) \quad \text{p.p. } x, \quad \forall t \in [0, T_M] \\ \displaystyle\int_\Omega (A\dot{\Sigma}, \Sigma^* - \Sigma)\, d\Omega \geqslant 0 \quad \forall \Sigma^* \text{ vérifiant } (87) \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme locale :

$$\begin{cases} \Sigma \in P(t,x) \\ \varepsilon(U) = A\Sigma + \varepsilon^{an} \\ (\dot{\varepsilon}^{an}, \Sigma - \Sigma^*) \geqslant 0 \quad \forall \Sigma^* \in P(t,x)\,. \end{cases} \tag{94}$$

Le problème limite P^0 est constitué alors par les équations :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \Sigma + \langle f \rangle = 0 \\ \Sigma \,.\, n = \langle g \rangle \text{ sur } \Gamma_\sigma \\ U = 0 \text{ sur } \Gamma_u \\ (\Sigma, U) \text{ reliés par (94)} \\ \Sigma(0) = \bar{\sigma}_0 - \chi(0,0) \\ U(0) = \bar{u}_0 - W^*(0,0)\,. \end{cases} \tag{95}$$

La loi de comportement du problème limite est encore du type élastoplastique parfait avec un convexe variable dans le temps.

3.2. Lien avec la théorie de l'adaptation

Rappelons qu'une structure est dite en état d'adaptation pour un chargement cyclique si et seulement si les champs de contraintes et de déplacement tendent à devenir purement élastiques.

Interprétons maintenant l'hypothèse de la charge sûre dans le cas de l'homogénéisation en temps. Remarquons d'abord que celle-ci permet de démontrer moyennant d'autres hypothèses plus classiques, l'existence d'une solution (Σ, U) (donc de σ_0 et u_0) du problème limite P^0. Ceci assure qu'au premier ordre les chargements extérieurs restent acceptables pour la structure. Examinons plus particulièrement le cas où les forces extérieures sont périodiques donc indépendantes du temps lent. Le champ χ est alors indépendant de t et vaut :

$$\chi = A^{-1}[(\mu(\tau) - \langle \mu(\tau) \rangle)\, \varepsilon(W_g) + (\lambda(\tau) - \langle \lambda(\tau) \rangle)\, \varepsilon(W_f)]\,.$$

Posons :

$$\chi_0 = A^{-1}(\mu(\tau)\, \varepsilon(W_g) + \lambda(\tau)\, \varepsilon(W_f)) \tag{96}$$

$$\chi^* = \rho - A^{-1}(\langle \mu(\tau) \rangle \varepsilon(W_g) + \langle \lambda(\tau) \rangle \varepsilon(W_f))\,. \tag{97}$$

On vérifie sans peine que χ_0^T est solution du problème élastique suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \chi_0^T + f^T = 0 \\ \chi_0^T \cdot n = g^T \text{ sur } \Gamma_\sigma \\ U_{\chi_0}^T = 0 \text{ sur } \Gamma_u \\ \varepsilon(U_{\chi_0}^T) = A\chi_0^T \end{cases}$$

χ_0^T est donc un champ de contraintes élastiques équilibrant les forces extérieures et ayant des conditions initiales *différentes* du problème initial P^T.

On remarque que χ^* vérifie :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \chi^* &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \chi^* \cdot n &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\sigma \end{aligned}$$

χ^* est donc un champ de contraintes résiduelles.

En vertu de (89) nous avons la relation :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \Sigma^* \in L^\infty(\Omega)_s^9 , \quad \|\Sigma^*\|_{L^\infty(\Omega)_s^9} \leq \delta \Rightarrow \Sigma^* + \chi_0^T + \chi^* \in C .$$

On constate que celle-ci correspond à l'hypothèse dite de *Melan-Koiter* formulée dès 1964 par Koiter [12] pour les problèmes d'adaptation. La démarche que nous proposons fournit donc une interprétation de l'hypothèse de Melan-Koiter : celle-ci est équivalente à l'hypothèse de la charge sûre de Moreau [17] pour le problème limite P^0.

Remarque : Comme dans le cas élastoviscoplastique, la loi de comportement homogénéisée en temps dépend du chargement extérieur et de la structure. Le calcul σ_0 et u_0 nécessite la résolution des problèmes élastiques P_f et P_g et du problème macrochronologique (ou lent) P^0 avec un convexe de plasticité variable dans le temps.

4. HOMOGÉNÉISATION EN TEMPS D'UN MATÉRIAU ÉLASTIQUE FRAGILE

Dans ce paragraphe, on suppose que le comportement du matériau constituant la structure est élastique fragile. Plus précisément, on suppose que l'état d'endommagement de ce matériau peut être caractérisé par un seul paramètre D et que sa loi de comportement s'écrit :

(98) $$\sigma^T = a(D^T)\,\varepsilon(u^T)$$

(99) $$F_D^T = -\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial D}(D^T) \cdot \varepsilon(u^T)\,\varepsilon(u^T)$$

(100) $$\dot{D} = \frac{\partial \varphi}{\partial F}(F_D^T)$$

$$\varphi(F) = \frac{b}{p+1}[(F - F_c)^+]^{p+1}$$

où $(\ )^+$ désigne la partie positive de l'argument, F_c la force-seuil d'endommagement et F_D^T la force thermodynamique d'endommagement. φ correspond à un potentiel de Norton avec seuil.

On se propose dans ce paragraphe de construire par des arguments formels le problème limite P^0. Le problème mécanique est constitué par les équations (5) à (9) et (98) à (100).

Pour identifier le problème limite P^0, nous utilisons les développements asymptotiques (12) et (13) pour σ^T et u^T et un développement analogue pour D^T et F_D^T :

$$D^T(t, x) = D_0(x, t, \tau) + TD_1(x, t, \tau) + \cdots$$
$$F_D^T(t, x) = F_D^0(x, t, \tau) + TF_D^1(x, t, \tau) + \cdots$$

En portant ces développements dans les équations du problème P^T nous obtenons en plus des équations (16), (17) et (18), les relations :

(101) $$\frac{\partial D_0}{\partial \tau} = 0$$

(103) $$F_D^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial D}(D_0)\,\varepsilon(u_0) : \varepsilon(u_0)$$

$$\frac{\partial D_0}{\partial t} + \frac{\partial D_1}{\partial \tau} = b[(F_D^0 - F_c)^+]^p$$

(104) $$\sigma_0 = a(D_0)\,\varepsilon(u_0)\,.$$

Nous retrouvons que l'évolution de la variable interne (dans ce § D) est bloquée à l'ordre zéro :

$$D_0 = D_0(t)\,.$$

En utilisant les relations (22) le problème P^0 s'écrit :

$$(P^0)\quad \begin{cases} \operatorname{div} \Sigma + \langle f\rangle = 0 \text{ dans } \Omega \\ \Sigma\,.\,n = \langle g\rangle \text{ sur } \Gamma_\sigma \\ U = 0 \text{ sur } \Gamma_u \\ \Sigma(0) = \bar{\sigma}_0 - \chi(0,0) \\ U(0) = \bar{u}_0 - W^*(0,0) \\ \Sigma = a(D_0)\,\varepsilon(U) \\ F_D^0 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a}{\partial D}(D_0)(\varepsilon(U) + \varepsilon(W^*)) : (\varepsilon(U) + \varepsilon(W^*)) \\ \dot{D}_0 = \langle b((F_D^0 - F_c)^+)^p\rangle\,. \end{cases}$$

Pour déterminer W^* et χ nous reportons (22) dans (104). Nous obtenons le problème élastique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \chi + f - \langle f \rangle = 0 \\ \chi \cdot n = g - \langle g \rangle \text{ sur } \Gamma_\sigma \\ \chi = a(D_0)\, \varepsilon(W^*) \\ W^* = 0 \text{ sur } \Gamma_u \,. \end{cases}$$

En introduisant les fonctions W_f et W_g solutions des problèmes élastiques :

$$(P_f) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} a(D_0)\, \varepsilon(W_f) + f^* = 0 \\ a(D_0)\, \varepsilon(W_f) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_\sigma \\ W_f = 0 \text{ sur } \Gamma_u \end{cases}$$

et

$$(P_g) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} a(D_0)\, \varepsilon(W_g) = 0 \\ a(D_0)\, \varepsilon(W_g) \cdot n = g^* \text{ sur } \Gamma_\sigma \\ W_g = 0 \text{ sur } \Gamma_u \end{cases}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} W^* &= (\lambda - \langle \lambda \rangle)\, W_f + (\mu - \langle \mu \rangle)\, W_g \\ \chi &= a(D_0)\, \varepsilon(W^*) \,. \end{aligned}$$

Contrairement au cas des matériaux élastoplastique ou élastoviscoplastiques, les problèmes lent et rapide sont couplés. Les fonctions de base W_f et W_g dépendent de l'état d'endommagement atteint. Mais les dépendances de W^* et χ par rapport au temps rapide *est connue*. Du point de vue numérique ceci permet de « gommer » le temps rapide et de ne considérer que le temps lent : la discrétisation en temps du problème P^0 se faisant seulement par rapport au temps lent. Ceci permet de calculer au premier ordre l'évolution des contraintes et des déformations régnant dans la structure avec des coûts de calculs *raisonnables*. Du point de vue mécanique, une étude de stabilité pour les problèmes P^0, P_f et P_g fournira une approximation de la durée de vie de la structure.

6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME HOMOGÉNÉISÉ EN TEMPS DANS LE CAS ÉLASTOVISCOPLASTIQUE

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'approche numérique du problème élastoviscoplastique lent.

6.1. Approche numérique du problème lent

La loi de comportement homogénéisée en temps du problème élastoviscoplastique s'écrit :

$$\varepsilon(V) = A\,\frac{d\Sigma}{dt} + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\Sigma}(\Sigma+\chi)\right\rangle \tag{119}$$

en notant V le champ des vitesses, et φ le potentiel de dissipation du matériau.

La discrétisation implicite en temps de (119) conduit à :

$$A\,\frac{\Sigma^{n+1}-\Sigma^{n}}{\Delta t} + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\Sigma}(\Sigma^{n+1}+\chi^{n+1})\right\rangle = \varepsilon(V^{n+1})$$

où nous avons affecté l'indice n pour indiquer la valeur de la variable considérée à l'instant $n\,\Delta t$ et où Δt désigne le pas de la discrétisation en temps.

En remarquant que la fonction :

$$\Pi_n(\Sigma) = \frac{1}{2}\frac{A}{\Delta t}\Sigma\,.\,\Sigma + \langle\varphi(\Sigma+\chi^{n+1})\rangle$$

garde les mêmes propriétés que φ, la relation (120) peut s'écrire sous la forme :

$$\partial\Pi_n(\Sigma^{n+1}) = \varepsilon(V^{n+1}) + \frac{A}{\Delta t}\Sigma^n$$

soit en l'inversant :

$$\Sigma^{n+1} \in \partial\Pi_n^*\left(\varepsilon(V^{n+1}) + \frac{A}{\Delta t}\Sigma^n\right) \tag{121}$$

où Π_n^* désigne la fonction duale de Π_n.

Finalement le problème lent discrétisé en temps s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\Sigma^{n+1} + \langle f^{n+1}\rangle = 0 \\ \Sigma^{n+1}\,.\,n = \langle g^{n+1}\rangle \text{ sur } \Gamma_\sigma \\ V^{n+1} = 0 \text{ sur } \Gamma_u \\ \Sigma^{n+1} \in \partial\Pi_n^*\left(\varepsilon(V^{n+1}) + \dfrac{A}{\Delta t}\Sigma^n\right) \end{cases}$$

C'est un problème de viscoplasticité classique (voir [8]) qui admet comme formulation variationnelle en vitesses :

$$\begin{cases} V^{n+1} \text{ minimise la fonctionnelle :} \\ J_n(v) = \displaystyle\int_\Omega \Pi_n^*\left(\varepsilon(v) + \frac{A}{\Delta t}\Sigma^n\right) d\Omega - \int_\Omega \langle f^{n+1}\rangle v\, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \langle g^{n+1}\rangle v\, d\Gamma \\ \text{sur } X = \{v \text{ « régulière », } v = 0 \text{ sur } \Gamma_u\} \end{cases}$$

Par dualisation et pénalisation de la contrainte $G = \varepsilon(v)$, ce problème est équivalent (voir [8]) au problème lagrangien de point-selle :

$$(122)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \{F^{n+1}, V^{n+1} ; \lambda^{n+1}\} \in (Y \times X) \times Y \text{ point-selle} \\ \text{du lagrangien augmenté :} \\ \mathscr{L}_R^n(G, V, \lambda) = \displaystyle\int_\Omega \Pi_n^*\left(G + \frac{A}{\Delta t}\Sigma^n\right) d\Omega + \frac{R}{2}\|G - \varepsilon(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ \qquad\qquad + (\lambda, \varepsilon(v) - G) - L^n(v) \end{cases}$$

en notant Y l'image de X par l'opérateur ε,

$$L^n(v) = \int_\Omega \langle f^{n+1}\rangle v \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \langle g^{n+1}\rangle v \, d\Gamma$$

et $(.\,,.)$ un produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ choisi de la forme

$$(\lambda, G) = \int_\Omega (A^{-1} G, \lambda) \, d\Omega \,.$$

Pour les applications numériques nous avons choisi pour φ un potentiel de Norton en contraintes planes :

$$\varphi(\sigma) = \beta\left(\frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{xy}^2}{3}\right)^{q/2}$$

et comme espaces discrets approchant X et Y :

$$\begin{aligned} X_h &= \left\{v_h \in C^0(\bar\Omega),\, v_h/T_i \in P_1(T_i),\, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_u\right\} \subset X \\ Y_h &= \{p_h, p_h/T_i \in P_0(T_i)\} \end{aligned}$$

où nous avons noté T_i une triangulaire régulière de Ω et P_1, P_0 les espaces des polynômes de degré respectivement 1 et zéro.

L'application de l'algorithme d'Uzawa pour le problème (122) conduit alors à :

$$(\text{ALG})\begin{cases} \bullet\ \lambda_0^{n+1} \text{ donné dans } Y_h \\ \text{itérations} \left[\begin{array}{l} \bullet\ \lambda_m^{n+1}, F_m^{n+1} \text{ connus} \\ (128)\ \bullet \text{ calculer } V_{m+1}^{n+1} \text{ minimisant } \mathscr{L}_R(F_m^{n+1}, .\,, \lambda_m^{n+1}) \\ (124)\ \bullet \text{ calculer } F_{m+1}^{n+1} \text{ minimisant } \mathscr{L}_R(.\,, V_{m+1}^{n+1}, \lambda_m^{n+1}) \\ \bullet \text{ actualiser } \lambda_{m+1}^{n+1} \text{ par :} \\ (125)\quad \lambda_{m+1}^{n+1} = \lambda_m^{n+1} + RA^{-1}(\varepsilon(V_{m+1}^{n+1}) - F_{m+1}^{n+1})\,. \end{array}\right. \end{cases}$$

Les caractéristiques de cet algorithme ont été données dans [8].

Le problème de minimisation en vitesses étant linéaire avec une matrice symétrique définie positive on se propose d'examiner le problème local non linéaire en déformations (124). Celui-ci s'écrit :

$$\partial\Pi_n^*\left(F_{m+1}^{n+1} + \frac{A}{\Delta t}\Sigma^n\right) + RA^{-1}F_{m+1}^{n+1} = RA^{-1}\varepsilon(V_{m+1}^{n+1}) + \lambda_m^{n+1}$$

Soit en tenant compte de (125)

$$\lambda_{m+1}^{n+1} \in \partial\Pi_n^*\left(F_{m+1}^{n+1} + \frac{A}{\Delta t}\Sigma^n\right) \tag{126}$$

qui montre par comparaison avec (121) qu'à la convergence de l'algorithme (ALG) λ_∞^{n+1} correspond à la contrainte Σ^{n+1}.

En inversant (126) nous obtenons :

$$\frac{A}{\Delta t}\lambda_{m+1}^{n+1} + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\Sigma}(\lambda_{m+1}^{n+1} + \chi^{n+1})\right\rangle = F_{m+1}^{n+1} + \frac{A}{\Delta t}\Sigma^n$$

qui en tenant compte de (125) donne :

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{R}\right)A\lambda_{m+1}^{n+1} + \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial\Sigma}(\lambda_{m+1}^{n+1} + \chi^{n+1})\,d\tau = \\ = \varepsilon(V_{m+1}^{n+1}) + \frac{A}{R}\lambda_m^{n+1} + A\frac{\Sigma^n}{\Delta t}$$

qui conduit en utilisant une formule d'intégration de Gauss pour approcher le deuxième terme du premier membre à

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{R}\right)A\lambda_{m+1}^{n+1} + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\frac{\partial\varphi}{\partial\Sigma}(\lambda_{m+1}^{n+1} + \chi((n+1)\Delta t, \tau_i)) = \\ = \varepsilon(V_{m+1}^{n+1}) + \frac{A}{R}\lambda_m^{n+1} + A\frac{\Sigma^n}{\Delta t} \tag{127}$$

équation que nous avons résolu en utilisant une méthode de Newton. Il faut noter que contrairement aux résultats de [8], celle-ci ne se réduit pas à une simple équation algébrique, l'anisotropie introduite par χ nécessite la résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues.

Finalement les étapes de calcul des premiers termes σ_0 et u_0 des développements asymptotiques sont :

(*a*) calcul des fonctions de base W_f et W_g ;

(*b*) boucle sur le temps $n = 1, \dots N$.

- Σ^n, U^n connus
  - actualiser χ^{n+1}

- calculer $(\Sigma^{n+1}, V^{n+1}) = (\lambda_\infty^{n+1}, V_\infty^{n+1})$ par (ALG)
- actualiser U^{n+1} par :

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t\, V^{n+1}$$

- actualiser σ_0^{n+1} et u_0^{n+1} par (22)

fin de la boucle.

Remarque

1. Blanchard-Letallec [3] montrent que l'algorithme que nous avons décrit correspond en fait à une discrétisation implicite en temps du problème en contraintes suivant :

$$-A\,\frac{d\Sigma}{dt} \in \{\partial\phi(\Sigma) + \partial I_{S(\langle f\rangle,\,\langle g\rangle)}(\Sigma)\} \quad \text{dans} \quad (L^p(\Omega))_s^9$$

avec

$$p = \frac{m}{m-1}\,,\ m = \sup\ \{2, q\}$$
$$\phi = \int_\Omega \langle \varphi(\Sigma + \chi)\rangle\, d\Omega$$

et I l'indicatrice de l'espace :

$$S(\langle f\rangle, \langle g\rangle) = \{\Sigma \in (L^m(\Omega))_s^4, \operatorname{div}\Sigma + \langle f\rangle = 0, \Sigma\,.\,n = \langle g\rangle \text{ sur } \Gamma_\sigma\}\ .$$

Par ailleurs, ils font la connection entre des algorithmes voisins du nôtre et les schémas de Douglas-Rachford, Peaceman-Rachford des directions alternées (voir aussi Fortin-Glowinski [6] chap. 9).

2. La convergence de l'algorithme implicite en temps utilisé est donnée dans Lions et Mercier [15].

6.2. Exemple numérique

Afin de situer la méthode d'homogénéisation en temps proposée par rapport à l'approche classique, nous avons effectué deux calculs numériques : l'un avec la loi élastoviscoplastique avec un potentiel de Norton et l'autre avec la loi de comportement homogénéisé en temps correspondante. L'algorithme utilisé dans les deux cas est celui décrit dans le paragraphe précédent. Nous avons considéré une structure simple constituée d'une plaque circulaire trouée en son centre (*fig.* 2). Celle-ci a été supposée

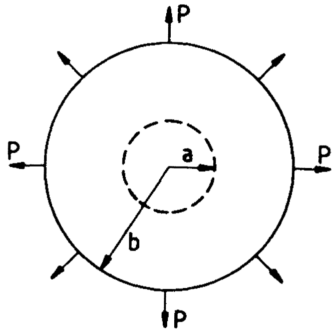

Figure 2. — Structure considérée.

soumise sur son rayon extérieur à une pression uniforme p variable dans le temps de la forme :

$$\begin{cases} p(t) = \alpha_0 t \quad \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ p(t) = \alpha + a_m \sin\left(\dfrac{2\,\Pi(t - t_1)}{T}\right) \quad \text{si} \quad t \geqslant t_1 . \end{cases}$$

Les paramètres α et α_0 étant choisis de manière à assurer la continuité de p. Le maillage utilisé dans les deux cas considérés est représenté sur la figure 3.

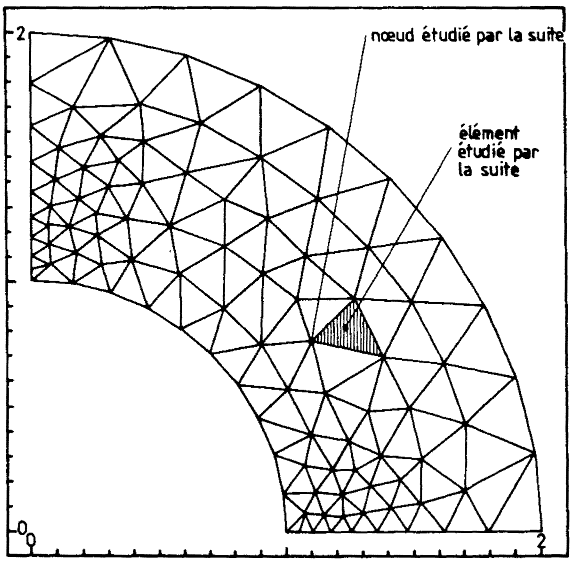

Figure 3. — Maillage utilisé dans les deux cas de calculs.

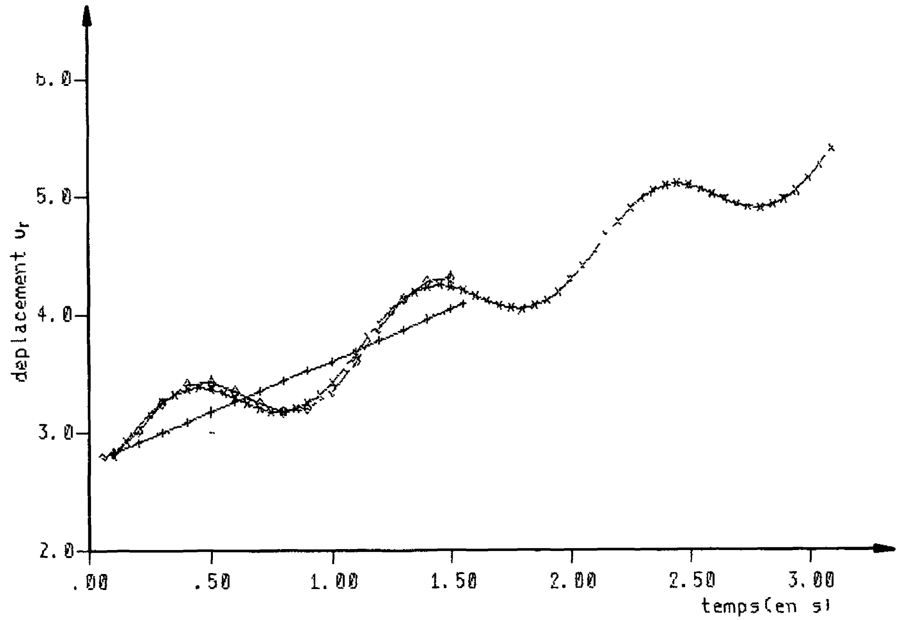

Figure 4. — **Évolution du déplacement d'un nœud du maillage en fonction du temps ; (—×—) méthode classique, (—◇—) méthode d'homogénéisation en temps, (—+—) réponse moyenne.**

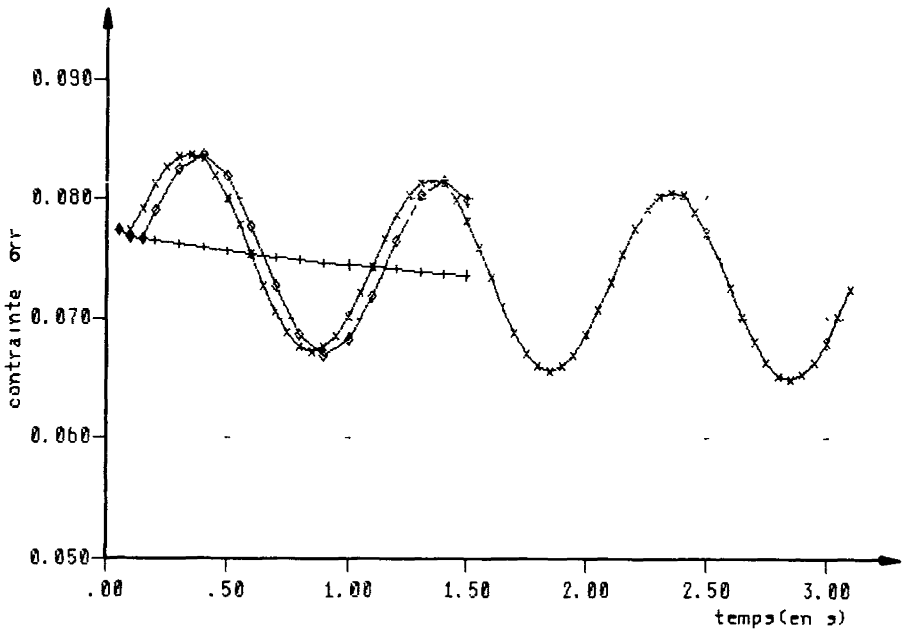

Figure 5. — **Évolution de la contrainte radiale d'un nœud du maillage en fonction du temps ; (—×—) méthode classique, (—◇—) méthode d'homogénéisation en temps, (—+—) réponse moyenne.**

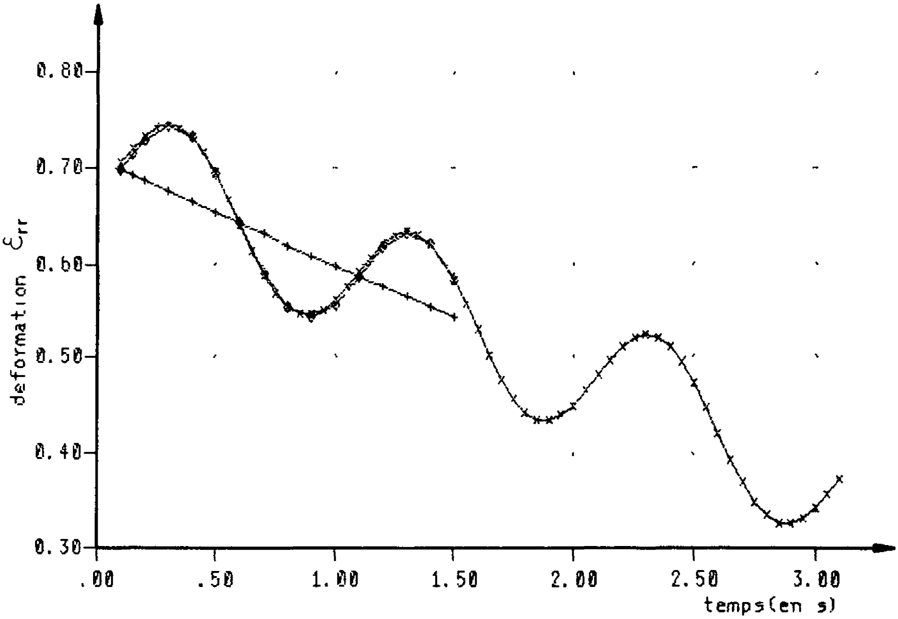

Figure 6. — **Évolution de la déformation radiale d'un triangle du maillage en fonction du temps ; (—×—) méthode classique, (—◇—) méthode d'homogénéisation en temps, (—+—) réponse moyenne.**

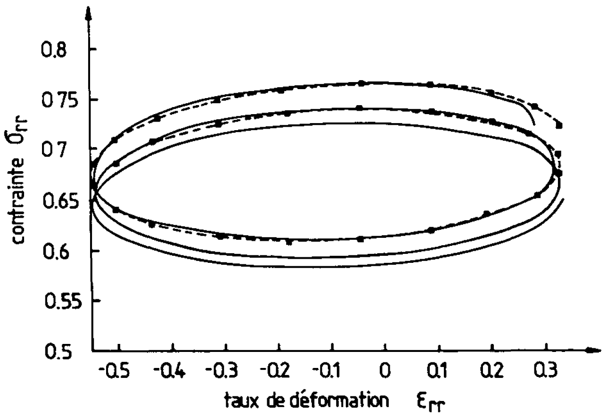

Figure 7. — **Évolution de la contrainte radiale d'un triangle du maillage en fonction du taux de déformation radiale (—+—) méthode classique, (—■—) méthode d'homogénéisation en temps.**

Les symétries du problème montrent que les champs de déplacement et de contraintes ne dépendent que de la distance à l'origine et que $u_\theta = \sigma_{r\theta} = 0$.

Les figures 4 et 5 donnent l'évolution en fonction du temps respectivement au déplacement radial et de la contrainte radiale σ_{rr} pour le nœud du maillage de la figure 3. Nous représentons sur les figures 6 et 7 pour l'élément du maillage hachuré sur la figure 3 l'évolution respectivement de la déformation en fonction du temps et du taux de déformation en fonction de la contrainte. Sur ces figures on constate le très bon accord entre les champs $(\sigma^T, \varepsilon(u^T), u^T)$ solutions du problème P^T et les champs approchés σ^0, $\varepsilon(u^0)$, u^0. Signalons que dans le deuxième cas de calcul utilisant la loi de comportement homogénéisée en temps le pas de la discrétisation du temps est cinquante fois plus important que celui utilisé dans le premier cas de calcul.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU (1978), *Asymptotic analysis of Periodic Structures,* North-Holland, Amsterdam.

[2] D. BLANCHARD, G. FRANCFORT (1987), *Asymptotic Thermoelastic Behaviour of Flat Plates,* à paraître dans Quaterly of Applied Mathematics.

[3] D. BLANCHARD, P. LETALLEC (1987), *Numerical Analysis of the Equations of Small Strains Quasistatic Elastoviscoplasticity,* à paraître dans Numerishe Mathematik.

[4] H. BREZIS (1973), *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert,* North-Holland, Amsterdam.

[5] O. DEBORDES, B. NAYROLES (1976), *Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques,* J. de Mécanique, vol. 15, n° 1, pp. 1-53.

[6] M. FORTIN, R. GLOWINSKI (1982), *Méthodes du lagrangien augmenté,* Dunod-Bordas, Paris.

[7] G. FRANCFORT (1983), *Homogenization and Linear Thermoelasticity,* SIAM J. Math. Anal., vol. 14, pp. 696-708.

[8] T. GUENNOUNI, P. LETALLEC (1982), *Calcul à la rupture : régularisation de Norton Hoff et lagrangien augmenté,* Journal de Mécanique théorique et appliquée, vol. 2, n° 1, pp. 75-99.

[9] B. HALPHEN (1978), *Problèmes quasi-statiques en viscoplasticité,* Thèse, Paris.

[10] A. HARAUX (1981), *Non-linear Evolution Equations,* Lectures Notes in Math. n° 841, Springer-Verlag, Berlin.

[11] C. JOHNSON, B. MERCIER (1976), *Une méthode pour résoudre le problème de l'adaptation,* Com. Rendus Acad. Sci., série A, t. 283, pp. 371-374.

[12] W. T. KOITER (1964), *General Theorems for Elastoplastic Solids,* dans Progress in Solid Mechanics, I. Seneddon et R. Hill éds, North-Holland, pp. 164-221.

[13] P. LADEVEZE, P. ROUGEE (1975), *Plasticité et viscoplasticité sous chargement cyclique : propriétés du cycle limite,* Com. Rendus Acad. Sci., série II, n° 18, Paris.

[14] J. L. LIONS (1978), *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal,* Lectures Notes in Mathematics, n° 323, Springer-Verlag.

[15] P. L. LIONS, B. MERCIER (1979), *Spliting Algorithms for the Sum of Two Nonlinear Operators,* SIAM J. Num. Anal., 16, pp. 964-979.

[16] B. MERCIER (1977), *Sur la théorie et l'analyse numérique de problèmes de plasticité,* Thèse Université Paris VI.

[17] J. J. MOREAU (1977), *Evolution Problem Associated with a Moving Set in a Hilbert Spaces,* J. Diff. Equa., 26, pp. 347-374.

[18] N. QUOC SON (1976), *Extension des théorèmes d'unicité et d'adaptation pour certains matériaux à élasticité et à écrouissage non linéaires,* Com. Rendus Acad. Sci., série A, t. 282, pp. 755-758.

[19] M. ROSEAU (1976), *Équations différentielles,* Masson, Paris.

[20] E. SANCHEZ-PALENCIA (1980), *Non Homogenous Media and Vibration Theory,* Lectures Notes in Physics, n° 127, Springer-Verlag.

[21] P. SUQUET (1982), *Plasticité et homogénéisation,* Thèse d'État, Université de Paris VI.

[22] E. WESFRIED (1982), *Étude de comportement asymptotique pour quelques modèles de viscoplasticité,* Thèse de 3e cycle, Paris.

[23] J. ZARKA, J. CASIER (1979), *Elastic-plastic Response of Structure to Cyclic Loading,* dans Practical Rule Mechanics Today, 6, S. Nemat-Nasser éd., Pergamon Press.