M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique

G. Gagneux
A.-M. Lefevere
M. Madaune-Tort

Modélisation d'écoulements polyphasiques en milieu poreux par un système de problèmes unilatéraux

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 22, nº 3 (1988), p. 389-415

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1988__22_3_389_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol 22, n° 3, 1988, p 389 a 415)

MODÉLISATION D'ÉCOULEMENTS POLYPHASIQUES EN MILIEU POREUX PAR UN SYSTÈME DE PROBLÈMES UNILATÉRAUX (*)

par G. GAGNEUX [1], A.-M. LEFEVERE [1] et M. MADAUNE-TORT [1]

Résumé. — *Ce papier décrit une modélisation originale pour un probleme black-oil pseudo-compositionnel compressible Le traitement des équations de conservation de masse des différents constituants conduit a un système fortement couplé, comportant une équation en pression changeant de type suivant l'évolution de la phase gazeuse, une équation parabolique quasi-linéaire degenerée et deux inequations hyperboliques du premier ordre Une formulation variationnelle est présentee pour un modele numérique correspondant a une semi-discrétisation en temps On donne un résultat d'existence et on étudie la stabilité numérique du schéma*

Abstract — *We give hereunder an original modelization for a pseudo-compositional compressible black-oil model The handling of the component conservation equations leads to a strongly coupled system including a pressure equation, locally elliptic or parabolic according to the evolution of the gas phase, a parabolic quasilinear degenerated equation and two variational first-order hyperbolic inequalities A variational formulation is introduced for a time-stepping numerical model An existence theorem is proved and the numerical stability of the scheme is studied*

INTRODUCTION

Cet article se veut une contribution à l'étude analytique des écoulements triphasiques compressibles isothermes en milieu poreux, dont l'intérêt apparaît lors de la simulation numérique des procédés d'exploitation secondaire ou assistée des gisements en ingénierie pétrolière. Le lecteur averti de la grande complexité mathématique des équations aux dérivées partielles fortement couplées bien connues qui régissent ces phénomènes (lois de conservation de masse de chacun des constituants présents a priori

(*) Reçu en septembre 1987, révisé en décembre 1987

[1] Laboratoire de Mathematiques Appliquées, U A — CNRS n° 1204, Département de Mathématiques, Université de Pau, Avenue de l'Université, 64000 Pau

dans plusieurs phases et loi de Darcy-Muskat) ne s'étonnera pas de devoir relativiser la portée de cette étude en la considérant comme une étape vers une meilleure connaissance du phénomène physique, en dehors de toute prétention à l'exhaustivité.

On sait que lors de la première phase de l'exploitation d'un gisement, l'écoulement du pétrole brut vers la surface est dû à l'énergie emmagasinée dans les gaz sous pression ou dans le système hydraulique naturel. Pour pallier le déclin de production lié à la décompression du gisement et bien avant l'épuisement normal du gisement, on procède à des injection d'eau (water-flooding, en anglais) dans la formation productive : l'eau, injectée par des pompes à hautes pressions en utilisant des puits spécialement forés à cette intention, permet ainsi le déplacement du pétrole brut vers des puits de production judicieusement répartis ; il n'est pas douteux que le choix des sites d'implantation des puits de production donne lieu à un problème de contrôle optimal d'une grande difficulté. On se limite dans cette étude à la modélisation des procédés de récupération secondaire qui n'apportent pas de modifications majeures des caractéristiques physico-chimiques des fluides présents, en excluant les procédés thermiques, chimiques et les méthodes avec fluides miscibles ; le but des techniques d'injection d'eau est donc de maintenir la pression du réservoir lorsque l'énergie d'expansion des fluides et de la roche devient insuffisante pour assurer un débit de production satisfaisant.

Pour cela, on se réfère au modèle black-oil standard, qui présente l'intérêt pratique d'être un outil industriel et dont le but est de permettre la simulation d'un écoulement forcé tridimensionnel triphasique compressible dans un gisement hétérogène très faiblement compressible, en prenant en compte la libération et la dissolution de gaz dans l'huile.

Pour l'essentiel, on adopte dans cette étude la représentation « pseudo-compositionnelle » du phénomène décrit par L. Quettier, R. Eymard et B. Corre [8], G. Ciligot-Travain [3], G. Chavent et J. Jaffre [2] : le milieu poreux contient trois constituants, et l'on suppose que, la température restant constante dans le temps et l'espace :

— le constituant eau n'est présent que dans la phase eau,
— le pseudo-constituant lourd de l'huile est uniquement présent dans la phase huile, la vaporisation d'huile dans le gaz étant négligée dans le modèle black-oil,
— le pseudo-constituant léger de l'huile, volatil, peut passer sous l'effet de la pression en phase gazeuse, supposée ne contenir que ce gaz : dans ce type de modèle, on ne prend pas en compte la présence éventuelle de vapeur d'eau.

Dans une telle représentation, il n'y a pas identité entre phases et constituants, la phase huile contenant a priori du gaz dissous et de l'huile.

Dès lors, la règle des phases, due à Gibbs, qui fixe la variance V d'un système en équilibre thermodynamique (i.e. le nombre de variables thermodynamiques — pression, température, concentration des différents constituants dans chaque phase — que l'on peut choisir indépendamment) par l'expression $V = C + 2 - \varphi$, où C est le nombre de constituants indépendants et φ le nombre de phases, indique qu'à un instant donné, dans une région où les trois phases sont effectivement présentes, la connaissance de la pression (puisque la température est constante) détermine l'état du système : les inconnues retenues sont alors S_g, S_w, saturations réduites des phases gazeuse et aqueuse et P, la pression de la phase huile ; lorsque, temporairement et localement, la phase gaz disparaît, un nouveau paramètre doit être introduit, en l'occurrence X_0^h, la fraction molaire du pseudo-constituant lourd dans la phase huile, ce qui permet de connaître la composition de cette même phase.

La loi de Gibbs introduit donc a priori un problème à frontière libre, qui tient compte de l'apparition, la non-apparition et la disparition de la phase gazeuse, et donne lieu à une modélisation multi-phase, avec des équations dont l'expression dépend à chaque instant, en chaque point du gisement, de l'état du système.

Cependant, il est apparu que l'introduction d'un modèle à frontière libre conduit rapidement à des développements mathématiques purement formels, car l'appréciation du degré de régularité des frontières libres – en pratique, les frontières de la phase gazeuse — semble hors d'atteinte. Aussi, suivant une idée due à T. Gallouët (correspondance particulière), on a pris, dans ce travail, le parti de considérer qu'il y a toujours quatre inconnues : P, S_w, S_g et X_0^h, liées par des contraintes unilatérales du type quasi-variationnel couplé :

$$(P_1) \quad \begin{cases} S_g \geqslant 0\,, \quad X_0^h \geqslant C(P) \\ S_g(X_0^h - C(P)) = 0\,, \end{cases}$$

où C est une constante thermodynamique d'équilibre tabulée par l'utilisateur, de sorte qu'en présence de la phase gazeuse (i.e. lorsque S_g est strictement positive), X_0^h est connu par la connaissance de la pression, à l'équilibre, et détermine ainsi la composition de la phase huile ; lorsque la phase gaz disparaît, à la pression P, X_0^h devient une inconnue, astreinte à rester au-delà de la valeur d'équilibre $C(P)$.

On montre alors en prenant en compte des conditions de bord réalistes que le problème se traduit à l'aide d'un système fortement couplé, mettant en jeu :

— une équation parabolique quasi-linéaire dégénérée avec termes de transport et de gravité non linéaires, pour la détermination de S_w,

— une équation hyperbolique du permier ordre non linéaire pour l'obtention de S_g,
— une inéquation hyperbolique du premier ordre non linéaire pour l'obtention de X_0^h,
— une équation changeant de type, elliptique-parabolique pour le calcul de la pression.

Cette étude détaille l'élaboration d'une modélisation du phénomène physique dans le cadre des méthodes d'équations et d'inéquations variationnelles au sens de G. Duvaut-J. L. Lions [9] et de l'approche des problèmes hyperboliques du premier ordre par F. Mignot-J. P. Puel [14], en semi-discrétisant par rapport au temps les équations de conservation de masse, i.e. en adoptant une démarche proche de celle de l'utilisateur. On établit un résultat d'existence par la méthode des viscosités artificielles, dans une représentation type « prédicteur-correcteur » en pression, implicite en les saturations inconnues, en prenant soin de montrer que les solutions obtenues prennent effectivement leurs valeurs dans leurs domaines respectifs naturels de variation. En outre, on montre la stabilité numérique du procédé, en donnant des estimations a priori des solutions approchées, qui assurent leur convergence, pour des topologies convenables, lorsque le pas de temps devient petit.

Le dernier paragraphe développe une réflexion sur le choix de l'inconnue en pression et sur les modifications de la nature mathématique des équations qui en découlent.

1. MODÉLISATION DU PHÉNOMÈNE PHYSIQUE

1.1. Les données physiques du problème

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, figurant la roche-réservoir de frontière Γ régulière, de vecteur normal extérieur $\mathbf{n}$, $[0, T]$ l'intervalle du temps d'étude du phénomène physique et soit $Q = \Omega \times]0, T[$. On considère le partitionnement de Γ en les trois régions ouvertes disjointes Γ_e, Γ_s, Γ_L telles que :

$$\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_s \cup \Gamma_L \cup \partial\Gamma_L \, , \, \bar{\Gamma}_s \cap \bar{\Gamma}_e = \varnothing \, ,$$

où l'on note :

Γ_e la partie de la frontière, de $d\Gamma$-mesure strictement positive, par laquelle l'eau est injectée, à travers les puits d'injection ou les zones de contact avec la nappe aquifère ; la quantité d'eau injectée est mesurée par l'intermédiaire de la fonction f (vitesse de filtration), supposée stationnaire, en pratique estimée ou identifiée selon des modèles particuliers par l'utilisateur. On étudiera le phénomène dans le cadre des techniques de récupération assistée en régime forcé, c'est-à-dire que le débit d'eau injectée à travers Γ_e est supposé strictement positif, avec plus précisément :

$$(1) \qquad f \in L^2(\Gamma_e)\ ,\ f \geqslant 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_e\ ,\ \int_{\Gamma_e} f\, d\Gamma > 0\ .$$

Dans la pratique, Γ_e se présente comme la réunion finie d'ouverts $\Gamma_{e,k}$, $\Gamma_{e,k}$ figurant une région de Γ en contact avec l'aquifère ou siège d'un puits d'injection.

Γ_L est la partie imperméable de la frontière, délimitée par les courbes $\partial\Gamma_L$.

Γ_s est la partie de la frontière, de $d\Gamma$-mesure non nulle, sousmise à une pression extérieure P_{ext}, où est récupérée l'huile ; Γ_s se présente comme réunion finie d'ouverts $\Gamma_{s,j}$, $\Gamma_{s,j}$ étant la région de Γ où est implanté le j-ième puits de production.

On note ϕ la porosité de la roche, supposée hétérogène très faiblement compressible ; dès lors, on adopte une loi de comportement en fonction de la pression P du type :

$$\phi(x, P) = \phi_0(x)[1 + c_r(P - P_0)]\ , \quad \forall x \in \Omega\ , \forall P \text{ admissible}\ ,$$

où c_r est le coefficient de compressibilité de la roche, supposé constant et ϕ_0 est la porosité à la pression de référence P_0.

On suppose que :

$$(2) \qquad \begin{cases} \exists\, \alpha > 0\ ,\ 0 < \alpha \leqslant \phi(x, P) < 1\ , & \forall x \in \Omega\ , \quad \forall P \text{ admissible} \\ c_r(P - P_0) \ll 1\ , \quad \forall P \text{ admissible}\ . \end{cases}$$

La matrice de diffusivité, notée $\underline{\underline{k}}(x)$, est prise symétrique, uniformément définie positive, pour généraliser les résultats obtenus à un milieu poreux sans homogénéité particulière.

1.2. Les équations de conservation

Désignant par S_p la saturation réduite de la phase p, p prenant les valeurs w, o, g pour représenter les phases eau, huile et gaz, on écrit la conservation de masse pour chacun des constituants c, $c = w, h, \ell$ (eau, pseudo-constituants lourd et léger), i.e. :

$$(\text{E1}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sum\limits_p \phi S_p\, \rho_p\, \omega_p^c\right) + \operatorname{div}\left(\sum\limits_p \rho_p\, \omega_p^c\, \mathbf{Q}_p\right) = 0\ , \\ \sum\limits_p S_p = S_w + S_o + S_g = 1 \ \text{ dans } Q\ , \end{cases}$$

où l'on a noté, pour la phase p, ρ_p la masse volumique, $\mathbf{Q}_p$ le vecteur-vitesse de filtration et ω_p^c la fraction massique du constituant c.

Le vecteur $\mathbf{Q}_p$ est donné par la loi de Darcy-Muskat, en fonction de la pression $\mathscr{P}$, selon la formule :

$$\text{(E2)} \qquad \mathbf{Q}_p = - \underline{\underline{k}}(x) \frac{k_{r_p}}{\mu_p} (\nabla(\mathscr{P} - P_{c_p}) - \rho_p \mathbf{g}) ,$$

où l'on désigne, en la phase p, par k_{r_p} la perméabilité relative, μ_p la viscosité dynamique, P_{c_p} la pression capillaire entre l'huile et la phase p, et où $\mathbf{g}$ représente le vecteur accélération de la pesanteur.

Notant X_p^c la fraction molaire du constituant c dans la phase p, on dispose en outre des relations d'équilibre et des contraintes suivantes, dans le cadre strictement triphasique, i.e. en la présence effective des trois phases :

$$\text{(E3)} \qquad \begin{cases} X_g^w = 0 \,, \quad X_o^w = 0 \,, \quad X_w^w = 1 \\ X_g^h = 0 \,, \quad X_w^h = 0 \,, \quad X_o^h + X_o^\ell = 1 \,, \quad X_g^\ell = 1 \,. \\ 1 = K^\ell(P)\, X_o^\ell \,, \quad X_w^\ell = 0 \,. \end{cases}$$

où la constante d'équilibre K^ℓ est tabulée en fonction de la pression P à température donnée, par l'utilisateur (*cf.* [8] par exemple).

K^ℓ vérifie la condition : $\exists \beta > 0,\ K^\ell(P) \geqslant \beta > 1,\ \forall P$.

De plus, on dispose de la relation suivante entre les fractions massiques et molaires :

$$\text{(E4)} \qquad \omega_p^c = \frac{X_p^c\, M^c}{\sum_{c'} X_p^{c'}\, M^{c'}} \,, \quad \text{avec} \quad c' = w, h, \ell \,.$$

1.3. Les hypothèses simplificatrices

On convient de choisir, pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, comme inconnues principales S_w, S_g, X_o^h et $P = \mathscr{P} - P_{c_o}$, la pression de la phase huile, ces valeurs étant supposées connues à l'instant initial. En vue de simplifier l'écriture des équations, on introduit :

$d_p = \dfrac{\rho_p}{\mu_p}$ l'inverse de la viscosité cinématique de la phase p,

$d = k_{r_w} d_w + k_{r_o} d_o + k_{r_g} d_g$ la mobilité massique globale,

$\nu_p = k_{r_p} \dfrac{d_p}{d}$, la fraction de flux de la phase p, dont les propriétés fonctionnelles essentielles sont les suivantes :

$$
\text{(H1)} \quad \begin{cases} \nu_p = \nu_p(X_o^h, S_w, S_g, P), \; d = d(X_o^h, S_w, S_g, P)\,, \\ \exists \delta > 0\,,\; d(X_o^h, S_w, S_g, P) \geqslant \delta\,,\; \forall (X_o^h, S_w, S_g, P) \text{ admissible}\,, \\ 0 \leqslant \nu_p \leqslant 1\,,\; \nu_g + \nu_w + \nu_o \equiv 1\,, \\ \nu_p \text{ s'annule lorsque } S_p \text{ est nul, } \nu_p \text{ vaut 1 lorsque } S_p \\ \quad \text{est maximal, } \forall p \in \{w, o, g\}\,. \end{cases}
$$

Il est important de noter pour la suite que les fonctions $[d\nu_w]$ et $[d\nu_g]$ sont indépendantes de X_o^h ; il n'en est pas de même pour la fonction $[d\nu_o]$.

On suppose que chacune des fonctions rencontrées, ν_p, d_p, d, etc... est continue sur son domaine de définition naturel, en observant que le couple (S_w, S_g) est assujetti à appartenir au triangle $\mathcal{T}$, défini par :

$$
\mathcal{T} = \left\{ (S_w, S_g) \in \mathbb{R}^2\,,\; S_w \geqslant 0\,,\; S_g \geqslant 0\,,\; S_g + S_w \leqslant 1 \right\}\,.
$$

On suppose, conformément à l'usage [1], [3], pour éviter d'inutiles complications, que les fonctions de pression capillaire sont telles que :

$$
\text{(H2)} \quad \begin{cases} P_{c_o} - P_{c_w} = P_w(S_w)\,, \text{ indépendamment de } x \text{ et de } S_g\,, \\ P_{c_o} - P_{c_g} = P_g(S_g)\,, \text{ indépendamment de } x \text{ et de } S_w\,, \end{cases}
$$

avec :

$$
\text{(H3)} \quad \begin{cases} P_w(1) = 0\,, \quad P_w'(S_w) > 0\,, \quad \forall S_w \in [0, 1]\,, \\ P_g(0) = 0\,, \quad P_g'(S_g) > 0\,, \quad \forall S_g \in [0, 1]\,, \end{cases}
$$

ce qui implique en particulier que l'on a :

$$
P_w(S_w) \leqslant 0\,, \quad \forall S_w \in [0, 1]\,, \quad P_g(S_g) \geqslant 0\,, \quad \forall S_g \in [0, 1]\,.
$$

En outre, on suppose que la fonction positive $d\nu_w P_w'$ est bornée, ce qui semble conforme à l'allure des graphes représentés dans [2], p. 230.

On prendra pour simplifier l'écriture, la matrice de diffusivité $\underline{\underline{k}}$ égale à la matrice identité d'ordre 3 (cas d'un milieu isotrope en particulier), ce qui, au regard des méthodes utilisées, ne constituera pas une restriction à la généralité du problème. Il en est de même pour la porosité ϕ que l'on choisira constante (le lecteur pourra se reporter à [15] pour l'étude du cas général).

Enfin, on admet que les masses volumiques satisfont aux propriétés suivantes :

ρ_w est constante, soit $\rho_w = 1$ pour un choix convenable des unités,
ρ_g suit une loi de type Mariotte, i.e. $\rho_g(\mathcal{P}) = c\mathcal{P}$,
ρ_o est une fonction croissante de X_o^h [8].

On notera que cet article ne se réfère pas à un système particulier de données des perméabilités relatives triphasiques (formulaires de Stone, surfaces réglées, condition de différentiabilité totale énoncée par G. Chavent [2], [11] etc...) mais repose sur l'acceptation d'un certain nombre d'hypothèses sur leurs propriétés fonctionnelles.

1.4. Choix des équations à l'intérieur du gisement

Dans l'ouvert Ω, à t fixé, on retient d'abord l'équation de conservation de masse pour l'eau, qui s'exprime par :

$$\frac{\partial}{\partial t} S_w + \operatorname{div} \mathbf{Q}_w = 0 \quad \text{dans} \quad Q ,$$

c'est-à-dire, grâce à (E2), par :

$$\text{(E5)} \ \frac{\partial}{\partial t} S_w - \operatorname{div} \left\{ [d\nu_w](S_w, S_g, P)[\nabla P + P'_w(S_w) \nabla S_w - \mathbf{g}] \right\} = 0 \text{ dans } Q ;$$

(E5) est une équation parabolique dégénérée pour l'inconnue S_w. On considère ensuite l'équation de conservation de la masse globale des trois constituants exprimée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} (S_w + \rho_o S_o + \rho_g S_g) + \operatorname{div} (\mathbf{Q}_w + \rho_o \mathbf{Q}_o + \rho_g \mathbf{Q}_g) = 0 \text{ dans } Q$$

c'est-à-dire grâce à (E2) et (H1) par :

$$\begin{aligned} \text{(E6)} \quad & \frac{\partial}{\partial t} (S_w + \rho_o(X_o^h) S_o + \rho_g(P) S_g) - \operatorname{div} [d(X_o^h, S_w, S_g, P) \nabla P] \\ & - \operatorname{div} \left\{ [d\nu_w](S_w, S_g, P) P'_w(S_w) \nabla S_w + [d\nu_g](S_w, S_g, P) P'_g(S_g) \nabla S_g \right. \\ & \left. - [d\rho](X_o^h, S_w, S_g, P) \mathbf{g} \right\} = 0 , \text{ dans } Q , \end{aligned}$$

où $\rho = \sum_p \nu_p \rho_p$.

(E6) est une équation changeant de type, elliptique-parabolique pour l'inconnue P.

Ce choix particulier s'explique par le fait que ces deux équations sont indépendantes de l'expression des fractions massiques et qu'elles sont adaptées à l'expression de certaines conditions aux limites imposées par l'utilisateur.

Pour l'expression d'une troisième relation entre S_w, S_g, P, indépendamment de X_o^h, on est amené à introduire formellement

$$\begin{aligned} \Omega^+(t) &= \{x \in \Omega , \quad S_g(t, x) > 0\} , \\ \Omega^0(t) &= \{x \in \Omega , \quad S_g(t, x) = 0\} , \end{aligned}$$

régions a priori inconnues qui correspondent, à l'instant t, aux cas de l'huile saturée et sous-saturée, i.e. à la présence effective ou à l'absence de gaz libre.

Dans $\Omega^+(t)$, on traduit l'équation de conservation de masse pour l'huile ; cette équation dépend de la fraction molaire du pseudo-constituant lourd de la phase huile X_o^h qui est uniquement déterminée par la connaissance de la pression, puisque la température est supposée constante (loi de Gibbs). Cette équation se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1 - S_w - S_g)\rho_o \omega_o^h] + \operatorname{div}(\rho_o \omega_o^h \mathbf{Q}_o) = 0 \text{ dans } \Omega^+(t) \times]0, T[,$$

où ω_o^h est donné par (E4) et où X_o^h est donné d'après (E3) par la relation :

$$X_o^h = C(P) = 1 - \frac{1}{K^\ell(P)} .$$

En utilisant (E2), il vient :

$$\text{(E7)} \quad \frac{\partial}{\partial t}[[\rho_o \omega_o^h](C(P))(S_w + S_g - 1)] + \\ + \operatorname{div}\{[dv_o](C(P), S_w, S_g, P)\,\omega_o^h(C(P))[\nabla P - \rho_o(C(P))\,\mathbf{g}]\} = 0 \\ \text{dans} \quad \Omega^+(t) \times]0, T[;$$

(E7) est donc une équation hyperbolique non linéaire du 1^er^ ordre pour l'inconnue S_g.

Dans $\Omega^0(t)$, par définition, est imposée la condition :

$$S_g = 0 ,$$

outre les équations de continuité à l'interface de $\Omega^+(t)$ et $\Omega^0(t)$ pour S_g et ses dérivées partielles premières.

Enfin, adaptant une idée de T. Gallouët (Université de Chambéry), on établit l'équation que doit vérifier l'inconnue X_o^h en transcrivant l'équation de conservation de masse du pseudo-constituant lourd *sur Ω tout entier,* i.e.

$$\text{(E8)} \quad \frac{\partial}{\partial t}[S_o\,\rho_o(X_o^h)\,\omega_o^h(X_o^h)] + \operatorname{div}(\rho_o(X_o^h)\,\omega_o^h(X_o^h)\,\mathbf{Q}_o) = 0 \quad \text{dans} \quad Q ,$$

en imposant en outre la contrainte,

$$\text{(E9)} \qquad X_o^h \geq C(P) \quad \text{dans} \quad Q .$$

Remarquant que la fonction

$$X_o^h \to [\rho_o \omega_o^h](X_o^h) = \rho_o(X_o^h)\,\omega_o^h(X_o^h) ,$$

définie sur $[0, 1]$ est *strictement* croissante, nulle en zéro, on est amené, pour simplifier l'étude, à introduire la fonction auxiliaire inconnue :

$$C_o^h = S_o \cdot [\rho_o \, \omega_o^h](X_o^h) .$$

C_o^h vérifie, d'après (E8), l'égalité :

$$\text{(E10)} \quad \frac{\partial}{\partial t} C_o^h - \operatorname{div} \left\{ K_{r_o}(S_w, S_g, P) \frac{C_o^h}{\mu_o(X_o^h)} [\nabla P - \rho_o(X_o^h) \, \mathbf{g}] \right\} = 0 \text{ dans } Q ,$$

où

$$\text{(3)} \begin{cases} K_{r_o}(S_w, S_g, P) = \dfrac{1}{1 - S_w - S_g} k_{r_o}(S_w, S_g, P) \text{ si } 1 - S_w - S_g \neq 0 \\ K_{r_o}(S_w, S_g, P) = - \dfrac{\partial k_{r_o}}{\partial S_p}(S_w, S_g, P) \, , p \in \{w, g\} \, , \text{ si } 1 - S_w - S_g = 0 \, . \end{cases}$$

La définition de K_{r_o} suppose une propriété de régularité de k_{r_o} le long de la droite $S_w + S_g = 1$ qui est satisfaite lors des différents choix de données de perméabilités relatives triphasiques utilisées en pratique ([2], [3], [11]).

L'équation (E10) est une équation hyperbolique du premier ordre pour l'inconnue C_o^h.

De plus C_o^h est assujettie à vérifier la contrainte d'obstacle, d'après (E9),

$$\text{(E11)} \qquad C_o^h \geq S_o \cdot [\rho_o \, \omega_o^h](C(P)) \, , \quad \text{dans} \quad Q \, .$$

Dès lors, la connaissance de C_o^h implique sans ambiguïté la connaissance de X_o^h, selon la formule :

$$\text{(E12)} \qquad X_o^h = [\rho_o \, \omega_o^h]^{-1} \left(\frac{C_o^h}{S_o} \right) ,$$

lorsque S_o est strictement positif, la détermination de X_o^h étant à l'évidence sans objet lorsque S_o est nul !

1.5. Les conditions de bord

Elles dépendent essentiellement de la nature de la portion de frontière considérée :

— sur les puits de production Γ_s, on admet, suivant G. Duvaut-J. L. Lions [9] que le débit global massique est à la fois proportionnel à la mobilité globale massique et à la différence locale de pression, de sorte que désignant par $\lambda(x)$ le coefficient adimensionné de perméabilité au point x

de Γ_s, considérée comme une paroi d'épaisseur finie, au sens de [9], on dispose de la relation :

(E13) $(\rho_w \mathbf{Q}_w + \rho_o \mathbf{Q}_o + \rho_g \mathbf{Q}_g) \cdot \mathbf{n} = \lambda\, dP$ sur $\Sigma_s = \Gamma_s \times]0, T[$,

avec :

$$\lambda \in L^\infty(\Gamma_s)\,,\ \lambda \geqslant 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_s\,,\ \text{mes}\ \{x \in \Gamma_s\,,\ \lambda(x) > 0\} > 0\,.$$

(On admet ici que la pression extérieure est constante et on se ramène au cas où cette constante est nulle par translation sur l'échelle des pressions. On remarquera que ρ_g devient une fonction affine de la nouvelle pression. Le modèle proposé est compatible avec un choix de pression extérieure localement constante sur chaque puits).

En outre, on suppose que les débits massiques partiels s'établissent au prorata des mobilités massiques respectives, ce qui se traduit par les relations :

$$\frac{\rho_w \mathbf{Q}_w \cdot \mathbf{n}}{d\nu_w} = \frac{\rho_g \mathbf{Q}_g \cdot \mathbf{n}}{d\nu_g} = \frac{\rho_o \mathbf{Q}_o \cdot \mathbf{n}}{d\nu_o} \quad \text{sur} \quad \Sigma_s\,.$$

La valeur commune de ces quotients étant égale à :

$$\frac{1}{d}\,(\rho_w \mathbf{Q}_w + \rho_g \mathbf{Q}_g + \rho_o \mathbf{Q}_o) \cdot \mathbf{n}\,,$$

ce qui, compte tenu de (E13), conduit aux relations simples suivantes :

(E14) $$\rho_p \mathbf{Q}_p \cdot \mathbf{n} = \lambda\, d\nu_p\, P \quad \text{sur} \quad \Sigma_s\,, \quad p = w, o, g\,.$$

— sur les puits d'injection et les zones de contact avec l'aquifère, on traduit la continuité de la vitesse de filtration globale et le fait que ces régions sont le siège d'une phase mouillante par les relations :

(E15) $$\begin{cases} S_w = 1\,,\ S_g = 0\,, \\ \left(\sum_p \rho_p \mathbf{Q}_p\right) \cdot \mathbf{n} = -f\,,\ \text{sur}\ \Sigma_e = \Gamma_e \times]0, T[\,, \end{cases}$$

où f est défini en (1).

— l'imperméabilité de Γ_L s'exprime immédiatement par les conditions de Neumann homogènes :

(E16) $$\rho_p \mathbf{Q}_p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_L = \Gamma_L \times]0, T[\,,\ p = w, o, g\,,$$

ce qui apparaît comme un cas particulier de l'équation (E14), l'imperméabilité de la roche se traduisant par la nullité de la fonction scalaire λ.

2. LE PROBLÈME SEMI-DISCRÉTISÉ PAR RAPPORT AU TEMPS

Les développements qui précèdent montrent évidemment que les problèmes formulés dans la théorie du modèle black-oil présentent une complexité telle qu'il est hors de question de pouvoir en trouver une solution mathématique explicitement calculable. En effet les fonctions inconnues S_w, S_g, P, C_o^h doivent vérifier un système fortement couplé d'équations aux dérivées partielles non linéaires données par (E5), (E6), (E7), (E10) et satisfaire à des contraintes dont l'une sur C_o^h dépend de la fonction inconnue P((E11)). En conséquence, l'étude d'une formulation continue semble très délicate, compte tenu du caractère hyperbolique non linéaire du premier ordre de l'équation (E7) par rapport à l'inconnue S_g et de l'équation (E10) par rapport à l'inconnue C_o^h (liée à X_o^h par la relation (E12)). Aussi, comme les équations (E1) données au paragraphe 1.2 tirent leur origine de l'écriture de la conservation de masse des différents constituants sur des intervalles de temps de longueur fixée h que l'on fait ensuite tendre vers 0, on convient de semi-discrétiser le problème par rapport au temps en remplaçant les dérivées partielles par rapport au temps par un quotient différentiel. De plus, pour pallier les difficultés mises en évidence ci-dessus, on régularise l'équation dégénérée relative à (E5) et l'inéquation hyperbolique relative à (E7) par l'ajout d'un terme de viscosité artificielle, arbitrairement petit, et on linéarise l'inéquation relative à (E10) afin de pouvoir appliquer pour la détermination de C_o^h (donc de X_o^h) les résultats de F. Mignot et J. P. Puel [14].

2.1. Formulation variationnelle du problème semi-discrétisé

On introduit l'espace de Hilbert V,

$$V = \{v \in H^1(\Omega)\,;\quad v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_e\}\ ,$$

muni, grâce à l'inégalité de Poincaré du produit scalaire :

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla v \; dx\ ,$$

la dérivation étant prise au sens des distributions.

Identifiant $H = L^2(\Omega)$ à son dual, on peut identifier V', le dual de V, à un sur-espace de H, avec $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, l'injection de V dans H étant continue, à image dense.

On considère :

$$K^+ = \{v \in V \; ; \; v \geqslant 0 \text{ p.p. dans } \Omega\} ,$$

cône convexe fermé de V, de sommet l'origine, et :

$$K_1 = \{v \in H^1(\Omega) \; ; \; v = 1 \text{ sur } \Gamma_e\} ,$$

convexe fermé non vide de $H^1(\Omega)$.

On note $\| \;\; \|$ (resp. $| \;\; |$) la norme dans V (resp. dans H), et $(\; , \;)$ le produit scalaire dans H, ainsi que la dualité V', V, ce qui est loisible, compte tenu des identifications précédentes.

Pour tout système $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ de fonctions de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$, en notant ℓ la fonction définie sur Γ par $\ell(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i(x)\, n_i(x)$. On introduit avec les notations de C. Bardos [13] et F. Mignot-J. P. Puel [14] les espaces :

$$W(A) = \{u \in L^2(\Omega) \; ; Au \in L^2(\Omega)\} \quad \text{où} \quad Au = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

muni de la norme :

$$\|u\|^2_{W(A)} = |u|^2 + |Au|^2 ,$$

et

$$\tilde{W}(A) = \{u \in W(A) \; ; u|_\Gamma \in L^2_\ell(\Gamma)\}$$

où

$$L^2_\ell(\Gamma) = \left\{u : \Gamma \to \mathbb{R} \; ; \int_\Gamma |\ell(x)|\, |u(x)|^2 \, d\tau < +\infty\right\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|^2_{\tilde{W}(A)} = \|u\|^2_{W(A)} + \int_\Gamma |\ell(x)|\, |u(x)|^2 \, d\Gamma .$$

On considère un pas de temps h strictement positif et on recherche une suite de 4-uplets (S^k_w, S^k_g, P^k, C^k) appelés à approcher le 4-uplet (S_w, S_g, P, C^h_o) à l'instant $t_k = kh$, $k \in \mathbb{N}^*$, en utilisant un schéma de type prédicteur-correcteur en pression. Avant de présenter ce schéma, on adopte afin d'alléger l'écriture des équations, les conventions suivantes relatives aux fonctions d, ν_p, ρ_p, μ_p, etc...

pour tout entier k on note $X^k = (X^h_o)^k$ et on désigne par :

$$d_k(x) = d(X^k, S^k_w, S^k_g, P^k) , \; d_k(x, P^{k+1}) = d(X^k, S^k_w, S^k_g, P^{k+1}) ,$$

$$d_k(x, S^{k+1}_g, P^{k+1}) = d(X^k, S^k_w, S^{k+1}_g, p^{k+1})$$

et ainsi de suite et on note $\tilde{d}_k$, etc..., un interpolant de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ de d_k, etc...

Soit alors ε un réel strictement positif.

On construit la suite de 4-uplets (S_w^k, S_g^k, P^k, C^k) selon le schéma ci-dessous :

Étant données les conditions initiales $(S_w)_o$, $(S_g)_o$, P_o, $(C_o^h)_o$ avec $((S_w)_o, (S_g)_o, P_o, (C_o^h)_o) \in [L^2(\Omega)]^4$ et $((S_w)_o, (S_g)_o) \in \mathcal{C}$, on pose :

$$S_w^0 = (S_w)_o\ ,\ S_g^0 = (S_g)_o\ ,\ P^0 = P_o\ ,\ C^0 = (C_o^h)_o \tag{E17}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on détermine le prédicteur en pression $P^{k+\frac{1}{2}}$, puis le 4-uplet $(S_w^{k+1}, S_g^{k+1}, P^{k+1}, C^{k+1})$ par le système :

$\underline{P^{k+1/2} \in H^1(\Omega) \text{ et vérifie :}}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_\Omega [\rho_g(P^{k+1/2}) - \rho_g(P^k)]\, S_g^k v\, dx\, + \\ + \int_\Omega d_k(x, P^{k+1/2})\, \nabla P^{k+1/2} \,.\, \nabla v\, dx \\ + \int_{\Gamma_s} \lambda(x)\, d_k(x, P^{k+1/2})\, P^{k+1/2} v\, d\Gamma = \int_{\Gamma_e} fv\, d\Gamma \\ + \int_\Omega [d\rho]_k(x, P^{k+1/2})\, g\, \frac{\partial v}{\partial z}\, dx,\ \forall v \in H^1(\Omega)\end{aligned} \tag{E18}$$

$\underline{(S_w^{k+1}, S_g^{k+1}) \in K_1 \times K^+ \text{ et vérifie :}}$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\int_\Omega (S_w^{k+1} - S_w^k)\, v\, dx\, + \\ &+ \int_\Omega \{[d\nu_w](S_w^{k+1}, S_g^{k+1}, P^{k+1/2})\, P'_w(S_w^{k+1}) + \varepsilon\}\, \nabla S_w^{k+1} \,.\, \nabla v\, dx \\ &+ \int_\Omega d_k(x, P^{k+1/2})\, \nu_w(X^k, S_w^{k+1}, S_g^{k+1}, P^{k+1/2})\, \nabla P^{k+1/2} \,.\, \nabla v\, dx \\ &+ \int_{\Gamma_s} \lambda(x)\, d_k(x, P^{k+1/2})\, \nu_w(X^k, S_w^{k+1}, S_g^{k+1}, P^{k+1/2})\, P^{k+1/2} v\, d\Gamma \\ &= \int_\Omega \frac{[d\rho]_k(x, P^{k+1/2})}{\rho(X^k, S_w^{k+1}, S_g^{k+1}, P^{k+1/2})}\, \nu_w(X^k, S_w^{k+1}, S_g^{k+1}, P^{k+1/2})\, g\, \frac{\partial v}{\partial z}\, dx\, , \\ &\qquad \forall v \in V\ ;\end{aligned} \tag{E19}$$

$$\text{(E20)}\quad \frac{1}{h}\int_\Omega [\rho_o\,\omega_o^h](C(P^{k+1/2}))(S_w^{k+1}+S_g^{k+1}-S_w^k-S_g^k)(v-S_g^{k+1})\,dx +$$

$$+\,\varepsilon\int_\Omega \nabla(S_w^{k+1}+S_g^{k+1})\,\nabla(v-S_g^{k+1})\,dx$$

$$-\int_\Omega \omega_o^h(C(P^{k+1/2}))[dv_o](S_w^{k+1},S_g^{k+1},P^{k+1/2})\,\nabla P^{k+1/2}\,.\,\nabla(v-S_g^{k+1})\,dx$$

$$+\int_\Omega [\rho_o\,\omega_o^h](C(P^{k+1/2}))[dv_o](S_w^{k+1},S_g^{k+1},P^{k+1/2})\,g\,\frac{\partial}{\partial z}(v-S_g^{k+1})\,dx$$

$$\geqslant \int_{\Gamma_s}\lambda(x)\,\omega_o^h(C(P^{k+1/2}))[dv_o](S_w^{k+1},S_g^{k+1},P^{k+1/2})\,P^{k+1/2}(v-S_g^{k+1})\,d\Gamma\,,\quad \forall v\in K^+\,.$$

$C^{k+1}\in\mathscr{K}_{k+1}\cap\tilde W(A_{k+1})$ et vérifie :

$$\text{(E21)}\quad \int_\Omega \frac{1}{h}(C^{k+1}-C^k)(v-C^{k+1})\,dx +$$

$$+\int_\Omega (A_{k+1}C^{k+1}+b_{k+1}C^{k+1})(v-C^{k+1})\,dx\geqslant 0\,,\quad \forall v\in\mathscr{K}_{k+1}$$

où

$$\mathscr{K}_{k+1}=\left\{v\in L^2(\Omega)\,;\ v\geqslant S_o^{k+1}[\rho_o\,\omega_o^h](C(P^{k+1/2}))\ \text{p.p. dans }\Omega\right\}$$

avec

$$S_o^{k+1}=1-S_w^{k+1}-S_g^{k+1}\,,$$

$$A_{k+1}=\sum_{i=1}^{3}\tilde a_i^{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

avec

$$a_i^{k+1}=-\frac{1}{(\mu_o)_k}K_{r_o}(S_w^{k+1},S_g^{k+1},P^{k+1/2})\left[\frac{\partial P^{k+1/2}}{\partial x_i}-(\rho_o)_k\,\delta_{i,3}\,g\right]$$

$$b_{k+1}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde a_i^{k+1})$$

et la condition $C^{k+1}=S_o^{k+1}(\rho_o\,\omega_o^h)(C(P^{k+1/2}))$ sur la partie éventuelle de Γ, de mesure strictement positive où $\sum_{i=1}^{3}\tilde a_i^{k+1}\,.\,n_i<0$.

$P^{k+1} \in H^1(\Omega)$ et vérifie :

(E22)

$$\frac{1}{h}\int_\Omega \Big\{ S_w^{k+1} - S_w^k + \rho_o(X^{k+1})(S_o^{k+1} - S_o^k) + [\rho_o(X^{k+1}) - \rho_o(X^k)]\, S_o^{k+1}$$

$$+ \rho_g\left(P^{k+\frac{1}{2}}\right)(S_g^{k+1} - S_g^k) + [\rho_g(P^{k+1}) - \rho_g(P^k)]\, S_g^{k+1}\Big\}\, v\, dx$$

$$+ \int_\Omega d_{k+1} \nabla P^{k+1} \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega \{[dv_w P'_w]_{k+1} \nabla S_w^{k+1}$$

$$+ [dv_g P'_g]_{k+1} \nabla S_g^{k+1}\} \cdot \nabla v\, dx$$

$$+ \int_{\Gamma_s} \lambda(x)\, d_{k+1} P^{k+1} v\, d\Gamma = \int_{\Gamma_e} fv\, d\Gamma$$

$$+ \int_\Omega [d\rho]_{k+1}\, g\, \frac{\partial v}{\partial z}\, dx\,,\ \forall v \in H^1(\Omega)\,.$$

Remarque : Les équations (E18) à (E22) traduisent la stratégie de calcul suivante : connaissant à l'instant $t_k = kh$ le 4-uplet (S_w^k, S_g^k, P^k, C^k), on détermine dans un premier temps le prédicteur en pression $P^{k+\frac{1}{2}}$ par l'équation (E18) en supposant que durant l'intervalle $[kh, (k+1)h]$, les saturations en eau et en gaz ainsi que la fraction molaire du pseudo-constituant lourd dans la phase huile varient peu, de sorte que l'on calcule la valeur de la mobilité globale en X^k, S_w^k, S_g^k, l'équation étant par ailleurs implicite en pression. Ayant ainsi déterminé $P^{k+\frac{1}{2}}$, S_w^{k+1} et S_g^{k+1} sont donnés par le système couplé d'inéquations (E19) et (E20), puis S_w^{k+1} et S_g^{k+1} étant obtenus, C^{k+1} est donné par l'inéquation hyperbolique (E21). Enfin on corrige la pression en déterminant P^{k+1} par l'équation (E22), où X^{k+1} est défini lorsque $S_o^{k+1} > 0$ par la relation (E12) et vaut, par convention, $C\left(P^{k+\frac{1}{2}}\right)$ lorsque $S_o^{k+1} = 0$.

2.2. Théorème d'existence

On suppose que les interpolants $(\tilde{a}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ des coefficients $(a_i)_{1 \leq i \leq 3}$ introduits dans l'inéquation (E21) sont construits de telle sorte qu'ils satisfassent à la condition :

$$(\mathrm{H}_4) \qquad \exists h_0 > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall h,\ h < h_o,\ -\frac{1}{2} h \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tilde{a}_i^k}{\partial x_i} < 1 \text{ sur } \bar{\Omega}\,.$$

THÉORÈME : *Pour tout* ε *et tout* h, *strictement positifs, il existe une suite* (S_w^k, S_g^k, P^k, C^k), $k \in \mathbb{N}^*$, *vérifiant les conditions initiales* (E17) *et, pour tout entier naturel* k, *le système d'équations* (E18) *à* (E22). *Cette suite est telle que, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$,

$$S_w^k \in K_1, S_g^k \in K^+, P^k \in H^1(\Omega), C^k \in \mathscr{K}_k \cap \tilde{W}(A_k)\,, \tag{4}$$

$$0 \leqslant S_w^k \leqslant 1, 0 \leqslant S_g^k \leqslant 1, 0 \leqslant S_w^k + S_g^k \leqslant 1 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega\,. \tag{5}$$

Démonstration : Il suffit de montrer l'existence du prédicteur en pression $P^{1/2}$ et du 4-uplet (S_w^1, S_g^1, P^1, C^1) obtenus à la première itération à partir de la connaissance des conditions initiales (E17). De même il suffit de vérifier que le 4-uplet (S_w^1, S_g^1, P^1, C^1) possède les propriétés (4) et (5).

L'existence de $P^{1/2}$ et du couple (S_w^1, S_g^1) ainsi que la propriété $(S_w^1, S_g^1) \in \mathcal{T}$ sont une conséquence des résultats obtenus pour le schéma semi-discrétisé étudié par les auteurs dans [15]. En effet le système d'inéquations (E18), (E19), (E20) est analogue à celui considéré dans [15] ; aussi l'utilisation des mêmes méthodes (théorème de point fixe de Schauder, théorème de G. Stampacchia et de Kakutani, Ky-Fan) et des mêmes prolongements des fonctions, d, v_p, etc... en dehors de $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$, nous conduit au résultat. (On remarquera que dans [15], le coefficient de $\nabla P_w(S_w^1)$ dans l'équation analogue à (E19) s'annule lorsque $S_w^1 = 0$ ou $S_w^1 = 1$, alors qu'ici ce coefficient est seulement nul lorsque $S_w^1 = 0$ et est positif ailleurs).

L'unicité du prédicteur en pression est assurée dès lors que les fonctions $d(\,.\,, P)$ et $[d\rho]\,(\,.\,, P)$ dépendent de P de manière lipschitzienne (ce qui paraît raisonnable) et lorsque, pour simplifier un peu l'exposé, la trace de la mobilité globale d le long de Γ_s est calculée à chaque itération explicitement, i.e. dans le cas de l'obtention par exemple du prédicteur $P^{k+1/2}$, on calcule d sur Γ_s en prenant ses valeurs numériques pour le 4-uplet (X^k, S_w^k, S_g^k, P^k).

Il suffit pour cela d'introduire une approximation lipschitzienne croissante adéquate de la fonction sign_0^+, selon le procédé dû à N. S. Trudinger et de calquer la démonstration donnée, par exemple, dans [16] par M. Artola : prenant : $s_\delta(r) = \dfrac{(r-\delta)^+}{r}$, $\delta > 0$, approximation de la fonction d'Heaviside, et posant : $w = P^{k+1/2} - \hat{P}^{k+1/2}$, la différence de deux éventuels prédicteurs, il vient classiquement pour le choix loisible de la fonction-test $v = s_\delta(w)$:

$$\int_\Omega \left|\nabla \operatorname{Log}\left(1 + \frac{(w-\delta)^+}{\delta}\right)\right|^2 dx \leqslant C\,,$$

où C représente une constante indépendante de δ, et

$$\int_{\Gamma_s} \lambda w^+ \, d\Gamma = 0 \, ;$$

cette dernière égalité implique, en faisant jouer des rôles symétriques à $P^{k+1/2}$ et $\hat{P}^{k+1/2}$, que, d'après (E13) :

$w = 0$ p.p. sur une région de Γ_s, d'aire non nulle.

Dès lors, l'inégalité de Poincaré s'applique et il s'ensuit qu'il existe une constante $\tilde{C}$ indépendante de δ, telle que l'on ait :

$$\int_\Omega \left| \operatorname{Log} \left(1 + \frac{(w-\delta)^+}{\delta} \right) \right|^2 \leq \tilde{C} \, , \quad \forall \delta > 0 \, .$$

Faisant tendre δ vers 0_+, on en déduit que :

$$w \leq 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad \Omega \, ,$$

et donc, finalement, $w = 0$ p.p. dans Ω, d'où le résultat annoncé.

Ensuite, l'inéquation (E21) et la condition $C^1 \in \mathscr{K}_1 \cap \tilde{W}(A_1)$ déterminent C^1 de manière unique d'après les résultats de F. Mignot et J. P. Puel [14], puisque l'opérateur $u \mapsto A_1 u + \left(b_1 + \frac{1}{h} \right) u$ satisfait à l'hypothèse de coercivité (H4).

On observera que la construction même des inéquations (E20) et (E21) tient compte à chaque itération, des contraintes thermodynamiques :

$$\begin{cases} S_g^{k+1} \geq 0 \, , \; S_g^{k+1} [X^{k+1} - C(P^{k+1/2})] = 0 \\ X^{k+1} - C(P^{k+1/2}) \geq 0 \, . \end{cases}$$

Enfin la détermination de P^1 dans $H^1(\Omega)$ provient de la résolution du problème elliptique (E22) analogue à (E18). En reprenant les arguments utilisés pour démontrer l'existence et l'unicité de $P^{1/2}$, on établit que le problème (E22) admet une solution P^1 et que de plus, cette solution est unique.

3. ÉTUDE DE LA STABILITÉ DU SCHÉMA SEMI-DISCRÉTISÉ

On étudie dans ce paragraphe la stabilité numérique du schéma semi-discrétisé introduit ci-dessus. Observant que les masses volumiques, les viscosités et les mobilités de chaque phase varient faiblement avec la pression, alors que les perméabilités relatives de chaque phase, k_{r_p}, dépendent fortement des saturations, on s'intéresse principalement au comportement des fonctions inconnues dont l'influence sur l'écoulement est grande, soit, S_w, S_g, C_o^h. Ce faisant, on respecte le point de vue de l'utilisateur qui prend en considération les mêmes observations, par exemple, lors de l'écriture du schéma d'approximation simultané [3]. On corrige alors à chaque itération la pression, de la façon suivante :

on considère un laps de temps h_1 strictement positif, fixé, quelconque à la discrétion de l'utilisateur et on choisit des pas de temps h du type $h = \frac{1}{N} h_1$, $N \in \mathbb{N}^*$; alors pour tout entier naturel : k, $0 \leq k \leq N-1$ on définit le prédicteur en pression, $P^{k+1/2}$, par : $P^{k+1/2} \in H^1(\Omega)$ et vérifie :

$$\frac{1}{h_1} \int_\Omega [\rho_g(P^{k+1/2}) - \rho_g(P^o)]\, S_g^k v\, dx + \int_\Omega d_k(x, P^{k+1/2})\, \nabla P^{k+1/2} \cdot \nabla v\, dx$$
$$+ \int_{\Gamma_s} \lambda(x)\, d_k(x, P^{k+1/2})\, P^{k+1/2} v\, d\Gamma$$
$$= \int_{\Gamma_e} fv\, d\Gamma + \int_\Omega [d\rho]_k(x, P^{k+1/2})\, g \frac{\partial v}{\partial z}\, dx\,, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

et plus généralement en reconduisant le procédé sur tout intervalle $[qh_1, (q+1) h_1]$, $q \in \mathbb{N}^*$, on définira pour $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, $P^{k+1/2}$ par : $P^{k+1/2} \in H^1(\Omega)$ et vérifie :

$$\text{(E23)} \quad \frac{1}{h_1} \int_\Omega [\rho_g(P^{k+1/2}) - \rho_g(P^{qh_1})]\, S_g^k v\, dx +$$
$$+ \int_\Omega d_k(x, P^{k+1/2})\, \nabla P^{k+1/2} \cdot \nabla v\, dx$$
$$+ \int_{\Gamma_s} \lambda(x)\, d_k(x, P^{k+1/2})\, P^{k+1/2} v\, d\Gamma$$
$$= \int_{\Gamma_e} fv\, d\Gamma + \int_\Omega [d\rho]_k(x, P^{k+1/2})\, g \frac{\partial v}{\partial z}\, dx\,, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Puis S_w^{k+1}, S_g^{k+1}, C^{k+1} étant déterminés par (E19), (E20), (E21), on calcule le correcteur en pression P^{k+1} à l'aide de l'équation obtenue à partir de (E22) en considérant les quotients différentiels par rapport au pas de temps h_1, par le même procédé qu'en (E23).

On étudie la stabilité du schéma ainsi construit, lorsque le pas de temps h tend vers 0. On vérifie que ce schéma est encore compatible avec les conditions $(S_w^k, S_g^k) \in \mathcal{C}$, à l'aide des arguments utilisés pour le schéma donné par (E18) à (E20), en remarquant de plus que h est inférieur à h_1.

On introduit les notations suivantes : pour toute suite $(u^k)_{1 \leqslant k \leqslant N-1}$ de fonctions définies sur Ω, on désigne par u_h (resp. σ_h) la fonction définie sur Q par :

$$u_h(x,t) = \sum_{k=0}^{N-1} u^k(x)\, \chi^k(t)$$

(resp. :

$$\begin{cases} \sigma u_h(x,t) = \dfrac{1}{h}\,(u^k(x) - u^{k-1}(x))(t - kh) + u^{k-1}(x) \\ \text{si} \quad t \in [kh, (k+1)\,h]\,, \end{cases}$$

$\chi^k(t)$ étant la fonction caractéristique de l'intervalle $[kh, (k+1)\,h]$.

On dispose ainsi à partir des suites (S_w^k), (S_g^k), (C^k), (P^k), d'une approximation en escalier (resp. affine par morceaux) des fonctions S_w, S_g, C_o^h, P sur l'intervalle de temps $[0, Nh]$. On note $\hat{P}_h$ la fonction définie à partir de la suite $(P^{k+1/2})_{k \in \mathbb{N}}$ par le procédé ci-dessus.

3.1. Premières estimations a priori

THÉORÈME 3.1 : *Lorsque h tend vers 0, les fonctions S_{wh}, S_{gh}, P_h restent dans un borné fixe de $L^2(0,T\,;H^1(\Omega))$, et la fonction $\hat{P}_h$ reste dans un borné fixe de $L^\infty(0,T\,;H^1(\Omega))$.*

Démonstration : On convient de noter B, toute constante positive indépendante de h.

En choisissant $v = P^{k+1/2}$ dans (E23), en remarquant que les fonctions ρ_g, d sont bornées et que la fonction S_g^k varie entre 0 et 1, on établit grâce à la minoration par $\delta > 0$ de la fonction d, l'estimation :

$$\|P^{k+1/2}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant B\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,. \tag{6}$$

On en déduit que la fonction $\hat{P}_h$ reste dans un borné fixe de $L^\infty(0,T\,;H^1(\Omega))$.

On considère ensuite l'équation (E19), où l'on choisit $v = S_w^{k+1} - 1$ ce qui est loisible. En utilisant, de manière classique la relation :

$$2(S_w^{k+1} - S_w^k)(S_w^{k+1} - 1) = (S_w^{k+1} - 1)^2 - (S_w^k - 1)^2 + (S_w^{k+1} - S_w^k)^2\,,$$

la positivité de la fonction $dv_w P'_w$ et l'estimation (6), il vient après multiplication par h puis sommation de 1 à $N-1$ des inégalités ainsi obtenues, la majoration :

$$\sum_{k=1}^{N-1} h\,\|S_w^k\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant B\,. \tag{7}$$

Cette majoration entraîne que S_{wh} demeure dans un borné fixe de $L^2(0, h_1\,; H^1(\Omega))$ lorsque h tend vers 0 et donc, de proche en proche, dans un borné fixe, de $L^2(0, T\,; H^1(\Omega))$.

Puis, comme la fonction $(\rho_o\, \omega_o^h) \circ C$ est une fonction de classe C^1 bornée ainsi que sa dérivée et minorée d'après (E3), par la constante positive $[\rho_o\, \omega_o^h]\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$, il est loisible de prendre

$$v = \frac{1 - S_w^{k+1} - S_g^{k+1}}{[\rho_o\, \omega_o^h](C(P^{k+1/2}))} + S_g^{k+1} \quad \text{dans} \quad (\text{E20})\,.$$

On obtient, de façon analogue à (7), l'estimation :

$$\sum_{k=1}^{N-1} h \|S_g^k\|^2_{H^1(\Omega)} \leq B\,, \tag{8}$$

d'où découle la propriété : S_{gh} demeure dans un borné fixe de $L^2(0, T\,; H^1(\Omega))$, lorsque h tend vers 0.

Enfin, en choisissant $v = P^{k+1}$ dans l'équation satisfaite par P^{k+1}, on obtient, à l'aide des majorations (7), (8), l'estimation

$$\sum_{k=1}^{N-1} h \|P^k\|^2_{H^1(\Omega)} \leq B \tag{9}$$

d'où provient le résultat énoncé sur P_h.

3.2. Amélioration des estimations a priori

On cherche à obtenir maintenant une estimation dans $L^2(Q)$ de la fonction $\frac{\partial}{\partial t}(\sigma S_{wh})$ ce qui nécessite d'établir des propriétés de régularité sur la fonction $P^{k+1/2}$. Ainsi, on considère pour faire cette étude que la mobilité massique globale vérifie l'hypothèse :

$$(\text{H5}) \begin{cases} d(X_o^h, S_w, S_g, P) = g(X_o^h, S_w, S_g)\, \varphi(P)\,, \\ \text{où les fonctions } g \text{ et } \varphi \text{ sont bornées et respectivement} \\ \text{minorées par des constantes strictement positives notées } \gamma_1 \text{ et } \delta_1\,, \end{cases}$$

et on remplace dans l'expression de la fonction $d_k(x, P^{k+1/2}) = g_k(x)\, \varphi(P^{k+1/2})$, g_k par un interpolant de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$, noté suivant nos conventions $\tilde{g}_k$.

Enfin on convient de négliger les termes dus à l'effet de gravité et on suppose que la donnée initiale $(S_w)_o$ est dans $H^1(\Omega)$.

On désigne par Φ, la primitive de φ qui s'annule en 0. Il résulte de l'hypothèse (H5) que Φ est une application bi-lipschitzienne.

LEMME 3.2 : (i) *pour tout entier naturel k,*

$$\Phi(P^{k+1/2}) \in W^{2,q}(\Omega)\,, \quad \textit{pour tout réel} \quad q\,,\ 1 \leqslant q < +\infty\,,$$

(ii) *il existe une constante $B > 0$, indépendante de k, telle que :*

$$\|P^{k+1/2}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leqslant B\,. \tag{10}$$

Démonstration : On pose $W^{k+1/2} = \Phi(P^{k+1/2})$.
$W^{k+1/2}$ est une fonction de $H^1(\Omega)$ qui vérifie l'égalité

$$(11)\ -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{g}_k(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W^{k+1/2}\right) = F \quad \text{au sens de} \quad \mathscr{D}'(\Omega)$$

où $F = \dfrac{1}{h_1}\,[\rho_g(P^{k+1/2}) - \rho_g(P^{qh_1})]\,S_g^k$ est une fonction bornée dans $L^\infty(\Omega)$, indépendamment de k, puisque ρ_g est une fonction bornée et S_g^k varie entre 0 et 1.

De plus $W^{k+1/2}$ satisfait sur Γ aux conditions :

$$-\frac{\partial}{\partial n}W^{k+1/2} = -\frac{f}{\tilde{g}_k} \quad \text{sur} \quad \Gamma_e\,, \quad -\frac{\partial}{\partial n}W^{k+1/2} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L\,,$$

$$-\frac{\partial}{\partial n}W^{k+1/2} = \lambda\tilde{\Phi}(W^{k+1/2}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_s\,,$$

$\tilde{\Phi}$ définie par $\tilde{\Phi}(\Phi(r)) = r\varphi(r)$ étant supposée lipschitzienne.

Si les fonctions f et λ sont choisies de telle sorte que la fonction définie sur Γ par f sur Γ_e, 0 sur Γ_L et λ sur Γ_s soit régulière, il résulte de [17] (théorème I.9 et sa démonstration) la propriété

$$W^{k+1/2} \in W^{2,q}(\Omega)\,, \quad \forall q \in \mathbb{N}\,, \quad 2 \leqslant q < +\infty$$

et la majoration :

$$\|W^{k+1/2}\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leqslant C\,(\|f\|_{L^q(\Omega)} + \|W^{k+1/2}\|_{H^1(\Omega)})$$

soit grâce à (6), l'estimation :

$$\|W^{k+1/2}\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leqslant B\,.$$

Or pour $q > 3$, $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, donc $W^{k+1/2}$ est dans un borné de $W^{1,\infty}(\Omega)$ indépendant de k. Il en est de même pour $P^{k+1/2}$, Φ^{-1} étant lipschitzienne.

THÉORÈME 3.3 : *lorsque h tend vers 0, la fonction S_{wh} demeure dans un borné fixe de $L^{\infty}(0, T ; L^2(\Omega))$ et la fonction σS_{wh} demeure dans un borné fixe de $H^1(Q)$. La fonction $\hat{P}_h$ est dans un borné fixe de $L^{\infty}(0, T ; W^{1,\infty}(\Omega))$.*

Démonstration : On considère l'équation (E19). En observant que la fonction dv_w est fonction de la seule variable S_w ([3]), on note χ la primitive de $(dv_w P'_w + \varepsilon)$ qui s'annule en 0 et on choisit $v = \chi(S_w^{k+1}) - \chi(S_w^k)$ dans (E19).

Il vient à l'aide de la formule de Green :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{h} \int_{\Omega} (S_w^{k+1} - S_w^k)^2 \, dx + \int_{\Omega} \nabla(\chi(S_w^{k+1})) \cdot \nabla[\chi(S_w^{k+1}) - \chi(S_w^k)] \, dx \\ = \int_{\Omega} (d_k v_w) \, \Delta P^{k+1/2} [\chi(S_w^{k+1}) - \chi(S_w^k)] \, dx \\ + \int_{\Omega} (d_k v_w)' \, \nabla S_w^{k+1} \cdot \nabla P^{k+1/2} [\chi(S_w^{k+1}) - \chi(S_w^k)] \, dx \, . \end{aligned}$$

En utilisant alors, les estimations (7), (10), la propriété $\Delta P^{k+1/2}$ est borné dans $L^{\infty}(Q)$ indépendamment de k qui résulte de (10), (11) et (H5), on obtient de façon classique à l'aide de l'inégalité de Hölder, les majorations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{h} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \| S_w^{k+1} - S_w^k \|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \\ \| S_w^k \|_{H^1(\Omega)} \leq C \quad \forall k \in [1, N-1] \, . \end{array} \right. \tag{12}$$

Ces majorations entraînent les propriétés énoncées relatives aux fonctions S_{wh} et σS_{wh}.

Enfin le résultat relatif à $\hat{P}_h$ est une conséquence immédiate du lemme 3.2. Le lecteur intéressé par la mise en œuvre de schémas numériques pour la résolution des écoulements triphasiques en milieu poreux pourra se rapporter à [18].

4. À PROPOS DU CHOIX DE L'INCONNUE EN PRESSION ET VARIANTES DE LA MODÉLISATION

L'élaboration d'un modèle mathématique amène la nécessité de s'interroger sur le choix des inconnues principales du problème, dans le double souci de répondre aux exigences (et... aux usages) de l'utilisateur industriel et de mettre en place une formulation dans un cadre mathématique éprouvé. Si le choix des inconnues S_w, S_g et X_o^h semble s'imposer, il n'en est pas de même de l'inconnue en pression : avec les notations précédentes, il y a, a priori, plusieurs possibilités entre $\mathscr{P}$, $\mathscr{P} - P_{c_o}$, $\mathscr{P} - P_{c_w}$, $\mathscr{P} - P_{c_g}$ et toute autre valeur intermédiaire. Ainsi dans [2]. [11], G. Chavent tire argument, par un procédé ingénieux, du fait que les fonctions d_p, d et ν_p varient très lentement en la variable de pression et qu'au demeurant, il ne semble pas établi avec certitude que ν_p doive être calculé en la valeur $\mathscr{P}$ plutôt qu'en la valeur $\mathscr{P} - P_{c_p}$ par exemple dans la phase p, pour autoriser le calcul de ces fonctions en toute valeur de pression P, voisine de $\mathscr{P}$, à fixer judicieusement et définit ainsi une notion de « pression globale fictive », qui permet de desserrer le couplage en les inconnues de saturation dans l'équation en pression. Par ailleurs, lorsqu'on néglige l'effet des pressions capillaires, seule demeure l'inconnue $\mathscr{P}$ et les équations en les saturations qui résultent de ce choix sont de type hyperbolique du premier ordre. Ces considérations amènent à des observations troublantes, comme on peut le voir sur la simple remarque suivante : si l'on choisit pour inconnue $P = \mathscr{P} - P_{c_o}$, ce qui correspond à l'usage classique, adopté ici, l'équation en S_w est de type parabolique quasi linéaire dégénérée ; en prenant pour inconnue $P = \mathscr{P} - P_{c_w}$, l'équation de conservation de masse de l'eau devient hyperbolique du premier ordre ; or, les solutions de ces deux types d'équations ont des propriétés très différentes (effets régularisants pour la première, apparition éventuelle de discontinuités pour la seconde...). Il y a là matière à réflexion et à défaut d'apporter une réponse définitive à ces interrogations, il est possible de faire un choix opportuniste d'une inconnue dimensionnée à une pression : dans cette direction, le choix de $P = \mathscr{P} - P_{c_g}$ semble intéressant mathématiquement et conduit à des équations en saturation de type parabolique quasi linéaire dégénéré avec termes de transport, présentant une grande parenté avec les équations obtenues dans le cadre des travaux de G. Chavent, déjà cités, et des auteurs [15]. Ce choix conduit formellement à la formulation variationnelle, outre l'équation en X_o^h :

trouver le triplet (S_w, S_g, P), $(S_w, S_g) \in \mathscr{C}$, vérifiant les conditions initiales imposées, solution des équations et inéquations variationnelles du système :

$$\text{(E24)} \quad \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w)\, v\, dx + \int_\Omega [d\nu_w]\{\nabla P_w(S_w) - \nabla P_g(S_g)\} \,.\, \nabla v\, dx$$

$$+ \int_\Omega [d\nu_w]\, \nabla P \,.\, \nabla v\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda [d\nu_w]\, P v\, d\Gamma$$

$$= \int_\Omega [d\nu_w]\, g \frac{\partial v}{\partial z}\, dx\,, \quad \forall v \in V\,,$$

$$\text{(E25)} \quad \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \{\phi[\rho_o \, \omega_o^h](P)(S_w + S_g - 1)\} (v - S_g) \, dx$$

$$+ \int_\Omega (\omega_o^h(P)[dv_o] \, \nabla P_g(S_g) \, . \, \nabla(v - S_g)) \, dx$$

$$- \int_\Omega \omega_o^h(P)[dv_o] \, \nabla P \, . \, \nabla(v - S_g) \, dx$$

$$+ \int_\Omega \omega_o^h(P)[dv_o] \, \rho_o \, g \frac{\partial}{\partial z} (v - S_g) \, dx$$

$$\geq \int_{\Gamma_s} \lambda[dv_o] \, \omega_o^h(P) \, P(v - S_g) \, d\Gamma \,, \quad \forall v \in K^+ \,,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \{\phi(S_w + \rho_o \, S_o + \rho_g \, S_g)\} \, v \, dx + \int_\Omega d \, \nabla P \, . \, \nabla v \, dx$$

$$+ \int_\Omega d\{\nu_w \, \nabla P_w(S_w) - (1 - \nu_g) \, \nabla P_g(S_g)\} \, . \, \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda(x) \, d \, Pv \, d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_e} fv \, d\Gamma + \int_\Omega [d\rho] \, g \frac{\partial v}{\partial z} \, dx \,, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \,,$$

chacune de ces relations devant être vérifiée presque partout sur $]0, T[$.

L'intérêt de cette formulation réside dans la présence (non artificielle, ici) dans les équations (E24) et (E25) d'un opérateur non linéaire accrétif du second ordre par rapport aux variables géométriques (on observera que :

$$[dv_w](S_w, S_g, P) \, \nabla P_w(S_w) \, . \, \nabla S_w \geq 0$$

$$[dv_o](X_o^h, S_w, S_g, P) \, \nabla P_g(S_g) \, . \, \nabla S_g \geq 0) \,,$$

ce qui permet de donner un sens à chacune des conditions de bord décrites à l'introduction. Il est curieux de remarquer que ce choix de l'inconnue en pression (en l'occurrence, la pression de la phase gazeuse) procède d'un simple opportunisme mathématique, alors qu'en pratique, ce choix peut paraître peu pertinent du fait que la phase gazeuse n'est pas toujours présente ; cependant, ce procédé permet d'obtenir la pression de la phase huile (par exemple) par la relation $\mathcal{P} - P_{c_o} = P - P_g(S_g)$: dans le cas d'une huile sous-saturée, les deux notions coïncident.

Les auteurs sont reconnaissants envers MM. G. Chavent (INRIA-Univ. de Paris-Dauphine), G. Ciligot-Travain et R. Eymard (Groupe Elf-Aquitaine), T. Gallouët (Univ. de Chambéry) pour les discussions stimulantes qu'ils ont eues avec eux et pour les conseils qu'ils leur ont prodigués ; ils tiennent à remercier particulièrement Ph. Cortey-Dumont qui, par ses critiques constructives et la pertinence de ses remarques, a permis d'améliorer maints aspects de cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. MARLE, *Cours de production t. 4. Les écoulements polyphasiques en milieu poreux,* ed. Technip, Paris.

[2] G. CHAVENT, J. JAFFRE, *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation,* à paraître (North Holland).

[3] G. CILIGOT-TRAVAIN, *Les modèles de gisements,* à paraître ed. Technip., Paris.

[4] P. BIA, M. COMBARNOUS, *Les méthodes thermiques de production des hydrocarbures ; chapitre 1, Transfert de chaleur et de masse* (revue de l'Institut Français du pétrole, mai-juin 1975, pp. 359-395).

[5] G. GAGNEUX, *Sur des problèmes unilatéraux dégénérés de la théorie des écoulements diphasiques en milieu poreux* (Thèse de doctorat d'État, 1982, Université de Besançon).

[6] M. MADAUNE-TORT, *Perturbations singulières de problèmes aux limites du second ordre, hyperboliques et paraboliques non linéaires* (Thèse de doctorat d'État, avril 1981, Université de Pau).

[7] G. GAGNEUX, *Une étude théorique sur la modélisation de G. Chavent des techniques d'exploitation secondaire des gisements pétrolifères* (J. Mécan. théo. et appl., janvier 1983, vol. 2, n° 1, p. 33-56).

[8] B. CORRE, R. EYMARD, L., QUETTIER, *Applications of a thermal simulator to field cases.* (Proceedings of the 59th Annual Technical Conference (Society of Petroleum Engineers of AIME) 1984, Houston (Texas)).

[9] G. DUVAUT et J.-L. LIONS, *Les inéquations en Mécanique et en Physique,* Dunod, Paris, 1972.

[10] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et application* (Masson, 1983).

[11] G. CHAVENT, G. SALZANO, *Un algorithme pour la détermination de perméabilités relatives triphasiques satisfaisant une condition de différentielle totale.* Rapport de Recherche, INRIA n° 355, janvier 1985.

[12] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* (Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969).

[13] C. BARDOS, C. *Problèmes aux limites, pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels.* (Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 3, 1970, 185-233).

[14] F. MIGNOT, J. P. PUEL, *Inéquations variationnelles et quasivariationnelles hyperboliques du permier ordre* (J. Math. pures et appli. 55, 1976, 353-378).

[15] G. GAGNEUX, A. M. LEFEVERE, M. MADAUNE-TORT, *Une approche analytique d'un modèle black-oil des écoulements triphasiques compressibles en ingénierie pétrolière* (J. Mécan. théo. et appl., 1987, vol. 6, n° 4, p. 1-24).

[16] M. ARTOLA, *Sur une classe de problèmes paraboliques quasi linéaires* (Bolletino U.M.I. (6) 5-B), 1986, p. 51-70).

[17] H. BREZIS, *Problèmes unilatéraux* (J. Math. pures et appli. 51, 1972, p. 1-168).

[18] A. PFERTZEL, *Sur quelques schémas numériques pour la résolution des écoulements multiphasiques en milieu poreux* (Thèse de Doctorat, Juin 1987, Université Paris 6).