M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

G. AUBERT

Quelques remarques sur les notions de 1-rang convexité et de polyconvexité en dimensions 2 et 3

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 22, nº 1 (1988), p. 5-28

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1988__22_1_5_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 22, n° 1, 1988, p. 5 à 28)

QUELQUES REMARQUES SUR LES NOTIONS DE 1-RANG CONVEXITÉ ET DE POLYCONVEXITÉ EN DIMENSIONS 2 ET 3 (*)

par G. AUBERT ([1])

Communiqué par P. G. CIARLET

Abstract. — *J. M. Ball has introduced the notion of polyconvexity to study non linear problems in elasticity. We give an equivalent caracterization in two and three dimensions. We also prove differential inequalities which caracterize, in the isotropic case, the rank 1 convexity.*

Résumé. — *J. M. Ball a introduit dans ses travaux sur l'élasticité non linéaire la notion de polyconvexité. Nous en donnons une formulation équivalente en dimensions deux et trois. On démontre également des inégalités différentielles caractérisant, dans le cas isotropique, la 1-rang convexité.*

INTRODUCTION

Dans l'étude des problèmes d'élasticité non linéaire il est classique d'utiliser les techniques de l'optimisation pour aborder les questions d'existence. Plus précisément si f représente la fonction énergie associée au système et Ω la position du solide au repos, on cherche une solution du problème :

$$\text{(P)} \qquad \text{INF} \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x))\, dx\,, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{ou} \quad \mathbb{R}^3\,,$$

$u(x)$ désignant le vecteur déplacement et l'infinimum étant pris sur un espace de Sobolev approprié.

(*) Reçu en novembre 1986.
([1]) IUT de Nice, 41 Bd Napoléon III, 06041 Nice, France.

Une question cruciale, liée à l'existence de solutions, est de dégager des hypothèses convenables qui assurent la semi-continuité inférieure faible de (P).

Dans cette optique, J. Ball [1] a introduit la notion suivante de polyconvexité pour des fonctions de matrices :

DÉFINITION : *On note* $M^{n \times n}$ *l'ensemble des matrices* (n, n), $n = 2$ *ou* 3, $E = M^{n \times n} \times \mathbb{R}$ *si* $n = 2$ *et* $E = M^{n \times n} \times M^{n \times n} \times \mathbb{R}$ *si* $n = 3$, *alors* f *est dite polyconvexe sur* $M^{n \times n}$ *s'il existe une fonction* $F : E \to \mathbb{R}$ *convexe telle que :*

$$\begin{array}{ll} f(M) = F(M, \operatorname{dét} M) & si \quad n = 2 \\ f(M) = F(M, \operatorname{adj} M, \operatorname{dét} M) & si \quad n = 3 \end{array}$$

(*où* adj M *désigne la matrice des cofacteurs de* M).

Cette notion de polyconvexité a été utilisée par plusieurs auteurs pour l'étude de problèmes d'élasticité non linéaire, notamment par P. G. Ciarlet [2], P. G. Ciarlet-G. Geymonat [3], P. G. Ciarlet-J. Necas [4], G. Strang [5], R. V. Kohn-G. Strang [6].

Mais à notre connaissance il existe peu de résultats sur la notion même de polyconvexité, et en particulier sur l'existence de conditions suffisantes. De ce fait il est assez difficile, en général, de reconnaître si une fonction est polyconvexe. Les résultats déjà établis sont essentiellement des conditions nécessaires de polyconvexité, la plus connue d'entre elles étant celle de 1-rang convexité, équivalente pour les fonctions de classe C^2 à la condition de Legendre-Hadamard :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f(M)}{\partial m_{ik}\, \partial m_{jl}}\, a_i\, a_j\, b_k\, b_l \geqq 0$$

pour tout a et b appartenant à $\mathbb{R}^n$.

L'objet de ce travail est de déterminer des conditions caractérisant la polyconvexité. Nous donnons dans les §§ 1 et 2 une condition nécessaire et suffisante de polyconvexité plus simple que celles établies par J. M. Ball [1]. Cette caractérisation nous permettra de démontrer dans le § 3 que les notions de polyconvexité et de 1-rang convexité ne sont pas équivalentes. Ce résultat était connu lorsque $n = 3$ (*cf.* F. J. Terpstra [13] ou D. Serre [14]) mais demeurait une question ouverte pour $n = 2$. Ce résultat a été publié séparément [19] mais nous le reproduisons ici dans un souci de synthèse.

Notre étude se termine dans le § 4 par la démonstration d'inégalités différentielles caractérisant les fonctions 1-rang convexes isotropiques. Notre travail se limite au cas $n = 3$, le cas $n = 2$ ayant déjà été traité par Knowles-Sternberg [8] et Aubert-Tahraoui [9]. Les résultats de ce paragraphe vont sans doute dans la même direction que ceux de Simpson-Spector

[17]. Notre approche nous semble plus simple et nos conclusions sont plus explicites que celles données dans [17]. Dans [9] et [10] Aubert-Tahraoui établissent également des conditions nécessaires de faible fermeture pour certains ensembles intervenant en élasticité non linéaire. On pourra trouver d'autres remarques concernant la polyconvexité, la quasi-convexité et la 1-rang convexité dans B. Dacorogna [15] et dans El. Gurwich-Al. Lurie [18], R. Temam [20].

Le plan sera le suivant :

§ 1. Conditions nécessaires et suffisantes de polyconvexité : le cas $n = 2$.
§ 2. Conditions nécessaires et suffisantes de polyconvexité : le cas $n = 3$.
§ 3. Un contre-exemple bi-dimensionnel d'une fonction 1-rang convexe et non polyconvexe.
§ 4. Une caractérisation des fonctions 1-rang convexes, isotropiques en dimension 3.

§ 1. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES DE POLYCONVEXITÉ : LE CAS $n = 2$

Soit $f : M^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, nous dirons que f est polyconvexe s'il existe une fonction $F : M^{2\times 2} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(M) = F(M, \text{dét}\, M) \quad (\text{dét}\, M = \text{déterminant de } M)\,.$$

Cette définition abstraite soulève la question suivante : sous quelles conditions f admet-elle une telle décomposition ?

Utilisant les travaux de Busemann et Shephard [7] concernant les fonctions convexes sur des ensembles non convexes, J. Ball dans [1] démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1 : *f est polyconvexe si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée*
(i) *Il existe une fonction convexe $C(M, t)$ sur $M^{2\times 2} \times \mathbb{R}$ telle que $f(M) \geqq C(M, \text{dét}\, M)$ pour tout $M \in M^{2\times 2}$ et l'inégalité*

$$f\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i M_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f(M_i)$$

est vérifiée pour tout $\lambda_i \geqq 0$ avec $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 1$, et pour toutes matrices M_i satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \,\text{dét}\, M_i = \text{dét}\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i M_i\right)\,.$$

(ii) *Pour toute matrice* $M \in M^{2\times 2}$, *il existe des coefficients* $A_{ij}(M)$ *et* $a(M)$ *tels que*

$$f(M+X) \geqslant f(M) + A_{ij}(M)\,X_{ij} + a(M)\,\text{dét}\,X$$

pour toute $X \in M^{2\times 2}$.

(*On utilisera systématiquement la convention de la sommation des indices répétés.*)

La caractérisation (i) donnée ci-dessus est, en pratique, peu commode à vérifier. L'objet de ce paragraphe est de donner une formulation simple de la polyconvexité reposant sur la définition et précisant la condition (ii).

Auparavant on rappelle une condition nécessaire classique de polyconvexité.

THÉORÈME 1.2 : *Toute fonction polyconvexe est 1-rang convexe.*

Preuve : Dans le théorème 1.1 nous choisissons $\lambda_i = 0$ pour $i = 3$ à $i = 6$. Alors (i) entraîne

$$f\left(\sum_{i=1}^{2} \lambda_i M_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{2} \lambda_i\, f(M_i)$$

pour tout $\lambda_i \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et toutes matrices M_1 et M_2 satisfaisant

$$\text{dét}\,(M_1 - M_2) = 0$$

i.e. f est 1-rang convexe.

Le théorème suivant énonce une condition nécessaire et suffisante de polyconvexité. On suppose f de classe C^1 et on note

$$\begin{aligned} M_+ &= \{M \in M^{2\times 2} \text{ telles que dét } M > 0\} \\ M_- &= \{M \in M^{2\times 2} \text{ telles que dét } M < 0\} \\ I_1(M) &= \operatorname*{Inf}_{X \in M_+} \frac{f(M+X) - f(M) - \langle X, Df(M)\rangle}{\text{dét}\,X} \\ S_1(M) &= \operatorname*{Sup}_{Y \in M_-} \frac{f(M+Y) - f(M) - \langle Y, Df(M)\rangle}{\text{dét}\,Y} \end{aligned}$$

THÉORÈME 1.3 : *f est polyconvexe sur $M^{2\times 2}$ si et seulement si*

$$S_1(M) \leqslant I_1(M) \tag{1.1}$$

pour tout $M \in M^{2\times 2}$.

Preuve : (i) Montrons que la condition (1.1) est nécessaire.

Selon la définition de la polyconvexité, il existe une fonction F convexe telle que

$$f(M) = F(M, \text{dét}\, M)$$

et donc, pour toute matrice X

$$f(M+X) - f(M) = F(M+X, \text{dét}\,(M+X)) - F(M, \text{dét}\, M)\,.$$

Grâce à la convexité de F on a

$$\begin{aligned}(1.2)\quad f(M+X) - f(M) \geqslant \langle X, D_M F(M, \text{dét}\, M)\rangle &+ \\ &+ (\text{dét}\,(M+X) - \text{dét}\, M)\, D_t\, F(M, \text{dét}\, M)\end{aligned}$$

où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire usuel et où D_M et D_t désignent les gradients partiels de $F(M, t)$.

Si on note

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

et

$$\text{cof}\, M = \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix}$$

la matrice cofacteur de M, alors

$$(1.3)\qquad \text{dét}\,(M+X) - \text{dét}\, M = \text{dét}\, X + \langle X, \text{cof}\, M\rangle$$

de plus

$$(1.4)\qquad Df(M) = D_M\, F(M, \text{dét}\, M) + D_t\, F(M, \text{dét}\, M)\,.\,\text{cof}\, M$$

combinant (1.2), (1.3), et (1.4) on obtient

$$f(M+X) - f(M) - \langle X, Df(M)\rangle \geqslant D_t\, F(M, \text{dét}\, M)\, \text{dét}\, X$$

d'où l'on déduit avec les notations énoncées plus haut

$$I_1(M) \geqslant D_t\, F(M, \text{dét}\, M) \geqslant S_1(M)$$

i.e.

$$(1.1)\qquad I_1(M) \geqslant S_1(M)\,.$$

(ii) Montrons maintenant que (1.1) est également une condition suffisante de polyconvexité. On a

$$(1.5)\qquad f(M+X) - f(M) + \langle X, Df(M)\rangle + a\, \text{dét}\, X \geqslant 0$$

pour tout $X \in M^{2\times 2}$ et tout $a \in [S_1(M), I_1(M)]$.

En effet grâce aux définitions de $I_1(M)$ et $S_1(M)$ et à l'inégalité (1.1)

$$f(M+X) - f(M) - (X, Df(M)) - a \,\text{dét}\, X \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} f(M+X) - f(M) - \langle X, Df(M)\rangle - I_1(M)\,\text{dét}\, X \geqslant 0 \text{ si } X \in M_+ \\ f(M+X) - f(M) - \langle X, Df(M)\rangle - S_1(M)\,\text{dét}\, X \geqslant 0 \text{ si } X \in M_- \\ 0 \quad \text{si} \quad \text{dét}\, X = 0 \text{ (par continuité)} \end{cases}$$

Dans tous les cas nous avons

$$f(M+X) \geqslant f(M) + \langle XDf(M)\rangle + a \,\text{dét}\, X\,,$$

ce qui implique grâce aux résultats de J. Ball [1] que f est polyconvexe.

Si de plus f est de classe C^2 et si

$$I_2(M) = \operatorname*{Inf}_{X \in M_+} \frac{{}^tXD^2 f(M)\, X}{\text{dét}\, X}$$

$$S_2(M) = \operatorname*{Sup}_{Y \in M_-} \frac{{}^tYD^2 f(M)\, Y}{\text{dét}\, Y}$$

où $D^2 f(M)$ désigne la matrice hessienne de f au point M alors une conséquence facile du théorème 1.3 est le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.4 : *Si f est polyconvexe et de classe C^2 alors*

(1.6) $$S_2(M) \leqslant I_2(M)$$

pour tout $M \in M^{2\times 2}$ et ces valeurs sont finies

(1.7) $${}^tZD^2 f(M)\, Z \geqslant a \,\text{dét}\, Z$$

pour tout $a \in [S_2(M), I_2(M)]$ et tout $Z \in M^{2\times 2}$.

Remarques.

1) Marcellini dans [12] a démontré le théorème suivant : soit f et g deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^N$, g indéfinie, alors les deux conditions ci-après sont équivalentes

(i) $$f(X) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad g(X) = 0$$

(ii) $$f(X) - \lambda g(X) \geqslant 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in [m, M]$$

où $$m = \operatorname*{Sup}_{g(X) < 0} \frac{f(X)}{g(X)} \quad \text{et} \quad M = \operatorname*{Inf}_{g(X) > 0} \frac{f(X)}{g(X)} \quad (m \leqslant M)\,.$$

En appliquant ce théorème aux formes quadratiques

$$\left.\begin{aligned} f(X) &= {}^tXD^2 f(M)\,X \\ g(X) &= \text{dét}\,X \end{aligned}\right. \qquad X \in M^{2\times 2}$$

on en déduit que (1.6) et (1.7) sont équivalentes à

$${}^tZD^2 f(M)\,Z \geqslant 0\,, \quad \forall Z \text{ tel que dét } Z = 0\,,$$

inégalité qui est, elle-même, équivalente à la 1-rang convexité.

2) On peut facilement déduire du théorème 1.3 que f est polyconvexe si et seulement si

$$f\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i M_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{3} \lambda_i f(M_i)$$

pour toute matrice M_i, $i = 1, 2, 3$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \text{ dét } M_i = \text{dét}\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i M_i\right)$$

et dét $(M_1 - M_3)$ dét $(M_2 - M_3) < 0$.

Il est à remarquer que dans la caractérisation ci-dessus nous utilisons trois matrices et non pas six matrices comme l'exige le théorème de J. M. Ball. Mais il s'agit là d'une caractérisation différente (le théorème de Carathéodory sous-jacent dans la démonstration du théorème de Ball étant en effet optimal).

3) Dans le cadre de l'élasticité la fonction f est en général définie sur l'ensemble M_+. Les conclusions de ce paragraphe demeurent vraies dans ce cas. Il suffit d'imposer que les matrices où f est appliquée, appartiennent à M_+. Par exemple on a la caractérisation :

$$f \text{ polyconvexe sur } M_+ \Leftrightarrow S_1(M) \leqslant I_1(M) \quad \forall M \in M_+\,.$$

4) Il se dégage de notre étude deux équivalences :

(1.8) f est 1-rang convexe si et seulement si $\forall X \in M^{2\times 2}$

$$S_2(M) \leqslant I_2(M)$$

(1.9) f est polyconvexe si et seulement si $\forall X \in M^{2\times 2}$

$$S_1(M) \leqslant I_1(M)\,.$$

Nous avons montré que $S_1(M) \leqslant I_1(M)$ entraîne $S_2(M) \leqslant I_2(M)$. L'implication inverse est, en général, fausse comme nous le verrons dans le § 3. Elle est vérifiée dans certains cas déjà connus, par exemple si :

- f est convexe
- $f(M) = H(\text{dét } M)$, avec H convexe car

$$S_1(M) = I_1(M) = \frac{S_2(M)}{2} = \frac{I_2(M)}{2} = H'(\text{dét } M)$$

- f est une forme quadratique car

$$S_1(M) = \frac{S_2(M)}{2} \quad \text{et} \quad I_1(M) = \frac{I_2(M)}{2}.$$

Plus généralement si $S_1(M) = \dfrac{S_2(M)}{2}$ et $I_1(M) = \dfrac{I_2(M)}{2}$ pour tout M, et si f est 1-rang convexe alors f est polyconvexe.

5) Si on suppose f isotropique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $G : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(M) = G(\lambda_1, \lambda_2) \quad (\lambda_i \text{ valeurs propres de } ({}^tMM)^{1/2})$$

alors les fonctions S_i et I_i sont isotropiques. De plus $I_2(M)$ et $S_2(M)$ se calculent explicitement en fonction des dérivées partielles de la fonction G. Si on pose

$$G_i = \frac{\partial G}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{et} \quad G_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda_i \, \partial \lambda_j}(\lambda_1, \lambda_2)$$

alors si f est 1-rang convexe, nous avons

$$S_2(M) = 2 \operatorname{Max}\left[-\frac{G_1 - G_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, -(\sqrt{G_{11}\, G_{22}} - G_{12})\right]$$

$$I_2(M) = 2 \operatorname{Min}\left[\frac{G_1 + G_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \sqrt{G_{11}\, G_{22}} + G_{12}\right].$$

§ 2. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POLYCONVEXITÉ. LE CAS $n = 3$

Dans ce paragraphe nous traitons le cas de la dimension 3. La démarche suivie reste la même que celle du § 1.

Soit donc $f : M^{3 \times 3} \to \mathbb{R}$, nous dirons que f est polyconvexe s'il existe une fonction $F : M^{3 \times 3} \times M^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que

$$f(M) = F(M, \operatorname{Adj} M, \text{dét } F),$$

où Adj M désigne la matrice de cofacteurs de M. Pour toute matrice

$M \in M^{3 \times 3}$ on notera M^{ij} la matrice (2, 2) déduite de M en y supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne,

$$|M| = \text{dét } M$$
$$|M|^{ij} = (\text{Adj } M)_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ dét } M^{ij}.$$

Dans le cas tridimensionnel le théorème de caractérisation de J. Ball est le suivant

THÉORÈME 2.1 : *f est polyconvexe si et seulement si l'une des conditions suivantes équivalentes est vérifiée :*

(i) *Il existe une fonction C convexe sur $M^{3 \times 3} \times M^{3 \times 3} \times \mathbb{R}$ telle que*

$$f(M) \geq C(M, \text{Adj } M, \text{dét } M) \quad \textit{pour tout} \quad M \in M^{3 \times 3}$$

et l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^{20} \lambda_i M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{20} \lambda_i f(M_i) \tag{2.1}$$

est vérifiée pour tout $\lambda_i \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^{20} \lambda_i = 1$, et pour toutes matrices M_i satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{20} \lambda_i \text{ Adj } M_i = \left(\text{Adj } \sum_{i=1}^{20} \lambda_i M_i\right). \tag{2.2}$$

(ii) *Pour toute matrice $M \in M^{3 \times 3}$, il existe des coefficients $A_{ij}(M)$, $B_{ij}(M)$ et $C(M)$ tels que*

$$f(M + X) \geq f(M) + A_{ij}(M) X_{ij} + B_{ij}(M) (\text{Adj } X)_{ij} + C(M) \text{ dét } X$$

pour tout $X \in M^{3 \times 3}$.

L'étude de la relation (ii) dans le théorème précédent nécessite quelques calculs préliminaires.

LEMME 2.2 : *Soit M et $X \in M^{3 \times 3}$ et soit f définie sur $M^{3 \times 3}$ de classe C^1, alors*

$$\text{dét } (M + X) - \text{dét } M = \text{dét } X + \langle \text{Adj } M, X \rangle + \langle \text{Adj } X, M \rangle \tag{2.3}$$

$$(\text{Adj } (M + X) - \text{Adj } M)_{ij} = (\text{Adj } X)_{ij} + \langle (-1)^{i+j} X^{ij}, \text{cof } (M^{ij}) \rangle \tag{2.4}$$

où cof (M^{ij}) *désigne la matrice cofacteur de la matrice $M^{ij} \in M^{2 \times 2}$*

(2.5) *Si $f(M) = F(M, \text{Adj } M, \text{dét } M)$, alors*

$$\begin{aligned}\langle Df(M), X\rangle &= \langle D_M F(M, \text{Adj}\, M, \text{dét}\, M), X\rangle \\ &+ \langle (-1)^{i+j} X^{ij}, \text{cof}\,(M^{ij})\rangle D_{(\text{Adj}\, M)_{ij}} F(M, \text{Adj}\, M, \text{dét}\, M) \\ &+ \langle \text{Adj}\, M, X\rangle\; D_t F(M, \text{Adj}\, M, \text{dét}\, M)\end{aligned}$$

où $D_M F$, $D_{(\text{Adj}\, M)_{ij}} F$, $D_t F$ *représentent les gradients partiels de F respectivement par rapport à M,* Adj M *et* dét M.

LEMME 2.3 : *Soit f polyconvexe sur* $M^{3\times 3}$ *alors*

$$(2.6)\quad \begin{aligned} f(M+X) - f(M) - \langle X, Df(M)\rangle &\geqslant \\ \geqslant (\text{Adj}\, X)_{ij}\, D_{(\text{Adj}\, M)_{ij}} F(\mathbf{M}) &+ D_t F(\mathbf{M})\, \text{dét}\, X\end{aligned}$$

où $\mathbf{M} = (M, \text{Adj}\, M, \text{dét}\, M)$.

Preuve : La preuve est immédiate, elle découle de la définition de la polyconvexité. On a :

$$f(M) = F(M, \text{Adj}\, M, \text{dét}\, M)$$

avec F convexe ; d'où

$$(2.7)\quad \begin{aligned} f(M+X) - f(M) &= \\ &= F(M+X, \text{Adj}\,(M+X), \text{dét}\,(M+X)) - F(\mathbf{M}) \\ &\geqslant \langle X, D_M(\mathbf{M})\rangle + \langle \text{Adj}\,(M+X) - \text{Adj}\,(M), D_{(\text{Adj}\, M)} F(\mathbf{M})\rangle + \\ &\quad + (\text{dét}\,(M+X) - \text{dét}\, M)\, D_t F(\mathbf{M})\end{aligned}$$

combinant (2.3), (2.4), (2.5) nous obtenons (2.6).

Grâce à ce lemme nous allons établir une condition nécessaire et suffisante de polyconvexité en dimension 3. Auparavant on définit les ensembles

$$\begin{aligned} E^{ij} &= \{M = (m_{kl}) \in M^{3\times 3}/m(i,l) = m(k,j) = 0, \forall k, l = 1, 2, 3\} \\ E^{ij}_+ &= \{M \in E^{ij}/|M|^{ij} > 0\} \\ E^{ij}_- &= \{M \in E^{ij}/|M|^{ij} < 0\} \\ M_+ &= \{M \in M^{3\times 3}/|M| > 0\} \\ M_- &= \{M \in M^{3\times 3}/|M| < 0\} \\ K_+ &= \{(i,j), i \text{ et } j = 1, 2, 3/|M|^{ij} > 0\} \\ K_- &= \{(i,j), i \text{ et } j = 1, 2, 3/|M|^{ij} < 0\}\end{aligned}$$

ainsi que les fonctions sur $M^{3\times 3}$

$$I^{ij}(M) = \inf_{X \in E^{ij}_+} \frac{f(M+X) - f(M) - \langle X, Df(M)\rangle}{|X|^{ij}}$$

$$S^{ij}(M) = \operatorname*{Sup}_{Y \in E_-^{ij}} \frac{f(M+Y) - f(M) - \langle Y, Df(M)\rangle}{|Y|^{ij}}$$

$$I(M) = \operatorname*{Inf}_{X \in M_+} \frac{f(M+X) - f(M) - \langle X, Df(M)\rangle - \sum_{K_+(X)} S^{ij}|X|^{ij} - \sum_{K_-(X)} I^{ij}|X|^{ij}}{|X|}$$

$$S(M) = \operatorname*{Sup}_{Y \in M_-} \frac{f(M+Y) - f(M) - \langle Y, Df(M)\rangle - \sum_{K_+(Y)} S^{ij}|Y|^{ij} - \sum_{K_-(Y)} I^{ij}|Y|^{ij}}{|Y|}$$

THÉORÈME 2.4 : *Soit $f : M^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ alors f est polyconvexe si et seulement si*

$$S^{ij}(M) \leq I^{ij}(M) \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.8}$$

$$S(M) \leq I(M) \tag{2.9}$$

pour toute matrice $M \in M^{3\times 3}$.

Preuve : La preuve est très semblable à celle du théorème 1.3 dans le cas de la dimension 2.

Si f est polyconvexe, en choisissant dans (2.6) X appartenant successivement à E^{ij}, i et $j = 1, 2, 3$, nous obtenons (2.8).

En ce qui concerne (2.9) il suffit de remarquer que

$$f(M+X) - f(M) - \langle X, Df(M)\rangle - \sum_{K_+(X)} S^{ij}(M)|X|^{ij} - \sum_{K_-(X)} I^{ij}(M)|X|^{ij} \geq D_t F(M) \text{ dét } X$$

ce qui entraîne

$$I(M) \geq D_t F(M) \geq S(M).$$

La condition suffisante est aussi aisée à démontrer.

Pour $a \in [S(M), I(M)]$ et $a^{ij} = \begin{cases} S^{ij} \text{ si } (i,j) \in K_+(X) \\ I^{ij} \text{ sinon} \end{cases}$ l'expression

$$f(M+X) - f(M) - \langle X, Df(M)\rangle - \sum_{i,j} a^{ij}|X|^{ij} - a \text{ dét } X \tag{2.10}$$

est toujours non négative quels que soient M et X dans $M^{3\times 3}$ grâce aux définitions de $I(M)$ et $S(M)$ et à l'inégalité $S(M) \leq I(M)$; ce qui entraîne avec les résultats de J. Ball [1] la polyconvexité de f.

§ 3. UN CONTRE-EXEMPLE BIDIMENSIONNEL D'UNE FONCTION 1-RANG CONVEXE ET NON POLYCONVEXE

Nous savons que toute fonction polyconvexe est 1-rang convexe. Dans ce paragraphe nous étudions la propriété réciproque.

Dans le cas $n = 3$ le résultat est faux. Ceci a été démontré par Terpstra [13] et Serre [14]. Lorsque $n = 2$ la question était ouverte. Nous proposons un contre-exemple qui montre que le résultat est encore faux pour $n = 2$.

Soit

$$f_0(M) = G(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{3}(\lambda_1^4 + \lambda_2^4) + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{2}{3}(\lambda_1^3 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^3),$$

où λ_i désignent les valeurs singulières de M (i.e. les valeurs propres de la matrice $\sqrt{{}^t MM}$).

Pour des fonctions isotropiques, telles que f, nous disposons d'un théorème de caractérisation de la 1-rang convexité sur M_+.

THÉORÈME 3.1 (Knowles-Sternberg [8], Aubert-Tahraoui [9]) : *La fonction $f(M) = G(\lambda_1, \lambda_2)$, de classe C^2, est 1-rang convexe si et seulement si*

(3.1) $$G_{ii} \geqslant 0$$

(3.2) $$\frac{\lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \geqslant 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

(3.3) $$\sqrt{G_{11} G_{22}} + G_{12} + \frac{G_1 - G_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \geqslant 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

(3.4) $$\sqrt{G_{11} G_{22}} - G_{12} + \frac{G_1 + G_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \geqslant 0$$

(3.5) $$G_{11}(\lambda, \lambda) - G_{12}(\lambda, \lambda) + \frac{G_1(\lambda, \lambda)}{\lambda} \geqslant 0,$$

où on a noté

$$G_i = \frac{\partial G}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \lambda_2), \quad G_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda_i \, \partial \lambda_j}(\lambda_1, \lambda_2).$$

LEMME 3.1 : *f_0 est 1-rang convexe sur M_+.*

Preuve : Il suffit de vérifier les inégalités (3.1) à (3.5)

$$G_1 = \frac{4}{3}\lambda_1^3 + \lambda_1\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_2^3$$
$$G_2 = \frac{4}{3}\lambda_2^3 + \lambda_1^2\lambda_2 - 2\lambda_2^2\lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_1^3$$
$$G_{11} = 4\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = (2\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geqslant 0$$
$$G_{22} = 4\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = (2\lambda_2 - \lambda_1)^2 \geqslant 0$$
$$G_{12} = 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 = -2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2)$$
$$\frac{\lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{4}{3}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2) \geqslant 0$$
$$\sqrt{G_{11}G_{22}} + G_{12} + \frac{G_1 - G_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sqrt{G_{11}G_{22}} + \lambda_1\lambda_2 \geqslant 0\,.$$
$$\sqrt{G_{11}G_{22}} - G_{12} + \frac{G_1 + G_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \sqrt{G_{11}G_{22}} + \frac{8}{3}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \frac{11}{3}\lambda_1\lambda_2 \geqslant 0$$
$$G_{11}(\lambda,\lambda) - G_{12}(\lambda,\lambda) + \frac{G_1(\lambda,\lambda)}{\lambda} = \frac{8}{3}\lambda^2 \geqslant 0\,.$$

Pour démontrer que f_0 n'est pas polyconvexe sur M_+, nous allons utiliser la caractérisation donnée dans le § 1, à savoir f_0 polyconvexe si et seulement si :

$$S_1(M) \leqslant I_1(M) \quad \text{pour tout } M \text{ dans } M_+\,. \tag{3.6}$$

LEMME 3.2 : *f_0 n'est pas polyconvexe sur M_+.*

Preuve : Il suffit de trouver trois matrices M_0, X_0 et Y_0 telles que (3.6) soit contredit. Soit pour $0 < t < 1/2$

$$M_0 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1-2t \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}.$$

Le choix de ces trois matrices est telle que M_0, $M_0 + X_0$, $M_0 + Y_0$ sont des éléments de M_+ :

$$f_0(M_0 + X_0) = G(1,1) = -\frac{1}{6}$$
$$f_0(M_0) = f_0(M_0 + Y_0) = t^4 G(2,1) = t^4$$
$$\langle X_0, Df(M_0)\rangle = (1-t)\,G_1(t,2t) + (1-2t)\,G_2(t,2t) = -4t^4$$
$$\langle Y_0, Df(M_0)\rangle = tG_1(t,2t) - tG_2(t,2t) = -8t^4$$

et donc

$$\frac{f_0(M_0 + X_0) - f_0(M_0) - \langle X_0, Df_0(M_0)\rangle}{\text{dét}\, X_0} = \frac{-\frac{1}{6} + 3t^4}{(1-t)(1-2t)} \tag{3.7}$$

$$(3.8) \qquad \frac{f_0(M_0 + Y_0) - f_0(M_0) - \langle X_0, Df_0(M_0)\rangle}{\text{dét } Y_0} = -8\,t^2 .$$

On a (3.7) < (3.8) pour t suffisamment petit, ce qui contredit (3.6).

Remarques.

1) J. Ball nous a signalé que Gurvich a obtenu un contre-exemple similaire au nôtre en remarquant qu'une fonction telle que f_0 ne pouvait être polyconvexe sur M_+ car $G(\lambda, \lambda) = -\lambda^4/6$.

2) f_0 peut s'exprimer directement en fonction de M sur M_+ :

$$f_0(M) = \frac{1}{3}\,\|M\|^4 - \frac{1}{6}\,(\text{dét } M)^2 - \frac{2}{3}\,\text{dét } M(\|M\|)^2 .$$

3) Nous pouvons obtenir un contre-exemple sur $M^{2\times 2}$ tout entier en posant

$$f_0(M) = \begin{cases} f_0(M) & \text{si} \quad \text{dét } M > 0 \\ +\infty & \text{sinon} . \end{cases}$$

§ 4. UNE CARACTÉRISATION DES FONCTIONS 1-RANG CONVEXES, ISOTROPIQUES, EN DIMENSION 3

Soit $f : M_+ \to \mathbb{R}$ 1-rang convexe, isotropique et de classe C^2 ; on se propose de démontrer un théorème de caractérisation similaire au théorème 3.1 du § 3. On suppose donc qu'il existe une fonction $G : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ symétrique, telle que

$$f(M) = G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

où λ_i sont les valeurs singulières de M. f est 1-rang convexe si et seulement si

$$(4.1) \qquad {}^t X D^2 f(M)\, X \geqslant 0 \quad \text{pour toute matrice } X \in M^{3\times 3} \text{ de rang} \leqslant 1 .$$

La démarche suivie repose sur la formulation de (4.1) en fonction des λ_i et des dérivées de G. Les calculs sont longs mais élémentaires puisque basés sur des dérivations partielles. Nous n'en fournirons pas tous les détails. Grâce à l'isotropie de f il suffit d'évaluer (4.1) au point

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} .$$

LEMME 4.1 :

$$ {}^tXD^2 f(M)\, X = \sum_{i,j} \sum_{k,l} A_{ij}^{kl}\, X_{ij}\, X_{kl} $$

où

$$ A_{ij}^{kl} = \sum_s \frac{\partial^2 \lambda_s}{\partial m_{ij}\, \partial m_{kl}}\, G_s + \sum_s \sum_r \frac{\partial \lambda_s}{\partial m_{ij}} \frac{\partial \lambda_r}{\partial m_{kl}}\, G_{sr} $$

$$ \left(G_s = \frac{\partial G}{\partial \lambda_s}(\lambda)\,, \quad G_{sr} = \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda_s\, \partial \lambda_r}(\lambda) \right)\,. $$

LEMME 4.2 :

$$ {}^t\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial m_{ij}} \right) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) $$

$$ {}^t\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial m_{ij}} \right) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) $$

$$ {}^t\left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial m_{ij}} \right) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) $$

Preuve : Pour toute matrice $M = (m_{ij}) \in M_+$, de valeurs singulières λ_i on a

$$ (4.2) \qquad \begin{cases} \sum_i \lambda_i^2 = \sum_{i,j} m_{ij}^2 \\ \sum_{i<j} \lambda_i^2\, \lambda_j^2 = \sum (\operatorname{Adj} M)_{ij}^2 \\ \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 = |M|\,. \end{cases} $$

En dérivant le système (4.2) par rapport à m_{ij} on obtient

$$ \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial m_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial m_{ij}} + \lambda_3 \frac{\partial \lambda_3}{\partial m_{ij}} = m_{ij} $$

$$ (4.3) \quad \lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial m_{ij}} + \lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \frac{\partial \lambda_2}{\partial m_{ij}} + \lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\partial \lambda_3}{\partial m_{ij}} = $$

$$ = \langle \operatorname{cof}(M^{ij}), (\operatorname{Adj} M)^{ij} \rangle $$

$$ \lambda_2\, \lambda_3 \frac{\partial \lambda_1}{\partial m_{ij}} + \lambda_1\, \lambda_3 \frac{\partial \lambda_2}{\partial m_{ij}} + \lambda_1\, \lambda_2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial m_{ij}} = (\operatorname{Adj} M)_{ij} $$

où

— pour tout $M \in M^{3\times 3}$, M^{ij} désigne la matrice (2, 2) déduite de M en y supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne ;

— pour toute matrice (2, 2), $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\operatorname{cof} A$ désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

La résolution de (4.3), évalué au point $M = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ donne les valeurs des dérivées $\dfrac{\partial \lambda_s}{\partial m_{ij}}(\lambda)$.

Le calcul des dérivées secondes est moins élémentaire. En dérivant (4.3) par rapport à m_{kl} on trouve que les $\dfrac{\partial^2 \lambda_s}{\partial m_{ij}\, \partial m_{kl}}$ sont solutions d'un système linéaire de la forme

$$(4.4)\quad \begin{cases} \lambda_1 X_{ij}^{kl} + \lambda_2 Y_{ij}^{kl} + \lambda_3 Z_{ij}^{kl} = A_{ij}^{kl} \\ \lambda_2 \lambda_3 X_{ij}^{kl} + \lambda_1 \lambda_3 Y_{ij}^{kl} + \lambda_1 \lambda_2 Z_{ij}^{kl} = B_{ij}^{kl} \\ \lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) X_{ij}^{kl} + \lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) Y_{ij}^{kl} + \lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) Z_{ij}^{kl} = C_{ij}^{kl} \end{cases}$$

où

$$X_{ij}^{kl} = \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial m_{ij}\, \partial m_{kl}}, \quad Y_{ij}^{kl} = \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial m_{ij}\, \partial m_{kl}}, \quad Z_{ij}^{kl} = \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial m_{ij}\, \partial m_{kl}}.$$

Les seconds membres dans (4.4) comprennent a priori un nombre important de termes. En les examinant en détail on peut constater qu'ils se simplifient très largement. Grâce, en particulier, à des invariances par permutations d'indices, seuls sont non nuls les seconds membres A_{ij}^{kl}, B_{ij}^{kl}, C_{ij}^{kl} où les indices (i, j, k, l) prennent exclusivement les valeurs 1 ou 2, 1 ou 3, 2 ou 3, avec dans tous les cas $i \neq j$ et $k \neq l$. Nous obtenons ainsi le lemme suivant :

LEMME 4.3 :

a)

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial m_{12}^2} = \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial m_{21}^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial m_{13}^2} = \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial m_{31}^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial m_{12}\, \partial m_{21}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial m_{13}\, \partial m_{31}} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2}.$$

Toutes les autres dérivées sont nulles.

b)
$$\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial m_{12}^2} = \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial m_{21}^2} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$
$$\frac{\partial \lambda_2^2}{\partial m_{23}^2} = \frac{\partial \lambda_2^2}{\partial m_{32}^2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2}$$
$$\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial m_{12}\, \partial m_{21}} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial m_{23}\, \partial m_{32}} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2}.$$

Toutes les autres dérivées sont nulles.

c)
$$\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial m_{12}^2} = \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial m_{31}^2} = \frac{-\lambda_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2}$$
$$\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial m_{23}^2} = \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial m_{32}^2} = \frac{-\lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2}$$
$$\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial m_{13}\, \partial m_{31}} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2}, \quad \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial m_{23}\, \partial m_{32}} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2}.$$

Toutes les autres dérivées sont nulles.

Après ces deux lemmes techniques nous pouvons expliciter l'expression de la forme quadratique ${}^tXD^2 f(M)\, X$:

$$(4.5) \quad {}^tXD^2 f(M)\, X = \sum_i G_{ii} X_{ii}^2 + \sum_{i<j} B_{ij}(X_{ij}^2 + X_{ji}^2) + 2 \sum_{i<j} G_{ij} X_{ii} X_{jj} + + 2 \sum_{i<j} D_{ij} X_{ij} X_{ji}$$

pour tout $X \in M^{3\times 3}$, où on a noté

$$B_{ij} = \frac{\lambda_i G_i - \lambda_j G_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \quad \text{(quantités dites de Baker-Ericksen)}$$

$$D_{ij} = \frac{\lambda_j G_i - \lambda_i G_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}.$$

Remarque : (4.5) a été également calculée par J. Ball [16] par une méthode plus rapide mais moins élémentaire. Lorsque X est une matrice de rang $\leqslant 1$ c'est-à-dire de la forme $a \otimes b$, a et $b \in \mathbb{R}^3$, alors

$${}^tXD^2 f(M)\, X \geqslant 0$$

est équivalent à

$$(4.6)\quad \sum_i a_i^2 b_i^2 G_{ii} + \sum_{i<j} B_{ij}(a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2) + 2 \sum_{i<j} K_{ij}\, a_i\, b_i\, a_j\, b_j \geqslant 0$$

pour tout a et $b \in \mathbb{R}^3$, où

$$K_{ij} = G_{ij} + D_{ij}$$

Toutes les informations sur la 1-rang convexité sont contenues dans (4.6). Il reste à les expliciter.

Comme conditions nécessaires nous retrouvons, bien sûr, les inégalités de la dimension 2, c'est-à-dire $\forall i$ et j

$$(4.7)\qquad G_{ii} \geqslant 0$$

$$(4.8)\qquad B_{ij} \geqslant 0$$

$$(4.9)\qquad \sqrt{G_{ii}\, G_{jj}} + G_{ij} + \frac{G_i - G_j}{\lambda_i - \lambda_j} \geqslant 0$$

$$(4.10)\qquad \sqrt{G_{ii}\, G_{jj}} - G_{ij} + \frac{G_i + G_j}{\lambda_i + \lambda_j} \geqslant 0\,.$$

En posant $X_i = a_i\, b_i$, et en prenant le minimum en b_i, (4.6), grâce à (4.8), est équivalent à

$$(4.11)\quad \sum_i G_{ii}\, X_i^2 + 2 \sum_{i<j} K_{ij}\, X_i\, X_j + 2 \sum_{i<j} B_{ij}\, |X_i\, X_j| \geqslant 0\,, \quad \forall X_i \in \mathbb{R}^3\,.$$

En envisageant dans tous les cas $(X_i \geqslant 0, X_i \leqslant 0, \dots)$ on montre que (4.11) est la réunion de quatre inégalités

$$(4.12)\quad \sum_i a_{ii}^l\, X_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij}^l\, X_j\, X_i \geqslant 0\,, \quad \forall X_i \geqslant 0 \quad l = 1, 2, 3, 4,$$

où

$$(4.13)\qquad a_{ii}^l = G_{ii} \quad \forall l = 1, 2, 3, 4\,.$$

$$(4.14)\qquad \begin{cases} a_{12}^1 = \dfrac{G_1 - G_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + G_{12} \\[2ex] a_{13}^1 = \dfrac{G_1 - G_3}{\lambda_1 - \lambda_3} + G_{13} \\[2ex] a_{23}^1 = \dfrac{G_2 - G_3}{\lambda_2 - \lambda_3} + G_{23} \end{cases}$$

$$(4.15)\quad \begin{cases} a_{12}^2 = \dfrac{G_1 - G_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + G_{12} \\ a_{13}^2 = \dfrac{G_1 + G_3}{\lambda_1 + \lambda_3} - G_{13} \\ a_{23}^2 = \dfrac{G_2 + G_3}{\lambda_2 + \lambda_3} - G_{23} \end{cases}$$

$$(4.16)\quad \begin{cases} a_{12}^3 = \dfrac{G_1 + G_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - G_{12} \\ a_{13}^3 = \dfrac{G_1 - G_3}{\lambda_2 - \lambda_3} + G_{13} \\ a_{23}^3 = \dfrac{G_2 + G_3}{\lambda_2 + \lambda_3} - G_{23} \end{cases}$$

$$(4.17)\quad \begin{cases} a_{12}^4 = \dfrac{G_1 + G_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - G_{12} \\ a_{13}^4 = \dfrac{G_1 + G_3}{\lambda_1 + \lambda_3} - G_{13} \\ a_{23}^4 = \dfrac{G_2 - G_3}{\lambda_2 - \lambda_3} + G_{23} \end{cases}$$

(4.12) se traduit par des inégalités entre les coefficients a_{ij}^l. Nous donnons dans le théorème suivant un résultat général sur les formes quadratiques non négatives sur $\mathbb{R}_+^3$.

Soit $a = (a_{ij})$ une matrice (3, 3) symétrique et $a(x, x)$ la forme quadratique associée, on note

$$A_{ij} = (\operatorname{Adj} a)_{ij} \text{ (le cofacteur d'ordre } (i, j))$$

$$A_{\min} = \operatorname{Min}\,(A_{11}, A_{22}, A_{23})\,.$$

$$F_{ij} = \begin{cases} \sqrt{A_{ii} A_{jj}} - A_{ij} & \text{si } A_{ii} \text{ et } A_{jj} > 0 \quad (i < j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(4.18)\qquad F_{\mathrm{Max}} = \operatorname{Max}\,(F_{12}, F_{13}, F_{23})\,.$$

THÉORÈME 4.1 : $a(X, X) \geq 0$, $\forall X \in \mathbb{R}_+^3$ *si et seulement si*

$$(4.19)\qquad a_{ii} \geq 0$$

$$(4.20)\qquad \sqrt{a_{ii}\, a_{jj}} + a_{ij} \geq 0 \quad (i < j)$$

$$(4.21)\qquad F_{\max} \geq 0\,.$$

Preuve : I) Preuve de la condition suffisante

$$a(X, X) = \sum_i a_{ii} X_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} X_i X_j .$$

1^{er} cas : $A_{\min} \leqslant 0$. Il existe alors i_0 tel que $A_{i_0 i_0} \leqslant 0$, par exemple $i_0 = 1$, c'est-à-dire

$$A_{11} = (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) = (\sqrt{a_{22} a_{33}} - a_{23})(\sqrt{a_{22} a_{33}} + a_{23}) \leqslant 0 .$$

Avec (4.20), $A_{11} \leqslant 0$ est équivalent à

$$a_{23} - \sqrt{a_{22} a_{33}} \geqslant 0 . \tag{4.22}$$

Or $a(X, X)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} a(X, X) = {} & (\sqrt{a_{22}} X_2 + \sqrt{a_{33}} X_3 - \sqrt{a_{11}} X_1)^2 + 2 X_2 X_3 (a_{23} - \sqrt{a_{22} a_{33}}) \\ & + 2 X_1 X_2 (a_{12} + \sqrt{a_{11} a_{22}}) + 2 X_1 X_3 (a_{13} + \sqrt{a_{11} a_{33}}) \end{aligned}$$

et donc avec (4.20) et (4.22)

$$a(X, X) \geqslant 0 \quad \forall X_i \geqslant 0 .$$

2^{e} cas : $A_{\min} > 0$, alors $A_{ii} > 0$, $\forall i$. On écrit la décomposition de Jacobi de $a(X, X)$

$$\begin{aligned} a(X, X) = {} & \frac{1}{a_{11}} (a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3)^2 + \\ & + \frac{a_{11}}{A_{33}} \left(\frac{X_2 A_{33}}{a_{11}} - \frac{A_{23} X_3}{a_{11}} \right)^2 + \frac{|a|}{A_{33}} X_3^2 . \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dans ce cas

$$F_{\max} = \text{Max} \, (\sqrt{A_{11} A_{12}} - A_{12}, \sqrt{A_{11} A_{33}} - A_{13}, \sqrt{A_{22} A_{33}} - A_{23}) .$$

Supposons par exemple avec (4.21) que

$$F_{\max} = \sqrt{A_{22} A_{33}} - A_{23} \geqslant 0 ;$$

grâce à l'identité

$$a_{11} |a| = (\sqrt{A_{22} A_{33}} + A_{23})(\sqrt{A_{22} A_{33}} - A_{23}) , \tag{4.24}$$

on a :
ou bien $\sqrt{A_{22} A_{33}} + A_{23} \geqslant 0$. Dans ce cas $|a| \geqslant 0$ et $a(X, X) \geqslant 0$ comme somme de termes non négatifs,

ou bien $\sqrt{A_{22} A_{33}} + A_{23} < 0$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} A_{23} &< 0 \\ |a| &< 0 \end{aligned}$$

$a(X, X)$ peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} a(X, X) = {} & \frac{1}{a_{11}} (a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3)^2 \\ & + \frac{a_{11}}{A_{33}} \left(\frac{X_2 A_{33}}{a_{11}} - \frac{A_{23} X_3}{a_{11}} + \sqrt{-\frac{|a|}{a_{11}}} X_3 \right) \\ & \qquad \left(\frac{X_2 a_{33}}{a_{11}} - \frac{A_{23} X_3}{a_{11}} - \sqrt{\frac{-|a|}{a_{11}}} X_3 \right) . \end{aligned}$$

La première parenthèse est non négative (car $A_{23} < 0$). La 2^{e} parenthèse sera non négative si

$$\frac{A_{23}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{-|a|}{a_{11}}} \leqslant 0$$

i.e. si (4.25) : $\dfrac{-|a|}{a_{11}} < \dfrac{A_{23}^2}{a_{11}^2}$.

Or, grâce à (4.24)

$$A_{23}^2 = A_{22} A_{33} - a_{11} |a|$$

et (4.25) est équivalent à $0 \leqslant \dfrac{A_{22} A_{33}}{a_{11}}$, ce qui est bien vérifié et $a(X, X) \geqslant 0$ comme somme de termes non négatifs.

Dans tous les cas

$$a(X, X) \geqslant 0 , \quad \forall X_i \geqslant 0 .$$

II) Preuve de la condition nécessaire. On suppose

$$a(X, X) = \sum_i a_{ii} X_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} X_i X_j \geqslant 0 , \quad \forall X_i \geqslant 0 .$$

La preuve de (4.19) est évidente. Pour (4.20), montrons par exemple

$$\sqrt{a_{11} a_{22}} + a_{12} \geqslant 0 .$$

On fait $X_3 = 0$ dans $a(X, X)$.

$$\begin{aligned} a(X, X) &= a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + 2 a_{12} X_1 X_2 \geqslant 0 , \quad \forall X_1, X_2 \geqslant 0 \\ &= (\sqrt{a_{11}} X_1 - \sqrt{a_{22} X_2})^2 + 2 X_1 X_2 (a_{12} + \sqrt{a_{11} a_{22}}) . \end{aligned}$$

En prenant $X_1 = \sqrt{\dfrac{a_{22}}{a_{11}}}\, X_2$ on obtient

$$a_{12} + \sqrt{a_{11}\, a_{22}} \geqslant 0 .$$

Montrons (4.21).

1^{er} cas : $A_{\min} \leqslant 0$, alors $\exists i_0$ tel que $A_{i_0 i_0} \leqslant 0 \Rightarrow \exists j_0$ tel que

$$F_{i_0 j_0} = 0 \quad (cf.\ \text{la définition des } F_{ij})$$
$$\Rightarrow F_{\max} \geqslant 0 .$$

2^{e} cas : $A_{\min} > 0$. Dans ce cas

$$F_{\max} = \operatorname{Max}\left(\sqrt{A_{11}\, A_{22}} - A_{12}, \sqrt{A_{11}\, A_{33}} - A_{13}, \sqrt{A_{22}\, A_{33}} - A_{23}\right)$$

ou bien $\exists\,(i_0, j_0)$ tel que $A_{i_0 j_0} \leqslant 0$, ce qui entraîne

$$F_{\max} \geqslant 0 ,$$

ou bien $\forall i < j, A_{ij} > 0$ et en particulier $A_{23} > 0$.

Dans (4.23) on fait $X_2 = \dfrac{A_{23}}{A_{33}} X_3 > 0$, il vient

$$a(X, X) = a_{11}\left(X_1 - \frac{A_{13}}{A_{33}} X_3\right)^2 + \frac{|a|}{A_{33}} X_3^2 \geqslant 0 .$$

On fait

$$X_1 = \frac{A_{13}}{A_{33}} X_3 \geqslant 0$$

alors

$$|a| \geqslant 0 .$$

Or

$$a_{11}|a| = \left(\sqrt{A_{22}\, A_{33}} + A_{23}\right)\left(\sqrt{A_{22}\, A_{33}} - A_{23}\right) \geqslant 0 .$$

$\sqrt{A_{22}\, A_{33}} + A_{23} \geqslant 0$ entraîne

$$F_{23} = \sqrt{A_{22}\, A_{33}} - A_{23} \geqslant 0$$

d'où

$$F_{\max} \geqslant 0 .$$

Grâce au théorème 4.1, nous pouvons conclure en explicitant les inégalités qui caractérisent la 1-rang convexité.

THEOREME 4 2 *Soit f de classe C^2, isotropique, alors f est 1-rang convexe si et seulement si*

$$G_{ii} \geqslant 0$$

$$B_{ij} \geqslant 0 \quad (i \neq j)$$

$$\sqrt{G_{ii}\, G_{jj}} + G_{ij} + \frac{G_i - G_j}{\lambda_i - \lambda_j} \geqslant 0$$

$$\sqrt{G_{ii}\, G_{jj}} - G_{ij} + \frac{G_i + G_j}{\lambda_i + \lambda_j} \geqslant 0 \quad (i \neq j)$$

$$F^l_{\max} \geqslant 0\,, \quad l = 1, 2, 3, 4\,,$$

ou $F^l_{\max}$ est le réel defini par (4 18) associé aux differents coefficients a^l_{ij} décrits dans (4 14)-(4 17)

Nous remercions J M Ball pour ses diverses remarques sur la premiere version de ce travail

BIBLIOGRAPHIE

[1] J BALL, *Existence theorems in nonlinear elasticity,* Arch Rational Mech Anal , (1976), 337-403

[2] P G CIARLET, *Quelques remarques sur des problemes d'existence en elasticite non lineaire,* Rapport INRIA (1983)

[3] P G CIARLET, G GEYMONAT, *Sur les lois de comportement en elasticite non lineaire compressible,* C R Acad Sci Paris, serie A (1982), 423-426

[4] P G CIARLET, J NECAS, *Unilateral problems in nonlinear three-dimensional elasticity,* Publications du Laboratoire d'Analyse Numerique Universite de Paris VI (1984)

[5] G STRANG, *The polyconvexification of $F(\nabla u)$,* Research Report CMA-RO, 9-83 of the Australian National University

[6] R V KOHN, G STRANG, *Explicit relaxation of a variational problem in optimal design,* to appear in Bull Amer Math Soc

[7] BUSEMANN, SHEPHARD, *Convexity on non convex sets,* Proc Coll on Convexity, Copenhagen (1965)

[8] KNOWLES, STERNBERG, *On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatic plane strain,* Arch Rational Mech (1976), 321-336

[9] G AUBERT, R TAHRAOUI, *Sur la faible fermeture de certains ensembles de contrainte en elasticite non lineaire plane,* C R Acad Sci Paris, serie A (1980), 537-540, et a paraître dans Arch Rational Mech

[10] G. AUBERT, R. TAHRAOUI, *Conditions nécessaires de faible fermeture et de 1-rang convexité en dimension 3.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Série II, T 34, (1985).

[11] C. B. MORREY Jr., *Multiple integrals in the calculus of variations,* Springer, Berlin, 1966.

[12] P. MARCELLINI, *Quasiconvex quadratic forms in two dimensions,* Applied. Math. Optimiz., 11 (1984), 183-189.

[13] F. J. TERPSTRA, *Die darstellung biquadratischer formen als summen von quadraten mit anwendung auf die variations rechnung,* Math. Ann., 116 (1938), 166-180.

[14] D. SERRE, *Formes quadratiques et calcul des variations,* J. Math. Pures Appl., 62 (1983), 177-196.

[15] B. DACOROGNA, *Remarques sur les notions de polyconvexité,* quasiconvexité et convexité de rang 1. Preprint de EPFL, Lausanne (1985), et à paraître dans J. Math. Pures Appl.

[16] J. BALL, *Differentiability properties of symmetric and isotropic functions,* Duke Math. J., vol. 51, n° 3, (1984), 699-728.

[17] H. C. SIMPSON, S. J. SPECTOR, *On copositive matrices and strong ellipticity for isotropic materials,* Arch. Rational. Mech. Anal. (1983), 55-68.

[18] E. L. GURVICH, A. I. LURIE, *Meckaniki Tverdogotela* (1980), 110-116.

[19] G. AUBERT, *On a counterexample of a rank 1 convex function which is not polyconvex in the case $n = 2$,* à paraître.

[20] R. TEMAM, *A characterization of quasi-convex functions,* Applied Mathematics and Optimization, 8 (1982), 287-291.