

SALEM MATHLOUTHI

**Applications numériques de la dualité en
mécanique hamiltonienne**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 21, n° 3 (1987), p. 487-520

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1987__21_3_487_0

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS NUMÉRIQUES DE LA DUALITÉ EN MÉCANIQUE HAMILTONIENNE (*)

Salem MATHLOUTHI ⁽¹⁾

Communiqué par I. EKELAND

Résumé. — Nous introduisons une méthode numérique pour la recherche des solutions périodiques d'un système Hamiltonien, appartenant à un niveau d'énergie donné. Nous nous basons sur la formulation duale introduite par F. Clarke et I. Ekeland [4, 5]. Enfin, nous illustrons cette méthode par une application à un exemple de Hénon [8], Hénon et Heiles [9].

Abstract. — We introduce a numerical method for finding periodic solutions to Hamiltonian system, belonging to a given level of energy. We rely on a dual formulation introduced by F. Clarke and I. Ekeland [4, 5]. Finally we illustrated this method by an example of Hénon [8], Hénon and Heiles [9].

I. INTRODUCTION

L'évolution de certains systèmes conservatifs de mécanique et de physique est décrite par les équations de Hamilton suivantes :

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x, p), & 1 \leq i \leq n \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x, p), & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, représente les variables de position.
- $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, représente les variables du moment.
- n : le nombre de degrés de liberté.
- $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, le Hamiltonien, représente l'énergie du système.

Ekeland et Lasry ont montré, dans un article publié en 1980 [6], sous certaines hypothèses sur H , l'existence d'au moins n trajectoires périodiques

(*) Reçu en mai 1986.

(1) CE.RE.MA.DE, Université de Paris-Dauphine, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775, Paris Cedex 16 et École Normale Supérieure de Bizerte, Tunisie.

distinctes de (\mathcal{H}) qui appartiennent à une surface d'énergie de niveau h , et ceci quel que soit h dans \mathbb{R}^+ .

A la suite de cet article, Ambrosetti et Mancini [1] ont publié une deuxième démonstration de ce résultat avec une légère amélioration. La démonstration donnée par ces derniers donnera, comme nous allons le voir par la suite, une très bonne méthode pour la recherche numérique d'une trajectoire périodique solution approchée de (\mathcal{H}) .

II. RÉSULTAT THÉORIQUE

Soient H une application de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R} et $S = \{z \in \mathbb{R}^{2n}, H(z) = h > 0\}$, on suppose les hypothèses suivantes :

- $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$
- $(H(0) = H'(0) = 0)$ et $(\forall z \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}) (H(z) > 0)$
- S : Variété de classe C^2
- $(\forall z \in S) (H'(z) \neq 0)$
- $S = \partial C$, C compact et strictement convexe de \mathbb{R}^{2n}
- $0 \in \overset{\circ}{C}$.

THÉORÈME (Ekeland et Lasry) : *Sous les hypothèses ci-dessus, et si on suppose de plus qu'il existe r, R dans \mathbb{R}^+ tel que :*

$$r < R, \quad R < \sqrt{2} \cdot r \quad \text{et} \quad B_r \subset \overset{\circ}{C} \subset B_R.$$

Alors, il existe au moins n trajectoires périodiques distinctes du système Hamiltonien (\mathcal{H}) qui appartiennent à la surface d'énergie S .

Remarques :

α) Si H est β -homogène ($\beta > 0$), il nous suffit de prouver l'existence de n trajectoires, solutions de (\mathcal{H}) , périodiques de périodes minimales 1. En effet, soient z_1, z_2, \dots, z_n ces n trajectoires :

$$\frac{d}{dt} (H(z_i(t))) = (\dot{z}_i(t), H'(z_i(t)))_{\mathbb{R}^{2n}} = (JH'(z_i(t)), H'(z_i(t)))_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

avec $J \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0_n : \text{l'application nulle de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{R}^n \\ I_n : \text{l'application identité de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{R}^n \end{array}$$

d'où :
$$\left(\frac{d(H(z_i(t)))}{dt} \right) = 0, \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

Donc :
$$(\forall t \in [0, 1]), \quad (H(z_i(t)) = h_i) \quad (h_i \in \mathbb{R}).$$

Si on pose $W_i(t) = \left(\frac{h_i}{h}\right)^{-1/\beta} z_i \left(\left(\frac{h_i}{h}\right)^{(2-\beta)/\beta} t\right)$ pour tout $t \in [0, 1]$, on aura ce qu'il faut pour le théorème.

β) L'ensemble des trajectoires périodiques solutions de (\mathcal{H}) ne dépend pas du choix particulier de H , pourvu que H vérifie :

$$(H'(z) \neq 0) \quad (\forall z \in S) \quad (*)$$

III. MÉTHODE THÉORIQUE

C'est la méthode qui a été utilisée par Ambrosetti et Mancini pour la démonstration de la deuxième version du théorème d'Ekeland et Lasry [6]. En ce qui concerne ce travail, on retiendra seulement les étapes qui nous seront utiles pour l'application numérique.

Étape 1 : Cette étape, qui est une conséquence de la remarque β), consiste à ramener le problème à énergie fixe à un problème à période T fixe ($T = 1$, par exemple). Pour se faire on utilisera la méthode de Rabinowitz, qui a été utilisée aussi dans [1] et qui consiste à introduire la fonction jauge associée à la surface strictement convexe S , qu'on notera par $H_j(\cdot)$, à cette fonction jauge on associe un nouvel hamiltonien $H_1(\cdot) = H_j^\beta(\cdot)$ avec ($\beta > 1, \beta \neq 2$), il est connu que H_j a les propriétés suivantes :

- H_j , (resp. H_1) est de classe $C^2(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\})$
- H_j , (resp. H_1) est strictement convexe
- H_j , (resp. H_1) est homogène de degré 1 (resp. de degré β)
- $\forall z \in S, H_j(z) = H_1(z) = 1$
- $H'_j(z) = \frac{1}{(\bar{z}, H'(\bar{z}))} H'(\bar{z})$ avec $\bar{z} = z/H_j(z) \in S$
- $\exists m_1, m_2 > 0 : m_1|z| \leq H_j(z) \leq m_2|z|$ (resp. $m_1^\beta|z|^\beta \leq H_1(z) \leq m_2^\beta|z|^\beta$) $\forall z \in \mathbb{R}^{2n}$.

D'autre part, pour se ramener à une solution de (\mathcal{H}), on utilisera le lemme démontré dans [6], suivant :

LEMME : Soient deux Hamiltoniens H_1 et H_2 tels que :

$$H_1(u) = \text{Cte}, \quad H_2(u) = \text{Cte}, \quad \forall u \in S$$

$$H'_i(u) \neq 0, \quad \forall u \in S, \quad i = 1, 2.$$

Alors, il existe une fonction $\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et vérifiant :

$$H'_2(u) = \alpha(u) \cdot H'_1(u), \quad \forall u \in S$$

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha(u) \leq \alpha_1, \quad \forall u \in S.$$

(¹) Voir Ekeland et Lasry [6].

De plus, si u_1 est une trajectoire périodique, appartenant à la surface d'énergie S , solution du système Hamiltonien associé à H_1 ; alors, $\varphi(s) = \int_0^s \frac{dt}{\alpha(u_1(t))} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un C^1 -difféomorphisme et $u_2 = u_1 \circ \varphi^{-1}$ est une trajectoire T -périodique de S solution du système Hamiltonien associé à H_2 .

Dans toute la suite, on travaillera avec H_1 au lieu de H et on le notera encore par H ; le nouveau système sera donc :

$$\begin{cases} \dot{x} = JH'(x) \\ x(0) = x(1) \end{cases}$$

Étape 2 : Principe d'action dual.

Le principe d'action dual a été introduit par Clarke et Ekeland [4, 5].

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{*+}$, $(\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1)$. On pose :

$$E = \left\{ u \in L^\alpha(0, 1, \mathbb{R}^{2n}); \int_0^1 u = 0 \right\}$$

muni de la norme $\|u\| = \left(\int_0^1 |u|^\alpha \right)^{1/\alpha}$, ($u \in E$) et on considère la fonctionnelle F suivante :

$$F : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{2} \left(Ju, \int_0^1 u(s) ds \right) + G(-Ju)$$

où G représente la transformée de Legendre de H et J l'application linéaire définie au paragraphe II.

Il est facile de voir que G est α -homogène. D'après [7], F est de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ et on a le principe d'action dual suivant :

THÉORÈME (Principe d'action dual) : *Sous les hypothèses ci-dessus, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) $(u \in E) \quad (F'(u) = 0 \text{ dans } (E)^*)$
- 2) $\exists \xi \in \mathbb{R}^{2n}/z(\cdot) \equiv \int_0^1 u(s) ds + \xi \text{ est solution de } (\mathcal{H})$.

Étape 3 : Points critiques.

α) On pose :

$$(u \in E) \left[h(u) = \langle F'(u), u \rangle^{(1)} = \int_0^1 \left[Ju, \int_0^1 u(s) ds \right] + G(-Ju) \right]$$

$$M = \{u \in E \setminus \{0\}; h(u) = 0\} .$$

⁽¹⁾ \langle , \rangle produit de dualité de L^β et L^α .

On a alors :

$$(\forall u \in M) \left(F(u) = \frac{2-\alpha}{2} \int_0^1 G(-Ju) = \frac{\alpha-2}{2\alpha} \int_0^1 \left[Ju, \int_0^1 u(s) ds \right] \right)$$

$$(\forall u \in M) \left(\langle h'(u), u \rangle = \alpha(\alpha-2) \int_0^1 G(-Ju) \neq 0 \right).$$

Ce qui donne en particulier que M est une variété de classe C^1 .

β) LEMME : • $\beta > 2$: la variété M est un fermé de E

• $1 < \beta < 2$: pour tout $x_0 \in M$, la variété $M_{x_0} = \{x \in M / F(x) \leq F(x_0)\}$ est un fermé de E .

Démonstration : h est continue, il nous suffit alors, dans le cas $\beta > 2$, de montrer que 0 est un point isolé de $h^{-1}(0)$. Pour cela, on a besoin des deux inégalités suivantes :

$$(3.1) \quad \left\| \int_0^1 u(s) ds \right\|_{L^\beta([0,1], \mathbb{R}^{2n})} \leq \|u\|_{L^\alpha([0,1], \mathbb{R}^{2n})}; \quad (\forall u \in L^\alpha([0,1], \mathbb{R}^{2n}))$$

$$(3.2) \quad \exists m'_1, m'_2; \quad m'_1 |z|^\alpha \leq G(z) \leq m'_2 |z|^\alpha; \quad (\forall z \in \mathbb{R}^{2n}).$$

Par conséquent :

$$h(u) \geq - \|u\|_{L^\alpha([0,1], \mathbb{R}^{2n})}^2 + m'_1 \|u\|_{L^\alpha([0,1], \mathbb{R}^{2n})}^\alpha; \quad (\forall u \in E).$$

Comme $1 < \alpha < 2$, on déduit que h admet un minimum local strict en 0.

C.q.f.d.

Si $1 < \beta < 2$, on utilisera encore la continuité de h et celle de F :

$$(x_0 \in M); \quad M_{x_0} = h^{-1}(0) \cap F^{-1}(\{x \in E / F(x) \leq F(x_0)\})$$

C.q.f.d.

γ) Soit \bar{u} un point critique de $F|_M$, d'après les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker (voir Minoux [11]), il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que : $F'(\bar{u}) = \mu h'(\bar{u})$.

Multiplions les deux membres par \bar{u} :

$$0 = \langle F'(\bar{u}), \bar{u} \rangle = \mu \langle h'(\bar{u}), \bar{u} \rangle.$$

Or $\bar{u} \in M$, donc $\langle h'(\bar{u}), \bar{u} \rangle \neq 0$, par conséquent $\mu = 0$ et on a l'équivalence suivante :

$$(u \in M) \text{ (} u \text{ est un point critique de } F|_M \Leftrightarrow u \text{ est un point critique de } F \text{)}.$$

η) Dans le cas où $1 < \beta < 2$, on montre dans [3] que le minimum de F sur E existe et est atteint. Par conséquent, le minimum de F sur M est atteint. Pour $\beta > 2$, on montre dans [1], [2] que $F|_M$ vérifie la condition de Palais-Smale, et, du fait que $F|_M$ est minoré et M est un fermé, il est clair que le minimum sur M est atteint.

ξ) Un moyen pratique pour trouver un point critique de F est la minimisation de F sur M .

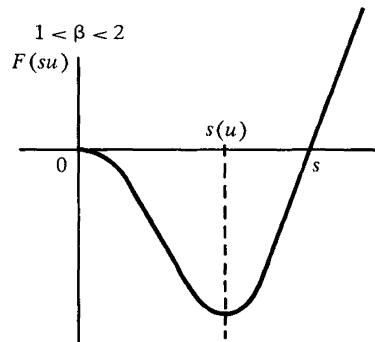
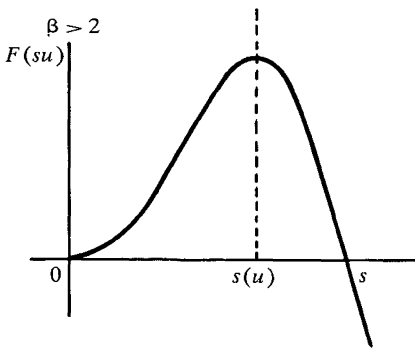
Remarque : Le problème de point critique de F se ramène alors à un problème variationnel :

$$(P) = \begin{cases} \text{Min } F(x) \\ x \in M \end{cases}$$

(P) est un problème de minimisation avec contrainte non linéaire (la variété M). Comment peut-on alors ramener un point de E à la variété M ?

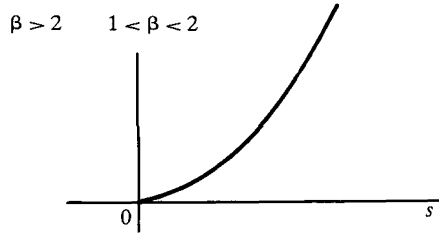
Soit $u \in E$, une simple étude de l'application, qui à s fait correspondre $F(su)$ de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , nous donne les résultats suivants :

$$a) \int_0^1 \left(Ju(t), \int_0^t u(s) ds \right) dt < 0$$



$$\text{avec : } s(u) = \left[\frac{-\alpha \int_0^1 G(-Ju(t)) dt}{\int_0^1 \left(Ju(t), \int_0^t u(s) ds \right) dt} \right]^{1/(2-\alpha)}$$

$$b) \int_0^1 \left(Ju(t), \int_0^t u(s) ds \right) dt \geq 0$$



Il est facile de voir que $s(u) u \in M$ (dans le cas a) et que $s(u) = 1$ pour $u \in M$; par conséquent, on a intérêt à initialiser la minimisation par un point qui vérifie la condition de a) ; il est facile aussi de voir que :

$$\begin{aligned}
 u \in M, \quad F(u) &= \frac{2 - \alpha}{2} \int_0^1 G(-Ju(t)) dt \\
 &= \frac{\alpha - 2}{2\alpha} \int_0^1 \left(Ju(t), \int_0^t u(s) ds \right) dt
 \end{aligned}$$

et du fait qu'on minimise, la condition sera toujours vérifiée dans le cas $1 < \beta < 2$ (resp. localement vérifiée dans le cas $\beta > 2$).

IV. RECHERCHE NUMÉRIQUE D'UN POINT CRITIQUE

1. Position du problème (P)

$$E = \left\{ u \in L^\alpha(0, 1, \mathbb{R}^{2n}) ; \int_0^1 u = 0 \right\}, \quad 1 < \alpha$$

$$D = \left\{ u \in E ; \int_0^1 \left(Ju, \int_0^t u(s) ds \right) < 0 \right\}$$

$$M = \{ u \in E \setminus \{0\} ; \langle F'(u), u \rangle = 0 \}$$

$$F : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{2} \left(Ju, \int_0^t u(s) ds \right) + \int_0^1 G(-Ju)$$

$$s : D \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$u \rightarrow \left(\frac{-\alpha \int_0^1 G(-Ju)}{\int_0^1 \left(Ju, \int_0^t u(s) ds \right)} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}}$$

$$F|_M(u) = \frac{2-\alpha}{2} \int_0^1 G(-Ju) = \frac{\alpha-2}{2\alpha} \int_0^1 \left(Ju, \int_0^\cdot u \right)$$

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Min } F(u) \\ u \in M. \end{cases}$$

2. Position du problème approché (P^N)

a) *Discrétisation de l'espace E*

Afin de résoudre (P), on va l'approcher par une suite de problèmes de minimisation en dimension finie (P^N):

Pour cela, on se donne un entier N , destiné à tendre vers l'infini, et on considère l'espace des fonctions étagées \tilde{u} qui ont les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(\cdot) \equiv \text{Cte sur les intervalles de la forme :} \\ \left[k + \frac{i-1}{N}, k + \frac{i}{N} \right[, \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (i \in \{1, 2, \dots, n\}) \right) \\ \int_0^1 \tilde{u}(s) ds = 0. \end{array} \right\} \quad (*)$$

Remarque : Par construction de \tilde{u} , sa restriction à $[0, 1]$, $\tilde{u}|_{[0, 1]}$, peut être représentée par un vecteur de $(\mathbb{R}^N)^{2n}$.

Notations : Dans toute la suite de ce travail, on notera par :

— u, v, w, x, y et z les vecteurs de $(\mathbb{R}^N)^{2n}$ et respectivement par $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{x}, \tilde{y}$ et \tilde{z} leurs fonctions étagées (voir (*) et remarque)

$$u \in (\mathbb{R}^N)^{2n} : \begin{cases} u = (u^1, u^2, \dots, u^{2n}) \quad \text{où } u^i = (u_1^i, u_2^i, \dots, u_N^i) \in \mathbb{R}^N \\ u_i = (u_1^i, u_2^i, \dots, u_i^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases}$$

$$(t_i)_{i=0, N-1} ; \quad t_i = \frac{i}{N}.$$

Suite à cette notation, l'identification des fonctions étagées définies par (*) aux éléments de $(\mathbb{R}^N)^{2n}$ sera comme suit :

$$u = (u^1, u^2, \dots, u^{2n}) \in (\mathbb{R}^N)^{2n} \rightarrow \tilde{u}(t) = u_i \quad \text{pour } t \in [t_{i-1}, t_i[$$

$$\sum_{i=1}^N u_i = 0 \rightarrow \int_0^1 \tilde{u}(s) ds = 0.$$

On posera alors $E_N = \left\{ u \in (\mathbb{R}^N)^{2n} ; \sum_{i=1}^N u_i = 0 \right\}$ qui sera identifié dans toute la suite, à l'espace des fonctions définies par (*).

Enfin, on définit (P^N) par :

$$(P^N): \begin{cases} \text{Min } F |_{E_N}(u) = F_N(u) \\ u \in M \cap E_N = M_N. \end{cases}$$

b) Expression de la variété M_N et de la fonctionnelle F_N

Soit $u \in E_N$:

$$F_N(u) = F(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(J\tilde{u}, \int_0^\cdot \tilde{u} \right) + \int_0^1 G(-J\tilde{u}).$$

Après avoir développé les intégrales, on aboutit aux résultats suivants :

$$\int_0^1 G(-J\tilde{u}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(-Ju_i) = K(u)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(J\tilde{u}, \int_0^\cdot \tilde{u} \right) = \frac{1}{2} (Au, u)$$

avec

$$A = \frac{1}{2N^2} \begin{bmatrix} 0_{nN} & \begin{matrix} -L & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -L \end{matrix} \\ \begin{matrix} L & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & L \end{matrix} & 0_{nN} \end{bmatrix} \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^N)^{2n}, (\mathbb{R}^N)^{2n})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

Ce qui donne :

$$F_N(u) = \frac{1}{2} (Au, u) + K(u)$$

$$M_N = \{u \in E_N \setminus \{0\} ; (Au, u) + \alpha K(u) = 0\}$$

$$D_N = D \cap E_N = \{u \in E_N, (Au, u) < 0\}$$

$$s_N(u) = s(\tilde{u}) = \left(\frac{-\alpha K(u)}{(Au, u)} \right)^{1/(2-\alpha)} ; \quad (u \in D_N).$$

3. Existence d'une solution de (P^N)

Remarques :

α) Les propriétés topologiques de la variété M sont conservées pour M_N .

β) La fonctionnelle $F_N|_{M_N}$ est aussi minorée.

PROPOSITION : (P^N) admet une solution $\bar{x} \in M_N$, de plus :

$$F'_N(\bar{x}) = 0 \quad \text{dans} \quad (E_N)^*.$$

Démonstration : Si $1 < \beta < 2$, ($\alpha > 2$), alors il existe $c > 0$ tel que :

$$(\forall y \in E), \quad F(y) \geq -c.$$

En particulier pour les éléments de M

$$y \in M; \quad F(y) = \frac{2-\alpha}{2} \int_0^1 G(-Jy(t)) dt \geq -c$$

d'où :

$$\int_0^1 G(-Jy(t)) dt \leq \frac{2}{\alpha-2} c.$$

D'autre part, (3.2) nous implique :

$$m'_1 \int_0^1 |y(t)|^\alpha dt \leq \int_0^1 G(-Jy(t)) dt \leq \frac{2}{\alpha-2} c.$$

D'où M est bornée dans $L^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^{2n})$. Or $M_N = M \cap E_N$, ce qui implique que M_N est relativement compact ou encore $M_N \cup \{0\}$ est compact.

Si $\beta > 2$, ($1 < \alpha < 2$), on a :

$$\begin{aligned} x \in M_N; \quad F_N(x) &= \frac{2-\alpha}{2} \int_0^1 G(-J\bar{x}(t)) dt \\ &\geq m'_1 \frac{2-\alpha}{2} \left[\int_0^1 |\bar{x}(t)|^\alpha dt \right] \\ &\geq m'_1 \frac{2-\alpha}{2} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i|^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, dans les deux cas, toute suite minimisante $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(\mathbb{R}^N)^{2n}$. Par conséquent, elle admet une sous-suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente

dans $(\mathbb{R}^N)^{2n}$. Soit \bar{x} sa limite. Comme M_N est fermé et F_N continue, on a :

$$\bar{x} \in M_N \text{ et } \text{Min}_{u \in M_N} F_N(u) = F_N(\bar{x}).$$

D'après les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker (voir [11]), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$F'_N(\bar{x}) = \lambda(2A\bar{x} + \alpha K'(\bar{x})) \text{ dans } (E_N)^*.$$

Appliquons \bar{x} de deux côtés :

$$\begin{aligned} (F'_N(\bar{x}) ; \bar{x}) &= \lambda(2(A\bar{x}, \bar{x}) + \alpha(K'(\bar{x}), \bar{x})) \\ 0 &= \lambda(2(A\bar{x}, \bar{x}) + \alpha^2 K(\bar{x})) \\ 0 &= \lambda(-2\alpha K(\bar{x}) + \alpha^2 K(\bar{x})) \\ &= \lambda\alpha(\alpha - 2) K(\bar{x}). \end{aligned}$$

Or $\bar{x} \in M_N$ et $\alpha \neq 2$, d'où $\alpha(\alpha - 2) K(\bar{x}) \neq 0$, donc $\lambda = 0$.

C.q.f.d.

Remarque : Par construction de E_N et pour les N de la forme 2^l , $l \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$E_2 \subset E_{2^2} \subset \dots \subset E_{2^l} \subset \dots \subset E$$

ainsi

$$F(\tilde{x}_2) \geq F(\tilde{x}_{2^2}) \geq \dots \geq F(\tilde{x}_{2^l}) \geq \dots \geq F(\bar{x})$$

où (x_{2^l}) est solution de (P_{2^l}) et \bar{x} est solution de (P) .

D'autre part, pour $\beta > 2$:

$$(N \in \mathbb{N}), \quad \left(F_N(x) = F(\tilde{x}) \geq \frac{2-\alpha}{2} \|\tilde{x}\|_{L^\alpha(0,1, \mathbb{R}^{2n})}^\alpha \right) \quad \forall x \in M_N.$$

Par conséquent, $(\tilde{x}_{2^l})_{l \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\alpha(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$.

Pour $1 < \beta < 2$, on a $(\tilde{x}_{2^l})_{l \in \mathbb{N}^*} \subset M_{\tilde{x}_2}$ qui est bornée dans $L^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^{2n})$.

4. Relation entre les solutions de $F'_N(x) = 0$ (dans $(E_N)^*$) et le système Hamiltonien.

Soit $(p_k)_{k=1, N} \subset (\mathbb{R}^N)^{2n}$, avec :

$$p_k = \left(\underset{1}{\overset{N \text{ fois}}{0}} \text{---} \underset{1}{0} ; \text{---} \text{---} \text{---} \underset{k}{1} \text{---} \underset{k}{1} ; \text{---} \text{---} \text{---} \underset{1}{0} \text{---} \underset{1}{0} \right), \quad k = 1, 2n.$$

On vérifie facilement que :

$$u \in E_N \Leftrightarrow u \in (\mathbb{R}^N)^{2n} \text{ et } (p_k, u) = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, 2n\}.$$

Ainsi on a :

$$E_N = \{u \in (\mathbb{R}^N)^{2n}; \quad (p_k, u) = 0, \quad k = 1 \text{ à } 2n\}.$$

D'après les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker :

$$\begin{aligned} & (u \in E_N) \quad F'_N(u) = 0 \quad \text{dans } (E_N)^* \\ \Rightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} / F'_N(u) = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i p_i \\ \Rightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} / Au + K'(u) = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i p_i \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$2n\text{-équations} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2N^2} L(u^{n+1}) + \frac{1}{N} D_{n+1}(u) = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1) \in \mathbb{R}^N \\ \vdots \\ \vdots \\ -\frac{1}{2N^2} L(u^{2n}) + \frac{1}{N} D_{2n}(u) = (\lambda_n, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^N \\ \vdots \\ -\frac{1}{2N^2} L(u^1) - \frac{1}{N} D_1(u) = (\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^N \\ \vdots \\ \vdots \\ -\frac{1}{2N^2} L(u^n) - \frac{1}{N} D_n(u) = (\lambda_{2n}, \dots, \lambda_{2n}) \in \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

avec :

$$D_l(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_l} (-Ju_1) \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial x_l} (-Ju_N) \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2n$$

et

$$L(u_l) = \begin{pmatrix} -\sum_{j=2}^N u_j^l \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{i-1} u_j^l - \sum_{j=i+1}^N u_j^l \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{N-1} u_j^l \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2n.$$

Pour $1 \leq i \leq N$, regroupons les i -ièmes lignes de chaque équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2N^2} \sum_{j=1}^{i-1} u_j^{n+1} + \frac{1}{2N^2} \sum_{j=i+1}^N u_j^{n+1} + \frac{1}{N} \frac{\partial G}{\partial x_{n+1}} (-Ju_i) = \lambda_1 \\ \vdots \\ -\frac{1}{2N^2} \sum_{j=1}^{i-1} u_j^{2n} + \frac{1}{2N^2} \sum_{j=i+1}^N u_j^{2n} + \frac{1}{N} \frac{\partial G}{\partial x_{2n}} (-Ju_i) = \lambda_n \\ \frac{1}{2N^2} \sum_{j=1}^{i-1} u_j^1 - \frac{1}{2N^2} \sum_{j=i+1}^N u_j^1 - \frac{1}{N} \frac{\partial G}{\partial x_1} (-Ju_i) = \lambda_{n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2N^2} \sum_{j=1}^{i-1} u_j^n - \frac{1}{2N^2} \sum_{j=i+1}^N u_j^n - \frac{1}{N} \frac{\partial G}{\partial x_n} (-Ju_i) = \lambda_{2n} \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2N^2} \left(\sum_{j=1}^{i-1} -Ju_j + \sum_{j=i+1}^N Ju_j \right) + \frac{1}{N} JG'(-Ju_i) = \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) \\ & \quad \Downarrow \\ & \frac{1}{2N^2} \left(\sum_{j=1}^{i-1} -u_j + \sum_{j=i+1}^N u_j \right) + \frac{1}{N} G'(-Ju_i) = -J\lambda \\ & \quad \Downarrow \\ & -\frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{i-1} u_j \right) - \frac{u_i}{2N} + G'(-Ju_i) = N(-J\lambda) = \eta_N. \end{aligned}$$

Utilisons l'identification déjà mentionnée plus haut, on obtient :

($\forall i \in \{1, \dots, N\}$)

$$\left(- \int_0^{\frac{t_i + t_{i-1}}{2}} \tilde{u}(t) dt + G' \left(- J\tilde{u} \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \right) \right) = \eta_N.$$

Ajoutons de deux côtés le vecteur

$$- \int_0^1 \left(\int_0^t \tilde{u}(s) ds \right) dt = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} u_j = a_N$$

on aura :

($\forall i \in \{1, \dots, N\}$)

$$\left(- \pi\tilde{u} \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) + G' \left(- J\tilde{u} \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \right) \right) = \eta_N + a_N = \xi_N$$

où πu est une primitive de u de moyenne nulle i.e. :

$$\begin{aligned} \pi : E &\rightarrow C(0, 1, \mathbb{R}^{2n}) \\ u &\rightarrow \int_0^{\cdot} u(s) ds - \int_0^1 \left(\int_0^t u(s) ds \right) dt. \end{aligned}$$

Posons maintenant :

$$(**) \quad \tilde{z}(t) = \pi\tilde{u}(t) + \xi_N, \quad t \in [0, 1]$$

$\tilde{z}(\cdot)$ vérifie le système (\mathcal{H}_N) suivant :

$$(\mathcal{H}_N) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{z}} \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) = JH' \left(\tilde{z} \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \right) \\ \tilde{z}(0) = \tilde{z}(1). \quad \blacksquare \end{cases}$$

V. RÉSULTAT DE CONVERGENCE

Dans ce paragraphe, on va essayer de démontrer un résultat de convergence qui sera valable aussi pour les hamiltoniens non homogènes (et même pour le cas non-autonome).

Pour $\alpha > 1$, on pose $E = \left\{ u \in L^\alpha(0, 1, \mathbb{R}^{2n}); \int_0^1 u(t) dt = 0 \right\}$.

On considère toujours la même fonctionnelle F_N :

$$\begin{aligned} F_N : E_N &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\rightarrow \frac{1}{2} (Au, u) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(-Ju_i). \end{aligned}$$

Soit $(\tilde{x}_N(\cdot))_{N \in \mathbb{N}} \subset E$, la suite des fonctions étagées associées aux vecteurs $(x_N)_{N \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} E_N$, telle que

$$(\forall N \in \mathbb{N}^*) \quad (F'_N(x_N) = 0 \quad \text{dans} \quad (E_N)^*).$$

On fait les hypothèses suivantes :

- 1) $\tilde{x}_N(\cdot)$ est bornée dans $L^\alpha(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$.
- 2) G est convexe et on note par H sa transformée de Legendre.
- 3) $\exists \theta > 0, \exists s \in \mathbb{R}, (0 < s \leq \alpha)$ tel que :

$$(\forall h \in \mathbb{R}^{2n}) \quad (\|G'(h)\|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq m \|h\|_{\mathbb{R}^{2n}}^s \quad \text{et} \quad \|G'(h)\|_{\mathbb{R}^{2n}} \geq m' \|h\|_{\mathbb{R}^{2n}}^\theta).$$

Soit $(\tilde{z}_N(\cdot))_N$ la suite définie au paragraphe IV.4 (**), alors on a le résultat suivant :

THÉORÈME : *Supposons vraies les hypothèses ci-dessus, alors la suite*

$$(\tilde{x}_N(\cdot), \tilde{z}_N(\cdot))_{N \in \mathbb{N}}$$

admet une sous-suite uniformément convergente vers un couple $(\bar{x}(\cdot), \bar{z}(\cdot))$ tel que :

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}(\cdot) \equiv \bar{x}(\cdot) \\ \bar{x}(t) = JH'(\bar{z}(t)), \quad t \in [0, 1] \\ \bar{z}(0) = \bar{z}(1). \end{cases}$$

Démonstration : On pose :

$$\boxed{\xi_N(t) = -\pi \tilde{x}_N(t) + G'(-J\tilde{x}_N(t)), \quad \text{pour} \quad t \in [0, 1]} \quad (A_1).$$

On a vu au paragraphe IV.4) que :

$$\xi_N\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) = \xi_N, \quad \forall i = 1, N.$$

LEMME 1 : $(\xi_N)_N$ est bornée dans \mathbb{R}^{2n} .

Démonstration du lemme 1 : On calcule $\int_0^1 \xi_N(t) dt$ de deux manières, dans l'une on utilise la propriété $\int_0^1 \pi \tilde{x}_N(t) dt = 0$ et dans l'autre on utilise le fait que $\xi_N(\cdot)$ est affine sur les intervalles $[t_{i-1}, t_i[$ ($i = 1$ à N) :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \xi_N(t) dt &= - \int_0^1 \pi \tilde{x}_N(t) dt + \int_0^1 G'(-J\tilde{x}_N(t)) dt \\
&= 0 + \int_0^1 G'(-J\tilde{x}_N(t)) dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi_N(t) dt = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \xi_N\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \xi_N = \xi_N
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\|\xi_N\|_{\mathbb{R}^{2n}} &= \left\| \int_0^1 G'(-J\tilde{x}_N(t)) dt \right\|_{\mathbb{R}^{2n}} \\
&\leq \int_0^1 \|G'(-J\tilde{x}_N(t))\|_{\mathbb{R}^{2n}} dt \leq m \int_0^1 \|\tilde{x}_N(t)\|^s dt \\
&\leq m \left(\int_0^1 \|\tilde{x}_N(t)\|^\alpha dt \right)^{s/\alpha} = m \|\tilde{x}_N\|_{L^\alpha}^s.
\end{aligned}$$

C.q.f.d.

LEMME 2 : $(\xi_N(\cdot))_N$ admet une sous-suite uniformément convergente vers une fonction constante $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Démonstration du lemme 2 : Soit $(\xi_N)_N \in \mathbb{R}^{2n}$, une sous-suite convergente de $(\xi_N)_{N \in \mathbb{N}}$ vers un vecteur $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Pour $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, N$), on a :

$$\begin{aligned}
\|\xi_N(t) - \xi_N\|_{\mathbb{R}^{2n}} &= \left\| -\pi \tilde{x}_N(t) + G'(-J\tilde{x}_N(t)) + \pi \tilde{x}_N\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - G'\left(-J\tilde{x}_N\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) \right\| \\
&= \left\| -\pi \tilde{x}_N(t) + \pi \tilde{x}_N\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \right\|_{\mathbb{R}^{2n}} \\
&= \left\| \int_{\frac{t_i + t_{i-1}}{2}}^t \tilde{x}_N(s) ds \right\|_{\mathbb{R}^{2n}} \\
&= \left\| \int_0^1 1_{[t_i^+, t]}(s) \tilde{x}_N(s) ds \right\|_{\mathbb{R}^{2n}}, \quad t_i^+ = \frac{t_i + t_{i-1}}{2} \\
&\leq \frac{1}{N^{1/\beta}} \|\tilde{x}_N\|_{L^\alpha}, \quad (\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1)
\end{aligned}$$

d'où :
$$\sup_{t \in [0,1]} \|\xi_N(t) - \xi_N\|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq \frac{\|\bar{x}\|_{L^\alpha}}{N^{1/\beta}} \leq \frac{C}{N^{1/\beta}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

D'autre part

$$\|\xi_N - \bar{\xi}\|_{\mathbb{R}^{2n}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

C.q.f.d.

Soit $\bar{x}(\cdot)$ une limite faible d'une sous-suite de $(\tilde{x}_N(\cdot))_N$ dans $L^\alpha(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$, l'opérateur π est compact de $L^\alpha(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$ dans n'importe quel $L^p(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$ pour $(p > 1)$ (resp. dans $C(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$), c'est-à-dire, il transforme une suite faiblement convergente de $L^\alpha(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$ vers une suite fortement convergente dans $L^p(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$ (resp. une suite fortement convergente de $L^\alpha(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$ vers une suite uniformément convergente de $C(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$), ainsi $\pi\tilde{x}_N(\cdot)$ converge fortement vers $\pi\bar{x}(\cdot)$ dans les $L^p(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$ pour $p > 1$.

LEMME 3 :

$$\|H'(z)\|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq m' \|z\|_{\mathbb{R}^{2n}}^{1/\theta}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (m' > 0).$$

Démonstration du lemme 3 : Ce lemme se démontre facilement avec l'hypothèse 3- et la formule de réciprocity de Fenchel qui est la suivante :

$$z = H'(x) \Leftrightarrow x = G'(z).$$

C.q.f.d.

D'après ce dernier lemme, $JH'(\cdot)$ envoie L^p dans $L^{p\theta}$ pour tout $p > 0$, en particulier pour $p > \sup(1, 1/\theta) = p_0$; comme JH' est continue de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R}^{2n} , le théorème de Krasnoselskii (voir [7]) nous affirme la continuité de $JH'(\cdot)$ de $L^p(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$ dans $L^{p\theta}(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$ pour $p > p_0$. D'autre part, $(\pi\tilde{x}_N(\cdot) + \xi_N(\cdot))_N \subset L^p(0, 1, \mathbb{R}^{2n})$ et converge fortement dans cet espace vers $\pi\bar{x}(\cdot) + \bar{\xi}$; il en sera donc de même pour $\tilde{x}_N(\cdot) = JH'(\pi\tilde{x}_N(\cdot) + \xi_N(\cdot))$, ce qui donne la convergence uniforme de $(\pi\tilde{x}_N(\cdot))_N$ vers $\pi\bar{x}(\cdot)$ et par suite la convergence uniforme de $(\tilde{x}_N(\cdot))_N$ vers $JH'(\pi\bar{x}(\cdot) + \bar{\xi})$.

C.q.f.d.

VI. RÉSOLUTION DE (P^N) : ALGORITHME NUMÉRIQUE

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas $\beta > 2$, le même raisonnement est encore valable pour $1 < \beta < 2$ sauf qu'à l'étape 2, pour revenir sur M_N , on minimise F_N sur la demi-droite issue de 0 et engendrée par $u_n(t)$.

Il est connu que, quelle que soit la méthode de minimisation utilisée, on n'est jamais sûr d'aboutir à un point qui réalise le minimum sur l'espace des contraintes et ceci est dû au fait suivant :

Tout algorithme de minimisation d'une fonction $J(\cdot)$ génère une suite $(x_n)_n$ dans l'ensemble des contraintes tel que :

- $(x_n)_n$ converge vers \bar{x} dans l'ensemble des contraintes
- $(J(x_n))_n$ strictement décroissante vers $J(\bar{x})$ et $J'(\bar{x}) = 0$.

Il est extrêmement improbable que ce soit un maximum local, vu la décroissance de $J(x_n)$, mais quelle que soit sa nature, le fait qu'il est point critique nous suffit pour résoudre notre problème.

1. Description de l'algorithme de (P^N)

Partons d'un u_0 dans la variété M_N .

A l'itération $n \in \mathbb{N}$, on est en $u_n \in M_N$.

Étape 1 : On se déplace localement suivant $-F'_N(u_n)$ pour construire un point de la forme $u_n(t) = u_n - tF'_N(u_n)$, $t > 0$ « meilleur » ⁽¹⁾ que u_n , ce qui revient à minimiser $\varphi(t) = F_N(u_n - tF'_N(u_n))$. Mais, comme F_N n'est pas minorée, $\varphi(\cdot)$ risque de tendre vers $-\infty$. Par conséquent on doit imposer à t de ne pas dépasser un t_{\max} .

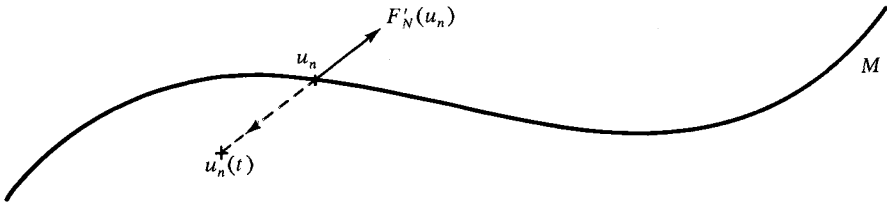


Figure 1.

En général, un tel déplacement nous fait sortir de la variété M_N . Il faut donc trouver un moyen pour revenir sur M_N .

Étape 2 : Si on suppose que $u_n(t) \in D_N$, ce qui est vrai pour t petit, une idée pour revenir sur M_N est de maximiser F_N sur la demi-droite issue de $u_n(t)$ et engendrée par $u_n(t)$ (voir fig. 2).

PROPOSITION : Soit $u \in M_N$ tel que $F'_N(u) \neq 0$, alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \exists \lambda :]0, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ tel que :}$$

$$1^\circ \quad \lambda(t) u(t) \in M_N, \quad \forall t \in]0, \varepsilon[, \quad (u(t) = u - tF'_N(u))$$

$$2^\circ \quad F_N(\lambda(t) u(t)) < F_N(u), \quad \forall t \in]0, \varepsilon[.$$

⁽¹⁾ x est « meilleur » que y si $F_N(x) < F_N(y)$.

Démonstration : $u \in M_N \subset D_N$, par continuité de la fonction qui à t fait correspondre $(Au(t), u(t))$ on a :

$$(\exists \eta > 0) ; ((\forall t \in]0, \eta[) \Rightarrow (u(t) \in D_N)) .$$

Il suffit maintenant, pour avoir 1°, de prendre $\lambda(t) = s_N(u(t))$.

Pour démontrer 2°, on pose :

$$k :]0, \eta[\rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1$$

$$t \rightarrow F_N(\lambda(t) u(t))$$

$$k'(t) = - \lambda(t) (F'_N(u), F'_N(\lambda(t) u(t)))$$

$$k'(0) = - \|F'_N(u)\|^2 < 0 .$$

Par conséquent, il existe un voisinage de 0, $]0, \varepsilon[$ tel que k soit strictement décroissante.

C.q.f.d.

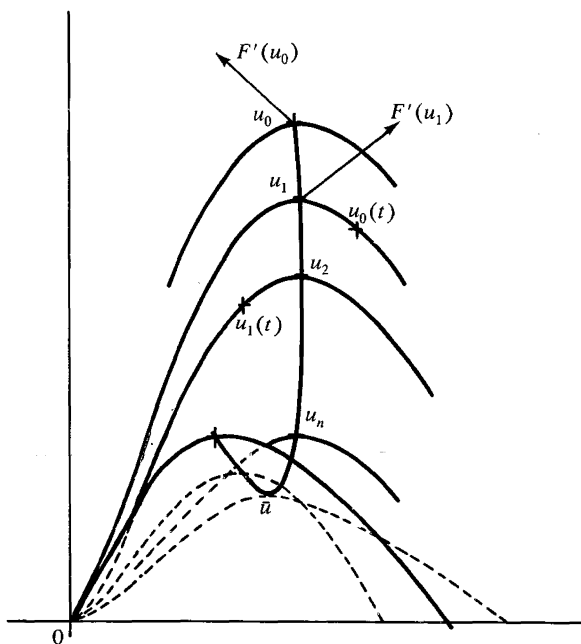


Figure 2.

Une deuxième idée consiste à combiner les deux étapes et à minimiser directement, en gardant $u(t)$ dans D_N , par une méthode de recherche linéaire la fonction $k(t) = F_N(\lambda(t) u_n(t))$.

Étape 3 : (Recherche linéaire).

On se donne m_1, m_2 dans $]0, 1[$ ($m_1 < m_2$).

Soit $u \in M_N$. On note par t_{\max} , le plus grand $t > 0$ tel que :

$$(\forall s \in]0, t[) \quad (u(s) = u - sF'_N(u) \in D_N).$$

Et on pose

$$k :]0, t_{\max}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow F_N(\lambda(t) u(t)) \quad \text{avec} \quad \lambda(t) = \left[-\frac{\alpha K(u(t))}{(Au(t), u(t))} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}$$

et

$$y_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow k(0) + tm_1 k'(0)$$

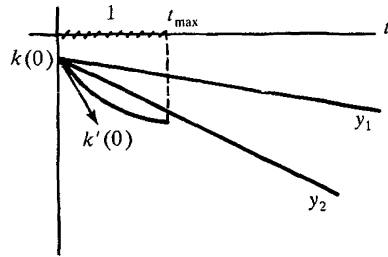
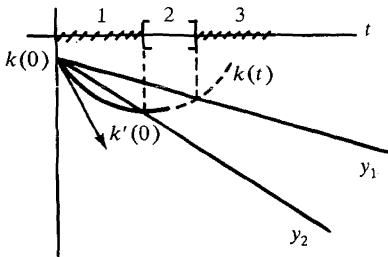
$$y_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow k(0) + tm_2 k'(0).$$

On rappelle que $k'(0) = -\|F'_N(u)\|^2$ (on suppose que $F'_N(u) \neq 0$). Une simple étude de $k(\cdot)$ nous donne les deux graphiques suivants :

$$1 - (\exists t \in]0, t_{\max}[; k(t) \geq y_2(t))$$

$$2 - (t_{\max} < +\infty \text{ et } \forall t \in]0, t_{\max}[, \text{ on a : } k(t) < y_2(t))$$



- Un élément du segment 1 est noté par tg .
- Un élément du segment 2 est noté par t^+ .
- Un élément du segment 3 est noté par td .

La méthode de Golstein avec contrainte consiste à prendre $u^+ = \lambda(t^+) u(t^+)$ dans le premier cas, et $u^+ = \lambda(t_{\max}) u(t_{\max})$ dans le deuxième cas, ce qui donnera l'algorithme schématique suivant :

E_0 : $t_{\max} > 0$ et t initial $\in]0, t_{\max}[$ sont donnés. $t_g = 0$, $t_d = t_{\max}$

E_1 : Si $k(t) > k(0) + m_1 tk'(0)$ alors $td = t$ et aller à E_3

E_2 : Si $k(t) \geq k(0) + m_2 tk'(0)$ } Fin
ou

si $t = t_{\max}$

sinon $tg = t$ et aller à E_3

E_3 : $t = \frac{tg + td}{2}$ aller en E_1 .

Si on remplace u par u_n , t^+ ou t_{\max} par t_n , u^+ par u_{n+1} et t_{\max} par t_{\max}^n on aura :

$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{l} F_N(u_{n+1}) - F_N(u_n) \leq -m_1 t_n \|F'_N(u_n)\|^2 \quad \text{et} \quad t_n = t_{\max}^n \\ \text{ou} \\ -m_2 t_n \|F_N(u_n)\|^2 \leq F_N(u_{n+1}) - F_N(u_n) \leq -m_1 t_n \|F'_N(u_n)\|^2. \end{array}}$$

2. Convergence d'une sous-suite de l'algorithme de (P^N)

La convergence d'une sous-suite de la suite $(u_n)_n$ découle des deux lemmes suivants :

LEMME 1 : La suite $(u_n)_n$ est bornée.

LEMME 2 : Toute valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ est un point critique de F_N .

Démonstration du lemme 1 :

$$(u_n) \subset M_N \quad \text{et} \quad F_N(u_{n+1}) - F_N(u_n) \leq -m_1 t_n \|F'_N(u_n)\|^2.$$

Par conséquent :

$$F_N(u_0) \geq F_N(u_n) = \frac{2-\alpha}{2} K(u_n) \geq \frac{2-\alpha}{2} \|u_n\|^\alpha \geq 0.$$

C.q.f.d.

Démonstration du lemme 2 : $(F_N(u_n))_n$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

D'autre part $t_n \|F'_N(u_n)\|^2 \leq \frac{1}{m_1} (F_N(u_n) - F_N(u_{n+1})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui prouve que $(t_n \|F'_N(u_n)\|^2)$ converge vers 0.

Soient (u_{n_k}) une sous-suite convergente de (u_n) et $\bar{u} \in M_N$ sa limite ($\bar{u} \in M_N$ car M_N est fermée et ceci est dû au fait que E_N est de dimension finie et M est fermée). Je prétends que $F'_N(\bar{u}) = 0$, sinon t_{n_k} converge vers 0 et la continuité en $(\bar{u}, 0)$ de la fonction de $D \times \mathbb{R}^{*+} \rightarrow E$ qui, à (u, t) fait correspondre $u - tF'_N(u)$, nous donne l'existence de $(k_0 \in \mathbb{N})$ et $(\bar{t} > 0)$ tel que $t_{\max}^{n_k} > \bar{t}$, quel que soit $k \geq k_0$, par conséquent :

$$(\exists k_1 \in \mathbb{N}) ; \quad \left\{ \begin{array}{l} (\forall k \geq k_1) \Rightarrow -m_2 t_{n_k} \|F'_N(u_{n_k})\|^2 \leq F_N(u_{n_k+1}) - F_N(u_{n_k}) \\ \hspace{15em} \leq -m_1 t_{n_k} \|F_N(u_{n_k})\|^2 \end{array} \right\}$$

d'où
$$-m_2 \|F_N(u_{n_k})\|^2 \leq \frac{F_N(u_{n_k+1}) - F_N(u_{n_k})}{t_{n_k}}$$

à la limite, quand k tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} -m_2 \|F'_N(\bar{u})\|^2 &\leq \lim_k \left[\left(F'_N(u_{n_k}), \frac{(\lambda(t_{n_k}) - 1)}{t_{n_k}} u_{u_k} - \lambda(t_{n_k}) F'_N(u_{n_k}) \right) \right. \\ &\quad \left. + 0(t_{n_k}) \right] \\ &\leq \lim_k - (F'_N(u_{n_k}), F'_N(u_{n_k})) + 0(t_{n_k}) \end{aligned}$$

car $(F'_N(u_{n_k}), u_{n_k}) = 0$ et $\lambda(0) = 1$.

Donc
$$-m_2 \|F'_N(\bar{u})\|^2 \leq - \|F'_N(\bar{u})\|^2$$

ce qui contredit le fait que $m_2 < 1$. ■

VII. MISE EN ŒUVRE DE L'ALGORITHME

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q); \quad i = 1, n \\ H(p, q) = h \end{cases}$$

$$H: \begin{cases} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) \rightarrow H(p, q) \end{cases}$$

$$S = \{(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / H(p, q) = h\}$$

H = le hamiltonien (ou l'énergie) du système (\mathcal{H})

n = nombre de degrés de liberté

h = le niveau d'énergie pour lequel H vérifie les hypothèses du théorème d'Ekeland et Lasry.

Objet de l'algorithme : Recherche numérique des trajectoires périodiques du système hamiltonien (\mathcal{H}) .

Étape 1 : On transforme le système (\mathcal{H}) en un deuxième système équivalent, qu'on notera par (\mathcal{H}_j) , de la manière suivante :

Soit $H_j(\cdot)$ la fonction jauge de la surface convexe S :

$$(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad H_j(p, q) = \max \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^*; H \left(\frac{p}{\lambda}, \frac{q}{\lambda} \right) = h \right\}.$$

On notera par H_1 , le nouvel Hamiltonien défini par :

$$(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad H_1(p, q) = (H_j(p, q))^{3/2}.$$

Le système (\mathcal{H}_j) sera donc :

$$(\mathcal{H}_j) \begin{cases} \dot{p}_i = \frac{\partial H_1}{\partial q_i}(p, q) \\ \dot{q}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial p_i}(p, q), \quad i = 1, n \\ H_1(p, q) = 1. \end{cases}$$

La relation entre les trajectoires périodiques de (\mathcal{H}_j) et celles de (\mathcal{H}) est donnée par le lemme de III/étape 1.

Étape 2 : Cette étape consiste à ramener le problème de recherche de trajectoires périodiques appartenant à un niveau d'énergie donné à un problème de recherche de trajectoires périodiques à période donnée T_0 ; pour cela on pose :

$$(\mathcal{H}T_0) \begin{cases} \dot{p}_i = \frac{\partial H_1}{\partial q_i}(p, q) \\ \dot{q}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial p_i}(p, q) \quad i = 1 \text{ à } n \\ p_i(0) = p_i(T_0) \\ q_i(0) = q_i(T_0). \end{cases}$$

La relation entre les trajectoires périodiques de $(\mathcal{H}T_0)$ et celles de (\mathcal{H}_j) est donnée par la remarque de II.

Étape 3 : On applique le principe variationnel de Clarke-Ekeland au système $(\mathcal{H}T_0)$. Après discrétisation, on obtient le problème d'optimisation suivant :

$$(P_N) = \begin{cases} \text{Min } F_N(x) = \frac{1}{2} (Ax, x) + K(x) \\ x \in M_N. \end{cases} \quad N \in \mathbb{N}^*$$

On rappelle que :

$$A \in M_{2nN, 2nN}(\mathbb{R}) \quad (\text{voir IV/2/b})$$

$$K(x) = \frac{T_0}{N} \sum_{i=1}^N G(-Jx_i)$$

avec $x \in \mathbb{R}^{2nN}$ et $x_i = (x^i, x^{i+N}, \dots, x^{i+2(n-1)N})$.

Attention : Le calcul de la matrice A (IV/2/b) a été établi pour $T_0 = 1$. Si on choisit $T_0 \neq 1$, on doit multiplier l'expression trouvée par $(T_0)^2$.

Quels sont les problèmes rencontrés ?

a) Comme tout programme de minimisation, le choix du point de départ de la minimisation pose un grand problème ; pour résoudre ce problème on procédera de la manière suivante :

On prend $N = 10$:

- 1) On résout le problème $(P_N) \rightarrow x_N$
- 2) On résout le problème (P_{2N}) , en partant de $x_N \rightarrow x_{2N}$
- ⋮
- $k + 1$) $(P_{2^k N})$, en partant de $x_{2^{k-1} N} \rightarrow x_{2^k N}$.
- ⋮

b) Le calcul de la transformée de Legendre G de H_1 coûte très cher en temps de calcul malgré l'initialisation à chaque appel du sous-programme de G par le dernier point calculé.

VIII. APPLICATIONS NUMÉRIQUES A UN EXEMPLE

1) Nous considérons un système dynamique à deux dimensions, défini par une fonction potentielle $V(x, y)$:

$$(1) \quad \ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

La forme du système hamiltonien de ce problème est :

$$(2) \quad \dot{q}_1 = x, \quad q_2 = y, \quad p_1 = \dot{x}, \quad p_2 = \dot{y}$$

$$(3) \quad H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2).$$

On va choisir $V(., .)$ la plus simple possible, un polynôme en x et y . Si ce polynôme est de second ordre, l'équation (1) est linéaire et le problème est trivialement intégrable. Le cas d'un polynôme de degré trois semble être non trivial. Nous choisissons la forme suivante pour $V(., .)$ (Hénon et Heiles [9])

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3 \right).$$

M. Hénon [8] montre numériquement par la méthode de section que ce

système est non complètement intégrable et que la seule intégrale connue est H .

2) On a appliqué l'algorithme décrit aux paragraphes précédents, au système :

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q), \quad i = 1 \text{ à } 2 \\ H(p, q) = h \end{cases}$$

$$(p, q) = (p_1, p_2, q_1, q_2).$$

Pour $h = 0, 1$, on a obtenu $p_1(\cdot)$ (fig. 1), $p_2(\cdot)$ (fig. 2), $q_1(\cdot)$ (fig. 3) et $q_2(\cdot)$ (fig. 4).

3) *Stabilité*

L'étude de la stabilité d'une trajectoire T -périodique $z(\cdot)$, d'un système hamiltonien non linéaire à n degrés de liberté, revient à étudier la stabilité des solutions du système hamiltonien linéarisé autour de la solution T -périodique $z(\cdot)$:

$$(5) \quad \dot{y} = JH''(z(\cdot))y(\cdot) \quad \text{avec} \quad J = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

Le système (5) peut être mis sous la forme :

$$(6) \quad \dot{y} = JA(t)y$$

où $A(\cdot) = H''(z(\cdot))$ matrice symétrique T -périodique .

D'après un théorème de Poincaré, il suffit d'étudier les multiplicateurs de Floquet du système (6), c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice de monodromie du système (6). On trouvera dans Mark Levi [11] une étude approfondie dans ce sens.

Notons par $R(t)$, $t \in [0, T]$, la matrice résolvante du système (6), i.e. :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = JA(t)R(t) \\ R(0) = I_{2n}. \end{cases} \quad t \in [0, T]$$

Il est connu que $R(t)$, $t \in [0, T]$, est symplectique, i.e. : $R^*(t)JR(t) = J$, $t \in [0, T]$; en particulier la matrice de monodromie $R(T)$ est symplectique. D'autre part, il est facile de voir que $\dot{z}(\cdot)$ est solution de (6), par conséquent, $R(T)\dot{z}(0) = \dot{z}(0)$ car $\dot{z}(\cdot)$ est T -périodique ; d'où 1 est une valeur propre de $R(T)$ (1 est un multiplicateur de Floquet).

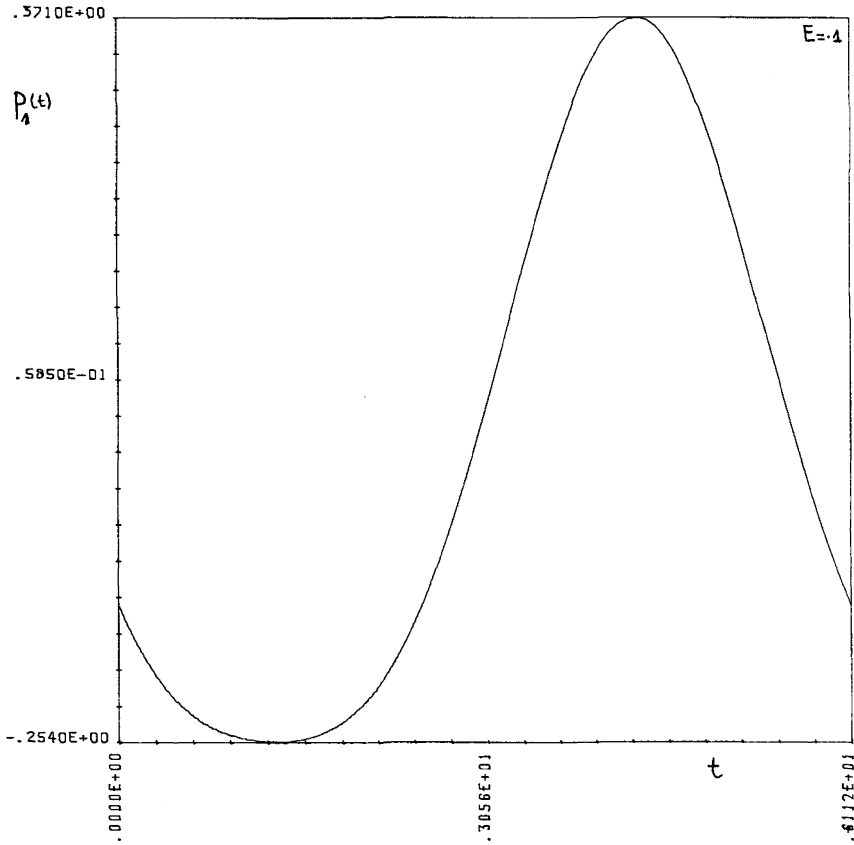


Figure 1.

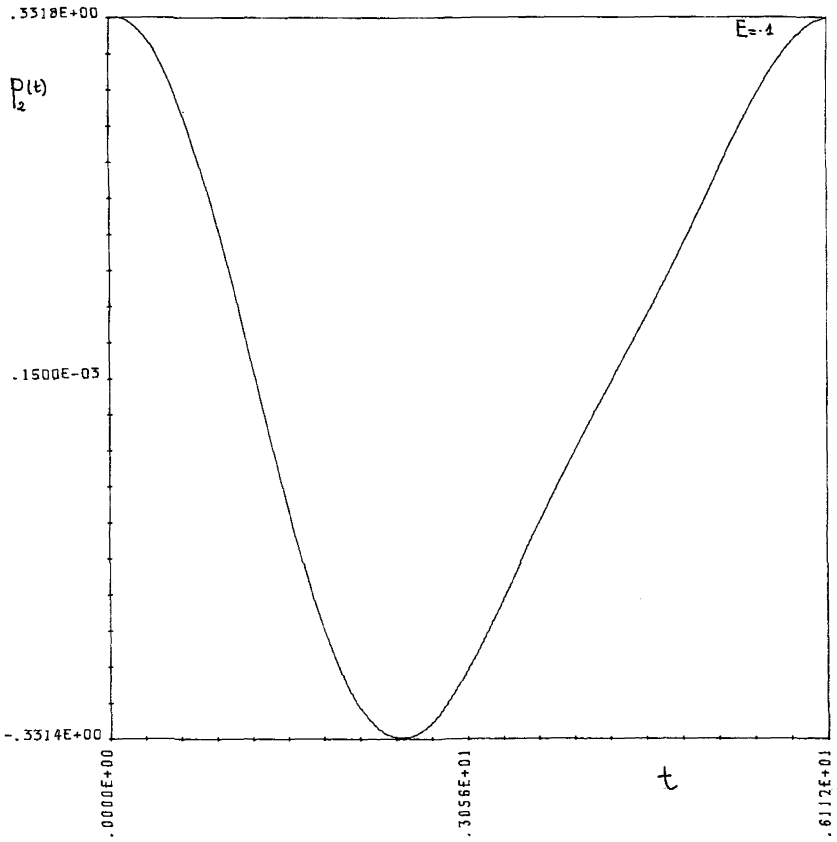


Figure 2.

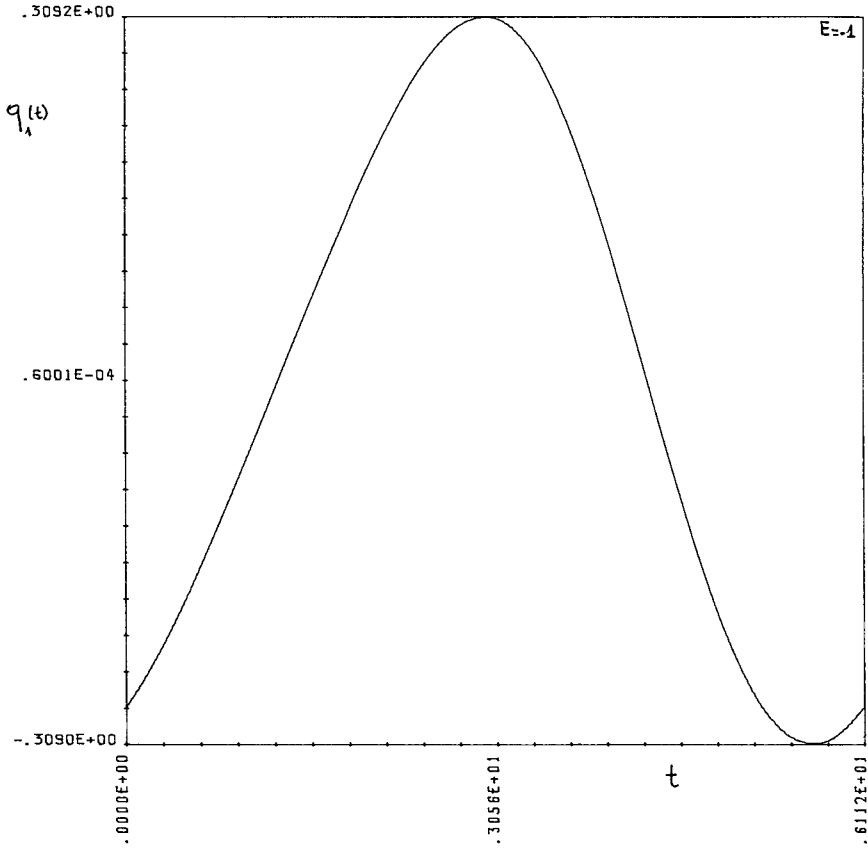


Figure 3.

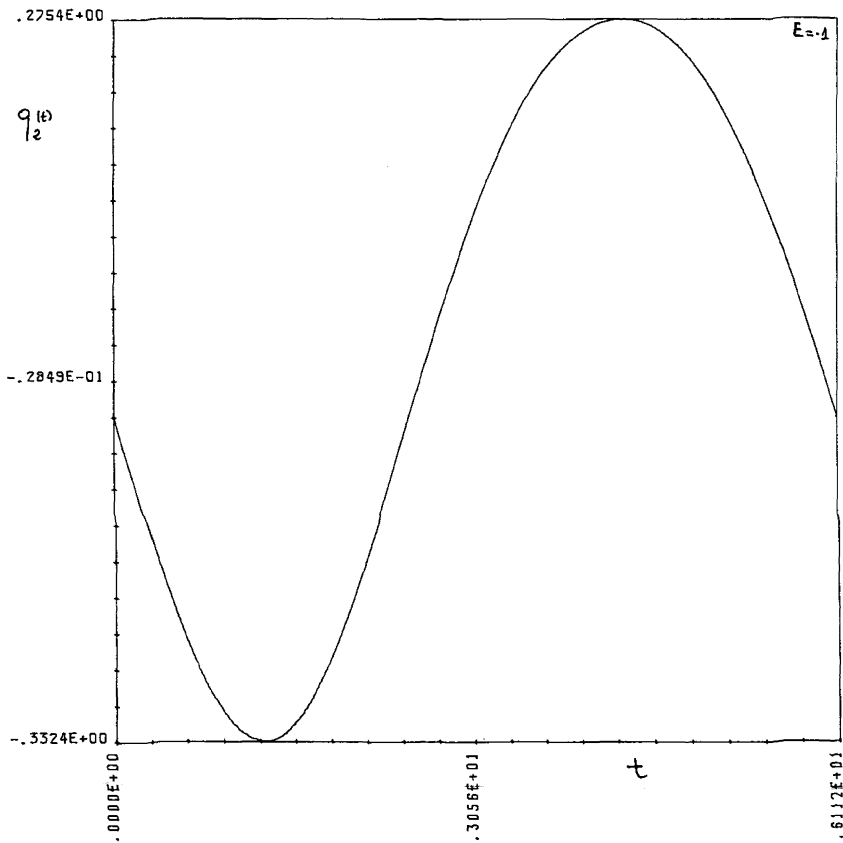


Figure 4.

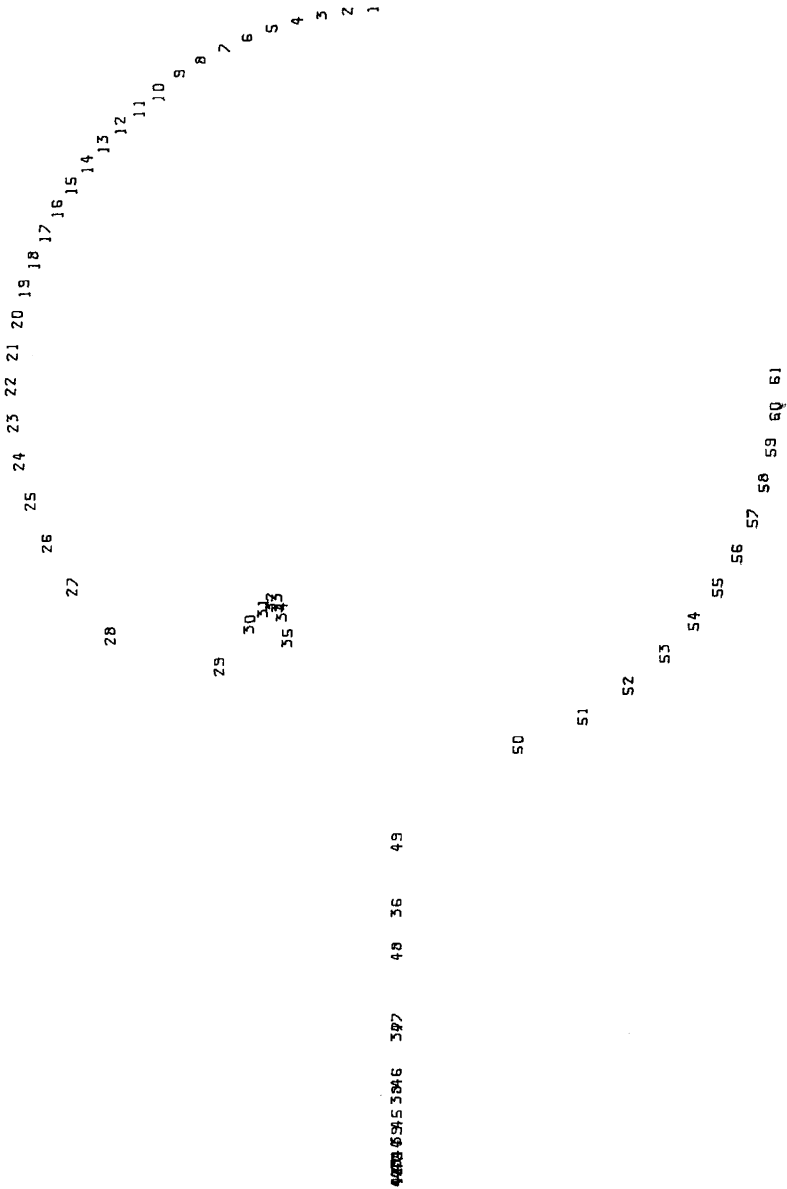


Figure 5.

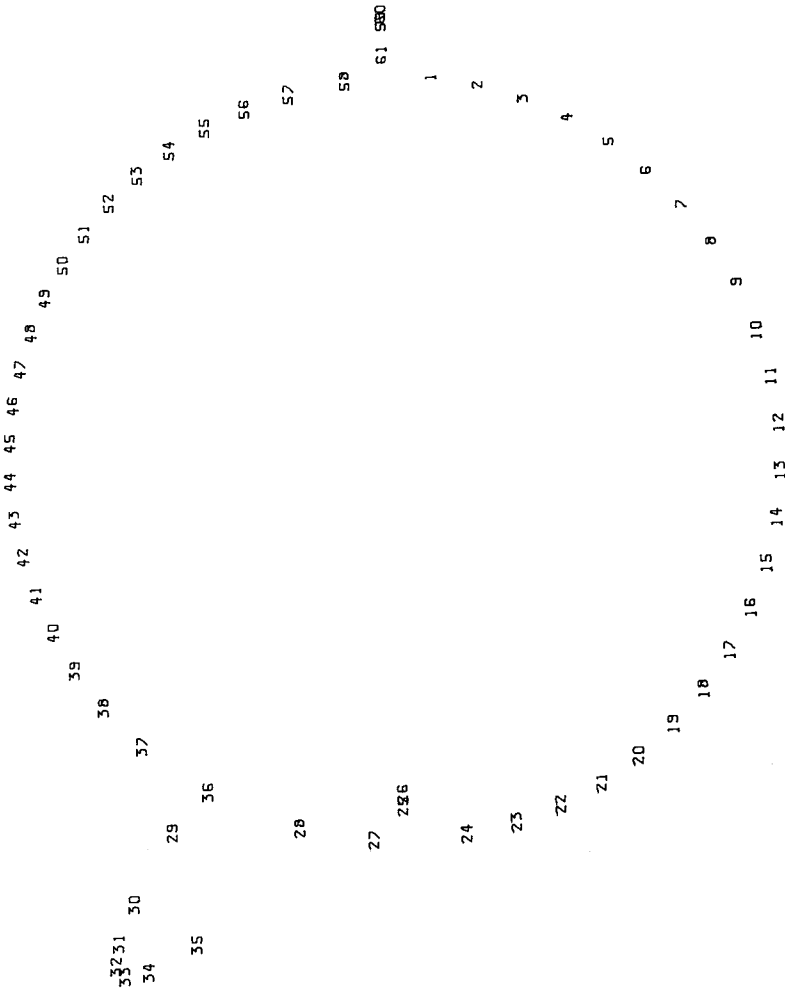


Figure 6.

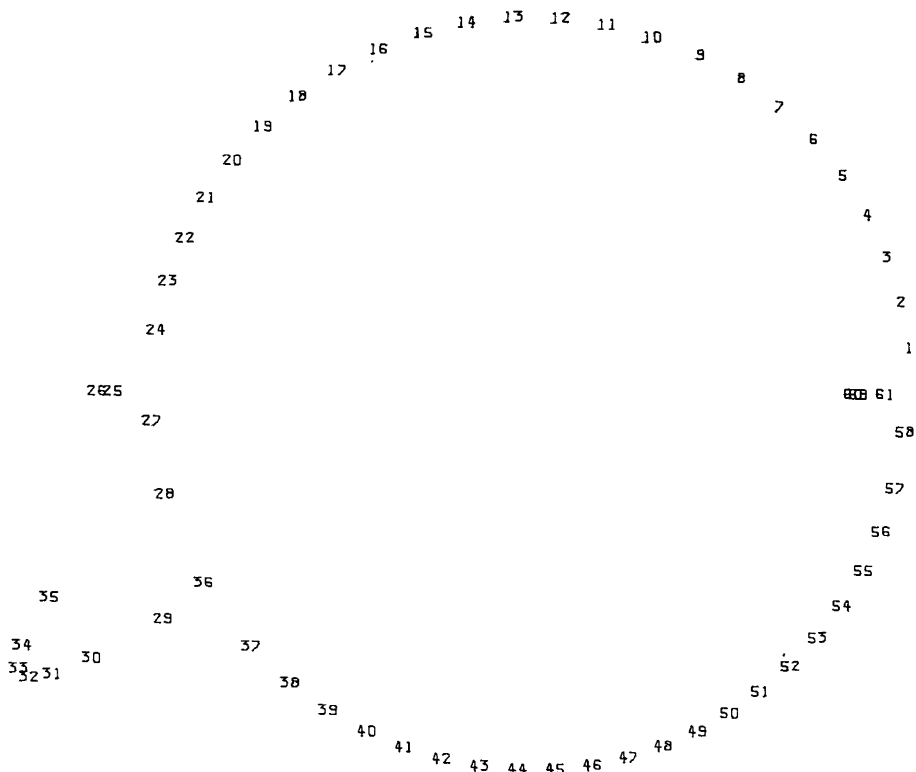


Figure 7.

On remarque aussi que si λ est valeur propre de $R(t)$, $1/\lambda$ l'est aussi grâce à la structure symplectique de $R(t)$; par conséquent 1 est une valeur propre double de $R(T)$.

Soient $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t), 1/\lambda_1(t), \dots, 1/\lambda_n(t)$ les $2n$ valeurs propres de $R(t)$ à l'instant $t \in [0, T]$; on se propose de suivre numériquement le mouvement de ces $2n$ valeurs propres quand t varie dans $[0, T]$. On sait déjà, par définition de $R(\cdot)$, qu'à l'instant $t = 0$ toutes les valeurs propres sont égales à 1 et d'après la remarque faite ci-dessus, à l'instant T il y en a au moins deux qui sont égales à 1.

Soit la subdivision de l'intervalle $[0, T]$ suivante :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_i = t_{i-1} + \frac{T}{61}, \quad i = 1 \text{ à } 61 \\ t_{61} = T. \end{cases}$$

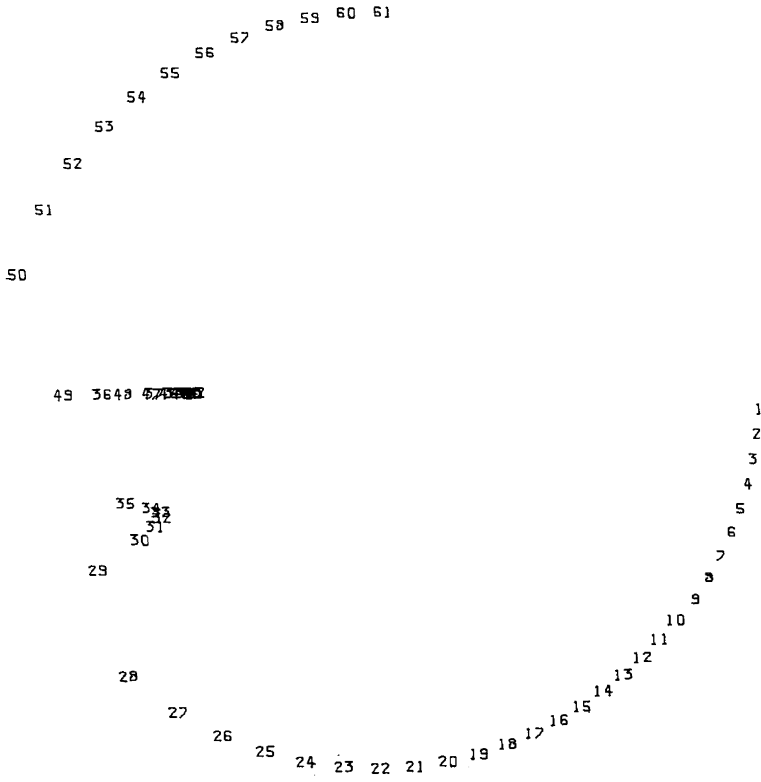


Figure 8.

Les figures (fig. 5), (fig. 6), (fig. 7) et (fig. 8) représentent respectivement les mouvements de $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $1/\lambda_1(t)$ et $1/\lambda_2(t)$ pour $t \in [0, T]$ où $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$, sont les valeurs propres de la matrice résolvante du système hamiltonien linéarisé autour d'une solution $z(\cdot)$ T -périodique de l'exemple 1. Les instants $(t_i)_{i=1,61}$ sont repérés par leur indice i .

RÉFÉRENCES

- [1] A. AMBROSETTI and G. MANCINI, *On a theorem by Ekeland and Lasry concerning the number of periodic Hamiltonian trajectories*. J. Diff. equation (43) (1981), pp. 1-6.
- [2] A. AMBROSETTI and G. MANCINI, *Solutions of minimal period for a class of convex Hamiltonian systems*, Math. Ann. 255 (1981).

- [3] J. P. AUBIN and I. EKELAND, *Applied Nonlinear Analysis*, Willey, New York (1984).
- [4] F. CLARKE and I. EKELAND, *Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period*. *Comm. Pure App. Math.*, t. 33, 1980, pp. 103-116.
- [5] F. CLARKE and I. EKELAND, *Nonlinear oscillation and boundary value problem for Hamiltonian system*, *Archive Rat. Mech. An.*
- [6] I. EKELAND and J. M. LASRY, *On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface*. *Ann. Math.* 112 (1980), pp. 283-319.
- [7] I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1972.
- [8] M. HÉNON, *Numerical exploration of Hamiltonian systems*. North-Holland Publishing company, 1983.
- [9] M. HÉNON and C. HEILES, (1964) *Astron. J.* 69, 73.
- [10] M. LEVI, *Stability of linear Hamiltonian systems with periodic coefficients*. Research Report. IBM Thomas J. W.R.C. (1977).
- [11] M. MINOUX, *Programmation mathématique, théorie et algorithmes*. Tome 1, Dunod (1983) Paris.