

M. BOUCHIBA

**Sur l'équation de la corrosion intergranulaire
par diffusion de surface**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 21, n° 3 (1987), p. 425-444

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1987__21_3_425_0

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



SUR L'ÉQUATION DE LA CORROSION INTERGRANULAIRE PAR DIFFUSION DE SURFACE

par M. BOUCHIBA (*)

Communiqué par C. BARDOS

Résumé. — On montre un résultat d'existence et d'unicité de solution pour une équation différentielle non linéaire du quatrième ordre qui modélise le phénomène de corrosion intergranulaire par diffusion de surface. On présente une résolution numérique à partir d'une formulation variationnelle du problème.

Abstract. — We prove an existence-uniqueness result for the solution of a nonlinear fourth-order differential equation which determines the shape of a grain boundary groove forming by surface diffusion. A variational approximation of the problem leads to an efficient numerical method.

INTRODUCTION

L'équation d'évolution non linéaire décrivant le mouvement d'une interface par le mécanisme de diffusion de surface a été établie par Mullins [3], et étudiée d'un point de vue mathématique dans [1]. C'est ce mécanisme qui régit l'évolution de l'interface d'un solide polycristallin en équilibre thermodynamique avec sa vapeur (sous des hypothèses physiques détaillées dans [3, 4]).

Au niveau d'un joint de grain, un sillon se forme à l'intersection du joint et de l'interface. Suivant Mullins, on montre facilement que la forme du sillon est donnée, après élimination du temps, par une équation différentielle ordinaire non linéaire du quatrième ordre.

Après avoir mis cette équation sous forme intrinsèque nous montrons que lorsque la pente à l'origine du sillon est assez petite il existe une solution unique de cette équation.

(*) Reçu en mars 1986.

(¹) Faculté des Sciences de Tunis, Département de Mathématiques, Campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisie.

Physiquement cette pente est déterminée par le rapport de l'énergie du joint de grain à l'énergie de surface [4]. Pour la plupart des sillons observés (métaux dans le vide ou dans une atmosphère inerte) la pente est petite ($\approx 0,3$). Cependant, pour certains systèmes (métal-liquide) la pente peut être beaucoup plus grande que l'unité, de tels systèmes échappent donc à l'analyse présentée ici.

La contrainte sur la pente intervient ici comme condition suffisante pour obtenir la solution comme point fixe d'un opérateur contractant. Numériquement, on constate également que les itérations ne convergent plus pour une pente trop forte. Modulo cette restriction, la méthode variationnelle employée pour calculer la solution donne de très bons résultats. On la comparera à la méthode de tir cherchant à adapter les conditions initiales pour avoir une solution nulle à l'infini qui est instable [2] (en effet, il y a un seul jeu de conditions initiales qui donne une solution nulle à l'infini, tous les autres correspondent à des solutions qui croissent ou décroissent rapidement vers $+\infty$ ou $-\infty$; la conséquence de ceci du point de vue numérique est que toutes les solutions calculées explosent très rapidement).

I. MISE DE L'ÉQUATION SOUS FORME INTRINSÈQUE

Si on suppose que l'interface à l'instant t , Γ_t , est une courbe d'équation $y = w(t, x)$ dans le plan de coordonnées (x, y) perpendiculaire au joint; w vérifie (cf. [3]) :

$$(E_w) \quad \begin{cases} w_t + \left(\frac{1}{\sqrt{1+w_x^2}} \left(\frac{w_{xx}}{(1+w_x^2)^{3/2}} \right) \right)_x = 0, & x \neq 0, \quad t > 0 \\ w_x(t, 0 \pm) = \pm m, \\ \left(\frac{w_{xx}}{(1+w_x^2)^{3/2}} \right)_x (t, 0 \pm) = 0, \\ w(t, \pm \infty) = 0, \quad w(0, x) = w_0(x). \end{cases}$$

où w_t , w_x désignent les dérivées partielles de w par rapport à t et x et m la pente à l'origine du joint.

On s'intéresse au cas $w_0 = 0$. On recherche alors une solution de forme stationnaire $w(t, x) = t^{1/4} u(t^{-1/4} x)$. Un calcul élémentaire conduit à l'équation en u :

$$(E_u) \quad \begin{cases} + \frac{1}{4} (u - xu') + \left(\frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} \left(\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} \right) \right)' = 0, & x \neq 0 \\ u'(0 \pm) = \pm m, \\ u'''(0 \pm) = \frac{\pm 3m}{1+m^2} [u''(0 \pm)]^2, \\ u(\pm \infty) = 0. \end{cases}$$

Afin de lever la difficulté présentée par les conditions initiales, nous allons mettre cette équation sous forme intrinsèque.

On suppose le graphe Γ de u décrit par la représentation paramétrique $G(s)$, s désignant l'abscisse curviligne sur Γ d'origine $(0, u(0))$ comptée positivement dans le sens des x croissants.

Si $\tau(s) = \frac{d}{ds} G(s)$ est le vecteur unitaire tangent à Γ , $n(s)$ le vecteur normal qui s'en déduit par une rotation de $+\pi/2$ et $K(s)$ est la courbure, l'équation (E_u) s'écrit alors :

$$\frac{1}{4} G \cdot n + D^2 K = 0 \quad (1)$$

où désormais on note $D = \frac{d}{ds}$; ce qui donne, en dérivant une fois cette équation par rapport à s :

$$\frac{1}{4} D(G \cdot n) + D^3 K = 0.$$

Or $D(G \cdot n) = -K(G \cdot \tau)$,

et le calcul de $G \cdot \tau$ se fait en dérivant $G \cdot \tau$ par rapport à s :

$$D(G \cdot \tau) = 1 - 4KD^2K,$$

d'où $G \cdot \tau = s - 4 \int_0^s K(\sigma) D^2 K(\sigma) d\sigma - \operatorname{sgn}(s) \alpha$,

où $\alpha = -G(0) \cdot \tau(0+) = G(0) \cdot \tau(0-)$

et $\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0. \end{cases}$

L'équation (1) devient :

$$4D^3K(s) = sK(s) - 4K(s) \int_0^s K(\sigma) D^2K(\sigma) d\sigma - \operatorname{sgn}(s) \alpha K(s). \quad (2)$$

Soit maintenant $\varphi(s)$ une détermination régulière de l'angle que fait $\tau(s)$ avec l'axe des x , on a alors $K(s) = D\varphi(s)$. L'équation en φ , que nous étudierons pour $s \geq 0$ par raison de symétrie, s'écrit :

$$\begin{cases} 4D^4\varphi - sD\varphi = -4D\varphi \int_0^s D\varphi D^3\varphi d\sigma - \alpha D\varphi \\ \varphi(0) = \beta, \quad D^2\varphi(0) = 0, \quad \varphi(+\infty) = 0 \end{cases}$$

avec $\beta = \operatorname{Arctg} m$.

On calcule α en fonction de φ et de ses dérivées, ceci avec des hypothèses d'intégrabilité et de nullité à l'infini qui seront justifiées ultérieurement. On multiplie (1) par K et on intègre entre zéro et l'infini :

$$\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} K(G \cdot n) d\sigma + \int_0^{+\infty} KD^2 K d\sigma = 0 \quad (3)$$

on a :

$$\int_0^{+\infty} K(\sigma) D^2 K(\sigma) d\sigma = - \int_0^{+\infty} (DK(\sigma))^2 d\sigma \quad (\text{car } DK(0) = 0)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} K(G \cdot n) ds &= \int_0^{+\infty} -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \int_0^s \cos \varphi d\sigma ds + \\ &+ \int_0^{+\infty} l \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} ds + \int_0^{+\infty} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \int_0^s \sin \varphi d\sigma ds \end{aligned}$$

où $l = u(0)$. En remarquant que $-\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{d}{ds} (1 - \cos \varphi)$ on a :

$$\begin{aligned} \text{i) } \int_0^{+\infty} -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \int_0^s \cos \varphi d\sigma ds &= \\ &= - \left[(1 - \cos \varphi(s)) \int_0^s \cos \varphi(\sigma) d\sigma \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (\cos \varphi - \cos^2 \varphi) ds \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad \left| (1 - \cos \varphi(s)) \int_0^s \cos \varphi d\sigma \right| \leq s \frac{\varphi^2}{2},$$

et on suppose que cette quantité tend vers 0 lorsque $s \rightarrow \infty$.

$$\text{ii) } l \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} \sin \varphi ds = [l \sin \varphi]_0^{+\infty} = -l \sin \beta \quad (\varphi(0) = \beta).$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \int_0^{+\infty} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \int_0^s \sin \varphi d\sigma ds &= \\ &= \left[\sin \varphi \int_0^s \sin \varphi d\sigma \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \sin^2 \varphi ds \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad |\sin \varphi(s)| \leq |\varphi(s)|$$

$$\text{et} \quad \left| \int_0^s \sin \varphi d\sigma \right| \leq \sqrt{s} \left(\int_0^s \sin^2 \varphi d\sigma \right)^{1/2} \leq \sqrt{s} |\varphi|_{L^2(0, +\infty)}$$

$$\text{d'où} \quad \left| \sin \varphi(s) \int_0^s \sin \varphi(\sigma) d\sigma \right| \leq c \sqrt{s} |\varphi(s)|.$$

Ainsi i), ii) et iii) donnent :

$$\alpha(\varphi) = -l \sin \varphi(0) = -l \sin \beta = \int_0^{+\infty} (1 - \cos \varphi) ds + 4 \int_0^{+\infty} (D^2 \varphi)^2 ds .$$

Comme par ailleurs une intégration par parties, tenant compte du fait que $D^2 \varphi(0) = 0$ donne :

$$\int_0^s D\varphi D^3 \varphi d\sigma = D\varphi(s) D^2 \varphi(s) - \int_0^s (D^2 \varphi)^2 d\sigma ,$$

on obtient finalement l'équation en φ qui sera étudiée par la suite :

$$(E_\varphi) \quad \begin{cases} 4 D^4 \varphi - s D\varphi = F(\varphi) , & s \geq 0 , \\ \varphi(0) = \beta , \quad D^2 \varphi(0) = 0 , \quad \varphi(+\infty) = 0 , \end{cases}$$

où
$$F(\varphi) = -\alpha(\varphi) D\varphi - 4 D\varphi \left(D\varphi D^2 \varphi - \int_0^s (D^2 \varphi)^2 d\varphi \right) ,$$

avec
$$\alpha(\varphi) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos \varphi) d\sigma + 4 \int_0^{+\infty} (D^2 \varphi)^2 d\sigma .$$

II. UN RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'équation (E_φ) . On notera $H^k = H^k(\mathbb{R})$ l'espace de Sobolev des $u \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $D^i u \in L^2(\mathbb{R})$, $0 \leq i \leq k$, $|f|_p$ la norme d'une fonction f de $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, $H^k_+ = H^k(0, +\infty)$ l'espace de Sobolev des $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ telles que $D^i u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $0 \leq i \leq k$, $|f|_{p,+}$ la norme d'une fonction de $L^p(\mathbb{R}_+)$. On notera $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x\xi} f(x) dx$ la transformée de Fourier d'une fonction f et $f * g$ le produit convolution de f et g lorsqu'il est défini.

1. L'équation linéaire associée

On associe à (E_φ) le problème linéaire :

$$(EL) \quad \begin{cases} 4 D^4 \varphi - s D\varphi = f , \\ \varphi(0) = \beta , \quad D^2 \varphi(0) = 0 , \quad \varphi(+\infty) = 0 , \end{cases}$$

où $f \in L^2(0, +\infty)$.

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du résultat suivant.

PROPOSITION 2.1 : *Pour toute f donnée dans $L^2(0, +\infty)$ et pour tout β le problème (EL) possède une solution unique dans H^4_+ .*

Démonstration : Commençons par montrer l'unicité ; pour ce faire, nous allons utiliser le lemme suivant.

LEMME 2.1 : Soit $V = \{u \in H^1, sDu \in L^2\}$ muni de la norme : $\|u\|_V = (|u|_{H^1}^2 + |sDu|_2^2)^{1/2}$. Alors :

- i) L'espace $D(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ à support compact est dense dans V ,
- ii) Si $f \in V$ alors sf^2 tend vers zéro à l'infini.

Preuve :

i) a) Si $u \in V$ est à support compact, alors $u_n = u * \rho_n \in D(\mathbb{R})$ et converge pour la norme de V vers u ($\rho \in D(\mathbb{R})$, $\rho \geq 0$, $\int \rho(x) dx = 1$ et $\rho_n(x) = n\rho(nx)$).

En effet u_n approche u dans H^1 et sDu_n approche sDu dans L^2 ; pour le voir il suffit de remarquer que $sDu_n = (sDu) * \rho_n + Du * (s\rho_n)$ et $Du * s\rho_n \rightarrow 0$ dans L^2 . En effet $|Du * s\rho_n|_2 \leq |Du|_2 |s\rho_n|_1$, $|s\rho_n|_1 = \frac{1}{n} \int \sigma \rho(\sigma) d\sigma \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

b) Le sous-espace de V des fonctions à support compact est dense dans V . En effet soient $u \in V$ et $\Psi \in D(\mathbb{R})$ telle que $\Psi(x) = 1$ sur $|x| \leq 1$, $0 < \Psi(x) < 1$ pour $1 < |x| < 2$ et $\Psi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$. Posons $\Psi_n(x) = \Psi\left(\frac{x}{n}\right)$. Alors $u_n = \Psi_n u$ est une fonction de V à support compact et u_n converge vers u dans V . En effet u_n approche u dans H^1 car on a :

$$|u_n - u|_2^2 \leq \int_{|s| \geq n} |u(s)|^2 ds$$

et

$$\begin{aligned} |Du_n - Du|_2 &\leq |\Psi_n Du - Du|_2 + |uD\Psi_n|_2 \leq \\ &\leq \left(\int_{|s| \geq n} |Du(s)|^2 ds \right)^{1/2} + |D\Psi_n|_\infty |u|_2, \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} |sDu_n - sDu|_2 &\leq |\Psi_n sDu - sDu|_2 + |usD\Psi_n|_2 \leq \\ &\leq \left(\int_{|s| \geq n} |sDu(s)|^2 ds \right)^{1/2} + |suD\Psi_n|_2 \end{aligned}$$

or $\left| u(s) \frac{s}{n} D\Psi\left(\frac{s}{n}\right) \right|^2 \leq c|u(s)|^2$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$u(s) \frac{s}{n} D\Psi\left(\frac{s}{n}\right) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

d'où par le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a : $|sD\Psi_n|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

ii) D'après le i) de ce lemme il existe $v \in D(\mathbb{R})$ tel que : $\|f - v\|_V \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. D'autre part : $D(sf^2) = f^2 + 2sDf \cdot f \in L^1$. Donc sf^2 est absolument continue et on a :

$$sf^2(s) = \int_0^s f^2(\sigma) d\sigma + 2 \int_0^s \sigma Df(\sigma) f(\sigma) d\sigma ,$$

$$|sf^2(s)| \leq |f|_2^2 + 2|sDf|_2 |f|_2 \leq 2\|f\|_V^2 ,$$

d'où

$$\sqrt{|s|} |f(s)| \leq \sqrt{2} \|f\|_V ,$$

or

$$\begin{aligned} \sqrt{|s|} |f(s)| &\leq \sqrt{|s|} |f(s) - v(s)| + \sqrt{|s|} |v(s)| \leq \sqrt{2} \|f - v\|_V + \\ &\quad + \sqrt{|s|} |v(s)| \leq \varepsilon + \sqrt{|s|} |v(s)| \end{aligned}$$

comme $v \in D(\mathbb{R})$, $\exists A$ tel que pour $|s| \geq A \sqrt{|s|} |v(s)| = 0$, d'où le résultat. ■

L'unicité en découle. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de (EL) dans H_+^4 et $\omega = \varphi_1 - \varphi_2$, on a $\omega \in H_+^4$ et vérifie :

$$\begin{cases} 4 D^4 \omega - sD\omega = 0 \\ \omega(0) = 0, D^2 \omega(0) = 0, \omega(+\infty) = 0 . \end{cases}$$

Multiplions l'équation par ω et intégrons entre zéro et l'infini :

$$4 \int_0^{+\infty} D^4 \omega \cdot \omega ds - \int_0^{+\infty} sD\omega \cdot \omega ds = 0 ,$$

on a

$$\int_0^{+\infty} D^4 \omega \omega ds = \int_0^{+\infty} (D^2 \omega)^2 ds , \text{ car } \omega(0) = 0 \text{ et } D^2 \omega(0) = 0$$

et

$$- \int_0^{+\infty} sD\omega \omega ds = - \left[s \frac{\omega^2}{2} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_D^{+\infty} \omega^2 ds ,$$

or comme $\omega \in H_+^4$ on a $sD\omega \in L^2(0, +\infty)$ et par suite l'extension impaire de ω à tout \mathbb{R} est dans V et par suite $s\omega^2 \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$. Ainsi on a :

$$4 \int_0^{+\infty} (D^2 \omega)^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \omega^2 ds = 0 , \text{ d'où } \omega = 0 . \quad \blacksquare$$

Montrons maintenant l'existence. Notons φ_0 la solution de (EL) correspondant à $f = 0$; on la calcule aisément par transformation de Fourier :

$$\varphi_0(s) = 2\beta \int_s^\infty N(\sigma) d\sigma, \quad \text{où } \hat{N}(\xi) = e^{-(2\pi\xi)^4}.$$

φ_0 est C^∞ à décroissance rapide à l'infini.

On pose $\varphi = \varphi_0 + \psi$, où ψ doit maintenant vérifier (EL) avec $\beta = 0$. On note \tilde{f} l'extension impaire de f à tout \mathbb{R} ; une solution $\tilde{\psi}$ de l'équation $4D^4\tilde{\psi} - sD\tilde{\psi} = \tilde{f}$ s'obtient par transformation de Fourier :

$$\hat{\tilde{\psi}}(\xi) = \frac{e^{-(2\pi\xi)^4}}{\xi} \int_0^\xi e^{(2\pi\sigma)^4} \hat{\tilde{f}}(\sigma) d\sigma, \quad (4)$$

ce qui s'écrit également

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{4} \int_0^1 N((1-\eta)^{-1/4} \cdot) * \tilde{f}(\eta^{-1/4} \cdot) \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)^{1/4}},$$

où $f(\lambda \cdot)$ désigne la fonction $s \rightarrow f(\lambda s)$ et où l'intégrale converge dans l'espace L^2 . On vérifie facilement en dérivant cette expression que $\tilde{\psi} \in H^3$. \tilde{f} étant impaire, $\tilde{\psi}$ est impaire et on a donc $\tilde{\psi}(0) = 0$, $D^2\tilde{\psi}(0) = 0$; la restriction ψ de $\tilde{\psi}$ à $[0, +\infty[$ est donc solution de (EL) avec $\beta = 0$, on notera $\psi = \mathcal{S}f$.

Il reste à montrer que cette solution est dans H_+^4 , c'est l'objet du lemme suivant.

LEMME 2.2 : \mathcal{S} est un opérateur continu de $L^2(0, +\infty)$ dans H_+^4 avec

- (i) $|\mathcal{S}f|_{2,+} \leq 2|f|_{2,+}$,
- (ii) $|D\mathcal{S}f|_{2,+} \leq 2^{-1/4}|f|_{2,+}$,
- (iii) $|D^2\mathcal{S}f|_{2,+} \leq 2^{-3/2}|f|_{2,+}$,
- (iv) $|D^3\mathcal{S}f|_{2,+} \leq 2^{-5/4}|f|_{2,+}$,
- (v) $|D^4\mathcal{S}f|_{2,+} \leq (1 + \sqrt{5/2})/4|f|_{2,+}$.

Démonstration : On considère l'opérateur S qui à $g \in L^2(\mathbb{R})$ fait correspondre la solution χ de l'équation $4D^4\chi - sD\chi = g$ donnée par la formule (4). Si \hat{g} est une fonction C^∞ à support compact, on vérifie facilement que $\chi = Sg$ est une fonction C^∞ à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes ses dérivées (ce qui justifie les intégrations par partie qui vont suivre).

Multiplions alors scalairement l'équation par χ , il vient :

$$4|D^2\chi|_2^2 + \frac{1}{2}|\chi|_2^2 \leq |g|_2|\chi|_2 \leq \frac{1}{2}|g|_2^2 + \frac{1}{2}|\chi|_2^2,$$

d'où $|\chi|_2 \leq 2|g|_2$ et $|D^2\chi|_2 \leq 2^{-3/2}|g|_2$, et par interpolation $|D\chi|_2 \leq 2^{-1/4}|g|_2$.

Multiplions scalairement l'équation par $-D^2\chi$:

$$4|D^3\chi|_2^2 - \frac{1}{2}|D\chi|_2^2 \leq |g|_2|D^2\chi|_2,$$

d'où $|D^3\chi|_2 \leq 2^{-5/4}|g|_2$.

Multiplions scalairement l'équation par $-sD\chi$:

$$-6|D^2\chi|_2^2 + |sD\chi|_2^2 \leq \frac{1}{2}|g|_2^2 + \frac{1}{2}|sD\chi|_2^2,$$

d'où $|sD\chi|_2^2 \leq \frac{5}{2}|g|_2^2$, et par suite $|D^4\chi|_2 \leq \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5/2})|g|_2$. Ces inégalités s'étendent par densité à toute donnée g de $L^2(\mathbb{R})$. Si $\psi = \mathcal{S}f$, on a $\tilde{\psi} = S\tilde{f}$, d'où le lemme. ■

2. Existence d'une solution de (E_φ)

Nous allons montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1 : *Il existe $\beta_0 > 0$ tel que pour tout $\beta \leq \beta_0$, il existe $\varphi \in H_+^4$ solution de (E_φ) . Cette solution est unique dans une boule convenable de H_+^2 centrée en φ_0 . De plus cette solution est C^∞ sur $[0, +\infty[$.*

Démonstration.

Existence : Posons $\varphi = \varphi_0 + \Psi$. Il est clair que φ est solution de (E_φ) si et seulement si : $\Psi = \mathcal{S}[F(\varphi_0 + \Psi)]$.

Notons $\mathfrak{T}\Psi = \mathcal{S}[F(\varphi_0 + \Psi)]$ et cherchons un point fixe de \mathfrak{T} dans H_+^2 .

\mathfrak{T} envoie H_+^2 dans H_+^4 , pour le voir, il suffit de vérifier que pour $\varphi \in H_+^2$, $F(\varphi) \in L^2(0, +\infty)$, on a :

$$|F(\varphi)|_{2,+} \leq |\alpha(\varphi)| |D\varphi|_{2,+} + 4|D\varphi|_\infty^2 |D^2\varphi|_{2,+} + 4|D\varphi|_{2,+} |D^2\varphi|_{2,+}^2,$$

ce qui avec les inégalités :

$$|\alpha(\varphi)| \leq \frac{1}{2}|\varphi|_{2,+}^2 + 4|D^2\varphi|_{2,+}^2 \quad \text{et} \quad |D\varphi|_\infty^2 \leq 2|D\varphi|_{2,+} |D^2\varphi|_{2,+}$$

donne :

$$|F(\varphi)|_{2,+} \leq \left(\frac{1}{2} |\varphi|_{2,+}^2 + 4 |D^2 \varphi|_{2,+}^2 \right) |D\varphi|_{2,+} + 12 |D\varphi|_{2,+} |D^2 \varphi|_{2,+}^2.$$

Munissons H_+^2 de la norme $\|\omega\|_+ = \max_{k=0,1,2} |D^k \omega|_{2,+}$, et montrons sur F le lemme suivant :

LEMME 2.3 : Pour tout ω_1 et ω_2 dans H_+^2 , on a :

$$|F(\omega_1) - F(\omega_2)|_{2,+} \leq \frac{33}{2} (\|\omega_1\|_+^2 + \|\omega_1\|_+ \|\omega_2\|_+ + \|\omega_2\|_+^2) \|\omega_1 - \omega_2\|_+.$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} |F(\omega_1) - F(\omega_2)|_{2,+} &\leq \left(\frac{1}{2} |\omega_2|_{2,+}^2 + 4 |D^2 \omega_2|_{2,+}^2 \right) |D\omega_1 - D\omega_2|_{2,+} + \\ &\quad + \frac{1}{2} |\omega_1 + \omega_2|_{2,+} |D\omega_1|_{2,+} |\omega_1 - \omega_2|_{2,+} \\ &\quad + 4 |D^2 \omega_1 + D^2 \omega_2|_{2,+} |D\omega_1|_{2,+} |D^2 \omega_1 - D^2 \omega_2|_{2,+} \\ &\quad + |Q(\omega_1) - Q(\omega_2)|_{2,+} \end{aligned}$$

où on a posé $Q(\omega) = -4(D\omega)^2 D^2 \omega + 4 d\omega \int_0^s (D^2 \omega)^2 d\sigma$.

On a :

$$\begin{aligned} |Q(\omega_1) - Q(\omega_2)|_{2,+} &\leq 4 |D\omega_1|_{\infty} |D^2 \omega_1 - D^2 \omega_2|_{2,+} + \\ &\quad + 4 |D^2 \omega_2|_{2,+} |(D\omega_1)^2 - (D\omega_2)^2|_{\infty} \\ &\quad + 4 |D^2 \omega_1 + D^2 \omega_2|_{2,+} |D^2 \omega_1 - D^2 \omega_2|_{2,+} |D\omega_1|_{2,+} \\ &\quad + 4 |D^2 \omega_2|_{2,+}^2 |D\omega_1 - D\omega_2|_{2,+}. \end{aligned}$$

De l'inégalité $|U|_{\infty} \leq \sqrt{2} |U|_{2,+}^{1/2} |DU|_{2,+}^{1/2}$ on tire :

$$\begin{aligned} |Q(\omega_1) - Q(\omega_2)|_{2,+} &\leq 8 |D\omega_1|_{2,+} |D^2 \omega_1|_{2,+} |D^2 \omega_1 - D^2 \omega_2|_{2,+} + \\ &\quad + 8 |D^2 \omega_2|_{2,+} |D\omega_1 + D\omega_2|_{2,+}^{1/2} |D^2 \omega_1 + D^2 \omega_2|_{2,+}^{1/2} \\ &\quad \times |D\omega_1 - D\omega_2|_{2,+}^{1/2} |D^2 \omega_1 - D^2 \omega_2|_{2,+}^{1/2} \\ &\quad + 4 |D\omega_1|_{2,+} |D^2 \omega_1 + D^2 \omega_2|_{2,+} |D^2 \omega_1 - D^2 \omega_2|_{2,+} \\ &\quad + 4 |D^2 \omega_2|_{2,+}^2 |D\omega_1 - D\omega_2|_{2,+}. \end{aligned}$$

D'où en groupant :

$$|F(\omega_1) - F(\omega_2)|_{2,+} \leq 33/2 (\|\omega_1\|_+^2 + \|\omega_1\|_+ \|\omega_2\|_+ + \|\omega_2\|_+^2) \|\omega_1 - \omega_2\|_+ . \blacksquare$$

\mathfrak{T} est contractant sur une boule de H_+^2 . En effet soient Ψ_1 et $\Psi_2 \in H_+^2$ et posons $\omega_i = \varphi_0 + \Psi_i$ $i = 1, 2$.

On a :

$$\mathfrak{T}\Psi_1 - \mathfrak{T}\Psi_2 = \mathcal{S}(F(\omega_1)) - \mathcal{S}(F(\omega_2)) = \mathcal{S}(F(\omega_1) - F(\omega_2)) .$$

D'après le lemme 2.1 on a pour $k = 0, 1, 2$:

$$|D^k \mathfrak{T}\Psi_1 - D^k \mathfrak{T}\Psi_2|_{2,+} \leq c_k |F(\omega_1) - F(\omega_2)|_{2,+} .$$

Or par le lemme 2.3, on a :

$$|F(\omega_1) - F(\omega_2)|_{2,+} \leq 33/2 (\|\omega_1\|_+^2 + \|\omega_1\|_+ \|\omega_2\|_+ + \|\omega_2\|_+^2) \|\omega_1 - \omega_2\|_+ .$$

D'autre part $\|\omega_i\|_+ \leq \|\varphi_0\|_+ + \|\Psi_i\|_+$, avec

$$\|\varphi_0\|_+ \leq 2\beta \max \{ |\mathcal{N}|_{2,+}, |N|_{2,+}, |N'|_{2,+} \} = 2\beta B .$$

Si $\|\Psi_i\|_+ \leq r$, on aura :

$$|F(\omega_1) - F(\omega_2)|_{2,+} \leq \frac{99}{2} (2\beta B + r)^2 \|\Psi_1 - \Psi_2\|_+ ,$$

d'où $\|\mathfrak{T}\Psi_1 - \mathfrak{T}\Psi_2\|_+ \leq 99(2\beta B + r)^2 \|\Psi_1 - \Psi_2\|_+$

et \mathfrak{T} est contractant si :

$$99(2\beta B + r)^2 < 1 . \tag{1}$$

On a $\|\mathfrak{T}\Psi\|_+ \leq 33\|\varphi_0 + \Psi\|_+^3$, d'où une condition suffisante pour que \mathfrak{T} conserve la boule et :

$$33(2\beta + r)^3 \leq r . \tag{2}$$

Il est facile de voir qu'il existe $r > 0$ vérifiant (1) et (2) dès que

$$\beta < \frac{1}{3B\sqrt{99}} = \beta_0 .$$

Ainsi \mathcal{T} admet un point fixe et par suite (E_φ) admet une solution $\varphi \in H_+^4$.

Unicité : L'unicité est immédiate par contraction.

Régularité : Soit φ la solution de (E_φ) . On a $\varphi \in H_+^4$ et :

$$4 D^4 \varphi = s D \varphi - \alpha(\varphi) D \varphi - 4 (D \varphi)^2 D^2 \varphi + 4 D \varphi \int_0^s (D^2 \varphi)^2 d\sigma.$$

Le second membre étant $C^1([0, +\infty[)$, φ est $C^5([0, +\infty[)$.

On voit ainsi par récurrence que φ est $C^\infty([0, +\infty[)$. ■

III. RÉOLUTION NUMÉRIQUE

A) Approximation variationnelle à support compact

Dans la résolution de (E_φ) , outre la non-linéarité, se pose le problème du domaine qui est non borné. On approche le problème par une formulation variationnelle dans un espace de fonctions à support compact, puis on étudie les questions de convergence liées au support.

1. Rappel du problème et notations

Nous traiterons le problème en $\Psi = \varphi - \varphi_0$:

$$(E) \quad \begin{cases} 4 D^4 \Psi - s D \Psi = F(\varphi_0 + \Psi), & s \geq 0 \\ \Psi(0) = 0, \quad D^2 \Psi(0) = 0, \quad \Psi(+\infty) = 0, \\ \Psi \in H_+^4. \end{cases}$$

Si Ψ est solution de (E) , on vérifie facilement que $\tilde{\Psi}$, extension impaire de Ψ à tout \mathbb{R} , vérifie :

$$(\tilde{E}) \quad \begin{cases} 4 D^4 \tilde{\Psi} - s D \tilde{\Psi} = \tilde{F}(\varphi_0 + \Psi), & s \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\Psi} \in H^4(\mathbb{R}). \end{cases}$$

On associe à (\tilde{E}) le problème linéaire :

$$(\tilde{EL}) \quad \begin{cases} 4 D^4 \Psi - s D \Psi = f, & s \in \mathbb{R} \\ \Psi \in H^4(\mathbb{R}). \end{cases}$$

En reprenant le raisonnement de la démonstration de la proposition 2.2, on voit que pour toute donnée $f \in L^2(\mathbb{R})$, (\tilde{EL}) possède une solution unique Ψ dans $H^4(\mathbb{R})$ et si f est impaire, Ψ est impaire. Nous utilisons par la suite le résultat d'approximation suivant :

LEMME 3.1 : Soit $\Psi \in H^2(\mathbb{R})$ telle que $sD\Psi \in L^2(\mathbb{R})$.
 Alors pour tout R réel > 0 , il existe σ_R telle que :

- i) support $\sigma_R \subset [-R, R]$,
- ii) $\sigma_R \in H^2(\mathbb{R})$,
- iii) $\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R = \Psi$ dans $H^2(\mathbb{R})$ fort,
- iv) $\lim_{R \rightarrow \infty} sD\sigma_R = sD\Psi$ dans $L^2(\mathbb{R})$ fort.

Preuve : Soit $v \in D(\mathbb{R})$ telle que : $v = 1$ sur $[-1/2, 1/2]$, $0 \leq v \leq 1$ sur $[-1, 1]$ et $v = 0$ pour $|x| > 1$. Posons $v_R(s) = v\left(\frac{s}{R}\right)$ et $\sigma_R = \Psi v_R$.

a) Il est alors facile de vérifier que $\text{Supp } \sigma_R \subset [-R, R]$, que $\sigma_R \in H^2(\mathbb{R})$ et que σ_R converge vers Ψ dans H^2 .

b) $sD\sigma_R$ converge vers $sD\Psi$ dans L^2 fort. En effet on a :

$$\begin{aligned} |sD\sigma_R - sD\Psi|_2 &\leq |v_R sD\Psi - sD\Psi|_2 + |\Psi sDv_R|_2 \leq \\ &\leq \left[\int_{|s| \geq R/2} (sD\Psi(s)^2 ds) \right]^{1/2} + \left| \frac{s}{R} \Psi Dv \right|_2, \end{aligned}$$

or $\left| \Psi(s) \frac{s}{R} Dv\left(\frac{s}{R}\right) \right|^2 \leq c |\Psi(s)|^2$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a $\left| \frac{s}{R} \Psi(s) Dv\left(\frac{s}{R}\right) \right| \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a $\left| \Psi \frac{s}{R} Dv \right|_2 \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$. ■

2. Approximation variationnelle à support compact de (\widetilde{EL})

On considère pour $R > 0$ l'espace :

$$H_R = \{ \Psi \in H^2(\mathbb{R}) / \text{Supp } \Psi \subset [-R, R] \}$$

muni de la norme induite par $H^2(\mathbb{R})$, $\|\Psi\| = \max_{k=0,1,2} |D^k \Psi|_2$.

Sur $H_R \times H_R$ on considère la forme bilinéaire :

$$\mathcal{A}(\Psi, v) = 4 \langle D^2 \Psi, D^2 v \rangle - \langle sD\Psi, v \rangle$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

LEMME 3.2 : La forme $\mathcal{A}(. , .)$ est continue et coercive sur $H_R \times H_R$.

Preuve : On a $\mathcal{A}(\Psi, \Psi) = 4|D^2 \Psi|_2^2 + \frac{1}{2} |\Psi|_2^2$ d'où la coercivité, et $|\mathcal{A}(\Psi, v)| \leq 4|D^2 \Psi|_2 |D^2 v|_2 + R |D\Psi|_2 |v|_2$ d'où la continuité. ■

Du théorème de Lax-Milgram et du lemme 3.2 on déduit :

PROPOSITION 3.1 : Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$; il existe une solution unique $\Psi_R \in H_R$ de l'équation variationnelle :

$$(\widetilde{EL}_R) : \mathcal{A}(\Psi_R, \nu) = \langle f, \nu \rangle \quad \forall \nu \in H_R.$$

De plus si f est impaire alors Ψ_R est impaire. ■

Abordons maintenant l'étude de la convergence de Ψ_R vers la solution Ψ de (\widetilde{EL}) .

PROPOSITION 3.2 : La solution Ψ_R de l'équation variationnelle (\widetilde{EL}_R) converge dans $H^2(\mathbb{R})$ vers la solution Ψ du problème (\widetilde{EL}) quand $R \rightarrow \infty$.

Preuve : Le problème (\widetilde{EL}) donne en multipliant scalairement par $\nu \in H_R$:

$$\langle 4D^4\Psi - sD\Psi, \nu \rangle = 4\langle D^2\Psi, D^2\nu \rangle - \langle sD\Psi, \nu \rangle = \langle f, \nu \rangle.$$

La différence avec (\widetilde{EL}_R) donne :

$$4\langle D^2(\Psi - \Psi_R), D^2\nu \rangle - \langle sD(\Psi - \Psi_R), \nu \rangle = 0 \quad \forall \nu \in H_R.$$

Posons $\theta_R = \sigma_R - \Psi_R$, σ_R donnée par le lemme 3.1.

Écrivons $\Psi - \Psi_R = \Psi - \sigma_R + \theta_R$. On a alors :

$$\mathcal{A}(\theta_R, \nu) + \mathcal{A}(\Psi - \sigma_R, \nu) = 0, \quad \forall \nu \in H_R.$$

Pour $\nu = \theta_R$ on a :

$$|\mathcal{A}(\Psi - \sigma_R, \theta_R)| \leq 4|D^2(\Psi - \sigma_R)|_2|D^2\theta_R|_2 + |sD(\Psi - \sigma_R)|_2|\theta_R|_2,$$

d'où

$$4|D^2\theta_R|_2^2 + \frac{1}{2}|\theta_R|_2^2 \leq 2|D^2(\Psi - \sigma_R)|_2^2 + 2|D^2\theta_R|_2^2 + \frac{1}{2c}|\theta_R|_2^2 + \frac{c}{2}|sD(\Psi - \sigma_R)|_2^2.$$

En posant $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2c} > 0$, on obtient :

$$2|D^2\theta_R|_2^2 + \gamma|\theta_R|_2^2 \leq 2|D^2(\Psi - \sigma_R)|_2^2 + \frac{c}{2}|sD(\Psi - \sigma_R)|_2^2,$$

ce qui avec le lemme 3.1 entraîne que $\theta_R \rightarrow 0$ dans H^2 fort, et par suite comme $|\Psi_R - \Psi|_{H^2} \leq |\Psi_R - \sigma_R|_{H^2} + |\sigma_R - \Psi|_{H^2}$ on a la convergence de Ψ_R vers Ψ dans H^2 quand $R \rightarrow \infty$. ■

3. Approximation variationnelle à support compact de (\tilde{E})

A (\tilde{E}) on associe le problème variationnel :

$$(\tilde{E}_R) \quad \begin{cases} \Psi_R \in H_R \text{ vérifie pour tout } v \in H_R \\ \mathcal{A}(\Psi_R, v) = \langle \tilde{F}(\varphi_0 + \Psi_R), v \rangle. \end{cases}$$

Pour montrer que (\tilde{E}_R) admet une solution Ψ_R dans H_R , on lui associe le schéma itératif suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} \Psi_p \in H_R, \Psi_{p+1} \in H_R \text{ vérifiant } \forall v \in H_R \\ \mathcal{A}(\Psi_{p+1}, v) = \langle \tilde{F}(\varphi_0 + \Psi_p), v \rangle. \end{cases}$$

PROPOSITION 3.3 : Pour chaque Ψ_p donnée dans H_R le problème (I) possède une solution Ψ_{p+1} unique dans H_R .

Preuve : L'existence et l'unicité de la solution découlent de la proposition 3.1. En effet, il suffit de remarquer que pour $\Psi_p \in H_+^2$, $F(\varphi_0 + \Psi_p)$ est dans $L^2(0, +\infty)$. ■

Notons maintenant $\mathcal{L} : \Psi_p \rightarrow \Psi_{p+1}$ l'opérateur défini par (I).

Pour montrer que (\tilde{E}_R) admet une solution dans H_R on va montrer que \mathcal{L} est contractant sur une boule de H_R .

PROPOSITION 3.4 : Pour β assez petit, \mathcal{L} est contractant sur une boule de H_R .

Preuve : Soient Ψ_1 et $\Psi_2 \in H_R$. Posons $\omega_i = \varphi_0 + \Psi_i, i = 1, 2$

$$\bar{\Psi}_i = \mathcal{L}(\Psi_i), \quad \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_1 - \bar{\Psi}_2 \text{ et } \mathcal{F}(\Psi_i) = \tilde{F}(\varphi_0 + \Psi_i).$$

Pour tout $v \in H_R$ on a :

$$\mathcal{A}(\bar{\Psi}, v) = \langle \mathcal{F}(\Psi_1) - \mathcal{F}(\Psi_2), v \rangle,$$

et pour $v = \bar{\Psi}$ on obtient

$$4|D^2 \bar{\Psi}|_2^2 + \frac{1}{2} |\bar{\Psi}|_2^2 \leq |\mathcal{F}(\Psi_1) - \mathcal{F}(\Psi_2)|_2 |\bar{\Psi}|_2.$$

D'après le lemme 2.3 et pour $\|\Psi_i\| \leq r, i = 1, 2$, on a :

$$|\mathcal{F}(\Psi_1) - \mathcal{F}(\Psi_2)|_2 = 2|F(\omega_1) - F(\omega_2)|_{2,+} \leq 99(2\beta B + r)^2 \|\Psi_1 - \Psi_2\|.$$

D'où

$$\|\bar{\Psi}\| = \|\mathcal{L}(\Psi_1) - \mathcal{L}(\Psi_2)\| \leq 198(2\beta B + r)^2 \|\Psi_1 - \Psi_2\|,$$

et \mathcal{L} est contractant si

$$198(2\beta + r)^2 < 1. \quad (3)$$

D'autre part :

$$\|\mathcal{L}(\Psi)\| \leq 2|\mathcal{F}(\Psi)|_2 \leq 66\|\Psi + \varphi_0\|_+^3,$$

d'où

$$\|\mathcal{L}(\Psi)\| \leq 66(2\beta B + \|\Psi\|)^3.$$

Une condition suffisante sur r pour que la boule de rayon r se conserve par \mathcal{L} est :

$$66(2\beta B + r)^3 \leq r. \quad (4)$$

Il existe $r > 0$ vérifiant (3) et (4) dès que $\beta < \frac{1}{3B\sqrt{198}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{2}}$. ■

Remarque : Si on travaille sur l'espace \tilde{H}_R formé des fonctions impaires de H_R , muni de la norme $\|\cdot\|_+$ déjà définie, il est facile de voir en reprenant le calcul ci-dessus que \mathcal{L} est contractant sur une boule de \tilde{H}_R dès que $\beta < \beta_0$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1 : *Pour $\beta < \beta_0$, le problème (\tilde{E}_R) possède une solution Ψ_R impaire dans H_R . Cette solution est unique dans une boule de H_R . ■*

Il reste à examiner la convergence de Ψ_R vers la solution $\tilde{\Psi}$ de (\tilde{E}) , quand R tend vers l'infini.

PROPOSITION 3.5 : *La solution Ψ_R de (\tilde{E}_R) converge dans H^2 vers la solution $\tilde{\Psi}$ de (\tilde{E}) quand R tend vers l'infini.*

Preuve : Plaçons-nous dans les conditions assurant l'existence de $\tilde{\Psi}$ solution de (\tilde{E}) (théorème 2.1), c'est-à-dire avec un choix de $\beta < \beta_0$ et $r > 0$ assurant l'existence d'un point fixe dans la boule $\|\Psi\|_+ \leq r$. On a vu que ce même choix assurait l'existence d'une solution Ψ_R de (\tilde{E}_R) . Remarquons qu'alors on a :

$$|\mathcal{F}(\tilde{\Psi}) - \mathcal{F}(\Psi_R)|_2 \leq c\|\tilde{\Psi} - \Psi_R\|, \quad \text{avec } c = \frac{99}{2}(2\beta B + r)^2, \quad c < \frac{1}{2}.$$

En multipliant scalairement l'équation (\tilde{E}) par $v \in H_R$, on obtient :

$$\mathcal{A}(\tilde{\Psi}, v) = \langle \mathcal{F}(\tilde{\Psi}), v \rangle.$$

On a également $\mathcal{A}(\Psi_R, \nu) = \langle \mathcal{F}(\Psi_R), \nu \rangle$.

D'où en faisant la différence :

$$\mathcal{A}(\tilde{\Psi} - \Psi_R, \nu) = \langle \mathcal{F}(\tilde{\Psi}) - \mathcal{F}(\Psi_R), \nu \rangle, \quad \forall \nu \in H_R.$$

Notons σ_R l'approximation de $\tilde{\Psi}$ suivant le lemme 3.1 et écrivons

$$\tilde{\Psi} - \Psi_R = \tilde{\Psi} - \sigma_R + \theta_R.$$

En prenant $\nu = \theta_R$, il vient :

$$\mathcal{A}(\theta_R, \theta_R) = \mathcal{A}(\sigma_R - \tilde{\Psi}, \theta_R) + \langle \mathcal{F}(\tilde{\Psi}) - \mathcal{F}(\Psi_R), \theta_R \rangle,$$

d'où

$$4|D^2 \theta_R|_2^2 + \frac{1}{2} |\theta_R|_2^2 \leq 4|D^2(\tilde{\Psi} - \sigma_R)|_2 |D^2 \theta_R|_2 + |sD(\tilde{\Psi} - \sigma_R)|_2 |\theta_R|_2 + |\mathcal{F}(\tilde{\Psi}) - \mathcal{F}(\Psi_R)|_2 |\theta_R|_2,$$

et avec des constantes c_1 et c_2 assez grandes :

$$2|D^2 \theta_R|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2c_1}\right) |\theta_R|_2^2 \leq 2|D^2(\tilde{\Psi} - \sigma_R)|_2^2 + \frac{c_1}{2} |sD(\tilde{\Psi} - \sigma_R)|_2^2 + \frac{cc_2}{2} \|\tilde{\Psi} - \sigma_R\|^2 + \frac{c}{2c_2} |\theta_R|^2 + c \|\theta_R\|^2,$$

donc

$$\left(\frac{1}{2} - c - \frac{1}{2c_1} - \frac{c}{2c_2}\right) \|\theta_R\|^2 \leq \left(2 + \frac{cc_2}{2}\right) \|\tilde{\Psi} - \sigma_R\|^2 + \frac{c_1}{2} |sD(\tilde{\Psi} - \sigma_R)|_2^2.$$

Ainsi θ_R tend vers 0 dans H^2 et par suite Ψ_R converge vers $\tilde{\Psi}$ dans H^2 . ■

B. Intégration numérique

Le schéma itératif (I) du paragraphe A) est utilisé pour la résolution numérique de (\tilde{E}_R) . On construit une approximation V_N de H_R et une base e_i permettant un calcul explicite des coefficients de la matrice associée au système discrétisé à partir de (I).

On construit le maillage de l'intervalle $[-R, R]$:

$$x_i = ih, \quad i = -N, -N + 1, \dots, N - 1, N, \quad h = R / N.$$

Pour $i = -N + 1, \dots, N - 1$ on note f_i la fonction continue affine par morceaux telle que :

$$f_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad f_i(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin]x_{i-1}, x_{i+1}[.$$

Pour $i = -N + 2, \dots, +N - 2$, on note

$$g_i(x) = f_{i-1}(x) - f_{i+1}(x) \quad \text{et} \quad e_i(x) = \int_{-\infty}^x g_i(\sigma) d\sigma.$$

Soit V_N le sous-espace engendré par les e_i . Alors on a :

PROPOSITION 3.6 :

$$\bigcup_{N \geq 2} V_N \text{ est dense dans } H_R.$$

Pour la démonstration voir [5]. ■

En écrivant $\Psi^p(x) = \sum_{i=-N+2}^{N-2} \Psi_i^p e_i(x)$, le schéma itératif discrétisé s'écrit :

$$(ID) \quad \begin{cases} \sum_i \Psi_i^{p+1} (\langle D^2 e_i, D^2 e_j \rangle - \langle sDe_i, e_j \rangle) = \langle \tilde{F}(\varphi_0 + \Psi^p), e_j \rangle, \\ j = -N + 2, \dots, N - 2. \end{cases}$$

Les termes $\langle D^2 e_i, D^2 e_j \rangle$ se calculent exactement :

$$\begin{aligned} \langle D^2 e_i, D^2 e_j \rangle &= \langle Dg_i, Dg_j \rangle = \\ &= \frac{1}{h} (g_j(x_{i+2}) - 2g_j(x_{i+1}) + 2g_j(x_{i-1}) - g_j(x_{i-2})) \end{aligned}$$

On a $\langle D^2 e_i, D^2 e_j \rangle = 0$ pour $|i - j| > 3$.

Les termes $\langle sDe_i, e_j \rangle$ s'intègrent directement en explicitant De_i et e_i et on a $\langle sDe_i, e_j \rangle = 0$ pour $|i - j| > 3$. Ainsi on obtient une matrice bande.

La méthode itérative (I) proposée nécessite ainsi la résolution d'un système linéaire à chaque itération. La matrice associée à ce schéma ne varie pas au cours des itérations. La triangularisation est effectuée à la première itération par la méthode de Gauss et ensuite on travaille uniquement sur le second membre. Dans le second membre on remplace φ_0 et $F(\varphi_0 + \Psi^p)$ par $\Pi_h \varphi_0$ et $\Pi_h F(\varphi_0 + \Psi^p)$.

La méthode est programmée en Langage PASCAL sur un ordinateur VAX/VMS. Le nombre d'itérations nécessaires pour que les 14 décimales significatives soient stabilisées varie entre 12 et 45.

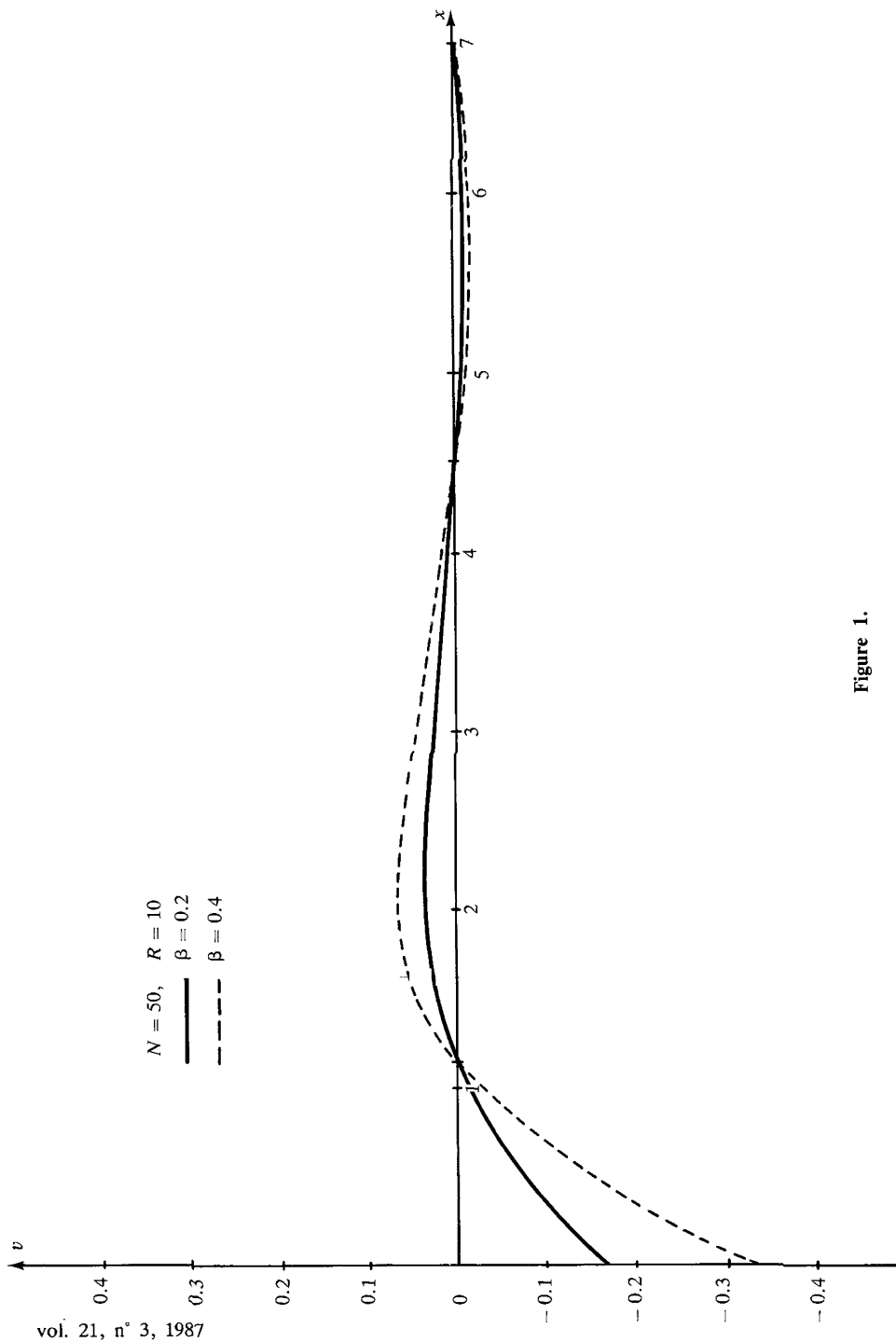


Figure 1.

Fixons $N = 50$ et $R = 10$; on obtient le tableau suivant qui donne le nombre d'itérations en fonction de β :

β	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Nombre d'itérations	12	18	24	30	45

Le graphique p. 443 donne les courbes $U(x)$ pour $\beta = 0,2$ et $0,4$:

On remarque que les courbes traversent l'axe OX sensiblement aux mêmes points.

On remarque que pour $\beta < 0,6$ la suite des itérés converge ; pour β voisin de $0,6$ les valeurs calculées oscillent et ne convergent plus ; pour $\beta > 0,6$ il y a explosion au bout d'un petit nombre d'itérations.

Fixons enfin $N = 50$ et $\beta = 0,25$ et diminuons R .

On remarque qu'au-dessous de $R = 5$ le schéma diverge et que pour $R = 8,7$ et 6 on obtient sensiblement la même courbe et que pour $R = 5$ la courbe ne prend plus de valeurs négatives.

RÉFÉRENCES

- [1] P. BARAS, J. DUCHON, R. ROBERT, *Évolution d'une interface par diffusion de surface Comm. P.D.E.* 9(4), 1984, 313-335.
- [2] M. BOUCHIBA, *Thèse de 3^e cycle à paraître.* Fac. des Sciences de Tunis.
- [3] W. W. MULLINS, *J. Appl. Phys.* 28, 1957, pp. 333-342.
- [4] W. M. ROBERTSON, *J. Appl. Phys.* 42, 1971, pp. 463-468.
- [5] R. ROBERT, P. WITOMSKI, *Numerische Math.* 46, 1985, 493-498.