

JACQUELINE SANCHEZ-HUBERT

NICOLE TURBE

Ondes élastiques dans une bande périodique

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 20, n° 3 (1986), p. 539-561

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_3_539_0

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ONDES ÉLASTIQUES DANS UNE BANDE PÉRIODIQUE (*)

par Jacqueline SANCHEZ-HUBERT ⁽¹⁾ et Nicole TURBE ⁽¹⁾

Communiqué par R. TEMAM

Résumé — On étudie la propagation d'ondes de cisaillement SH dans une bande Ω élastique, périodique. L'existence de fonctions propres généralisées, ondes de Bloch, permet un développement de la solution à l'aide de ces fonctions. Deux applications sont proposées. La première est relative au comportement asymptotique de familles spectrales dans des domaines allongés. On étudie la convergence des familles spectrales des ondes d'abord dans un domaine obtenu par troncature de la bande Ω et ensuite dans un domaine de forme fuselée convergeant vers une bande B infinie, limitée par deux droites parallèles. En seconde application, on montre, dans le cas isotrope de la bande B , que si la période du milieu est petite par rapport à l'échelle des données, le terme prépondérant de la solution est la fonction obtenue par homogénéisation du problème.

Abstract — We study the propagation of SH waves in an elastic, periodic band Ω . The existence of generalized eigenfunctions, Bloch waves, leads to an expansion of the solution, in terms of these functions. Two applications are presented. The first one is related to the asymptotic behaviour of spectral families in elongated domains. We study the convergence of the spectral families for waves in the truncated domain and for waves in a spindle-shaped domain that converges to an infinite band B , bounded by two parallel straight lines. As a second application, we prove, when the band B is isotropic, and when the period of the medium is small compared to the initial data scale, that the main term of the solution satisfies the homogenized problem.

1. INTRODUCTION

L'étude de propriétés de l'équation des ondes dans des domaines infinis s'effectue soit par transformation de Fourier, si les coefficients sont constants [1], soit par développement de Bloch lorsque les coefficients sont périodiques [2]. Cette dernière méthode est source d'applications dont cet article se propose de présenter deux aspects.

Le problème physique, défini section 2, concerne l'étude d'ondes SH de cisaillement [1] dans une bande élastique, périodique, infinie. L'existence de fonctions propres généralisées, les ondes de Bloch, permet une représentation de la solution à l'aide de ces fonctions.

(*) Reçu en février 1985, révisé en décembre 1985

⁽¹⁾ Laboratoire de Mécanique Théorique, Université Pierre et Marie Curie, Tour 66, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

Le développement de Bloch associé à tout opérateur à coefficients périodiques fait apparaître des spectres continus [2], [11], [13], [3], [5]. Dans la pratique, les domaines rencontrés sont « grands », mais bornés, le spectre étant alors ponctuel et les familles spectrales correspondantes constantes par morceaux. Dans nombre de calculs approchés de l'ingénieur, on confond les deux cas [8] ; il y a donc lieu d'étudier la convergence des familles lorsque le domaine borné tend vers un domaine infini. Nous étudions cette question pour des domaines plans allongés dans une direction x_1 et convergeant vers une bande infinie. Deux cas sont étudiés. Dans le premier, section 3.1 à 3.3, dont les résultats ont été annoncés dans [9], le domaine limite Ω est une bande infinie à frontière périodique et la suite de domaines Ω_n est formée par des troncatures de la bande infinie. Dans le deuxième cas, section 3.4, on envisage la famille de domaines obtenue par dilatation dans la direction x_1 convergeant vers une bande infinie limitée par deux droites.

En considérant la famille spectrale comme fonction de λ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega_n))$ dont les valeurs sont les projecteurs et en définissant des prolongements de fonctions à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$, on démontre une convergence au sens des distributions tempérées de la variable λ .

Ce résultat est obtenu en étudiant d'abord la convergence des solutions en x, t des problèmes aux valeurs initiales correspondants ; cette convergence a lieu dans des topologies L^∞ faible * de la variable t donc dans l'espace des distributions tempérées \mathcal{S}' (section 3.2). La transformée de Fourier de t dans la variable spectrale λ (section 3.3) permet de déduire des propriétés de convergence de la famille spectrale [6], [10]. Il convient de noter que nous considérons des conditions aux limites de Neumann sur les surfaces latérales. Dans le cas où le domaine Ω_n est formé par la troncature de Ω à $|x_1| \leq n$ on peut introduire des conditions de Dirichlet ou de Neumann pour $x_1 = \pm n$ la limite étant la même dans les deux cas. Ce résultat montre que la topologie de la convergence est trop faible pour saisir asymptotiquement les ondes réfléchies par les extrémités $x_1 = \pm n$. L'interprétation physique de ce fait est claire : la convergence des fonctions $u_n(t)$ dans \mathcal{S}' de la variable t implique que les fonctions tests sont rapidement décroissantes pour $t \rightarrow +\infty$. Or, l'influence de l'onde réfléchie par les extrémités $x_1 = \pm n$ n'intervient que pour $t = 0(n)$ et donc s'annule pour $n \rightarrow \infty$.

Le développement de Bloch des ondes élastiques dans la bande périodique, infinie est ensuite utilisé, section 4, pour étudier la propagation d'ondes haute fréquence dans le milieu où la période varie rapidement. La bande Ω est constituée des points (x_1, x_2) , $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in]0, 2\pi[$; le matériau, supposé isotrope, est périodique, de période $2\pi/\varepsilon$ en x_1 , ε petit paramètre positif donné. La période du milieu apparaît donc petite par rapport à l'échelle des données

initiales. Nous examinons alors le comportement de la solution u^ε lorsque le petit paramètre tend vers zéro.

La fonction u^ε est explicitée, sections 4.1, 4.2, à l'aide des ondes de Bloch. L'exemple des cas des milieux périodiques élastiques [11] ou mélanges fluide-solide [12] montrant l'action prépondérante du nombre d'onde k nul, nous sommes amenés à une étude des ondes de Bloch au voisinage de $k = 0$. Le changement $k = \varepsilon K$ conduit, section 4.3, à un problème de recherche de fonctions propres et de valeurs propres d'opérateurs, dépendant du paramètre ε , pour lequel la théorie des perturbations analytiques de Kato [4] ne s'applique pas, la perturbation étant singulière. En effet, les domaines des opérateurs sont bien différents selon que ε est nul ou non nul. La géométrie particulière de Ω permet cependant d'expliciter un développement des éléments propres en fonction de ε . Ces expressions étant introduites dans la représentation de la solution u^ε , nous montrons (section 4.4) que le premier terme du développement de u^ε en fonction de ε est la fonction obtenue en appliquant la théorie de l'homogénéisation [10] au problème d'élasticité.

2. DÉVELOPPEMENT DE BLOCH D'ONDES ÉLASTIQUES DANS UNE BANDE PÉRIODIQUE

2.1. Position du problème

On considère une bande élastique, cylindrique dans la direction x_3 , définie dans le plan (x_1, x_2) par le domaine Ω limité par les courbes (Γ_+) et (Γ_-) respectivement, d'équations $x_2 = F_+(x_1)$, $x_2 = F_-(x_1)$.

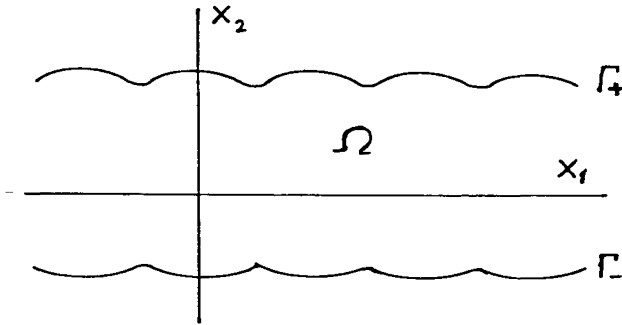


Figure 1.

On suppose que les fonctions F_+ et F_- sont périodiques, de période 2π en x_1 de même que les caractéristiques mécaniques, masse volumique et coefficients d'élasticité fonctions de $x = (x_1, x_2)$.

On étudie la propagation des ondes SH de cisaillement dans un tel milieu. Désignons par $u_k = u_k(x, t)$ la k -ième composante du vecteur déplacement de la particule x à l'instant t . Compte tenu des propriétés de symétrie des coefficients d'élasticité, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} k = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{klmn}(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right).$$

Si le matériau est tel que l'on ait $a_{k13n} = 0$ pour k, l, n tous les trois égaux à 1 ou 2, nous pourrions chercher des solutions de la forme $u_k = \delta_{k3} u(x, t)$. Elles satisfont à l'équation scalaire :

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(a_{pq}(x) \frac{\partial u}{\partial x_q} \right) \quad \text{dans } \Omega. \quad (1)$$

Les coefficients $a_{pq} = a_{3p3q}$ vérifient, outre les propriétés de symétrie rappelées plus haut, les propriétés d'ellipticité :

$$a_{pq} \xi_p \xi_q \geq \alpha |\xi|^2, \quad \alpha \text{ constante positive, pour tout } \xi. \quad (2)$$

La masse volumique est bornée :

$$0 < \rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1. \quad (3)$$

Nous supposons (Γ_+) et (Γ_-) libres de contrainte :

$$a_{pq}(x) \frac{\partial u}{\partial x_q} \nu_p = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_+) \text{ (resp. } (\Gamma_-)) \quad (4)$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2)$ désignant le vecteur normal à (Γ_+) (resp. (Γ_-)) dans le plan (x_1, x_2) .

À ce système (1)-(4), il convient d'ajouter les conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \equiv \dot{u}(x, 0) = u_1(x) \quad (5)$$

les fonctions u_0 et u_1 étant données, leurs propriétés seront précisées dans un cadre fonctionnel approprié.

Nous considérerons par la suite des domaines Ω_n qui seront obtenus à partir de Ω en le tronquant aux plans $x_1 = \pm 2\pi n$, n entier. Les hypothèses faites plus haut sur le matériau seront retenues ainsi que les conditions de périodicité et aux limites sur (Γ_+) et (Γ_-) .

Le déplacement sera noté $u^n(x, t)$, les restrictions à Ω_n des fonctions telles que masse volumique, coefficients d'élasticité définies dans Ω seront également indicées par n . Enfin, nous ajouterons la condition (4) sur $x_1 = \pm 2\pi n$. Dans la condition initiale (5) nous prendrons pour $u^n(x)$ la restriction de u_1 à Ω_n .

2.2. Formulation variationnelle

L'espace $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega_n)$) est muni du produit scalaire avec poids $\rho(x)$ (resp. $\rho^n(x)$) et noté $L^2_\rho(\Omega)$. Multipliant scalairement dans L^2_ρ l'équation (1) divisée par $\rho(x)$ par un élément quelconque $v \in H^1(\Omega)$ (resp. $v \in H^1(\Omega_n)$) on introduit de manière classique l'opérateur A (resp. A_n) autoadjoint dans $L^2_\rho(\Omega)$ (resp. autoadjoint compact dans $L^2_\rho(\Omega_n)$) associé à la forme hermitienne :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_{pq} \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_q} dx \quad (\text{resp. } a^n(u^n, v)). \tag{6}$$

Le problème se formule alors de la manière suivante :

Trouver u , fonction de t , à valeurs dans $L^2(\Omega)$ telle que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + Au &= 0 \\ u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) &= u_1 \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

(resp. (7ⁿ). Trouver u^n ...).

Si on se donne $u_0 \in H^1(\Omega)$ et $u_1 \in L^2_\rho(\Omega)$ la théorie des semi-groupes (groupe de Stone) permet de conclure à l'existence et à l'unicité de la solution u [10] (resp. u^n).

Remarque 1 : Dans la section 3.1, il sera utile d'introduire l'opérateur $A + I$ afin de travailler avec un opérateur défini positif (la famille spectrale étant alors la translatée de celle de A). On pourra donc dans (7) considérer l'opérateur A comme l'opérateur associé à la forme $a(u, v)$ de (6) plus $(u, v)_{L^2_\rho(\Omega)}$.

2.3. Développement du type Bloch dans Ω

Nous travaillons dans Ω divisé en périodes \mathcal{O} du plan (x_1, x_2) définies par :

$$\left. \begin{aligned} 0 < x_1 < 2\pi \\ F_-(x_1) < x_2 < F_+(x_1) \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

et nous cherchons des solutions dans \mathcal{O} reproduit par périodicité.

A l'opérateur A défini ci-dessus, on associe une famille d'opérateurs $A(k)$, paramétrée par $k \in [0, 1]$, opérant sur des fonctions définies sur \mathcal{O} , définie for-

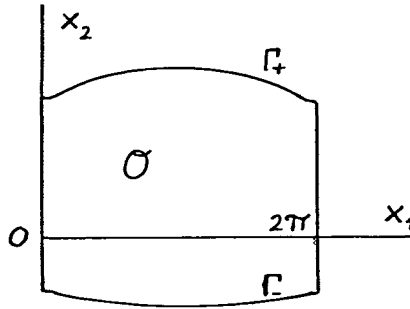


Figure 2.

mellement par :

$$A(k) = -\frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x_p} + ik\delta_{p1} \right) \left(a_{pq}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_q} + ik\delta_{q1} \right) \right). \tag{9}$$

On travaille dans $H_p^1(\mathcal{O})$ où $H_p^1(\mathcal{O})$ désigne l'espace des fonctions périodiques de $H^1(\mathcal{O})$ dont les traces prennent même valeur en deux points $(0, x_2)$ et $(2\pi, x_2)$.

La formule de Green permet alors de montrer que le domaine de l'opérateur $A(k)$ est constitué par les fonctions u dont les vecteurs contrainte généralisée $a_{pq}((\partial u/\partial x_p) + ik\delta_{p1} u) v_q$ sont égaux en deux points $(0, x_2)$ et $(2\pi, x_2)$ de \mathcal{O} et sont nuls sur les bords (Γ_+) et (Γ_-) de \mathcal{O} (condition de Neumann généralisée). Par des arguments de démonstration analogues à [2] et [11], on montre que :

PROPOSITION 1 : *Pour $k \in [0, 1]$ fixé, il existe deux constantes positives α_1 et α_2 , indépendantes de k , telles que la forme $a(k)$ associée à $A(k)$ vérifie :*

$$(A(k) u, u)_{L_p^2(\mathcal{O})} \equiv a(k; u, u) \geq \alpha_1 \|u\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 - \alpha_2 \|u\|_{L_p^2(\mathcal{O})}^2.$$

Il en résulte que :

PROPOSITION 2 : *Pour $k \in [0, 1]$ fixé, l'opérateur $A(k)$ a une résolvante compacte $(A(k) + \lambda I)^{-1}$, $\text{Re } \lambda \neq 0$. Il existe donc une suite dénombrable $0 \leq \omega_0^2(k) \leq \dots \leq \omega_n^2(k) \dots \rightarrow +\infty$ de valeurs propres, de multiplicité finie, de l'opérateur $A(k)$ associées à des vecteurs propres $\phi^0(x, k), \dots, \phi^n(x, k), \dots$ formant une base orthonormale de $L_p^2(\mathcal{O})$.*

On constate facilement que l'opérateur $A(k)$ jouit de la propriété :

$$A(e^{ikx_1} u) = e^{ikx_1} A(k) u$$

alors les fonctions $e^{ikx_1} \phi^m(x, k)$ apparaissent comme les fonctions propres généralisées de l'opérateur A . Ce sont les ondes de Bloch du système.

Remarque 2 : Notons que si ϕ^m est périodique en x_1 la fonction propre généralisée ne l'est pas car la fonction e^{ikx_1} est périodique de période $(2\pi/|k|)$.

THÉORÈME 1 : (Développement de Bloch). Soit $u \in L^2_p(\Omega)$, à valeurs complexes. Alors :

$$u(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{ikx_1} dk \sum_{m=0}^N \hat{u}_m(k) \phi^m(x, k) \tag{10}$$

où :

$$\hat{u}_m(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega_N} e^{-ikx_1} u(x) \bar{\phi}^m(x, k) \rho(x) dx . \tag{11}$$

De plus, on a l'identité de Parseval :

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 \rho(x) dx = \int_0^1 dk \sum_{m=0}^{\infty} |\hat{u}_m(k)|^2 . \tag{12}$$

Démonstration : Le plan de démonstration est le même qu'en [2] : soit $u \in E = \{ v, v \in C^\infty, \text{ nulle dans un voisinage de l'infini } \}$ on construit la fonction $\tilde{u}(x, k), k \in [0, 1], x \in \mathcal{O}$:

$$\tilde{u}(x, k) = \sum_{\gamma \in 2\pi\mathbb{Z}} u(x_1 + \gamma, x_2) e^{-ik(x_1 + \gamma)} \tag{13}$$

la fonction u étant nulle dans un voisinage de l'infini, la somme dans (13) ne contient qu'un nombre fini de termes. \tilde{u} est un élément de $L^2_p(\mathcal{O})$ et peut donc être développé dans la base des vecteurs propres $\phi^m(x, k)$:

$$\tilde{u}(x, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_m(k) \phi^m(x, k) \tag{14}$$

avec, par définition,

$$\begin{aligned} \hat{u}_m(k) &= (\tilde{u}(x, k)) , \\ \phi^m(x, k)_{L^2_p(\mathcal{O})} &= \int_{\mathcal{O}} \sum_{\gamma} u(x_1 + \gamma, x_2) e^{-ik(x_1 + \gamma)} \bar{\phi}^m(x, k) \rho(x) dx \\ &= \int_{\Omega} u(x_1, x_2) e^{-ikx_1} \bar{\phi}^m(x, k) \rho(x) dx \end{aligned}$$

puisque ϕ^m et ρ sont toutes deux 2π -périodiques en x_1 d'où (11) pour toute $u \in E$ dense dans $L^2_\rho(\Omega)$.

Pour démontrer (10) on calcule l'expression :

$$\int_0^1 e^{ikx_1} \tilde{u}(x, k) dk$$

(qui a un sens d'après la définition de \tilde{u}); il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{ikx_1} \sum_\gamma u(x_1 + \gamma, x_2) e^{-ik(x_1 + \gamma)} dk &= \\ &= \sum_\gamma u(x_1 + \gamma, x_2) \int_0^1 e^{-ik\gamma} dk = u(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Enfin, de (14) on tire :

$$\| \tilde{u}(x, k) \|_{L^2_\rho(\theta)}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} | \hat{u}_m(k) |^2$$

où :

$$\begin{aligned} \| \tilde{u}(x, k) \|_{L^2_\rho(\theta)}^2 &= \int_\theta | \tilde{u}(x, k) |^2 \rho(x) dx = \\ &= \int_\theta \sum_{\gamma, \delta} u(x_1 + \delta, x_2) e^{-ik(x_1 + \delta)} \bar{u}(x_1 + \gamma, x_2) e^{ik(x_1 + \gamma)} \rho(x) dx \\ &= \int_\theta \sum_{\gamma, \delta} u(x_1 + \delta, x_2) \bar{u}(x_1 + \gamma, x_2) e^{-ik(\delta - \gamma)} \rho(x) dx \end{aligned}$$

d'où en intégrant en k :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dk \int_\theta | \tilde{u}(x, k) |^2 \rho(x) dx &= \int_\theta \sum_\delta | u(x_1 + \delta, x_2) |^2 \rho(x) dx = \\ &= \int_\Omega | u(x_1, x_2) |^2 \rho(x) dx = \| u(x) \|_{L^2_\rho(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

(10) et (11) sont vraies pour $u \in L^2_\rho(\Omega)$.

3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE FAMILLES SPECTRALES DANS DES DOMAINES ALLONGÉS

3.1. Famille spectrale de l'opérateur A

D'après ce qui précède, on a :

$$A(e^{ikx_1} \phi^m(x, k)) = e^{ikx_1} \omega_m^2(k) \phi^m(x, k)$$

donc du théorème 1, on déduit la résolution spectrale de A :

$$Au = \int_0^1 e^{ikx_1} dk \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m^2(k) \hat{u}_m(k) \phi^m(x, k)$$

d'où la famille spectrale de A :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}(A, \lambda) &= 0 \quad \text{si } \lambda < 0 \\ \mathcal{E}(A, \lambda) u(x) &= \int_0^1 e^{ikx_1} dk \sum_{m, \omega_m^2 \leq \lambda} \hat{u}_m(k) \phi^m(x, k) \quad \text{si } \lambda > 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Vérifions que $\mathcal{E}(A, \lambda)$ dans (15) est bien un projecteur : $\{ \hat{u}_m(k) \}$ est un élément de $L^2(0, 1; l^2)$ d'autre part, l'opérateur qui à tout $u \in L^2_p(\Omega)$ fait correspondre $\{ \hat{u}_m(k) \}$ est un opérateur unitaire U . L'opérateur $\mathcal{E}(\lambda)$ défini en (15) se transforme donc en l'opérateur $U\mathcal{E}(\lambda)U^{-1}$ opérant sur $\{ \hat{u}_m(k) \}$ et donc en appliquant $\mathcal{E}(\lambda)$ une seconde fois on obtient $\mathcal{E}^2(\lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$ c.q.f.d.

On vérifie alors, sans difficulté, que $\mathcal{E}(\lambda)$ défini par (15) est une famille spectrale ([10], chap. 2, § 4).

Remarque 3 : Les points du spectre de A sont donc les valeurs de λ appartenant à la réunion des images de $\omega^2(k)$ lorsque k parcourt l'intervalle $[0, 1]$:

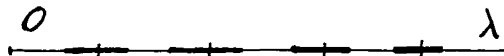


Figure 3.

3.2. Étude de la convergence de la solution u^n vers la solution du « problème limite »

Remarquons tout d'abord que nous avons retenu comme condition aux limites sur $|x_1| = 2\pi n$ une condition de Neumann et qu'alors (6) était définie pour tout $v \in H^1(\Omega_n)$. Si nous avions pris une condition de Dirichlet sur $|x_1| = 2\pi n$ il aurait fallu prendre $v \in V_n$:

$$V_n = \{ v, v \in H^1(\Omega_n), v|_{x_1 = \pm 2\pi n} = 0 \}. \quad (16)$$

Dans ce qui suit nous désignerons indifféremment par V_n l'espace $H^1(\Omega_n)$ ou l'espace défini par (16) lorsque les raisonnements vaudront aussi bien en prenant les conditions de Neumann que celles de Dirichlet.

Nous considérons ici le problème formulé en 2.1, dans le cas :

$$u_0 = 0$$

et nous rappelons le théorème de caractérisation ([10], chap. 12, § 3).

THÉORÈME 2 : (de caractérisation). *La solution u^n de (7ⁿ) est l'unique fonction telle que, pour tout T fixé on ait :*

$$u^n \in L^\infty(0, T; V_n), \quad \dot{u}^n \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_n)) \tag{17}$$

$$u^n(0) = 0 \tag{18}$$

$$\int_0^T [a^n(u^n(t), \psi(t)) - (\dot{u}^n(t), \dot{\psi}(t))] dt = (u_1^n, \psi(0)) \tag{19}$$

quelle que soit la fonction test $\psi(t) = \phi(t)v$ où v est un élément quelconque d'un sous-ensemble dense dans V_n et ϕ une fonction de la classe :

$$\phi \in \{ \phi ; \phi \in C^1([0, T]); \phi(T) = 0 \} .$$

Il va de soi qu'une caractérisation analogue a lieu pour u .

Nous allons maintenant définir un prolongement de u^n en dehors de Ω_n .

Nous ferons l'hypothèse que les fonctions F_+ et F_- , définissant les frontières (Γ_+) et (Γ_-) , sont de classe C^1 par morceaux. Nous prolongerons alors u^n de telle sorte que le prolongement $\tilde{u}^n \in H^1(\Omega)$, \tilde{u}^n étant identiquement nulle dans un voisinage de l'infini. Le processus de prolongement, standard, est schématisé sur la figure ci-dessous :

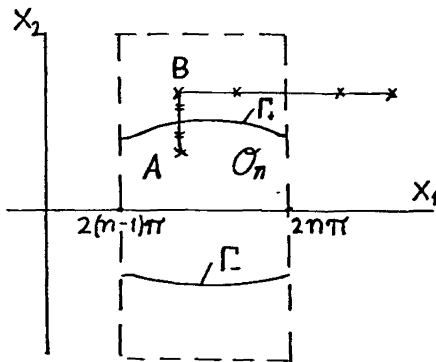


Figure 4.

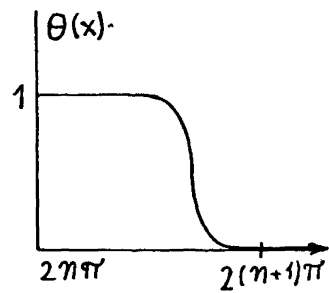


Figure 5.

a) Nous définissons un prolongement par « symétrie » autour de (Γ_+) et (Γ_-) (cf. fig. 4) : $\tilde{u}^n(B) = u^n(A)$, puis nous restreignons le domaine obtenu à un rectangle contenant Ω_n .

b) Nous prolongeons alors par symétrie autour de $|x_1| = 2\pi n$ puis nous multiplions par une fonction $\theta(x_1)$ du type indiqué figure 5. Enfin, nous prolongeons par zéro au-delà de $|x_1| = 2(n+1)\pi$.

c) Nous appellerons $\tilde{u}^n(x)$ le prolongement obtenu, restreint au domaine Ω .

D'après les propriétés classiques [7], on voit facilement qu'il existe une constante c telle que :

$$\| \tilde{u}^n \|_{H^1(\Omega)} \leq c \| u^n \|_{H^1(\Omega_n)} \tag{20}$$

quant à \dot{u}^n nous le prolongeons par zéro en dehors de Ω_n et nous désignons par $\tilde{\dot{u}}^n$ ce prolongement.

On a les estimations :

$$\| \tilde{u}^n(t) \|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 \quad \forall t \in]-\infty, +\infty[\tag{21}$$

$$\| \tilde{\dot{u}}^n(t) \|_{L^2_p(\Omega)} \leq c_2 \quad \forall t \in]-\infty, +\infty[. \tag{22}$$

En effet, multiplions (7), scalairement par (du^n/dt) dans $L^2_p(\Omega_n)$ puis intégrons sur Ω_n , nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_n} (\rho(x) |\dot{u}^n|^2 + a^n(u^n, u^n)) dx \right] = 0$$

d'où :

$$\| \dot{u}^n(t) \|_{L^2_p(\Omega_n)}^2 + \| u^n(t) \|_{H^1(\Omega_n)}^2 = \text{Cte} = \| u_1^n \|_{L^2_p(\Omega)}^2$$

et par suite :

$$\| u^n(t) \|_{H^1(\Omega_n)} \leq \text{Cte} \quad \forall t \in]-\infty, +\infty[\tag{23}$$

$$\| \dot{u}^n(t) \|_{L^2_p(\Omega_n)} \leq \text{Cte} \quad \forall t \in]-\infty, +\infty[. \tag{24}$$

De (20) et de (23) nous déduisons facilement (21), la seconde estimation découlant immédiatement de (24).

PROPOSITION 3 : On a :

$$\tilde{u}^n \rightarrow u^* \quad \text{dans } L^\infty(-\infty, +\infty; H^1(\Omega)) \text{ faible } * \tag{25}$$

$$\tilde{\dot{u}}^n \rightarrow \dot{u}^* \quad \text{dans } L^\infty(-\infty, +\infty; L^2_p(\Omega)) \text{ faible } * \tag{26}$$

$u^* \equiv u$ solution du « problème limite » (7) .

Par extraction d'une sous-suite on a immédiatement :

$$\begin{aligned} \tilde{u}^n &\rightarrow u^* \quad \text{dans } L^\infty(-\infty, +\infty; H^1(\Omega)) \text{ faible } * \\ \tilde{\tilde{u}}^n &\rightarrow v^* \quad \text{dans } L^\infty(-\infty, +\infty; L_p^2(\Omega)) \text{ faible } * . \end{aligned}$$

Alors, $v^* = \dot{u}^*$ au sens des distributions sur $]-\infty, +\infty[\times \Omega$. Ce résultat est classique puisqu'on teste avec des fonctions à support borné. On vérifie alors sans peine que l'on peut passer à la limite dans (19).

Pour constater que $u^*(0) = 0$, il suffit de remarquer que, d'après (25), (26), pour n et T fixés $\tilde{u}^n \rightarrow u^*$ dans $H^1[(-T, +T) \times \Omega_n]$ faible et d'appliquer le théorème des traces sur $t = 0$ compte tenu de (18).

Compte tenu des résultats précédents, on vérifie immédiatement que u^* vérifie (19) quel que soit $v \in \{v; v \in H^1(\Omega) \text{ nulle dans un voisinage de l'infini}\}$. u^* est donc bien la solution u du problème limite (7).

3.3. Convergence des familles spectrales lorsque $n \rightarrow \infty$

Désignons par A_n l'opérateur analogue à A dans Ω_n . Comme Ω_n est borné, le spectre de A_n est purement ponctuel, les valeurs propres tendant vers l'infini. La famille spectrale est donc constante par morceaux avec discontinuités aux valeurs propres. On étudie la convergence de $\mathcal{E}(A_n, \lambda)$ vers $\mathcal{E}(A, \lambda)$ comme en ([10], chap. 12, § 3) en effectuant la transformée de Fourier de t en λ .

En notant que d'après (7) on a :

$$\dot{u}(t) = \cos(A^{1/2} t) u_1 \quad (27)$$

et l'analogue :

$$\dot{u}^n(t) = \cos(A_n^{1/2} t) u_1^n, \quad (28)$$

en multipliant scalairement (27) et (28) par $v \in \{v; v \in L_p^2(\Omega), \text{ nulle dans un voisinage de l'infini}\}$, on obtient, pour n suffisamment grand (cf. proposition 3),

$$(\cos(A_n^{1/2} t) u_1^n, v) \rightarrow (\cos(A^{1/2} t) u_1, v) \quad L^\infty(-\infty, +\infty) \text{ faible } * \quad (29)$$

et a fortiori dans l'espace \mathcal{S}' des distributions tempérées. On a donc aussi, après transformation de Fourier :

$$\mathcal{F}(\dot{u}^n, v)_{L_p^2(\Omega)} \rightarrow \mathcal{F}(\dot{u}, v)_{L_p^2(\Omega)} \quad \text{dans } \mathcal{S}' . \quad (30)$$

Calculons maintenant la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\dot{u}^n, v)_{L^2(\Omega)}$.

Désignons par $\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda)$ la famille spectrale de $A_n^{1/2}$ que nous considérons en tant qu'élément de $L^\infty(-\infty, +\infty, \mathcal{L}(L_p^2(\Omega)))$. L'opérateur A_n étant défini

positif (voir remarque 1), il existe une constante positive β^2 telle que :

$$(A_n u^n, u^n) \geq \beta^2 \|u^n\|_{L^2_p(\Omega_n)}^2.$$

La famille spectrale est donc nulle pour $\lambda < \beta^2$ et nous avons :

$$A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}(A_n, \lambda) = \int_{\beta^2}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}(A_n, \lambda)$$

d'où :

$$A_n^{1/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^{1/2} d\mathcal{E}(A_n, \mu) = \int_{\beta}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda)$$

et donc :

$$\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < \beta \\ \mathcal{E}(A_n, \lambda^2) & \text{si } \lambda > \beta. \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \cos(A_n^{1/2} t) &= \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\infty} (e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}) d\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda) \\ &= \frac{1}{2} \int_{|\lambda| > \beta} e^{i\lambda t} d[\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda) - \mathcal{E}(A_n^{1/2}, -\lambda)] \end{aligned}$$

et donc :

$$(\cos(A_n^{1/2} t) u_1, v)_{L^2_p(\Omega_n)} = \frac{1}{2} \int_{|\lambda| > \beta} e^{i\lambda t} d[(\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda) - \mathcal{E}(A_n^{1/2}, -\lambda)) u_1, v].$$

Or, le second membre n'est rien d'autre que l'inverse de la transformée de Fourier de :

$$\frac{d}{d\lambda} [(\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda) - \mathcal{E}(A_n^{1/2}, -\lambda)) u_1, v].$$

Nous pouvons donc énoncer :

Si $u^n(t)$ est solution de (7), pour tout $v \in L^2(\Omega_n)$ nous avons :

$$\mathcal{F}(i\dot{u}^n(t), v) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\lambda} [(\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda) - \mathcal{E}(A_n^{1/2}, -\lambda)) u_1, v]$$

qui d'après (30) converge au sens des distributions tempérées vers

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\lambda} ([\mathcal{E}(A^{1/2}, \lambda) - \mathcal{E}(A^{1/2}, -\lambda)] u_1, v)$$

pour tout $v \in \{v, v \in L^2(\Omega)$ nulle dans un voisinage de l'infini $\}$ et tout u_1 appartenant à $L^2(\Omega)$

Remarque 4 En fait, puisque les familles spectrales sont nulles pour $\lambda \in (0, \beta)$, on a

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\lambda} (\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda) u_1, v) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\lambda} (\mathcal{E}(A^{1/2}, \lambda) u_1, v) \tag{31}$$

$\forall v \in L^2(\Omega)$ nulle dans un voisinage de l'infini Par ailleurs on peut passer de la convergence des dérivées (31) à celle des fonctions

$$(\mathcal{E}(A_n^{1/2}, \lambda) u_1, v)_{L^2_p(\Omega)} \rightarrow (\mathcal{E}(A^{1/2}, \lambda) u_1, v)_{L^2_p(\Omega)} \tag{32}$$

dans $L^\infty(-\infty, +\infty)$ faible *, ce qui résulte facilement du fait que les fonctions du premier membre de (32) sont bornées et nulles pour $\lambda < 0$

Remarque 5 Notons que la convergence des solutions u^n vers u est obtenue indépendamment du choix de la condition aux limites (Neumann ou Dirichlet) sur $|x_1| = 2\pi n$ Comme il a été expliqué dans l'introduction, pour t très grand, la convergence obtenue est très faible, et l'onde réfléctée, qui provient de l'adjonction des frontières $|x_1| = 2\pi n$, devient insaisissable lorsque $n \rightarrow \infty$

3.4. Cas d'une suite de domaines allongés de forme fuselée

L'étude précédente s'étend, moyennant des modifications appropriées qui ne seront pas explicitées ici et qui concernent la méthode de prolongement, à toute une variété de problèmes analogues Nous examinerons ici, sans entrer dans les détails, les deux cas représentés figures 6 et 7

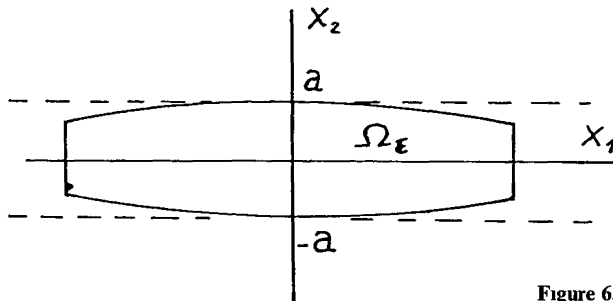


Figure 6.

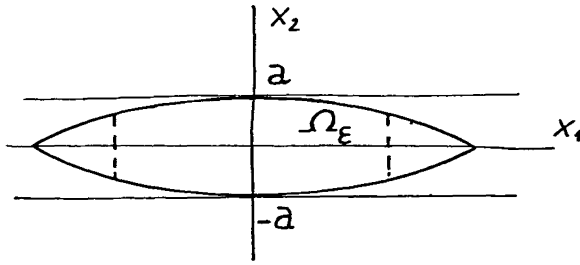


Figure 7.

Les domaines Ω_ϵ sont limités par les courbes d'équations :

$$x_1 = \pm \frac{1}{\epsilon} f(x_2)$$

la fonction f est définie pour $-a < x_2 < a$ et ont l'allure représentée figures 6 et 7. Les coefficients d'élasticité ne dépendent que de x_1 et sont 2π -périodiques en x_1 . Le domaine limite Ω est naturellement la bande comprise entre les droites $x_2 = -a$ et $x_2 = a$.

Considérons d'abord le cas de la figure 6, la démonstration précédente reste valable pourvu que l'on puisse définir des prolongements \sim et \approx de Ω_ϵ à Ω satisfaisant la propriété des bornes (20). On prendra ensuite pour l'étude de la convergence des fonctions $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ de telle sorte que, pour n suffisamment grand, Ω_n contienne le support de v et on obtient l'analogue de la proposition 3. Le résultat énoncé à la fin de la section 3.4 reste valable pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $u \in L^2(\Omega)$.

Nous effectuons le prolongement au rectangle G_ϵ défini comme indiqué figure 8.

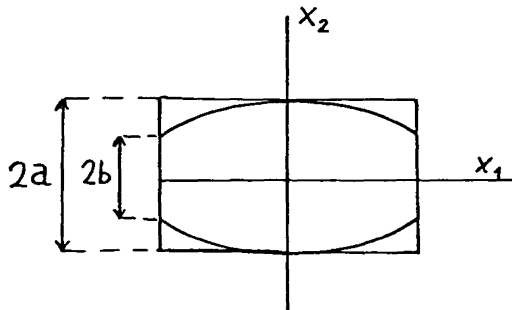


Figure 8.

On prolonge par « symétrie » soit par rapport à la normale soit par rapport à la verticale alors, au bout d'un nombre fini (qui dépend du rapport a/b) d'opérations de ce type on recouvre le domaine G_ε . La frontière est définie par $x_2 = \pm F(\varepsilon x_1)$ et donc \tilde{u} par :

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = u(x_1, \pm 2 F(\varepsilon x_1) - x_2).$$

Enfin le jacobien de la transformation qui fait passer de u à \tilde{u} étant borné il existe une constante c telle que :

$$\| \tilde{u} \|_{H^1(G_\varepsilon)} \leq c \| u \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

d'où (20) et ce qui en découle. Quant à \dot{u} on le prolonge par 0 à l'extérieur de Ω_ε .

Dans le cas de la figure 7, avant de prolonger, on prendra la restriction de la fonction u , définie sur Ω_ε , au domaine $\bar{\Omega}_\varepsilon$ défini en tronquant Ω_ε à la moitié de sa longueur :

$$\bar{\Omega}_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap \left\{ (x_1, x_2); |x_1| \leq \frac{1}{2\varepsilon} f(0) \right\}.$$

Le prolongement se fait ensuite à partir de $\bar{\Omega}_\varepsilon$ comme dans le cas de la figure 6. Ce sont donc les fonctions ainsi modifiées (troncature suivie de prolongement) qui convergent de façon analogue à celles correspondant au cas de la figure 6.

4. HOMOGENÉISATION D'UNE BANDE ÉLASTIQUE, PÉRIODIQUE, ISOTROPE

4.1. Représentation des ondes SH

La solution $u(t)$ du problème (7) admet un développement de Bloch, de la forme (10), dans la base des fonctions propres $\phi^m(\cdot, k)$ des opérateurs $A(k)$, définis par (9). Les composantes \hat{u}_m dépendent de k et du paramètre temps t . k étant fixé, elles sont déterminées par résolution du système :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{u}_m}{dt^2} + \omega_m^2(k) \hat{u}_m &= 0 \quad (\text{sans sommation sur } m) \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_m(k, 0) = \int_{\Omega} e^{-ikx_1} u_0(x) \bar{\phi}^m(x, k) \rho(x) dx \\ \frac{d\hat{u}_m}{dt}(k, 0) = \int_{\Omega} e^{-ikx_1} u_1(x) \bar{\phi}^m(x, k) \rho(x) dx \end{array} \right. \end{aligned}$$

C'est un système à un nombre infini d'inconnues. Il peut cependant être utilisé pour trouver des approximations de la solution $u(t)$.

4.2. Cas d'une bande isotrope

Soit ε un petit paramètre positif donné. La bande élastique considérée est 2π -périodique par rapport à la variable $y_1, y_1 = x_1/\varepsilon$. On suppose le milieu défini par le domaine $\Omega = \{x = (x_1, x_2); x_1 \in \mathbb{R}, 0 < x_2 < 2\pi\}$. Le milieu est isotrope (hypothèse non restrictive). La masse volumique et les coefficients d'élasticité ne dépendent que de la variable y_1 :

$$\rho^\varepsilon(x_1) = \rho\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \mu^\varepsilon(x_1) = \mu\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)$$

et sont 2π -périodiques par rapport à y_1 . Pour simplifier, nous supposons ces fonctions régulières.

Les conditions initiales u_0 et u_1 dépendent, quant à elles, des variables x_1 et x_2 . La structure du matériau a donc une échelle petite devant celle des données. Nous nous proposons d'étudier le comportement de la solution u^ε lorsque ε tend vers 0.

Effectuons le changement de variables : $y_1 = x_1/\varepsilon, y_2 = x_2$. Les techniques de développement de la section 2 s'appliquent, mais la dissymétrie entre les variables x_1 et x_2 introduit certains coefficients multiplicateurs dans les opérateurs auxiliaires $A(k)$ car :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

On est amené à définir les opérateurs $A(k, \varepsilon), k \in [0, 1]$, agissant sur les fonctions définies sur $\mathcal{O} =]0, 2\pi[)^2$:

$$A(k, \varepsilon) = -\frac{1}{\rho(y_1)} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + ik \right) \left[\mu(y_1) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + ik \right) \right] - \frac{\varepsilon^2 \mu(y_1)}{\rho(y_1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}. \quad (33)$$

Le domaine de l'opérateur $A(k; \varepsilon)$ est formé par les fonctions de $H_p^2(\Omega)$ qui satisfont à la condition de Neumann généralisée, qui devient ici :

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = 0 \quad \text{sur } y_2 = 0 \quad \text{et } y_2 = 2\pi. \quad (34)$$

Désignant par $\phi^m(y, k, \varepsilon)$ les fonctions propres, associées aux valeurs propres $\omega_m^2(k, \varepsilon)$, des opérateurs $A(k, \varepsilon)$, on développe sous la forme (10), la solution u^ε à l'aide de ces fonctions. Le comportement de u^ε est déterminé par celui de $\tilde{u}(y, k, t, \varepsilon) = \sum_m \hat{u}_m(k, t, \varepsilon) \phi^m(y, k, \varepsilon)$ [12]. Pour préserver le caractère hyper-

bolique, nous effectuons le changement d'échelle de temps $t = \varepsilon\tau$. La solution u^ε a alors pour représentation :

$$u^\varepsilon(x, t) = \int_0^1 e^{iky_1} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^+ e^{i\omega_m\tau} + a_m^- e^{-i\omega_m\tau}) \phi^m(y, k, \varepsilon) dk \quad (35)$$

$$y_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, \quad y_2 = x_2, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}$$

où les coefficients $a_m^\pm(k, \varepsilon)$ sont calculés à partir des conditions initiales par :

$$\left. \begin{aligned} a_m^+ + a_m^- &= \int_{\Omega} e^{-iky_1} u_0(\varepsilon y_1, y_2) \bar{\phi}^m(y, k, \varepsilon) \rho(y_1) dy \\ i\omega_m(a_m^+ - a_m^-) &= \varepsilon \int_{\Omega} e^{-iky_1} u_1(\varepsilon y_1, y_2) \bar{\phi}^m(y, k, \varepsilon) \rho(y_1) dy \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Comme dans les problèmes d'élasticité [11] ou de mélange fluide-solide [12], la valeur propre nulle, obtenue pour $k = 0$, $\varepsilon = 0$, joue un rôle essentiel. On effectue donc dans (35), (36) le changement de variable $k = \varepsilon K$ et on examine le comportement des expressions εa_m^\pm lorsque ε tend vers 0.

4.3. Étude des opérateurs $A(\varepsilon K, \varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0

Les opérateurs $A(\varepsilon K, \varepsilon)$ ont des domaines différents selon que ε est nul ou non nul. Cette singularité implique une étude particulière, étude qui peut être menée grâce à la géométrie de l'ouvert \mathcal{O} et à la forme des coefficients ρ et μ .
Définissons :

$$B(\varepsilon K) = -\frac{1}{\rho(y_1)} \left(\frac{d}{dy_1} + i\varepsilon K \right) \left[\mu(y_1) \left(\frac{d}{dy_1} + i\varepsilon K \right) \right]. \quad (37)$$

Cette famille $B(\varepsilon K)$ opère sur l'ensemble des fonctions $v(y_1)$, $v \in H_p^2(]0, 2\pi[)$, $L^2(]0, 2\pi[)$ étant muni du produit scalaire avec poids défini par $\rho(y_1)$.

Pour $0 \leq \varepsilon K \leq 1$, l'opérateur $B(\varepsilon K)$ est positif, auto-adjoint, anticompat, et par conséquent, il existe une suite dénombrable

$$0 \leq \alpha_0^2(\varepsilon K) \leq \dots \leq \alpha_r^2(\varepsilon K) \dots \rightarrow +\infty$$

de valeurs propres, de multiplicité finie, de l'opérateur $B(\varepsilon K)$, associées à des fonctions propres $\psi^0(y_1, \varepsilon K)$..., $\psi^r(y_1, \varepsilon K)$... formant une base orthonormale de $L^2(]0, 2\pi[)$. La théorie des perturbations analytiques de Kato [4] s'applique

et il en résulte que l'on peut développer fonctions propres et valeurs propres en fonction de ε :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r^2(\varepsilon K) &= \alpha_r^2(0) + \varepsilon \alpha_{r_1} + \varepsilon^2 \alpha_{r_2} + \dots \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \\ \Psi^r(y_1, \varepsilon K) &= \Psi_0^r(y_1, 0) + \varepsilon \Psi_1^r(y_1) + \varepsilon^2 \Psi_2^r(y_1) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Dans les développements (38), K est un paramètre intervenant dans les coefficients $\alpha_{r_1} \dots \Psi_1^r \dots$. Remarquons que 0 étant valeur propre de $B(0)$, le premier terme, Ψ_0^r du développement de $\Psi^r(y_1, \varepsilon K)$, est une constante. Étudions plus précisément le cas $r = 0$.

$$B(\varepsilon K) \Psi^0(y_1, \varepsilon K) = \alpha_0^2(\varepsilon K) \Psi^0(y_1, \varepsilon K). \quad (39)$$

Portons les développements (38), avec $r = 0$, dans la définition (39) et identifions les termes de même puissance en ε .

Des termes d'ordre ε , on déduit : $\alpha_{0_1} = 0$. Désignant par $\chi(y_1)$ la solution du problème :

$$-\frac{1}{\rho(y_1)} \frac{d}{dy_1} \left[\mu(y_1) \frac{d\chi}{dy_1} \right] = \frac{1}{\rho(y_1)} \frac{d\mu}{dy_1} \quad \chi \in H_p^1([0, 2\pi]) \quad (40)$$

la fonction Ψ_1^0 est alors donnée, à une constante additive près, par :

$$\Psi_1^0 = iK \Psi_0^0 \chi(y_1).$$

Des termes d'ordre ε^2 , on déduit α_{0_2} . Notons $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\mu}$ les valeurs moyennes de la masse volumique ρ et du coefficient de Lamé μ :

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(y_1) dy_1, \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(y_1) dy_1 \quad (41)$$

et introduisons μ^h , coefficient de Lamé homogénéisé [10] :

$$\mu^h = \tilde{\mu} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \frac{d\chi}{dy_1} dy_1 \quad (42)$$

Nous obtenons : $\alpha_{0_2} \tilde{\rho} = K^2 \mu^h$, et ainsi sont déterminés les premiers termes de (38), avec $r = 0$.

Étudions maintenant les éléments propres de $A(\varepsilon K, \varepsilon)$. Considérons un vecteur propre quelconque, noté $\Psi(y_1, \varepsilon K)$, de l'opérateur $B(\varepsilon K)$ associé à la valeur propre $\alpha^2(\varepsilon K)$, et la fonction $\phi(y, \varepsilon K) = \Psi(y_1, \varepsilon K) f(y_2)$, f fonction de y_2 arbitraire. ϕ est un élément de $D(A(\varepsilon K, \varepsilon))$ dès que $f \in H^1([0, 2\pi])$ et

satisfait à : $df/dy_2 = 0$ en $y_2 = 0$ et $y_2 = 2\pi$, et ϕ est fonction propre de $A(\varepsilon K, \varepsilon)$ si :

$$A(\varepsilon K, \varepsilon) \phi = \omega^2 \phi. \tag{43}$$

La forme de l'ouvert \mathcal{O} permet de déduire alors :

$$\alpha^2(f, v) - \varepsilon^2 \left(\int_0^{2\pi} \mu | \psi |^2 dy_1 \right) \left(\frac{d^2 f}{dy_2^2}, v \right) = \omega^2(f, v) \quad \forall v \in L^2(]0, 2\pi[) \tag{44}$$

où (f, v) est le produit scalaire de f et v dans $L^2(]0, 2\pi[)$ (sans poids). Si l'on choisit $v = f$ dans (44), on montre, compte tenu des conditions aux limites, que $\omega^2 - \alpha^2$ est une expression positive, soit $\omega^2 - \alpha^2 = q^2 \varepsilon^2 c^2$, avec

$$c^2(\varepsilon K) = \int_0^{2\pi} \mu(y_1) | \psi(y_1, \varepsilon K) |^2 dy_1. \tag{45}$$

Et ainsi la fonction $\phi(y, \varepsilon K) = \psi(y_1, \varepsilon K) \cos qy_2$, $q = n/2$, $n \in \mathbb{N}$, est fonction propre de $A(\varepsilon K, \varepsilon)$.

Les variables se séparant, on montre aisément que l'ensemble $\{ (1/\sqrt{2}\pi) \psi^r(y_1, \varepsilon K), (1/\sqrt{\pi}) \psi^r(y_1, \varepsilon K) \cos(n/2)y_2, r \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \}$ s'identifie à l'ensemble des fonctions propres de $A(\varepsilon K, \varepsilon)$, relatives aux valeurs propres $\alpha_r^2(\varepsilon K) + \varepsilon^2 c_r^2(\varepsilon K) (n^2/4)$. Chaque vecteur propre de l'opérateur $B(\varepsilon K)$ donne donc naissance à une infinité de vecteurs propres de l'opérateur $A(\varepsilon K, \varepsilon)$. Reprenant les développements (38), il résulte :

PROPOSITION 4 : *Les éléments propres de l'opérateur $A(\varepsilon K, \varepsilon)$, défini par (33), admettent des développements en fonction de ε :*

$$\left. \begin{aligned} \phi_0^r(y, \varepsilon K) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \psi^r(y_1, 0) + \varepsilon \psi_1^r(y_1) + \dots \quad r \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \\ \phi_n^r(y, \varepsilon K) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \psi^r(y_1, 0) \cos \frac{n}{2} y_2 + \varepsilon \psi_1^r(y_1) \cos \frac{n}{2} y_2 + \dots \end{aligned} \right\} \tag{46}$$

fonctions propres associées aux valeurs propres :

$$\omega_{rn}^2(\varepsilon K, \varepsilon) = \alpha_r^2(0) + \varepsilon \alpha_{r1} + \varepsilon^2 \left[\alpha_{r2} + \frac{n^2}{4} c_r(0) \right] + \dots \tag{47}$$

les couples $(\psi^r(y_1, 0), \alpha_r^2(0))$ étant éléments propres de l'opérateur $B(0)$ de (37), et le paramètre K intervenant dans les coefficients $\psi^r, \psi_1^r, \dots, \alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots$

Explicitons notamment les premiers termes de ces développements pour $r = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \phi_0^0(y, \varepsilon K) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\tilde{\rho}}} + \frac{i\varepsilon K}{2\pi\sqrt{\tilde{\rho}}} \chi(y_1) + \dots \\ \phi_n^0(y, \varepsilon K) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2\tilde{\rho}}} \cos \frac{n}{2} y_2 + \frac{i\varepsilon K}{\pi\sqrt{2\tilde{\rho}}} \chi(y_1) \cos \frac{n}{2} y_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

associées à :

$$\omega_{0n}^2(\varepsilon K, \varepsilon) = \varepsilon^2 \left(\frac{\mu^h K^2}{\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\mu} n^2}{\tilde{\rho} 4} \right). \quad (49)$$

Dans la suite, nous noterons $\alpha_n(y_2)$ ($n \in \mathbb{N}$) les termes principaux des vecteurs propres $\phi_n^0(y, \varepsilon K)$:

$$\alpha_n(y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tilde{\rho}}} \text{ si } n \neq 0, \quad \alpha_n(y_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\tilde{\rho}}} \cos \frac{n}{2} y_2 \text{ si } n \neq 0 \quad (50)$$

et $\varepsilon\Omega_n(K)$ la partie principale de $\omega_{0n}(\varepsilon K)$:

$$\Omega_n^2(K) = \mu^h \frac{K^2}{\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\mu} n^2}{\tilde{\rho} 4}. \quad (51)$$

4.4. Comportement de u^ε lorsque ε tend vers 0

Reprenons les égalités (36), avec $k = \varepsilon K$. La forme des éléments propres $\phi_n^r(y, \varepsilon K)$, $\omega_{rn}(\varepsilon K)$, de $A(\varepsilon K, \varepsilon)$ entraîne un changement de notation, les coefficients inconnus étant dorénavant désignés par a_{rn}^\pm ($r, n \in \mathbb{N}$). Effectuons le changement de variable $\varepsilon y_1 = x_1$.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon a_{rn}^+ + \varepsilon a_{rn}^- &= \int_{\Omega} e^{-iKx_1} u_0(x_1, x_2) \overline{\Phi}_n^r \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, \varepsilon K \right) \rho \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) dx_1 dx_2 \\ i\omega_{rn}(\varepsilon a_{rn}^+ - \varepsilon a_{rn}^-) &= \varepsilon \int_{\Omega} e^{-iKx_1} u_1(x_1, x_2) \overline{\Phi}_n^r \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, \varepsilon K \right) \rho \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Ces conditions initiales font intervenir des intégrales de la forme

$$I(\varepsilon) = \int_{\Omega} f(x_1, x_1/\varepsilon, x_2) dx_1 dx_2,$$

f étant une fonction 2π -périodique par rapport à la variable $y_1 = x_1/\varepsilon$ Par une propriété classique

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = \int_{\Omega} dx_1 dx_2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, y_1, x_2) dy_1 \right)$$

Nous sommes donc conduits, d'après la forme des fonctions ϕ_n^r , à étudier le comportement des expressions

$$E_r(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\Psi}^r(y_1, \varepsilon K) \rho(y_1) dy_1$$

Utilisons les développements (46) La base $\psi^r(y_1, 0)$ étant orthonormale et $\psi^0(y_1, 0)$ constant, il résulte que $E_r(\varepsilon)$ tend vers 0 pour $r \neq 0$ Par conséquent, le comportement de u^ε est uniquement gouverné par les termes $r = 0$ du développement (35) (après changement de notation) De (52), à l'aide de (48) et (49), il vient

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon a_{0n}^+ + \varepsilon a_{0n}^- &= \sqrt{2\pi} \tilde{\rho} \mathcal{F} \left(\int_0^{2\pi} u_0(x_1, x_2) \alpha_n(x_2) dx_2 \right) (K) = u_{0n}(K) \\ i\Omega_n(\varepsilon a_{0n}^+ - \varepsilon a_{0n}^-) &= \sqrt{2\pi} \tilde{\rho} \mathcal{F} \left(\int_0^{2\pi} u_1(x_1, x_2) \alpha_n(x_2) dx_2 \right) (K) = u_{1n}(K) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

où \mathcal{F} désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable x_1 et où α_n et Ω_n sont définies par (50) et (51)

Le système (53) étant résolu, on reporte les expressions de a_{0n}^\pm dans le développement (35) (avec $k = \varepsilon K$) Il en résulte que lorsque ε tend vers 0, u^ε tend vers u^0

$$\begin{aligned} u^0(x, t) = \int_0^{+\infty} e^{iKx_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(u_{0n}(K) - \frac{l}{\Omega_n} u_{1n} \right) e^{i\Omega_n t} + \right. \\ \left. + \left(u_{0n} - \frac{l}{\Omega_n} u_{1n} \right) e^{i\Omega_n t} \right] \alpha_n(x_2) dK \quad (54) \end{aligned}$$

les coefficients $u_{0n}(K)$, $u_{1n}(K)$, $\Omega_n(K)$, $\alpha_n(x_2)$ étant respectivement définis par (53), (50), (51)

On montre aisément grâce à (50) et (51) que

PROPOSITION 5 *La solution u^ε converge pour ε tendant vers 0 vers la fonction u^0 solution du problème d'élasticité*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} = \mu^h \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_1^2} + \bar{\mu} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2} \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u^0}{\partial x_2} = 0 \quad \text{sur } x_2 = 0 \quad \text{et } x_2 = 2\pi \\ u^0(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u^0}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{array} \right.$$

Ce problème est l'homogénéisé du problème initial [10] Remarquons que de l'expression (54) on déduit la représentation des ondes SH [1] dans une bande élastique, homogène, isotrope, la relation de dispersion étant

$$\Omega_n^2(K) = (\mu/\rho) (K^2 + n^2/4)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids* North-Holland, Amsterdam (1973)
- [2] A BENSOUSSAN, J L LIONS, G PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam (1978)
- [3] G HERRMANN, R K KAUL, T J DELPH, *On continuous modeling of the dynamic behaviour of layered composites*, Arch Mech , 28 (1976), p 505-521
- [4] T KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, Berlin (1966)
- [5] E H LEE, W H YANG, *On waves in composite materials with periodic structure*, SIAM Jour Appl Math 25 (1973), p 492-499
- [6] M LOBO-HIDALGO, E SANCHEZ-PALENCIA, *Sur certaines propriétés spectrales des perturbations du domaine dans les problèmes aux limites* Comm Part Diff Eq 4 (1979), p 1085-1098
- [7] J NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson Academia, Paris Prague (1967)
- [8] C N ROBINSON, G N LEPPELMEIER, *Experimental verification of dispersion relations for layered composites*, Jour Appl Mech , 41 (1974), p 89-91
- [9] J SANCHEZ-HUBERT, N TURBE, *Propriétés spectrales des ondes élastiques dans un domaine allongé convergeant vers une bande périodique* C R A S , 299 ser II (1984), p 1105-1108
- [10] E SANCHEZ-PALENCIA, *Non homogeneous media and vibration theory*, Springer, Berlin (1980)
- [11] N TURBE, *Applications of Bloch expansion to periodic elastic and visco-elastic media*, Math Meth Appl Sc , 4 (1982), p 433-445
- [12] N TURBE, *Bloch waves for a solid-fluid mixture*, Ann Fac Sc Toulouse (1984)
- [13] C WILCOX, *Scattering theory for diffraction gratings*, Springer, New York (1984)