

DENIS TALAY

**Discrétisation d'une équation différentielle
stochastique et calcul approché d'espérances
de fonctionnelles de la solution**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modéli-
sation mathématique et analyse numérique, tome 20, n° 1 (1986),
p. 141-179*

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_1_141_0

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISCRÉTISATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE ET CALCUL APPROCHÉ D'ESPÉRANCES DE FONCTIONNELLES DE LA SOLUTION (*)

Denis TALAY ⁽¹⁾

Communiqué par R. TÉMAM

Résumé — Dans cet article, nous nous intéressons à « bien » discrétiser une Équation Différentielle Stochastique, en vue d'approcher numériquement les espérances d'une large classe de fonctionnelles de la solution

Les méthodes classiques sont peu efficaces (§ 1)

Pour les équations unidimensionnelles, Milshtein [2] a proposé une nouvelle méthode et conjecturé sa vitesse de convergence

Nous prouvons ici le résultat annoncé et nous introduisons de nouveaux schémas ayant la même vitesse de convergence que celui de Milshtein et permettant de traiter les équations multidimensionnelles

Abstract — In this paper, we are interested in « well » discretizing a SDE, in view to approximate numerically the expectations of a large class of functionals of the solution

Classical methods are not very efficient

Milshtein [2] has proposed a new method, and conjectured its rate of convergence

Here, we prove the announced result, and we introduce new schemes, which have the same rate of convergence as Milshtein's one, and permit to treat the multidimensional equations

0. INTRODUCTION

Soit (X_t) à valeurs dans \mathbb{R}^d solution d'une Équation Différentielle Stochastique (1) sur un espace probabilité filtré $(\Omega, F, P, (\underline{F}_t))$ remplissant les conditions habituelles :

$$(1) \quad X_t = X_0 + \sum_{k=0}^m \int_0^t A_k(s, X_s) dW_s^k$$

où :

(i) $W_t^0 := t$

(*) Reçu en janvier 1985

(1) INRIA, Sophia Antipolis, 06560 Valbonne, France

- (ii) $W_t := (W_t^1, \dots, W_t^n)$ est un \underline{F}_t -processus de Wiener standard à valeurs dans \mathbb{R}^n
- (iii) $A_k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, 0 \leq k \leq m$
- (iv) X_0 est \underline{F}_0 -mesurable et possède des moments de tous ordres.

Nous nous proposons de discrétiser (1) afin d'approcher, par une méthode de Monte Carlo, des espérances du type (2) :

$$(2) \quad E \left\{ g(X_T) \exp \left(\sum_{k=0}^m \int_0^T q_k(s, X_s) dW_s^k \right) \right\}$$

avec :

$$q_k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad 0 \leq k \leq m, \quad g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nous allons commencer par citer quelques applications en renvoyant à Talay [6] pour une présentation plus complète.

0.1. Applications

1) Calcul des moments de X_T

Dans ce cas, $q_k \equiv 0, 0 \leq k \leq m$ et $x \mapsto g(x)$ est une fonction polynomiale des coordonnées de x .

2) Résolution numérique d'E.D.P. de type parabolique

Soit $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$; on suppose que, pour tout x , $a(t, x) = (a_j^i(t, x))$ est une matrice symétrique non négative; soit $(A_j^i(t, x))_{1 \leq i, j \leq d}$ telle que :

$$A(t, x).A(t, x)^* = a(t, x);$$

on se donne, par ailleurs, une fonction $A_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et l'opérateur L_t défini par (∂_i désignant l'opérateur « dérivation par rapport à la i -ième coordonnée de x ») :

$$(3) \quad L_t = \sum_{i=1}^d A_0^i(t, x) \partial_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_j^i(t, x) \partial_i \partial_j$$

soit enfin $c : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et ∂_0 l'opérateur « dérivation par rapport à la variable t ». On suppose que les fonctions A_0, A sont régulières.

On considère alors l'E.D.P. parabolique suivante, rétrograde en temps :

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_0 v(t, x) + L_t v(t, x) + c(t, x) v(t, x) = 0, & 0 \leq t < T \\ v(T, x) = f(x). \end{cases}$$

Soit $(X_\theta^{t,x})$ solution de :

$$(5) \quad X_\theta^{t,x} = x + \sum_{k=0}^m \int_t^\theta A_k(s, X_s^{t,x}) dW_s^k$$

et soit $v(t, x)$ définie par :

$$(6) \quad v(t, x) := E \left\{ f(X_T^{t,x}) \exp \left(\int_t^T c(s, X_s^{t,x}) ds \right) \right\}.$$

Sous de bonnes hypothèses (par exemple : f de classe C^2 et à croissance polynomiale à l'infini et c bornée), on montre que v est solution de (4) ; par conséquent, une approximation numérique du terme de droite de (6) permet d'approcher numériquement la solution de l'E.D.P. (4).

3) Traitement numérique d'une équation du filtrage non linéaire

En filtrage non linéaire, on s'intéresse au problème suivant : on suppose que (X_t) est un processus de diffusion non observé et que l'on observe :

$$Y_t := \int_0^t h(X_s) ds + V_t$$

où V_t est un processus de Wiener.

Le problème est d'estimer au mieux une fonction de X_T , $g(X_T)$, connaissant le passé de Y jusqu'à l'instant T (par exemple, nous voudrions calculer les premiers moments de la loi conditionnelle de X_T sachant le passé de Y) ; sous de bonnes hypothèses, l'estimateur minimisant le risque quadratique est une espérance du type (2).

0.2. Nouvelle formulation du problème (2)

Savoir approcher toute espérance du type (2) est équivalent à savoir approcher toute espérance du type (7) :

$$(7) \quad Ef(X_T)$$

avec $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

En effet, si l'une des fonctions q_k n'est pas identiquement nulle, on pose :

$$(8) \quad \tilde{X}_t := \left(X_t, \exp \left\{ \int_0^t \sum_{k=0}^m q_k(s, X_s) dW_s^k \right\} \right)$$

$$\varphi : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \varphi(x_1, x_2) = g(x_1) \cdot x_2$$

(\tilde{X}_t) est solution d'une E.D.S. et il s'agit donc de calculer :

$$E\varphi(\tilde{X}_T).$$

Remarquons, par ailleurs, que, dans les exemples d'application donnés au paragraphe précédent, la fonction g pouvait être à croissance polynomiale à l'infini ; dans ce cas, il en est de même pour φ .

En définitive, nous sommes amenés à reformuler le problème initial (2) de la manière suivante :

- (9) « ÉTANT DONNÉ UN PROCESSUS DE DIFFUSION ARBITRAIRE, (X_t) , COMMENT APPROCHER NUMÉRIQUEMENT TOUTE ESPÉRANCE DU TYPE (7), LA FONCTION f POUVANT ÊTRE À CROISSANCE POLYNOMIALE À L'INFINI. »

(En fait, nous verrons que f et (X_t) ne seront pas tout à fait arbitraires, en ce sens que nous imposons quelques hypothèses (raisonnables, pensons-nous) de dérivabilité à f et aux coefficients de l'E.D.S. dont (X_t) est solution.)

0.3. Principe de la méthode

Revenons à (9). Sauf cas très particuliers, nous ne connaissons pas la loi de X_T et nous ne pouvons pas non plus disposer de réalisations de X_T .

Nous sommes conduits à procéder en 2 étapes :

1) *Discrétisation*

On discrétise (1) afin d'en obtenir une solution approchée, notée (\bar{X}_t) .

2) *Méthode de Monte Carlo pour approcher $Ef(\bar{X}_T)$*

On simule N réalisations indépendantes de $\bar{X}_T, \bar{X}_T^{(i)} (1 \leq i \leq N)$ et on calcule la somme :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Ef(\bar{X}_T^{(i)});$$

la loi forte des grands nombres montre que cette somme converge vers $Ef(\bar{X}_T)$ quand $N \rightarrow +\infty$, presque sûrement.

L'erreur ainsi commise satisfait l'inégalité :

$$\left| Ef(X_T) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{(i)}) \right| \leq |Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T)| + \left| Ef(\bar{X}_T) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{(i)}) \right| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Pour minimiser ε_2 , il suffit de choisir N assez grand (il est, cependant, souhaitable de réduire le temps de calcul autant que possible ; des techniques permettent d'optimiser le choix de N ou d'affiner l'algorithme de Monte Carlo : cf. Rubinstein [4], par exemple).

Il reste à construire une méthode de discrétisation minimisant ε_1 .

Nous nous imposons quelques contraintes : comme nous devons simuler un nombre important de réalisations de \overline{X}_T , le schéma de discrétisation devra être de nature aussi simple que possible et devra ne faire intervenir que des variables aléatoires dont les lois sont simplement et rapidement simulables sur ordinateur (la limitation aux lois discrètes ou gaussiennes semble être la situation la plus favorable).

0.4. Plan

Cet article est divisé en 5 parties :

- dans le paragraphe 1, nous montrons que les schémas de discrétisation des E.D.S. usuels conduisent, en général, à l'estimation :

$$| Ef(X_T) - Ef(\overline{X}_T) | = 0(h)$$

où h est le pas de la discrétisation.

Notre but est de construire de nouveaux schémas, conduisant à une erreur d'ordre h^2 .

- Dans le paragraphe 2, nous présentons quelques résultats simples concernant une classe de problèmes de Cauchy de type parabolique ; ces résultats constituent l'outil indispensable pour les preuves des paragraphes suivants.
- Dans le paragraphe 3, nous énonçons un critère suffisant pour qu'un schéma d'approximation de (X_t) conduise à l'estimation :

$$| Ef(X_T) - Ef(\overline{X}_T) | = 0(h^2).$$

- Dans les paragraphes 4 et 5, nous construisons quelques exemples de schémas *facilement implémentables* satisfaisant le critère du paragraphe 3, et nous les testons numériquement.

0.5. Familles de variables aléatoires « Monte Carlo équivalentes »

Par la suite, nous aurons souvent recours à la définition suivante :

DÉFINITION : Soit $F_1 = \{ X_n, n \leq M \}$ et $F_2 = \{ Y_n, n \leq M \}$ deux familles de variables aléatoires dépendant d'un paramètre h ; F_2 est dite « Monte Carlo

équivalente à F_1 » si la propriété suivante est vérifiée : « pour tout choix d'entiers positifs ou nuls i_1, i_2, \dots, i_5 tels que $i_1 + i_2 + \dots + i_5 = 5$ et tout choix d'entiers n_1, n_2, \dots, n_5 compris entre 1 et M :

$$E(X_{n_1}^{i_1} X_{n_2}^{i_2} \dots X_{n_5}^{i_5}) = 0 \text{ ou } C.h \text{ ou } C.h^2$$

avec C constante indépendante de h , implique :

$$E(Y_{n_1}^{i_1} Y_{n_2}^{i_2} \dots Y_{n_5}^{i_5}) = E(X_{n_1}^{i_1} X_{n_2}^{i_2} \dots X_{n_5}^{i_5}) \text{ » .}$$

0.6. Notations

a) Dans toute la suite, T sera un temps final arbitrairement choisi.

On considérera des discrétisations de $[0, T]$ de pas h de la forme :

$$h = \frac{T}{N}$$

avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $Z(h, p)$ une variable aléatoire dépendant de h et d'un entier p compris entre 0 et $N = \frac{T}{h}$.

S'il existe une constante C dépendant éventuellement de T mais indépendante de h et p telle que :

$$E | Z(h, p) | \leq C.h^i$$

on écrira :

$$Z(h, p) = 0(h^i).$$

b) Pour $i = 0, \dots, d$ et $j \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur $\partial_i \circ \partial_i \circ \dots \circ \partial_i$ (j fois) sera noté : ∂_i^j (rappelons que la notation ∂_i a été introduite au § 0.1).

1. RÉSULTATS ANTÉRIEURS

1.1. Insuffisance de 2 schémas classiques

On suppose que (X_t) et (W_t) sont à valeurs réelles et que les coefficients A_k sont indépendants de leur première variable ; on écrit alors (1) sous la forme :

$$(10) \quad X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s .$$

Soit L l'opérateur de diffusion associé à (X_t) . On suppose que $EL^3 f(X_t)$ existe pour tout t et est borné.

La formule de Ito montre :

$$Ef(X_t) = Ef(X_s) + (t - s) E[Lf(X_s)] + \frac{1}{2}(t - s)^2 E[L^2 f(X_s)] + 0(t - s)^3 .$$

Considérons alors le schéma d'approximation suivant :

$$\tilde{X}_0^h = X_0$$

$$\tilde{X}_{p+1}^h = \tilde{X}_p^h + \sigma(\tilde{X}_p^h) \Delta W_{p+1} + b(\tilde{X}_p^h) h$$

$$\left(\text{où : } \Delta W_{p+1} = W_{t_{p+1}} - W_{t_p}; t_p = p \cdot h, 0 \leq p \leq N = \frac{T}{h} \right).$$

Ce schéma vérifie l'égalité suivante :

$$(11) \quad Ef(\tilde{X}_{p+1}^h) = Ef(\tilde{X}_p^h) + ELf(\tilde{X}_p^h) h + \frac{1}{2} E\tilde{f}(\tilde{X}_p^h) h^2 + \\ + \text{reste majoré par Cte.} \cdot h^3$$

mais \tilde{f} , en général, est différente de $L^2 f$, si bien que :

$$(12) \quad Ef(X_{(p+1)h}) - Ef(\tilde{X}_{p+1}^h) = Ef(X_{ph}) - Ef(\tilde{X}_p^h) \\ + \{ ELf(X_{ph}) - ELf(\tilde{X}_p^h) \} h \\ + \text{reste majoré par Cte.} \cdot h^2 .$$

On en déduit :

$$Ef(X_T) - Ef(\tilde{X}_T^h) = 0(h)$$

(où l'on a écrit \tilde{X}_T^h pour \tilde{X}_N^h).

Un exemple montre qu'il est inutile d'espérer un meilleur ordre de convergence : pour $b \equiv 0$, $\sigma(x) = x$ et $f(x) = x^2$, en itérant la relation (11) pour p allant de 0 à $(N - 1)$, on est conduit à :

$$E(\tilde{X}_T^h)^2 = \exp(T) - \frac{1}{2} T \exp(T) h + 0(h^2) \\ = E(X_T)^2 - \frac{1}{2} T \exp(T) h + 0(h^2) .$$

On sait que le schéma précédent conduit également à une convergence d'ordre \sqrt{h} quand on veut approcher (X_t) en moyenne quadratique.

Par contre, un autre schéma est, en un certain sens, de qualité optimale pour les approximations en moyenne quadratique et trajectorielle (cf. Pardoux et Talay [3]) :

$$(13) \quad \begin{aligned} \tilde{X}_0^h &= X_0 \\ \tilde{X}_{p+1}^h &= \tilde{X}_p^h + \sigma(\tilde{X}_p^h) \Delta W_{p+1} + \left(b - \frac{1}{2} \sigma \sigma' \right) (\tilde{X}_p^h) h + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma \sigma' (\tilde{X}_p^h) (\Delta W_{p+1})^2. \end{aligned}$$

Or, il s'avère que ce schéma conduit lui aussi à une relation du type (12) ci-dessus et donc à une convergence d'ordre h ; par exemple : pour $b(x) = \frac{1}{2} x$, $\sigma(x) = x$ et $f(x) = x^4$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_T^h)^4 &= \exp(8 T) - \frac{13}{2} T \exp(8 T) h + 0(h^2) \\ &= E(X_T)^4 - \frac{13}{2} T \exp(8 T) h + 0(h^2). \end{aligned}$$

Pour aboutir à un meilleur ordre de convergence, on pourrait penser utiliser un schéma approchant (X_t) en norme L^2 avec une convergence d'ordre h^2 ; mais un tel schéma utilise des variables aléatoires dont la simulation semble difficile (par exemple : $\int_{t_p}^{t_{p+1}} (W_s - W_{t_p})^2 ds$, cf. Pardoux et Talay [3]).

Il apparaît donc nécessaire de construire un nouveau schéma, vérifiant la relation (11) avec $\tilde{f} = L^2 f$.

1.2. Le schéma de Milshtein

En 1976, Milshtein [2] a proposé le schéma suivant, sans en établir la vitesse de convergence (désormais, nous écrivons \bar{X}_p au lieu de \bar{X}_p^h) :

$$(14) \quad \begin{aligned} \bar{X}_0 &= X_0 \\ \bar{X}_{p+1} &= \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta W_{p+1} + \left(b - \frac{1}{2} \sigma \sigma' \right) (\bar{X}_p) h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sigma \sigma' (\bar{X}_p) (\Delta W_{p+1})^2 + \frac{1}{2} \left(b \sigma' + b' \sigma + \frac{1}{2} \sigma^2 \sigma'' \right) (\bar{X}_p) \\
& \quad \times \Delta W_{p+1} h + \frac{1}{2} \left(b b' + \frac{1}{2} b'' \sigma^2 \right) (\bar{X}_p) h^2.
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que ce schéma conduit à une égalité du type (11) avec $\tilde{f} = L^2 f$; par conséquent, si ε_p^f désigne l'erreur : $Ef(X_{ph}) - Ef(\bar{X}_p)$, on en déduit :

$$\varepsilon_{p+1}^f = \varepsilon_p^f + \varepsilon_p^{Lf} \cdot h + O(h^3)$$

(notation de 0.6); malheureusement, cette relation de récurrence ne permet de conclure à : $\varepsilon_N^f = O(h^2)$ que dans des cas particuliers (cf. Talay [5]).

Pour remédier à la situation précédente, nous utiliserons le problème de Cauchy connu sous le nom d'Équation de Kolmogorov rétrograde :

$$\begin{cases} \partial_0 v(t, x) + Lv(t, x) = 0, & 0 \leq t < T \\ v(T, x) = f(x) \end{cases}$$

(L est l'opérateur de diffusion associé à (X_t)).

L'idée est de remplacer l'estimation de $Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T)$ par celle de $Ev(T, X_T) - Ev(T, \bar{X}_T)$.

C'est cette idée, que l'auteur doit à A. Bensoussan, qui est mise en œuvre dans la preuve du théorème 4.1.1 qui établit $\varepsilon_N^f = O(h^2)$ sous des hypothèses assez raisonnables.

En fait, nous montrerons que cet ordre de convergence est atteint aussi par de nouveaux schémas, plus intéressants du point de vue numérique que le précédent, notamment parce qu'ils permettent de traiter le cas où l'équation est multidimensionnelle (ce point est détaillé au début du § 4.3).

2. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE PROBLÈMES DE CAUCHY

Dans ce paragraphe, nous considérons l'opérateur L_t défini par (3) et l'équation (4) avec $c \equiv 0$, soit :

$$(15) \quad \begin{cases} \partial_0 v(t, x) + L_t v(t, x) = 0, & 0 \leq t < T \\ v(T, x) = f(x). \end{cases}$$

Par la suite, f sera appelée à être celle de l'énoncé (9), nous imposons donc à la condition finale de (15) d'être à croissance à l'infini de type polynomial.

En outre, L_t sera appelé à être le générateur infinitésimal de la solution de (1); par conséquent, à t fixé, les fonctions $x \mapsto A_t^i(t, x)$ peuvent s'annuler et sont à croissance éventuellement linéaire à l'infini.

Ceci nous conduit à utiliser l'interprétation probabiliste de (15).

On note $(X_\theta^{t,x})$ le processus défini par (5) et $P_n(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions g de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} telles que :

$$\exists C \in \mathbb{R} / |g(x)| \leq C(\|x\|^n + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

L'idée directrice des 3 énoncés ci-après est la suivante : on étudie la régularité de $X_\theta^{t,x}$ par rapport à (t, x) (Lemme 2.1); on en déduit la régularité de la fonction $v(t, x)$ définie par :

$$v(t, x) := E \{ f(X_T^{t,x}) \};$$

cette régularité permet alors d'établir que $v(t, x)$ est solution du problème de Cauchy (15) (théorème 2.2); on en déduit l'existence, la régularité et le type de croissance de certaines dérivées partielles de v (théorème 2.3).

Le lemme 2.1 et le théorème 2.2 sont, pour l'essentiel, exposés et prouvés dans Kunita (1, chap. II, § 3); une variante minimale (toutefois indispensable pour la suite) est l'inégalité (iii) de 2.2 qui se démontre sans difficulté.

LEMME 2.1 : *On suppose les fonctions A_k ($0 \leq k \leq m$) continues et :*

(H1) *pour tout t de $[0, T]$, la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto A_k^i(t, x)$ (i -ième coordonnée de A_k ; $0 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq d$) est de classe C^p , $p \in \mathbb{N}^*$ et toutes ses dérivées partielles d'ordre j ($1 \leq j \leq p$) sont continues bornées.*

Alors :

(i) *pour tout T , il existe une constante C telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall \theta \in [t, T]$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$:*

$$E \| X_\theta^{t,x} \|^n \leq C(1 + \|x\|^{2n})$$

(ii) *il existe une version du processus $(X_\theta^{t,x})$ qui est p fois continûment différentiable par rapport à x , presque sûrement; désormais, nous identifierons le processus et cette version « régulière ». En outre, les processus $\partial_i X_\theta^{t,x}$, $1 \leq i \leq p$, ont des moments de tous ordres bornés uniformément en (θ, t, x) sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$.*

(iii) *à θ fixé, $X_\theta^{t,x}$ et ses dérivées sont des fonctions de (t, x) continues presque sûrement.*

De ce lemme, on déduit le :

THÉORÈME 2.2 : *On suppose les fonctions A_k ($0 \leq k \leq m$) continues et :*

- (H1) *pour tout t de $[0, T]$, la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto A_k^i(t, x)$ ($0 \leq k \leq m$; $1 \leq i \leq d$) est de classe C^2 (resp. C^6) et ses dérivées partielles sont continues bornées.*
- (H2) *f est de classe C^2 (resp. C^6) et vérifie : il existe un entier n tel que toute dérivée partielle d'ordre au plus 2 (resp. 6) appartient à $P_n(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.*

Soit v la fonction définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ par :

$$(16) \quad v(t, x) := Ef(X_T^{t,x}).$$

Alors :

- (i) *la fonction v est deux fois (respectivement : six fois) continûment dérivable par rapport à x .*
- (ii) *v est solution de (15).*
- (iii) *v et ses dérivées par rapport à x sont continues en (t, x) . En outre, pour toute fonction $g(t, x)$ égale à v ou une dérivée partielle de v de la forme :*

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} v(t, x), \quad 1 \leq i_j \leq d, \quad 1 \leq k \leq 2 \quad (\text{resp. } 1 \leq k \leq 6)$$

nous avons :

$$\exists r \in \mathbb{N}, \quad \forall T > 0, \quad \exists C \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in [0, T] :$$

$$|g(t, x)| \leq C(\|x\|^r + 1).$$

A l'aide de ce théorème et en différenciant l'équation (15), on obtient le :

THÉORÈME 2.3 : *On suppose les fonctions A_k ($0 \leq k \leq m$) continues et :*

- (H1) *pour tout t de $[0, T]$, la fonction $x \in \mathbb{R}^d \rightarrow A_k^i(t, x)$ ($0 \leq k \leq m$; $i \leq i \leq d$) est de classe C^6 et toutes ses dérivées partielles sont continues bornées.*
- (H2) *f est de classe C^6 et vérifie : il existe un entier s tel que toute dérivée partielle d'ordre au plus de 6 de f appartient à $P_s(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.*

Alors :

- (i) *les fonctions $\partial_0 \partial_{i_1} v, \partial_0 \partial_{i_1} \partial_{j_1} v, \partial_0 \partial_{i_1} \partial_{j_1} \partial_{k_1} v, \partial_0 \partial_{i_1} \partial_{j_1} \partial_{k_1} \partial_{l_1} v$ ($1 \leq i, j, k, l \leq d$) sont bien définies et continues en (t, x) sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$.*
- (ii) *en outre, si g est l'une quelconque de ces fonctions :*

$$\exists r \in \mathbb{N}, \quad \exists C \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in [0, T] :$$

$$|g(t, x)| \leq C(\|x\|^r + 1).$$

3. CONDITION SUFFISANTE D'ORDRE DE CONVERGENCE h^2

Soit $(\bar{X}_p, 0 \leq p \leq N = \frac{T}{h})$ un schéma de discrétisation de l'équation (1).

Le but de ce paragraphe est de construire une condition suffisante et facile à vérifier pour que, pour toute fonction f « convenable », (\bar{X}_p) satisfasse l'estimation :

$$(17) \quad \exists C > 0, \quad \forall h = \frac{T}{N} (N \in \mathbb{N}^*), \quad |Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T)| \leq C \cdot h^2.$$

Pour un exposé plus clair, nous commençons par traiter le cas où (X_t) et (W_t) sont à valeurs réelles (le cas multidimensionnel ne présente pas de difficulté théorique supplémentaire mais la multiplication des indices rend son étude pénible à lire et à écrire).

3.1. Cas unidimensionnel

Pour ce paragraphe, nous revenons à la notation usuelle $A_0 = b, A_1 = \sigma$ si bien que (1) s'écrit :

$$(18) \quad X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

Au paragraphe 1.1, nous avons vu qu'il est important de bien contrôler l'évolution de l'erreur $Ef(X_{ph}) - Ef(\bar{X}_p)$ (cf. l'égalité (12)); or ceci revient à dire que $Ef(\bar{X}_{p+1}) - Ef(\bar{X}_p)$ « reproduit » $Ef(X_{(p+1)h}) - Ef(X_{ph})$ avec une précision suffisante; dans notre cas, cette précision doit être d'ordre h^3 .

Or :

$$Ef(X_{(p+1)h}) - Ef(X_{ph}) = \sum_{i=1}^5 Ef^{(i)}(X_{ph}) \cdot E \{ (X_{(p+1)h} - X_{ph})^i | \underline{F}_{ph} \} + \text{reste d'ordre } h^3.$$

Ainsi nous sommes amenés à souhaiter les implications suivantes, pour $i = 1, \dots, 5$:

« Soit g_i telle que :

$$E \{ (X_{(p+1)h} - X_{ph})^i | \underline{F}_{ph} \} = g_i(X_{ph}) + \text{reste d'ordre } h^3;$$

alors :

$$E \{ (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i | \underline{F}_p \} = g_i(\bar{X}_p) + \text{reste d'ordre } h^3, »$$

où \underline{F}_p est la tribu engendrée par $\{ \bar{X}_j, 0 \leq j \leq p \}$.

Ceci justifie intuitivement la condition (C2) ci-après :

De fait, nous exigerons que le schéma (\bar{X}_p) satisfasse aux conditions (C0), (C1), (C2) suivantes (les notations : $0(h^3)$, ∂_i^j ont été introduites au paragraphe 0.6) :

(C0) $\bar{X}_0 = X_0$

(C1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante C telle que :

$$\forall h = \frac{T}{N}, \quad N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p = 0, 1, \dots, N : E | \bar{X}_p |^n \leq C$$

(C2) (i)
$$E \{ \bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p | \underline{\bar{F}}_p \} = \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) ds + \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 b(s, \bar{X}_p) \times$$

$$\times \int_{t_p}^s h(u, \bar{X}_p) du ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1^2 b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds + 0(h^3)$$

(ii)
$$E \{ (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2 | \underline{\bar{F}}_p \} = \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 ds +$$

$$+ \left(\int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) ds \right)^2$$

$$+ \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds$$

$$+ 2 \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds$$

$$+ 2 \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s b(u, \bar{X}_p) du ds$$

$$+ \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) \partial_1^2 \sigma(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds$$

$$+ 0(h^3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad E \{ (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^3 \mid \underline{\underline{F}}_p \} &= 3 \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 ds \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) ds \\
 &+ 6 \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s \sigma(u, \bar{X}_p)^2 du ds \\
 &+ 0(h^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad E \{ (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^4 \mid \underline{\underline{F}}_p \} &= 6 \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \times \\
 &\times \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds + 0(h^3)
 \end{aligned}$$

$$\text{(v)} \quad E \{ (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^5 \mid \underline{\underline{F}}_p \} = 0(h^3)$$

$$\text{(vi)} \quad E \{ (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^6 \mid \underline{\underline{F}}_p \} = 0(h^3).$$

THÉORÈME 3.1.1 : *On suppose que les fonctions continues b , σ et f vérifient les hypothèses de régularité du théorème 2.3, à savoir :*

(H1) *pour tout $t \in [0, T]$, les fonctions $x \mapsto b(t, x)$ et $x \mapsto \sigma(t, x)$ sont de classe C^6 et toutes leurs dérivées sont bornées.*

(H2) *f est de classe C^6 et vérifie : $\exists s \in \mathbb{N}$, $f^{(6)} \in P_s(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.*

On suppose, par ailleurs, que le schéma (\bar{X}_p) satisfait les conditions (C0), (C1) et (C2).

Alors :

$$\exists C > 0, \quad \forall h = \frac{T}{N} \quad (N \in \mathbb{N}^*), \quad |Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T)| \leq C.h^2$$

(à nouveau, on a écrit \bar{X}_T au lieu de \bar{X}_N).

Preuve du théorème 3.1.1 : Tout d'abord, nous introduisons la notation suivante : pour deux variables aléatoires intégrables X et Y , nous écrirons :

$$X \stackrel{E}{=} Y \quad \text{au lieu de : } E(X) = E(Y).$$

La preuve est rendue longue par une étape calculatoire, à laquelle nous consacrerons le lemme 3.1.2 (preuve en Annexe I) ; admettons-en pour l'instant le résultat final, qui est le suivant : on considère l'E.D.P. (15) avec $L_t =$ opérateur de diffusion associé au processus (X_t) défini par (18) ; on considère ensuite

la solution de (15) définie par (16) (énoncé du théorème 2.2); alors, sous (C0), (C1), (C2) :

$$(19) \quad v(t_{p+1}, \bar{X}_{p+1}) \stackrel{E}{=} v(t_p, \bar{X}_p) + 0(h^3).$$

On en déduit pour $t_{p+1} = T$:

$$\begin{aligned} v(T, \bar{X}_T) &\stackrel{E}{=} v(0, \bar{X}_0) + 0(h^2) \\ &\stackrel{E}{=} v(0, X_0) + 0(h^2) \quad (\text{par (C0)}) \\ &\stackrel{E}{=} v(T, X_T) + 0(h^2). \end{aligned}$$

Soit :

$$\exists C > 0, \quad \forall h : |Ev(T, X_T) - Ev(T, \bar{X}_T)| \leq C.h^2. \quad \blacksquare$$

3.2. Cas multidimensionnel

Nous allons énoncer l'analogie du théorème 3.1.1.

D'abord, il nous faut réécrire les conditions (C0), (C1), (C2) (on note \bar{X}_p^i la i -ième coordonnée de \bar{X}_p) :

$$(C0) \quad \bar{X}_0 = X_0$$

(C1) pour tout n , il existe une constante C telle que :

$$\forall h = \frac{T}{N} (N \in \mathbb{N}^*), \quad \forall p = 0, 1, \dots, N, E \|\bar{X}_p\|^n \leq C$$

$$\begin{aligned} (C2) \text{ (i)} \quad E \{ \bar{X}_{p+1}^i - \bar{X}_p^i | \underline{\bar{F}}_p \} &= \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_0^i(s, \bar{X}_p) ds + \\ &+ \sum_{k=1}^d \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_k A_0^i(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s A_0^k(u, \bar{X}_p) du ds \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^d \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_k \partial_l A_0^i(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s A_j^k(u, \bar{X}_p) A_j^l(u, \bar{X}_p) du ds \\ &+ 0(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad E \{ (\bar{X}_{p+1}^{i_1} - \bar{X}_p^{i_1}) (\bar{X}_{p+1}^{i_2} - \bar{X}_p^{i_2}) | \underline{\bar{F}}_p \} = & \\
= \sum_{j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_1}(s, \bar{X}_p) A_j^{i_2}(s, \bar{X}_p) ds & \\
+ \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_0^{i_1}(s, \bar{X}_p) ds \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_0^{i_2}(s, \bar{X}_p) ds & \\
+ \sum_{k_1, k_2=1}^d \sum_{j, l=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_{k_1} A_j^{i_1}(s, \bar{X}_p) \partial_{k_2} A_l^{i_2}(s, \bar{X}_p) & \\
\times \int_{t_p}^s A_l^{k_1}(u, \bar{X}_p) A_l^{k_2}(u, \bar{X}_p) du ds & \\
+ \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_k A_0^{i_2}(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s A_j^{i_1}(u, \bar{X}_p) A_j^k(u, \bar{X}_p) du ds & \\
+ \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_k A_0^{i_1}(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s A_j^{i_2}(u, \bar{X}_p) A_j^k(u, \bar{X}_p) du ds & \\
+ \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_1}(s, \bar{X}_p) \partial_k A_j^{i_2}(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s A_0^k(u, \bar{X}_p) du ds & \\
+ \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_2}(s, \bar{X}_p) \partial_k A_j^{i_1}(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s A_0^k(u, \bar{X}_p) du ds & \\
+ \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^d \sum_{j, n=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_1}(s, \bar{X}_p) \partial_k \partial_l A_j^{i_2}(s, \bar{X}_p) & \\
\times \int_{t_p}^s A_n^k(u, \bar{X}_p) A_n^l(u, \bar{X}_p) du ds & \\
+ \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^d \sum_{j, n=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_2}(s, \bar{X}_p) \partial_k \partial_l A_j^{i_1}(s, \bar{X}_p) & \\
\times \int_{t_p}^s A_n^k(u, \bar{X}_p) A_n^l(u, \bar{X}_p) du ds & \\
+ 0(h^3) &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad & E \{ (\overline{X}_{p+1}^{i_1} - \overline{X}_p^{i_1}) (\overline{X}_{p+1}^{i_2} - \overline{X}_p^{i_2}) (\overline{X}_{p+1}^{i_3} - \overline{X}_p^{i_3}) | \underline{\overline{F}}_p \} = \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_0^{i_1}(s, \overline{X}_p) ds \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_2}(s, \overline{X}_p) A_j^{i_3}(s, \overline{X}_p) ds \\
&+ \sum_{j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_0^{i_2}(s, \overline{X}_p) ds \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_3}(s, \overline{X}_p) A_j^{i_1}(s, \overline{X}_p) ds \\
&+ \sum_{j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_0^{i_3}(s, \overline{X}_p) ds \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_1}(s, \overline{X}_p) A_j^{i_2}(s, \overline{X}_p) ds \\
&+ \sum_{k=1}^d \sum_{j,l=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_l^{i_2}(s, \overline{X}_p) \partial_k A_l^{i_3}(s, \overline{X}_p) \\
&\times \int_{t_p}^s A_j^{i_1}(u, \overline{X}_p) A_j^k(u, \overline{X}_p) du ds \\
&+ \sum_{k=1}^d \sum_{j,l=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_l^{i_3}(s, \overline{X}_p) \partial_k A_l^{i_2}(s, \overline{X}_p) \\
&\times \int_{t_p}^s A_j^{i_1}(u, \overline{X}_p) A_j^k(u, \overline{X}_p) du ds \\
&+ \sum_{k=1}^d \sum_{j,l=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_l^{i_3}(s, \overline{X}_p) \partial_k A_l^{i_1}(s, \overline{X}_p) \\
&\times \int_{t_p}^s A_j^{i_2}(u, \overline{X}_p) A_j^k(u, \overline{X}_p) du ds \\
&+ \sum_{k=1}^d \sum_{j,l=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_l^{i_1}(s, \overline{X}_p) \partial_k A_l^{i_3}(s, \overline{X}_p) \\
&\times \int_{t_p}^s A_j^{i_2}(u, \overline{X}_p) A_j^k(u, \overline{X}_p) du ds \\
&+ \sum_{k=1}^d \sum_{j,l=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_l^{i_1}(s, \overline{X}_p) \partial_k A_l^{i_2}(s, \overline{X}_p) \\
&\times \int_{t_p}^s A_j^{i_3}(s, \overline{X}_p) A_j^k(u, \overline{X}_p) du ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^d \sum_{j,l=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_l^{i_2}(s, \bar{X}_p) \partial_k A_l^{i_1}(s, \bar{X}_p) \\
& \times \int_{t_p}^s A_j^{i_3}(s, \bar{X}_p) A_j^k(u, \bar{X}_p) du ds + 0(h^3) \\
\text{(iv)} \quad & E \{ (\bar{X}_{p+1}^{i_1} - \bar{X}_p^{i_1}) \dots (\bar{X}_{p+1}^{i_4} - \bar{X}_p^{i_4}) \mid \underline{\bar{F}}_p \} = \\
& = \sum_{l,j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_1}(s, \bar{X}_p) A_j^{i_2}(s, \bar{X}_p) ds \times \\
& \times \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_l^{i_3}(s, \bar{X}_p) A_l^{i_4}(s, \bar{X}_p) ds \\
& + \sum_{l,j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_1}(s, \bar{X}_p) A_j^{i_3}(s, \bar{X}_p) ds \\
& \times \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_l^{i_2}(s, \bar{X}_p) A_l^{i_4}(s, \bar{X}_p) ds \\
& + \sum_{l,j=1}^m \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_j^{i_1}(s, \bar{X}_p) A_j^{i_4}(s, \bar{X}_p) ds \\
& \times \int_{t_p}^{t_{p+1}} A_l^{i_2}(s, \bar{X}_p) A_l^{i_3}(s, \bar{X}_p) ds + 0(h^3) \\
\text{(v)} \quad & E \{ (\bar{X}_{p+1}^{i_1} - \bar{X}_p^{i_1}) \dots (\bar{X}_{p+1}^{i_5} - \bar{X}_p^{i_5}) \mid \underline{\bar{F}}_p \} = 0(h^3) \\
\text{(vi)} \quad & E \{ (\bar{X}_{p+1}^{i_1} - \bar{X}_p^{i_1}) \dots (\bar{X}_{p+1}^{i_6} - \bar{X}_p^{i_6}) \mid \underline{\bar{F}}_p \} = 0(h^3)
\end{aligned}$$

THÉOREME 3.2.1 : *On suppose que les fonctions continues f, A_k ($0 \leq k \leq m$) vérifient les hypothèses du théorème 2.3, à savoir :*

- (H1) *pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $x \mapsto A_k^i(t, x)$ ($0 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq d$) est de classe C^6 et toutes ses dérivées partielles sont bornées.*
- (H2) *f est de classe C^6 et vérifie : il existe un entier s tel que toute dérivée partielle d'ordre au plus 6 de f appartient à $P_s(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.*

On suppose, par ailleurs, qu'un schéma (\bar{X}_p) satisfait les conditions (C0), (C1), (C2) de ce paragraphe 3.2.

Alors (\bar{X}_p) conduit à l'estimation :

$$\exists C > 0, \forall h = \frac{T}{N} (N \in \mathbb{N}^*), |Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T)| \leq C.h^2.$$

4. QUELQUES SCHÉMAS EFFICACES

4.1 Processus unidimensionnels : schéma Monte Carlo

Les notations sont celles du paragraphe 3.1. On suppose de plus que les fonctions b et σ ne dépendent pas de la variable t ; le cas contraire, plus difficile, sera traité au paragraphe 4.4; (18) s'écrit alors :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s.$$

Considérons le schéma suivant :

$$(27) \quad \begin{aligned} \bar{X}_0 &= X_0 \\ \bar{X}_{p+1} &= \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) U_{p+1} \sqrt{h} + \left\{ b(\bar{X}_p) - \frac{1}{2} \sigma(\bar{X}_p) \sigma'(\bar{X}_p) \right\} h \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma \cdot \sigma'(\bar{X}_p) (U_{p+1})^2 h + \frac{1}{2} \left(b\sigma' + b' \sigma + \frac{1}{2} \sigma^2 \sigma'' \right) (\bar{X}_p) \\ &\quad \times U_{p+1} h^{3/2} + \frac{1}{2} \left(bb' + \frac{1}{2} \sigma^2 b'' \right) (\bar{X}_p) h^2 \end{aligned}$$

où la famille $\{ U_1 \sqrt{h}, \dots, U_{p+1} \sqrt{h}, \dots, U_N \sqrt{h} \}$ est Monte Carlo équivalente à la famille $\{ W_h, \dots, W_{(p+1)h} - W_{ph}, \dots, W_{Nh} - W_{(N-1)h} \}$ (voir définition 0.5).

On peut ainsi choisir, par exemple, la famille (U_p) de variables aléatoires discrètes satisfaisant (28), (29) :

(28) — la suite $(U_p, 1 \leq p \leq N)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées; cette suite est indépendante de X_0 .

(29) — chaque U_p est de loi \mathcal{L}_0 caractérisée par :

$$P \{ U_p = \sqrt{3} \} = \frac{1}{6}$$

$$P \{ U_p = -\sqrt{3} \} = \frac{1}{6}$$

$$P \{ U_p = 0 \} = \frac{2}{3}.$$

On remarque, par ailleurs, que, pour $U_{p+1}\sqrt{h} = W_{(p+1)h} - W_{ph}$, le schéma (27) est celui de Milshtein (voir § 1.2); nous préférons, cependant, le choix précédent des U_p , car nous pensons réduire le temps-calcul en simulant des lois discrètes plutôt que gaussiennes.

THÉORÈME 4.1.1 : *On suppose :*

(H1) b, σ sont dérivables jusqu'à l'ordre 6 inclus et leurs dérivées sont continues bornées.

(H2) f est de classe C^6 et vérifie : $\exists s \in \mathbb{N}, f^{(6)} \in P_s(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

(H3) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R} :$

$$|\sigma^2(x) \sigma''(x)| \leq M(|x| + 1)$$

$$|\sigma^2(x) b''(x)| \leq M(|x| + 1).$$

Alors le schéma Monte Carlo défini par (27) conduit à l'estimation :

$$\exists C > 0, \forall h = \frac{T}{N}, N \in \mathbb{N}^* : |Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T)| \leq C.h^2.$$

Preuve du théorème 4.1.1 : Les fonctions b et σ étant globalement lipschitziennes, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x :$

$$|b(x)| \leq C(|x| + 1) \quad \text{et} \quad |\sigma(x)| \leq C(|x| + 1).$$

Cette remarque et l'hypothèse (H3) permettent de montrer que le schéma Monte Carlo satisfait (C1). On vérifie, par ailleurs, (C2) sans difficulté. Donc, sous (H1) et (H2), le théorème 3.1.1 s'applique. ■

Remarque 4.1.2 : L'hypothèse (H3) est peu naturelle et restrictive. En outre, le calcul des valeurs prises par les dérivées secondes de b et σ peut se révéler coûteux en temps-calcul.

Ceci justifie l'introduction d'un nouveau schéma, de type Runge-Kutta que nous désignerons par « schéma Monte Carlo-Runge-Kutta » ou « schéma MCRK » et palliant les défauts du schéma Monte Carlo.

4.2. Processus unidimensionnels : schéma MCRK

Commençons par construire ce schéma ; à cette fin, considérons l'Équation Différentielle Ordinaire :

$$y(0) = y_0$$

$$y'(t) = f(y(t)), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Le schéma d'Euler (\hat{y}_p^h), construit à l'aide d'une discrétisation de $[0, T]$ de

pas h , s'écrit pour cette équation :

$$\begin{aligned}\tilde{y}_0^h &= y_0 \\ \tilde{y}_{p+1}^h &= \tilde{y}_p^h + hf(\tilde{y}_p^h), \quad p = 0, 1, \dots, \frac{T}{h} - 1.\end{aligned}$$

On suppose f de classe C^2 ; la convergence de \tilde{y}_N^h vers y_T est d'ordre h ; d'ailleurs :

$$|y(h) - \tilde{y}_1^h| \leq \text{Cte } h^2.$$

Par contre :

$$(30) \quad |y(h) - (2\tilde{y}_2^{h/2} - \tilde{y}_1^h)| \leq \text{Cte } h^3$$

puisque :

$$2\tilde{y}_2^{h/2} - \tilde{y}_1^h = y_0 + hf\left(y_0 + \frac{h}{2}f(y_0)\right).$$

Posons :

$$(31) \quad \bar{y}_0^h = y_0$$

$$(32) \quad \bar{y}_1^h = \bar{y}_0^h + hf\left(\bar{y}_0^h + \frac{h}{2}f(\bar{y}_0^h)\right)$$

et interprétons (31), (32) comme les premiers termes de la suite récurrente (\bar{y}_p^h) définie par :

$$(33) \quad \bar{y}_{p+1}^h = \bar{y}_p^h + hf\left(\bar{y}_p^h + \frac{h}{2}f(\bar{y}_p^h)\right).$$

Ceci définit un nouveau schéma, de type Runge-Kutta d'ordre 1, appelé « schéma du point-milieu ». Comme (30) le suggère, sa convergence est d'ordre h^2 .

Ce schéma du point-milieu « dérive » du schéma d'Euler en ce sens que :

$$\bar{y}_1^h = 2\tilde{y}_2^{h/2} - \tilde{y}_1^h.$$

Revenons à présent aux Équations Différentielles Stochastiques et considérons à nouveau le schéma (13) du paragraphe 1. 1.

Le schéma MCRK dérive de ce schéma, en ce sens que nous définissons \bar{X}_0^h , \bar{X}_1^h par :

$$\begin{aligned}\bar{X}_0^h &= \tilde{X}_0^h = X_0 \\ \bar{X}_1^h &= 2\tilde{X}_2^{h/2} - \tilde{X}_1^h.\end{aligned}$$

On interprète alors \bar{X}_0^h, \bar{X}_1^h comme les deux premiers termes d'une suite récurrente. Cette suite permet de définir un nouveau schéma qui fait intervenir les variables aléatoires $W_{ph+\frac{1}{2}h} - W_{ph}, W_{(p+1)h} - W_{ph+\frac{1}{2}h}, W_{(p+1)h} - W_{ph}$.

Nous construisons enfin le schéma MCRK en remplaçant ces variables aléatoires par des variables aléatoires $\tilde{U}_{p+1}, \tilde{V}_{p+1}, \tilde{Z}_{p+1}$ telles que :

- (a) la suite $\{ \tilde{U}_1, \tilde{V}_1, \tilde{U}_2, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{U}_p, \tilde{V}_p, \dots, \tilde{U}_{N-1}, \tilde{V}_{N-1} \}$ est une suite de variables indépendantes ; cette suite est indépendante de X_0 ;
- (b) la famille $\{ \tilde{U}_{p+1}, \tilde{V}_{p+1}, \tilde{Z}_{p+1} \}$ est Monte Carlo équivalente à la famille $\left\{ W_{ph+\frac{1}{2}h} - W_{ph}, W_{(p+1)h} - W_{ph+\frac{1}{2}h}, W_{(p+1)h} - W_{ph} \right\}$, pour tout $p = 0, \dots, N - 1$.

Par exemple, on peut choisir :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{p+1} &= U_{p+1} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}}; & \tilde{V}_{p+1} &= V_{p+1} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}}; \\ \tilde{Z}_{p+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (U_{p+1} + V_{p+1}) \sqrt{h}, \end{aligned}$$

avec U_{p+1}, V_{p+1} satisfaisant (a') et (b') :

- (a') la suite $\{ U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_p, V_p, \dots, U_{N-1}, V_{N-1} \}$ est une suite de variables indépendantes, identiquement distribuées ;
- (b') la loi commune des U_p et V_p est la loi \mathcal{L}_0 caractérisée par les égalités (29).

On obtient donc $\left(\bar{X}_{p+} \right)$ est analogue au terme $\bar{y}_p^h + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p^h)$ de (33) :

$$\begin{aligned} \bar{X}_0 &= X_0 \\ \bar{X}_{p+} &= \bar{X}_p + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma(\bar{X}_p) U_{p+1} \sqrt{h} + \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{2} \sigma \cdot \sigma' \right) (\bar{X}_p) h + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sigma \cdot \sigma' (\bar{X}_p) U_{p+1}^2 h \\ \bar{X}_{p+1} &= \bar{X}_p + \left\{ \sqrt{2} \sigma(\bar{X}_p) U_{p+1} \sqrt{h} + \sqrt{2} \sigma(\bar{X}_{p+}) V_{p+1} \sqrt{h} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma(\bar{X}_p) (U_{p+1} + V_{p+1}) \sqrt{h} \right\} + \left(b - \frac{1}{2} \sigma \cdot \sigma' \right) (\bar{X}_{p+}) h \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} \sigma \cdot \sigma'(\bar{X}_p) (U_{p+1})^2 h + \frac{1}{2} \sigma \cdot \sigma'(\bar{X}_{p+1}) (V_{p+1})^2 h - \frac{1}{4} \sigma \cdot \sigma'(\bar{X}_p) (U_{p+1} + V_{p+1})^2 h \right\}.$$

Le théorème suivant se montre comme le théorème 4.1.1 :

THÉORÈME 4.2.1 : *Sous les seules hypothèses (H1), (H2) du théorème 4.1.1, le schéma MCRK conduit à l'estimation :*

$$\exists C > 0, \forall h = \frac{T}{N} (N \in \mathbb{N}^*), |Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T)| \leq C \cdot h^2.$$

4.3. Processus multidimensionnels : schéma MCRK

La remarque 4.1.2 devient particulièrement importante quand les processus (X_t) et (W_t) sont multidimensionnels : le calcul des dérivées partielles d'ordre 2 des coefficients de dérive et diffusion limiterait les qualités numériques d'un schéma de type Monte Carlo.

Par ailleurs, il est crucial ici de remplacer les variables aléatoires $\int_{t_p}^{t_{p+1}} (W_s^i - W_{t_p}^i) dW_s^j$ par des variables aléatoires à lois discrètes; en effet, les lois de telles intégrales stochastiques semblent difficiles à simuler.

Nous revenons aux notations du paragraphe 3.2, en supposant que les fonctions A_k sont indépendantes de temps, l'équation (1) s'écrit alors :

$$X_t = X_0 + \sum_{k=0}^m \int A_k(X_s) dW_s^k.$$

Nous proposons le schéma suivant, de type MCRK : ($1 \leq i \leq d$)

$$\bar{X}_0^i = X_0$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_{p+1}^i &= \bar{X}_p^i + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^m A_j^i(\bar{X}_p) U_{p+1}^j \sqrt{h} + \frac{1}{2} A_0^i(\bar{X}_p) h \\ &+ \sum_{i,r=1}^d \sum_{j,l=1}^m \partial_r A_j^i(\bar{X}_p) A_l^r(\bar{X}_p) S_{p+1}^{ij} h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_{p+1}^i &= \bar{X}_p^i + \sqrt{2} \sum_{j=1}^m \left\{ A_j^i(\bar{X}_p) U_{p+1}^j + A_j^i(\bar{X}_{p+}) V_{p+1}^j \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} A_j^i(\bar{X}_p) (U_{p+1}^j + V_{p+1}^j) \right\} \sqrt{h} \\ &\quad + A_0^i(\bar{X}_{p+}) h + \sum_{l,r=1}^d \sum_{j,l=1}^m \{ 2 \partial_r A_j^i(\bar{X}_p) A_l^r(\bar{X}_p) S_{p+1}^{lj} \\ &\quad + 2 \partial_r A_j^i(\bar{X}_{p+}) A_l^r(\bar{X}_{p+}) T_{p+1}^{lj} - \partial_r A_j^i(\bar{X}_p) A_l^r(\bar{X}_p) Z_{p+1}^{lj} \} h \end{aligned}$$

où pour tout $p = 0, \dots, N - 1$ et tous $J, k, l, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ choisis arbitrairement dans $\{ 1, \dots, m \}$:

(a) la suite finie $\{ U_{p+1}^J, V_{p+1}^J, S_{p+1}^{lj}, T_{p+1}^{lj}, Z_{p+1}^{lj} \}$ est indépendante de la tribu engendrée par $\{ \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p \}$

(b) la famille $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} U_{p+1}^J \sqrt{h}; \frac{\sqrt{2}}{2} V_{p+1}^k \sqrt{h}; S_{p+1}^{\alpha\beta} h; T_{p+1}^{\gamma\delta} h; Z_{p+1}^{\varepsilon\varphi} h \right\}$ est

Monte Carlo équivalente à la famille :

$$\begin{aligned} &\{ W_{(2p+1)h/2}^J - W_{ph}^J; W_{(p+1)h}^k - W_{(2p+1)h/2}^k; \\ &\quad \int_{t_p}^{t_p + \frac{h}{2}} (W_s^\alpha - W_{t_p}^\alpha) dW_s^\beta; \int_{t_p + \frac{h}{2}}^{t_{p+1}} (W_s^\gamma - W_{t_p + \frac{h}{2}}^\gamma) dW_s^\delta; \\ &\quad \left. \int_{t_p + \frac{h}{2}}^{t_{p+1}} (W_s^\varepsilon - W_{t_p}^\varepsilon) dW_s^\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Par exemple, on choisit des variables $U_p, V_p, \tilde{U}_p, \tilde{V}_p$ telles que :

(34) — la suite $\{ U_p^j, V_p^j, \tilde{U}_p^{lj}, \tilde{V}_p^{lj}, 1 \leq j \leq l, 0 \leq p \leq N - 1 \}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes;

(35) — toutes les variables U_p^i, V_p^i ($p = 0, \dots, N - 1; i = 1, \dots, m$) ont même loi \mathcal{L}_0 définie au paragraphe 4.1;

(36) toutes les variables $\tilde{U}_p^{lj}, \tilde{V}_p^{lj}$ ($p = 0, \dots, N - 1; j, l = 1, \dots, m$) ont même loi équirépartie sur la paire $\{ -1, 1 \}$; pour $J > l$: $\tilde{U}_p^{lj} = -\tilde{U}_p^{jl}$ et $\tilde{V}_p^{lj} = -\tilde{V}_p^{jl}$.

On définit alors $S_{p+1}^{lj}, T_{p+1}^{lj}, Z_{p+1}^{lj}$ par :

$$\begin{aligned} (37) \quad S_{p+1}^{jj} &= \frac{1}{4} ((U_{p+1}^j)^2 - 1) \\ T_{p+1}^{jj} &= \frac{1}{4} ((V_{p+1}^j)^2 - 1) \\ Z_{p+1}^{jj} &= \frac{1}{4} (U_{p+1}^j + V_{p+1}^j)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(38) pour tous l, j distincts ($l, j = 1, \dots, m$) :

$$S_{p+1}^{lj} = \frac{1}{4}(U_{p+1}^l U_{p+1}^j + \tilde{U}_{p+1}^{lj})$$

$$T_{p+1}^{lj} = \frac{1}{4}(V_{p+1}^l V_{p+1}^j + \tilde{V}_{p+1}^{lj})$$

$$Z_{p+1}^{lj} = S_{p+1}^{lj} + T_{p+1}^{lj} + \frac{1}{2} U_{p+1}^l V_{p+1}^j.$$

A l'aide du théorème 3.2.1, on vérifie sans difficulté le :

THÉORÈME 4.3.1 : *On suppose que les fonctions continues f, A_k ($0 \leq k \leq m$) vérifient les hypothèses :*

(H1) *pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $x \mapsto A_k^i(t, x)$ ($0 \leq k \leq m; 1 \leq i \leq d$) est de classe C^6 et toutes ses dérivées partielles sont bornées.*

(H2) *f est de classe C^6 et vérifie · il existe un entier s tel que toute dérivée partielle d'ordre au plus 6 de f appartienne à $P_s(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$.*

Alors le schéma MCRK conduit à l'estimation :

$$\exists C > 0, \quad \forall h = \frac{T}{N}, N \in \mathbb{N}^*, \quad |Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T)| \leq C.h^2.$$

4.4. Cas de la dépendance en temps des coefficients

Rappelons la remarque qui suit l'énoncé du théorème 3.1.1 : pour certaines applications, il est important de supposer que les fonctions $t \mapsto A_k(t, x)$ sont seulement continues.

Malheureusement, pour ce cas, il ne nous a pas été possible de construire un schéma de type Runge-Kutta.

Dans Talay [6], on peut trouver un exemple de schéma de type Monte Carlo appliqué à une équation multidimensionnelle liée au problème de filtrage.

Nous donnerons ici un autre exemple de schéma, appliqué à une équation unidimensionnelle mais moins particulière que celle du filtrage.

Supposons donc que (X_t) soit solution de :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

où (W_t) est un processus de Wiener à valeurs réelles.

Le schéma s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\bar{X}_0 &= X_0 \\ \bar{X}_{p+1} &= \bar{X}_p + A_{p+1} + \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) ds + B_{p+1} + C_{p+1} + D_{p+1} \\ &\quad + E_{p+1} + \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s b(u, \bar{X}_p) du ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_2 b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds\end{aligned}$$

où, pour tout $p = 0, \dots, N - 1$, la famille $\{A_{p+1}, B_{p+1}, C_{p+1}, D_{p+1}, E_{p+1}\}$ satisfait les conditions (39), (40) suivantes :

(39) — elle est indépendante de la tribu engendrée par $\{\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p\}$.

(40) — elle est Monte Carlo équivalente à la famille :

$$\left\{ \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) ds; \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s \sigma(u, \bar{X}_p) dW_u dW_s; \right. \\ \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s \sigma(u, \bar{X}_p) dW_u ds; \\ \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s b(u, \bar{X}_p) du dW_s; \\ \left. \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1^2 \sigma(s, \bar{X}_p) \left(\int_{t_p}^s \sigma(u, \bar{X}_p) dW_u \right)^2 dW_s \right\}.$$

Par exemple, on pourra simuler des variables aléatoires U_1, \dots, U_{N-1} satisfaisant les conditions (28), (29).

Soit alors :

$$\begin{aligned}a_{p+1} &= \left(\int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 ds \right)^{1/2} \\ b_{p+1} &= \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds \\ c_{p+1} &= 2 \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{p+1} &= \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds \\
 e_{p+1} &= \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s b(u, \bar{X}_p) du ds \\
 f_{p+1} &= \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1^2(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p)) du ds \\
 \alpha_{p+1} &= c_{p+1}/(a_{p+1})^2 \quad \text{si } a_{p+1} \neq 0 \\
 &= 0 \quad \text{si } a_{p+1} = 0 \\
 \beta_{p+1} &= d_{p+1}/a_{p+1} \quad \text{si } a_{p+1} \neq 0 \\
 &= 0 \quad \text{si } a_{p+1} = 0 \\
 \gamma_{p+1} &= e_{p+1}/a_{p+1} \quad \text{si } a_{p+1} \neq 0 \\
 &= 0 \quad \text{si } a_{p+1} = 0 \\
 \delta_{p+1} &= f_{p+1}/a_{p+1} \quad \text{si } a_{p+1} \neq 0 \\
 &= 0 \quad \text{si } a_{p+1} = 0 \\
 \Delta_{p+1} &= -2 \alpha_{p+1}^2 + 6 b_{p+1}.
 \end{aligned}$$

On définit alors A_{p+1}, \dots, E_{p+1} par :

$$\begin{aligned}
 A_{p+1} &= a_{p+1} U_{p+1} \\
 B_{p+1} &= \frac{1}{3} (2 \alpha_{p+1} + \sqrt{\Delta_{p+1}}) (U_{p+1})^2 - \alpha_{p+1} - \sqrt{\Delta_{p+1}} \\
 C_{p+1} &= \beta_{p+1} U_{p+1} \\
 D_{p+1} &= \gamma_{p+1} U_{p+1} \\
 E_{p+1} &= \delta_{p+1} U_{p+1}.
 \end{aligned}$$

Remarque : Δ_{p+1} est positif ou nul car :

$$\begin{aligned}
 b_{p+1} &= E \left\{ \left(\int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s \sigma(u, \bar{X}_p) dW_u dW_s \right)^2 \right\} \\
 c_{p+1} &= E \left\{ \left(\int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) dW_s \right)^2 \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \int_{t_p}^s \sigma(u, \bar{X}_p) dW_u dW_s \right\}.
 \end{aligned}$$

Remarque 4.5 : Il est clair que, d'un point de vue numérique, un rôle non négligeable est tenu par la complexité de l'expression analytique des coefficients de l'E.D.S. à laquelle on s'intéresse.

Par conséquent, il peut s'avérer intéressant de trouver un processus (X_t^*) , satisfaisant une E.D.S. plus « simple » que celle satisfaite par (\tilde{X}_t) défini par (8) et tel que, néanmoins, le calcul de (2) se ramène à celui de l'espérance de $\varphi(X_t^*)$.

Pour ce faire, nous pouvons effectuer un changement de loi de probabilité de référence à l'aide d'une transformation de Girsanov : on définit P^* par :

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp \left\{ \int_0^t \sum_{q=1}^m q_k(s, X_s) dW_s^k - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{q=1}^m (q_k(s, X_s))^2 ds \right\}.$$

Notons E^* l'espérance sous la loi P^* . Il s'agit de calculer :

$$E^* \varphi(X_t^*),$$

où :

$$\begin{aligned} X_t^* &= (X_t^{*(1)}, X_t^{*(2)}) \\ &:= \left(X_t, \exp \left\{ \int_0^t q_0(s, X_s) ds + \int_0^t \sum_{k=1}^m (q_k(s, X_s))^2 ds \right\} \right). \end{aligned}$$

Sous la loi P^* , (X_t^*) est solution de l'E.D.S. :

$$\left\{ \begin{aligned} dX_t^{*(1)} &= \left\{ A_0(X_t^{*(1)}) + \sum_{k=1}^m A_k(t, X_t^{*(1)}) q_k(t, X_t^{*(1)}) \right\} dt \\ &+ \sum_{k=1}^m A_k(t, X_t^{*(1)}) dW_t^{*k} \\ dX_t^{*(2)} &= \left\{ q_0(t, X_t^{*(1)}) + \sum_{k=1}^m (q_k(t, X_t^{*(1)}))^2 \right\} X_t^{*(2)} dt \end{aligned} \right.$$

où :

$$W_t^* := W_t - \sum_{k=1}^m \int_0^t q_k(s, X_s) ds$$

est un $(\Omega, F, \underline{F}_t, P^*)$ mouvement brownien.

5. TESTS NUMÉRIQUES

Nous avons considéré l'Équation-test unidimensionnelle suivante :

$v(t)$ est une fonction positive régulière en t , telle que $v(0) = 1$

$$f_t = \frac{1}{2} v'(t)/v(t)$$

$$r_t = 1/(2 v_t)$$

X_0 = variable aléatoire gaussienne centrée réduite

$$\begin{aligned} dX_t = & \left\{ (f_t - r_t) X_t - 2 r_t X_t \exp(-r_t X_t^2) \right. \\ & \left. - 3 r_t X_t \exp\left(-\frac{1}{2} r_t X_t^2\right) \right\} dt \\ & + \left(1 + \exp\left(-\frac{1}{2} r_t X_t^2\right) \right) dW_t. \end{aligned}$$

On vérifie que (X_t) suit une loi gaussienne centrée de variance $v(t)$. Par la suite : $v(t) = \frac{1}{3} (2 + \cos(at))$, a variant entre 0 et 2.

Nous avons testé les schémas de discrétisation suivants :

a) le premier schéma du paragraphe 1.1 :

$$\bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) U_{p+1} + b(\bar{X}_p) h$$

b) le second schéma du paragraphe 1.1 :

$$\begin{aligned} \bar{X}_{p+1} = & \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) U_{p+1} + \left(b - \frac{1}{2} \sigma \sigma' \right) (\bar{X}_p) h \\ & + \frac{1}{2} \sigma \sigma' (\bar{X}_p) (U_{p+1})^2 \end{aligned}$$

c) le schéma Monte Carlo du paragraphe 4.1 ;

d) le schéma MCRK du paragraphe 4.2.

Le pas de discrétisation h a été fixé à 0.1, et le nombre de discrétisations a été fixé à 100.

A chaque pas, nous avons effectué 10 000 simulations de la variable aléatoire $U_{p+1} : U_{p+1}^{(1)}, \dots, U_{p+1}^{(10000)}$; nous avons donc obtenu 10 000 réalisations indépendantes de $\bar{X}_{p+1} : \bar{X}_{p+1}^{(1)}, \dots, \bar{X}_{p+1}^{(10000)}$.

Finalement, nous avons calculé les erreurs :

$$e_{p+1} = v(t_{p+1}) - \frac{1}{10\,000} \sum_{i=1}^{10\,000} (\bar{X}_{p+1}^{(i)})^2.$$

Compte tenu du nombre de simulations, les résultats théoriques précédents prévoient :

pour les schémas (a), (b) = e_{p+1} d'ordre $h = 0.1$

pour les schémas (c), (d) = e_{p+1} d'ordre $h^2 = 0.01$

Les résultats numériques, obtenus sur un ordinateur DPS68 de la CII-Honeywell Bull, équipé du système MULTICS, sont les suivants :

| | Schéma (a) | Schéma (b) | Schéma (c) | Schéma (d) |
|------------------------------------|------------|------------|------------|------------|
| Erreur absolue moyenne sur 100 pas | 0.152 | 0.114 | 0.013 | 0.012 |
| Temps CPU | 500 s | 500 s | 1 700 s | 1 000 s |

(Les courbes d'erreurs sont données en Annexe II).

Conclusions

- (1) les résultats numériques confirment les ordres de convergence prédits par la théorie;
- (2) le schéma MCRK permet un gain de temps CPU appréciable par rapport au schéma Monte Carlo (le nombre de termes à calculer à chaque pas est plus faible);
- (3) à pas identique, le schéma MCRK est 2 fois plus lent que le schéma (a); cependant, pour que le schéma (a) donne la même précision que le schéma MCRK, il faudrait diviser son pas de temps par 10 : le temps CPU correspondant serait alors multiplié aussi par 10.

6. CONCLUSION

En raison de sa vitesse de convergence et de sa simplicité, il nous paraît préférable d'utiliser le schéma MCRK (§ 4.3) pour la mise en œuvre de la méthode décrite au paragraphe 0.3.

Toutefois, dans (Talay [5], Pardoux et Talay [3]) il est montré que ceci n'est plus vrai ni du point de vue théorique, ni du point de vue numérique lorsqu'il s'agit d'approcher (X_t) trajectoire par trajectoire.

ANNEXE I

LEMME 3.1.2 : *On suppose satisfaites les hypothèses du théorème (3.1.1). Alors l'égalité (19) est satisfaite.*

Preuve du lemme 3.1.2 : Nous utiliserons *ad libitum* les résultats des théorèmes 2.2 et 2.3 qui justifient toutes les différentiations ci-après :

$$\begin{aligned} v(t_{p+1}, \bar{X}_{p+1}) &= v(t_p, \bar{X}_{p+1}) + \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_0 v(s, \bar{X}_{p+1}) ds \\ &= v(t_p, \bar{X}_p) + \sum_{i=1}^5 \frac{1}{i!} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i \partial_1^i v(t_p, \bar{X}_p) + \\ &\quad + (\bar{X}_{p+1} + \bar{X}_p)^6 \partial_1^6 v(t_p, X_{p+1}^*) \\ &\quad + \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_0 v(s, \bar{X}_{p+1}) ds \end{aligned}$$

avec X_{p+1}^* compris entre \bar{X}_p et \bar{X}_{p+1} .

En utilisant (C2) (v) et (vi), nous réécrivons l'inégalité suivante sous la forme :

$$\begin{aligned} v(t_{p+1}, \bar{X}_{p+1}) &\stackrel{E}{=} v(t_p, \bar{X}_p) + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i \partial_1^i v(t_p, \bar{X}_p) + \\ &\quad + \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_0 v(s, \bar{X}_{p+1}) ds + 0(h^3). \end{aligned}$$

Notre but est donc de montrer (20) :

$$\begin{aligned} (20) \quad &\sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} E \{ \partial_1^i v(t_p, \bar{X}_p) \cdot E \{ (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i \mid \underline{\bar{F}}_p \} \} + \\ &+ E \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_0 v(s, \bar{X}_{p+1}) ds = 0(h^3). \end{aligned}$$

Pour cela, nous utiliserons les expressions explicites des espérances conditionnelles données par (C2) ; il apparaît nécessaire de trouver, par ailleurs, une expression approchée de $\int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_0 v(s, \bar{X}_{p+1}) ds$ dans laquelle les dérivées de v sont considérées au seul point (t_p, \bar{X}_p) ; le théorème 2.3 permet la dérivation

en x (éventuellement plusieurs fois) de $\partial_0 v(s, x)$; par contre, il nous manque la dérivabilité en s de cette fonction, pour laquelle il faudrait la dérivabilité en t de $b(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ (mais il est crucial pour les applications au filtrage de supposer seulement la continuité de b et σ par rapport à t) (cf. Talay [6]); cette difficulté va être contournée en utilisant (15) et la dérivabilité en t de $\partial_1 v(t, x)$, $\partial_1^2 v(t, x)$, etc. (théorème 2.3) :

$$\int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_0 v(s, \bar{X}_{p+1}) ds \stackrel{\underline{E}}{=} - \int_{t_p}^{t_{p+1}} L_s v(s, \bar{X}_{p+1}) ds.$$

Grâce à (C1), (C2), on en déduit :

$$\begin{aligned} & \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_0 v(s, \bar{X}_{p+1}) ds \stackrel{\underline{E}}{=} - \int_{t_p}^{t_{p+1}} L_s v(s, \bar{X}_p) ds - \\ & \quad - (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 L_s v(s, \bar{X}_p) ds - \\ & \quad - \frac{1}{2} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2 \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1^2 L_s v(s, \bar{X}_p) ds + 0(h^3) \\ (21) \quad & \stackrel{\underline{E}}{=} - R_1 - R_2 - R_3 + 0(h^3). \end{aligned}$$

Commençons par traiter :

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_{t_p}^{t_{p+1}} L_s v(s, \bar{X}_p) ds \\ &= \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) \partial_1 v(s, \bar{X}_p) ds + \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \partial_1^2 v(s, \bar{X}_p) ds. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (22) \quad & \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \partial_1 v(s, x) ds = \partial_1 v(t_p, x) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) ds + \\ & \quad + \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s \partial_0 \partial_1 v(u, x) du ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_1 v(t_p, x) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) ds \\
&\quad - \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s \partial_1 L_u v(u, x) du ds \\
&= \partial_1 v(t_p, x) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) ds \\
&\quad - \partial_1 v(t_p, x) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s \partial_1 b(u, x) du ds \\
&\quad - \partial_1^2 v(t_p, x) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s b(u, x) du ds \\
&\quad - \partial_1^2 v(t_p, x) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s \sigma(u, x) \partial_1 \sigma(u, x) du ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_1^3 v(t_p, x) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s (\sigma(u, x))^2 du ds \\
&\quad - \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s \partial_1 b(u, x) \cdot (u - t_p) \partial_0 \partial_1 v(\alpha_u, x) du ds \\
&\quad - \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s b(u, x) \cdot (u - t_p) \partial_0 \partial_1^2 v(\beta_u, x) du ds \\
&\quad - \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s \sigma(u, x) \partial_1 \sigma(u, x) \\
&\quad \times (u - t_p) \partial_0 \partial_1^2 v(\gamma_u, x) du ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, x) \int_{t_p}^s (\sigma(u, x))^2 \\
&\quad \times (u - t_p) \partial_0 \partial_1^3 v(\delta_u, x) du ds
\end{aligned}$$

avec $\alpha_u, \beta_u, \gamma_u, \delta_u$ appartenant à $]t_p, u[$.

Grâce au théorème 2.3 (ii) et à (C1), il est donc justifié d'écrire :

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) \partial_1 v(s, \bar{X}_p) ds \stackrel{E}{=} \partial_1 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) ds + \\
 & - \partial_1 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s \partial_1 b(u, \bar{X}_p) du ds \\
 & - \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s b(u, \bar{X}_p) du ds \\
 & - \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s \sigma(u, \bar{X}_p) \partial_1 \sigma(u, \bar{X}_p) du ds \\
 & - \frac{1}{2} \partial_1^3 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds + 0(h^3).
 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \partial_1^2 v(s, \bar{X}_p) ds \stackrel{E}{=} \\
 & \stackrel{E}{=} \frac{1}{2} \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 ds \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s \partial_1^2 L_u v(u, \bar{X}_p) du ds \\
 (24) \quad & \stackrel{E}{=} \frac{1}{2} \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 ds \\
 & - \frac{1}{2} \partial_1 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s \partial_1^2 b(u, \bar{X}_p) du ds \\
 & - \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s \partial_1 b(u, \bar{X}_p) du ds \\
 & - \frac{1}{2} \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s \sigma(u, \bar{X}_p) \partial_1^2 \sigma(u, \bar{X}_p) du ds \\
 & - \frac{1}{2} \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s (\partial_1 \sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \partial_1^3 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s b(u, \bar{X}_p) du ds \\
& - \partial_1^3 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s \sigma(u, \bar{X}_p) \partial_1 \sigma(u, \bar{X}_p) du ds \\
& - \frac{1}{4} \partial_1^4 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 \int_{t_p}^s (\sigma(u, \bar{X}_p))^2 du ds + o(h^3).
\end{aligned}$$

Finalement, R_1 est égal à la somme des termes de droite des égalités (23) et (24).

Considérons à présent R_2 . Grâce à (C2) :

$$\begin{aligned}
R_2 &= (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 L_s v(s, \bar{X}_p) ds \\
&\stackrel{\underline{E}}{=} \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) ds \cdot \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 L_s v(s, \bar{X}_p) ds + o(h^3).
\end{aligned}$$

En effectuant des calculs similaires à ceux qui relient (22) à (24), on vérifie :

$$\begin{aligned}
(25) \quad R_2 &\stackrel{\underline{E}}{=} \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) ds \cdot \left\{ \partial_1 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 b(s, \bar{X}_p) ds \right\} \\
&+ \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) ds \\
&+ \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) ds \\
&+ \frac{1}{2} \partial_1^3 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 ds + o(h^3).
\end{aligned}$$

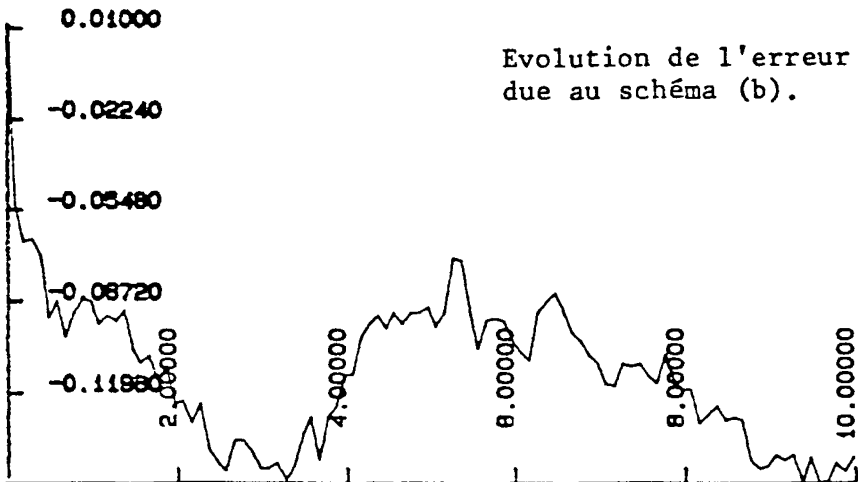
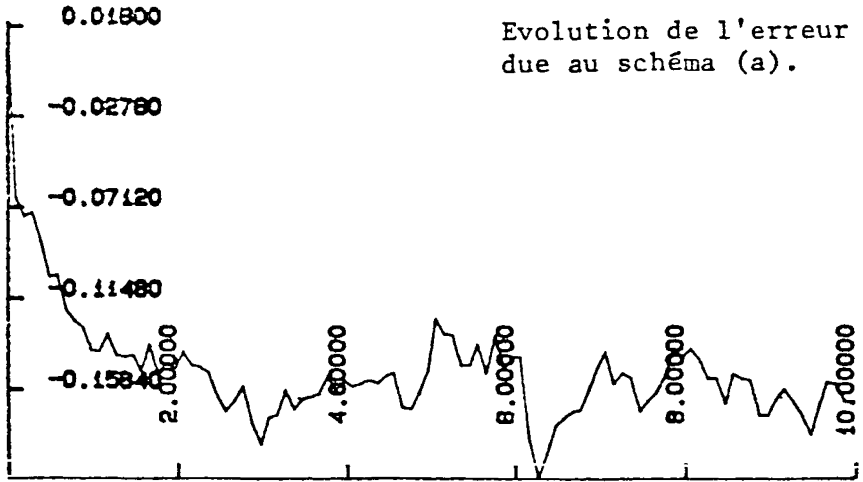
De même :

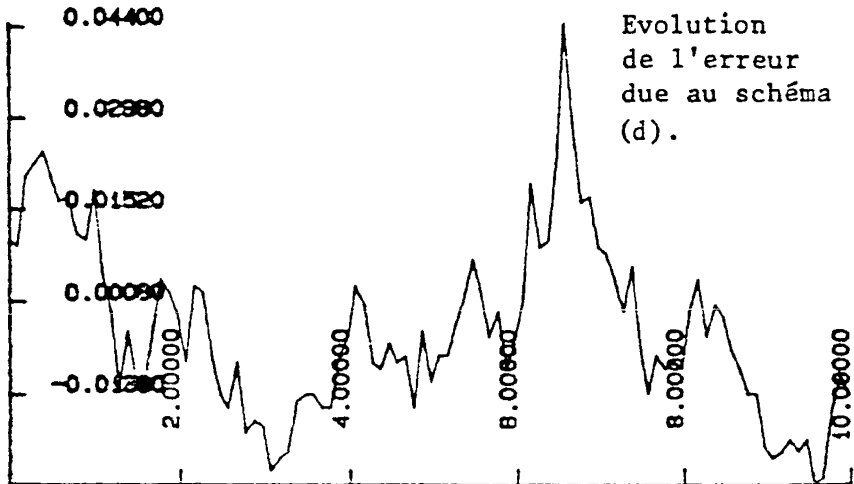
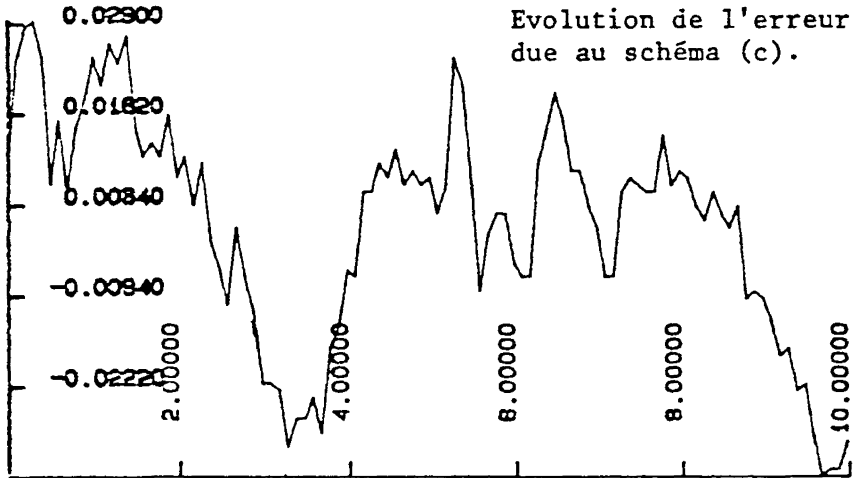
$$\begin{aligned}
 R_3 &= \frac{1}{2} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2 \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1^2 L_s v(s, \bar{X}_p) ds \\
 (26) \quad &\stackrel{E}{=} \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 ds \left\{ \partial_1 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1^2 b(s, \bar{X}_p) ds \right. \\
 &\quad + 2 \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} \partial_1 b(s, \bar{X}_p) ds \\
 &\quad + \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_p^{t_{p+1}} (\partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p))^2 ds \\
 &\quad + \partial_1^2 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) \partial_1^2 \sigma(s, \bar{X}_p) ds \\
 &\quad + \partial_1^3 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} b(s, \bar{X}_p) ds \\
 &\quad + 2 \partial_1^3 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sigma(s, \bar{X}_p) \partial_1 \sigma(s, \bar{X}_p) ds \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \partial_1^4 v(t_p, \bar{X}_p) \int_{t_p}^{t_{p+1}} (\sigma(s, \bar{X}_p))^2 ds \right\} + 0(h^3).
 \end{aligned}$$

A présent nous revenons à (21), où nous remplaçons R_1 , R_2 , R_3 par les expressions données par (23), (24), (25), (26).

Dès lors, la preuve de (20) est immédiate grâce aux égalités de (C2).

ANNEXE II





RÉFÉRENCES

- [1] H. KUNITA, *Stochastic Differential Equations and Stochastic Flows of Diffeomorphisms*. Cours de l'École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, 1982, in « Lecture Notes in Mathematics », vol. 1097, Springer-Verlag.
- [2] G. N. MILSHTEIN, *A Method of Second Order Accuracy Integration of S.D.E.* Theory Proba. Appl. 23, pp. 396-401 (1976).
- [3] E. PARDOUX & D. TALAY, *Approximation and Simulation of Solutions of S.D.E.* Acta Applicandae Mathematicae 3, 23-47 (1985).
- [4] R. Y. RUBINSTEIN, *Simulation and the Monte Carlo Method*. J. Wiley (1981).
- [5] D. TALAY, *Analyse Numérique des Équations Différentielles Stochastiques*. Thèse de 3^e cycle, Université de Provence (1982).
- [6] D. TALAY, *Efficient Numerical Schemes for the Approximation of Expectations of Functionals of the Solution of a S.D.E. and Applications*. Filtering and Control of Random Processes, « Lecture Notes in Control and Inf. Sciences », vol. 61, pp. 294-313, Springer-Verlag, 1984.