M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

JEAN-CLAUDE MIELLOU
PIERRE SPITERI

Un critère de convergence pour des méthodes générales de point fixe

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 19, nº 4 (1985), p. 645-669

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_4_645_0>

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(vol. 19, n° 4, 1985, p. 645 à 669)

UN CRITÈRE DE CONVERGENCE POUR DES MÉTHODES GÉNÉRALES DE POINT FIXE (*)

par Jean-Claude MIELLOU [1] et Pierre SPITERI [1]

Communiqué par F. ROBERT

Résumé. — *On définit et on caractérise la notion d'opérateurs H-accrétifs qui généralise celle d'opérateurs H-monotones* [22]. *L'intérêt de cette notion réside dans le fait qu'elle permet d'obtenir des conditions suffisantes de convergence des algorithmes parallèles et séquentiels de relaxation pour la résolution de problèmes non linéaires éventuellement multivoques ; pour une décomposition par blocs particulière des opérateurs intervenant dans le système à résoudre, si on fixe les variables d'interactions, la résolution des problèmes diagonaux correspondant à cette dernière permet alors d'associer une application de point fixe ; celle-ci, sous des hypothèses convenables, incluant celle de H-accrétivité, est contractante en norme vectorielle pour la décomposition envisagée et on obtient donc des critères de convergence simples à mettre en œuvre pour l'étude de méthodes générales d'approximation de point fixe par des itérations asynchrones. Le critère proposé s'applique également lorsque l'application de point fixe est associée à une décomposition par blocs, moins fine, que la décomposition initiale.*

Abstract. — *We define and we give a characterization of the notion of H-accretive operators which generalizes these of H-monotone operators* [22]. *The interest of this notion consists in the fact that it allows to obtain sufficient conditions of convergence for parallel and sequential relaxation algorithms allowing, thus, the resolution of non linear problems, including possibly multivalued operators ; for a particular block decomposition of the operators arising in the system to solve, when the interactions are fixed, the resolution of diagonal sub-problems corresponding to this last decomposition allows then to associate a fixed point mapping ; this one, under appropriate assumptions, and particularly the H-accretivity assumption, is contractive for a vectorial norm for the particular block decomposition and we obtain then convergence criterions very easy to apply to the general methods of fixed point approximation by asynchronous iterations. The proposed criterion can be applied again when the fixed point mapping is associated to a splitting sharper than the initial decomposition.*

INTRODUCTION

La résolution itérative de systèmes linéaires dont les matrices ont une structure par blocs par la méthode de relaxation est bien classique en calcul scientifique, même si l'on note depuis quelques années l'émergence et le développement d'autres méthodologies, comme par exemple la méthode du gradient

(*) Reçu en janvier 1985.
[1] U.A. CNRS n° 741 et L.A.N.I., Route de Gray, 25030 Besançon Cedex.

 © AFCET-Gauthier-Villars

conjugué et ses variantes, les méthodes multi-grilles ou celles utilisant la transformée de Fourier, etc... Dans ce cadre linéaire, l'intérêt qu'a pu présenter la méthode de relaxation par blocs était dû, dans le cas de la résolution numérique de problèmes elliptiques discrétisés par différences finies classiques :

— à la commodité de résolution de sous-problèmes linéaires triples-diagonaux,

— à une amélioration de la vitesse de convergence de ces algorithmes par blocs, par rapport à celle des algorithmes par points homologues,

— à une possibilité commode de décomposer de grands problèmes en sous-problèmes de taille plus modeste compatible avec les capacités des mémoires centrales des ordinateurs utilisés, cette technique présentant en outre l'avantage, par rapport à d'autres méthodes de décomposition, d'une gestion aisée des données stockées sur mémoires périphériques.

De plus, toujours dans le cadre linéaire, ont été développées diverses techniques d'analyse du comportement des algorithmes itératifs de relaxation par blocs, parmi lesquelles nous retiendrons ici essentiellement la notion de matrice minorante liée aux travaux de A. Ostrowski [28], D. Feingold-R. S. Varga [17] et F. Robert [29].

Tant au plan des algorithmes proprement dits qu'en ce qui concerne l'analyse de leurs comportements, l'objectif du présent article est de transposer les résultats obtenus antérieurement, dans le cadre linéaire, pour la méthode de relaxation par blocs au niveau de certaines classes de problèmes non linéaires, pour lesquelles il est bien connu que les méthodes de relaxation ont conservé jusqu'à présent tout leur intérêt :

— problèmes d'Hamilton-Jacobi-Bellman (*cf.* les travaux d'El Tarazi [16]), problèmes de l'obstacle (*cf.* le livre de A. Bensoussan-J. L. Lions [5] et l'article de C. W. Cryer [14]), problèmes à frontière libre (*cf.* les travaux de C. Baiocchi *et al.* [1]), problèmes complémentaires (*cf.* les travaux de R. W. Cottle *et al.* [13]),

— problèmes d'I.Q.V. (*cf.* les travaux de J. C. Miellou [26] en relation avec ceux de P. Cortey-Dumont [12]),

— problème de commande optimale associé à des équations aux dérivées partielles (*cf.* les travaux de R. Gonzalez-E. Rofman [19]).

Par ailleurs, dans la suite, nous nous plaçons dans une optique d'emploi et d'analyse de la méthode de relaxation dans le contexte de résolution d'un système d'équations non linéaires de la forme :

$$\Lambda(X) + \Lambda^d(X) \ni 0$$

pour lesquelles nous nous efforçons de mettre en évidence des opérateurs Λ

et Λ^d qui entraînent des propriétés de contraction en norme vectorielle de l'application de point fixe associée, garantissant la convergence des méthodes de relaxation par blocs et par sous-domaines (ou par grands blocs) dans un cadre algorithmique permettant aussi bien l'utilisation d'ordinateurs traditionnels que celle de calculateurs parallèles synchrones (algorithmes série parallèle au sens de F. Robert *et al.* [31]) ou asynchrones (algorithmes parallèles de relaxation asynchrones étudiés successivement par D. Chazan-M. Miranker [9], J. C. Miellou [25] et G. Baudet [3]) ; sur le plan de l'analyse du comportement de ces algorithmes, les notions utilisées contribuent donc, en définissant et caractérisant des classes d'opérateurs, à l'obtention des propriétés de contraction en norme vectorielle de l'application de point fixe.

Il convient d'ailleurs de préciser que pour la plupart des applications évoquées ci-dessus, les opérateurs intervenant dans le problème ne sont pas forcément symétriques [33] et que l'étude ne relève pas de techniques d'optimisation (*cf.* [7], [18] et leur bibliographie).

La notion de matrice minorante initialement utilisée dans le cadre linéaire ne permet pas d'effectuer l'analyse de ces méthodes de relaxation appliquées dans de tels contextes non linéaires ; d'où l'introduction de nouvelles variantes de matrices minorantes H-monotones déjà étudiées dans un contexte hilbertien par J. C. Miellou [22] et H-accrétives qui sont développées dans le présent travail, avec pour avantage la possibilité de considérer des sous-espaces munis de normes de type l_1 ou l_∞, mieux adaptées au calcul scientifique que les normes hilbertiennes.

Indiquons que, outre l'étude de la convergence d'algorithmes de relaxation et grâce aux propriétés de contraction en norme vectorielle de l'erreur à chaque itération, la notion de H-accrétivité étudiée ici permet d'effectuer un contrôle des erreurs du type F. Robert-J. Schroeder (*cf.* [29]) sous la forme proposée par J. C. Miellou [25], ce qui rend possible des tests de convergence efficaces, voire même une prévision à faible coût de calcul du nombre d'itérations pour atteindre une précision donnée. Par ailleurs, grâce à un résultat de J. C. Miellou [25], on sait qu'une application contractante en norme vectorielle est également contractante pour une norme scalaire adaptée, ce qui, grâce aux travaux d'El Tarazi [16] garantit également la convergence des algorithmes étudiés ici ; cette approche peut s'avérer intéressante d'utilisation notamment pour l'étude de certaines applications en relation avec des problèmes de commande optimale pour lesquels nous renvoyons à [33].

Le présent article se subdivise en deux paragraphes, le premier étant consacré aux rappels de la formulation des méthodes parallèles de relaxation asynchrones ainsi qu'aux principaux résultats de convergence. Au second paragraphe, nous définissons et nous caractérisons les opérateurs H-accrétifs, puis nous établissons des résultats de convergence des algorithmes parallèles de relaxation par blocs et par sous-domaines ; ces résultats théoriques sont ensuite illustrés par l'étude d'applications en relation avec des problèmes aux dérivées partielles non linéaires ; à partir de ce point de vue, d'autres applications de ces notions sont envisageables et nous renvoyons à [33].

1. RAPPEL DE LA FORMULATION DES ALGORITHMES DE RELAXATION SYNCHRONES ET ASYNCHRONES ET DE RÉSULTATS DE CONVERGENCE

1.1. Définitions : un résultat de convergence en norme vectorielle

Soit E un espace de Banach réflexif (*) et β un entier naturel ; pour $l \in \{ 1, \dots, \beta \}$, soit $\{ E_l \}$ une famille d'espaces de Banach réflexifs ; on note $| \,.\, |_l$ la norme de E_l. On considère, également, la décomposition de E, en un produit fini d'espaces de Banach du type :

(1) $$E = \prod_{l=1}^{\beta} E_l \,.$$

Soit X un élément de E ; on note :

(2) $$X = \{ x_1, \dots, x_l, \dots, x_\beta \} \,, \qquad x_l \in E_l$$

et q la norme vectorielle canonique sur E définie comme suit :

(3) $$q(X) = \{ | x_1 |_1, \dots, | x_l |_l, \dots, | x_\beta |_\beta \} \,.$$

Soit F une application de $D(F) \subset E$ à valeurs dans $D(F)$, telle que :

(4) $$D(F) \neq \varnothing$$

où $\varnothing$ est l'ensemble vide.

Compte tenu de la décomposition de E, on peut considérer celle de F définie par :

(5) $$F(X) = \{ F_1(X), \dots, F_l(X), \dots, F_\beta(X) \}$$

(*) En pratique, dans les applications, E sera l'espace $\mathbb{R}^\nu$ ou l'espace des fonctions continues, ou celui des fonctions continues par morceaux [33].

et on considère le problème de point fixe :

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } X^* \in D(F) \text{ tel que :} \\ \qquad X^* = F(X^*) . \end{cases}$$

On détermine X^* par des algorithmes de relaxation parallèles synchrones ou asynchrones par blocs ou par sous-domaines (*) qui se définissent en utilisant les notions définies ci-dessous :

DÉFINITION 1 : *Une* stratégie $\mathscr{S}$ *est définie par une suite* $\{ s(p) \}$ *pour* $p \in \mathbb{N}$ *telle que* :

$$\text{(7)} \qquad \forall p \in \mathbb{N} , \quad s(p) \subset \{ 1, 2, \ldots, \beta \} \ \textit{et} \ s(p) \neq \varnothing$$

$$\text{(8)} \qquad \forall l \in \{ 1, \ldots, \beta \}, \ \textit{l'ensemble} \ \{ p \in \mathbb{N} \mid l \in s(p) \} \ \textit{est infini} .$$

DÉFINITION 2 : *Une* suite de retards $\mathscr{R}$ *est définie par une suite* $\{ r(p) \}$ *telle que* :

$\forall p \in \mathbb{N}$, $r(p) = \{ r_1(p), \ldots, r_l(p), \ldots, r_\beta(p) \} \in \mathbb{N}^\beta$, *et* $\forall l \in \{ 1, \ldots, \beta \}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, *l'application* :

$$p \to \rho_l(p) = p - r_l(p)$$

vérifie :

$$\text{(9)} \qquad \rho_l(p) \geqslant 0$$

$$\text{(10)} \qquad \lim_{p \to \infty} \rho_l(p) = + \infty .$$

Compte tenu des définitions précédentes, les *algorithmes parallèles de relaxation asynchrones* peuvent alors être modélisés comme suit :

DÉFINITION 3 : *Soit* $X^{(0)} \in D(F)$; *on considère alors la suite* $\{ X^{(p)} \}$ *d'éléments de E définie par induction* :

$$\text{(11)} \qquad \forall p \in \mathbb{N} , \quad \forall l \in \{ 1, \ldots, \beta \} , \quad x_l^{(p+1)} = \begin{cases} x_l^{(p)} & si \quad l \notin s(p) \\ F_l(W) & si \quad l \in s(p) \end{cases}$$

où

$$W = \{ \ldots, x_k^{p - r_k(p)}, \ldots \} , \quad W \in E .$$

Remarque 1 : La notion de stratégie correspond aux numéros des composantes sur lesquelles on travaille. La notion de retards rend compte de l'asynchronisme avec lequel est traitée chacune des composantes du vecteur X ; lorsque les retards sont identiquement nuls, la formulation (11) correspond

(*) β représente donc ici le nombre de processeurs de calcul.

alors aux algorithmes de relaxation synchrones [31]; si, de plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

- $s(p) = \{ 1, 2, ..., \beta \}$,

(11) modélise l'algorithme de Jacobi par blocs ;

- $s(p) = p \bmod (\beta) + 1$,

(11) modélise l'algorithme de Gauss-Seidel par blocs.

On précise également que l'algorithme défini par (11) modélise une méthode de relaxation, où chaque composante x_l est calculée à l'aide des valeurs disponibles de fonctions d'interactions w_k.

On peut alors énoncer le résultat général de convergence suivant, établi par J. C. Miellou [25] :

PROPOSITION 1 : *Sous les hypothèses* (4) *et* :

(12) *F admet un point fixe $X^* \in D(F)$*

(13) $\left\{\begin{array}{l} F \textit{ est contractante en } X^* \textit{ pour la norme vectorielle } q, \textit{ c'est-à-dire} \\ \textit{qu'il existe une matrice } \mathfrak{J} \textit{ de type } \beta \times \beta, \textit{ non négative, telle que } \rho(\mathfrak{J}) < 1 \\ \textit{et vérifiant l'inégalité} : \\ \qquad q(F(X^*) - F(W)) \leqslant \mathfrak{J} q(X^* - W), \quad \forall W \in D(F) \end{array}\right.$

alors :

- (11) définit $X^{(p)}$ quel que soit p et $\{ X^{(p)} \}$ reste dans $D(F)$;
- $\{ X^{(p)} \}$ converge fortement vers X^* point fixe de F.

Remarque 2 : On envisage à présent l'introduction d'un paramètre de relaxation ω dans les algorithmes (11) ; on considère donc une application F_ω, de domaine $D(F)$, définie par :

$$F_\omega(X) = (1 - \omega) X + \omega F(X) .$$

On sait alors [25] que F_ω admet X^* pour point fixe et, que si, de plus :

$$\omega \in \left]0, \frac{2}{1 + \rho(\mathfrak{J})}\right[\tag{14}$$

alors, F_ω est contractante en norme vectorielle, la matrice de contraction étant :

$$\mathfrak{J}_\omega = | 1 - \omega | \mathfrak{I} + \omega \mathfrak{J} . \tag{15}$$

De plus, sous les hypothèses (4), (12) et (13), on a pour la suite $\{ X^{(p)} \}$ l'estimation suivante de la *vitesse asymptotique de convergence* ([25]) :

$$\lim_{p \to \infty} \sup | X^{(p)} - X^* |^{\frac{1}{p}} \leqslant \rho(\mathfrak{J}) .$$

1.2. Un résultat de convergence en norme scalaire

Soit $\rho(\mathfrak{J})$ le rayon spectral de la matrice $\mathfrak{J}$; grâce au théorème de Perron-Frobenius on sait que :

$$(16) \quad \begin{cases} \forall \nu \in [\rho(\mathfrak{J}), 1[, \text{ il existe un vecteur } \Gamma^\nu \text{ de } \mathbb{R}^\beta \text{ tel que :} \\ \quad \mathfrak{J}\Gamma^\nu \leqslant \nu\Gamma^\nu \\ \text{et} \\ \quad \Gamma^\nu > 0 \text{ (composante à composante)} . \end{cases}$$

Soit γ_l^ν la l-ième composante du vecteur Γ^ν ; on peut alors définir la norme suivante sur $E = \prod_{l=1}^{\beta} E_l$ [25] :

$$(17) \qquad \| X \|_{\nu,\mathfrak{J}} = \operatorname*{Max}_{l \in \{1,\dots,\beta\}} \frac{| x_l |_l}{\gamma_l^\nu}$$

et on a alors le résultat suivant de contraction en norme $\| \quad \|_{\nu,\mathfrak{J}}$ [25] :

PROPOSITION 2 : *Soit F une application de $D(F) \subset E$, à valeurs dans $D(F)$. Soit $\mathfrak{J}$ une matrice de type $\{ \beta, \beta \}$ non négative de rayon spectral strictement inférieur à* 1, *et F vérifiant une propriété de contraction en norme vectorielle du type* (13).

Alors, pour tout X^*, $W \in D(F)$, on a :

$$(18) \qquad \| F(X^*) - F(W) \|_{\nu,\mathfrak{J}} \leqslant \nu \| X^* - W \|_{\nu,\mathfrak{J}} .$$

On peut alors énoncer un résultat de convergence suivant établi par M. N. El Tarazi [16] .

PROPOSITION 3 : *Sous les hypothèses* (4), (12) *et* (18), *la suite* $\{ X^{(p)} \}$ *définie par* (11) *converge fortement vers X^* point fixe de F.*

2. NOTION D'OPÉRATEURS *H*-ACCRÉTIFS

2.1. Définition et caractérisation

On considère le problème de la forme :

$$(19) \qquad \Lambda^d(X) + \Lambda(X) \ni 0 , \qquad X \in E$$

où :

$$\Lambda : D(\Lambda) \subset E \to E$$

est une application univoque, et Λ^d est une multi-application diagonale dont on précisera les propriétés ultérieurement. Pour tout $l \in \{ 1, ..., \beta \}$, soit $D_l \subset E_l$. On pose alors :

$$D(\Lambda) = \prod_{l=1}^{\beta} D_l$$

et on décompose alors l'application $\Lambda(X)$ comme suit :

$$\Lambda(X) = \{ \Lambda_1(X), ..., \Lambda_l(X), ..., \Lambda_\beta(X) \} .$$

Pour tout $W \in D(\Lambda)$, pour tout k, $l \in \{ 1, ..., \beta \}$, soit Λ_{lk}^W l'application de D_k dans E_l définie par :

$$x_k \in D_k \to \Lambda_{lk}^W(x_k) = \Lambda_l(w_1, ..., w_{k-1}, x_k, w_{k+1}, ..., w_\beta) .$$

Remarque 3 : Dans l'optique d'une décomposition du système (19) par blocs, si $k = l$, l'application $\Lambda_{ll}^W(x_l)$ représente l'analogue du l-ième bloc diagonal de l'opérateur $\Lambda(X)$, et lorsque $k \neq l$, l'application $\Lambda_{lk}^W(x_k)$ fait référence à l'interaction entre le l-ième et le k-ième bloc.

Pour tout $l \in \{ 1, ..., \beta \}$, soit E_l^*, muni de la norme $| \ |_l^*$, le dual de E_l. Par application du théorème de Hahn-Banach on peut considérer la multi-application G_l définie comme suit :

$$\forall x_l \in E_l \to G_l(x_l) \subset E_l^*$$

telle que :

$$\exists g_l \in G_l(x_l) , \quad \langle x_l, \ g_l \rangle = | x_l |_l^2 \quad \text{et} \quad | x_l |_l = | g_l |_l^*$$

où $\langle \ , \ \rangle_l$ désigne le produit de dualité entre E_l et E_l^*.

On considère à présent l'hypothèse :

$$(20) \begin{cases} \text{il existe une } Z\text{-matrice } N, \text{ de coefficients } n_{lk}, (n_{ll} > 0 \text{ et } n_{lk} \leqslant 0 \text{ si } k \neq l) \\ \text{de type } \beta \times \beta \text{ telle que : } \forall l \in \{ 1, ..., \beta \}, \forall X, X' \in D(\Lambda), \exists g_l \in G_l(x_l - x_l') \\ \text{vérifiant :} \\ \qquad \langle \Lambda_l(X) - \Lambda_l(X'), g_l \rangle_l \geqslant \sum_{k=1}^{\beta} n_{lk} | x_l - x_l' |_l . | x_k - x_k' |_k . \end{cases}$$

DÉFINITION 4 : *L'hypothèse* (20) *étant vérifiée, on dira que la matrice N correspondante est* :

i) *une* minorante Z-accrétive *de* Λ ;
ii) *une* minorante M-accrétive *de* Λ *si la Z-matrice N est une M-matrice.*

On considère les hypothèses supplémentaires suivantes, qui, dans les applications envisagées ultérieurement, seront vérifiées :

(21) $\forall l \in \{1, \ldots, \beta\}$, D_l est quasi-dense au sens de Kato [20].

(22) $\forall l \in \{1, \ldots, \beta\}$, $\forall W \in D(\Lambda)$, l'application Λ_{ll}^W est hémi-continue sur D_l.

Remarque 4 : L'hypothèse (21) traduit, en fait, que D_l est un ouvert dense dans E_l ; l'ensemble des hypothèses (21) et (22) correspondent à des propriétés de régularité, d'une part, du domaine $D(\Lambda)$, et d'autre part, de l'opérateur Λ.

PROPOSITION 4 : *Les hypothèses* (21) *et* (22) *étant vérifiées, alors la condition* (20) *est équivalente à l'ensemble des conditions :*

$$(23) \quad \begin{cases} \forall l \in \{1, \ldots, \beta\}, \quad \forall W \in D(\Lambda), \quad \forall x_l, x_l' \in D_l, \quad \exists g_l \in G_l(x_l - x_l') \\ \langle \Lambda_{ll}^W(x_l) - \Lambda_{ll}^W(x_l'), g_l \rangle_l \geqslant n_{ll} \mid x_l - x_l' \mid_l^2 . \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} \forall W \in D(\Lambda), \quad \forall l, k \in \{1, \ldots, \beta\}, \quad \textit{tels que} \quad k \neq l, \quad \forall x_k, x_k' \in D_k \\ \mid \Lambda_{lk}^W(x_k) - \Lambda_{lk}^W(x_k') \mid_l \leqslant - n_{lk} \mid x_k - x_k' \mid_k . \end{cases}$$

Remarque 5 : Les conditions (23) et (24) traduisent, respectivement, une condition d'accrétivité forte pour le l-ième sous-problème diagonal et une condition de Lipschitz pour les termes de couplage entre les blocs l et k.

Démonstration :

1) On suppose que la condition (20) est vérifiée.

Considérons X et X' éléments de $D(\Lambda)$; supposons de plus que X et X' ont mêmes composantes que nous notons w_k pour $k \in \{1, \ldots, \beta\}$ et $k \neq l$ et soit respectivement x_l et x_l' les l-ièmes composantes de X et X'. Soit $g_l \in G_l(x_l - x_l')$; compte tenu du choix particulier de X et X', on a, à cause de (20) :

$$\langle \Lambda_l(X) - \Lambda_l(X'), g_l \rangle_l = \langle \Lambda_{ll}^W(x_l) - \Lambda_{ll}^W(x_l'), g_l \rangle_l \geqslant \eta_{ll} \mid x_l - x_l' \mid_l^2 .$$

Donc on retrouve (23).

Soit $k, l \in \{1, \ldots, \beta\}$ tels que $k \neq l$, et $W \in D(\Lambda)$. Soit $X, X' \in D(\Lambda)$; comme précédemment, on suppose que, excepté les k-ièmes composantes x_k et x_k', X et X' ont des composantes identiques que l'on note toujours par w_l, $l \neq k$.

Puisque $w_l \in D_l$, D_l étant une partie quasi dense au sens de Kato de E_l, alors on sait qu'il existe un sous-ensemble $\mathcal{M}_{w_l}$ de E_l, dense dans E_l et que pour tout $h_l \in \mathcal{M}_{w_l}$ et ε assez petit, $w_l + \varepsilon h_l \in D_l$. Soit, donc $h_l \in \mathcal{M}_{w_l}$ et :

$$X^\varepsilon = \{ x_1^\varepsilon, \ldots, x_l^\varepsilon, \ldots, x_\beta^\varepsilon \}$$

avec :

$$x_r^\varepsilon = \begin{cases} w_r & \text{si} \quad r \neq l \quad \text{et} \quad r \neq k \\ w_l + \varepsilon h_l & \text{si} \quad r = l\,, \quad \varepsilon > 0 \\ x_k & \text{si} \quad r = k\,. \end{cases}$$

Soit $g_l^\varepsilon \in G_l(x_l^\varepsilon - w_l)$; on a alors $g_l^\varepsilon \in G_l(\varepsilon h_l)$ et, à cause de l'homogénéité de l'application de dualité, $g_l^\varepsilon \in \varepsilon G_l(h_l)$. Si x_k, $x_k' \in D_k$, on peut former :

$$\langle \Lambda_l(X^\varepsilon) - \Lambda_l(X'), g_l^\varepsilon \rangle_l \geqslant n_{ll}\, \varepsilon^2 \, | h_l |_l^2 + \varepsilon n_{lk} \, | x_k - x_k' |_k . | h_l |_l$$

ou encore, compte tenu de la remarque précédente :

$$\langle \Lambda_l(X^\varepsilon) - \Lambda_l(X'), g_l \rangle_l \geqslant n_{ll}\, \varepsilon \, | h_l |_l^2 + n_{lk} \, | x_k - x_k' |_k . | h_l |_l \,.$$

Or :

$$\Lambda_l(X^\varepsilon) = \Lambda_{ll}^X(w_l + \varepsilon h_l)$$

qui, par l'hémi-continuité de Λ_{ll}^X, converge pour ε tendant vers zéro vers $\Lambda_{ll}^X(w_l) = \Lambda_{lk}^W(x_k)$, ce qui implique :

$$\langle \Lambda_{lk}^W(x_k) - \Lambda_{lk}^W(x_k'), g_l \rangle_l \geqslant n_{lk} \, | x_k - x_k' |_k . | h_l |_l \,. \tag{25}$$

On considère, à présent, le choix suivant :

$$\bar{h}_l = \Lambda_{lk}^W(x_k) - \Lambda_{lk}^W(x_k') \,.$$

Par hypothèse de quasi-densité de D_l, on peut trouver une suite $\{ h_l^{(p)} \} \subset \mathcal{M}_{w_l}$, convergeant fortement dans E_l vers $\bar{h}_l$, et une suite $\{ g_l^{(p)} \}$ telle que pour tout p, $g_l^{(p)} \in G_l(h_l^{(p)})$ et $g_l^{(p)}$ convergeant faiblement vers $\bar{g}_l \in G_l(\bar{h}_l)$ dans E_l^*. De plus, pour tout p, l'inégalité (25) étant vérifiée par $h_l^{(p)}$, $g_l^{(p)}$, on obtient donc :

$$\langle \Lambda_{lk}^W(x_k) - \Lambda_{lk}^W(x_k'), \bar{g}_l \rangle_l \geqslant n_{lk} \, | x_k - x_k' |_k . | \bar{h}_l |_l \,.$$

On change $\bar{h}_l$ en $-\bar{h}_l$; il vient :

$$| \langle \Lambda_{lk}^W(x_k) - \Lambda_{lk}^W(x_k'), \bar{g}_l \rangle_l | \leqslant - n_{lk} \, | x_k - x_k' |_k . | \bar{h}_l |_l \,,$$

ce qui, pour le choix particulier de $\bar{h}_l$, s'écrit encore :

$$|\bar{h}_l|_l^2 \leqslant -n_{lk}|x_k - x'_k|_k |\bar{h}_l|_l ;$$

compte tenu de la définition de $\bar{h}_l$, ci-dessus, on retrouve bien l'inégalité (24).

2) Réciproquement, on suppose vérifiées (23) et (24), pour $X, X' \in D(\Lambda)$, pour $l \in \{1, ..., \beta\}$. Soit $g_l \in G_l(x_l - x'_l)$. On peut écrire :

$$\langle \Lambda_l(X) - \Lambda_l(X'), g_l \rangle_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{\beta} [\langle \Lambda_l(x'_1, ..., x'_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_\beta) - \Lambda_l(x'_1, ..., x'_k, x_{k+1}, ..., x_\beta), g_l \rangle_l] .$$

On pose :

$$W^k = \{x'_1, ..., x'_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_\beta\} .$$

Alors :

$$\Lambda_l(x'_1, ..., x'_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_\beta) = \Lambda_{lk}^{W^k}(x_k)$$

$$\Lambda_l(x'_1, ..., x'_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, ..., x_\beta) = \Lambda_{lk}^{W^k}(x'_k)$$

donc :

$$\langle \Lambda_l(X) - \Lambda_l(X'), g_l \rangle_l = \sum_{k=1}^{\beta} \langle \Lambda_{lk}^{W^k}(x_k) - \Lambda_{lk}^{W^k}(x'_k), g_l \rangle_l$$

et en appliquant à chaque terme de la somme précédente, (24) si $k \neq l$ et (23) si $k = l$, on retrouve bien l'inégalité (20).

Remarque 6 : Dans le cas où E_l est $\mathscr{L}^1$ et E_l^* est $\mathscr{L}^\infty$, le raisonnement effectué dans la partie a — de la démonstration précédente peut être étendu en considérant la convergence faible — * [6] dans $\mathscr{L}^\infty$.

DÉFINITION 5 : *La condition* (20) *étant vérifiée, ainsi que les hypothèses* (21) *et* (22), *si N est une minorante M-accrétive de l'opérateur* Λ, *on dira que* Λ *est H-accrétif.*

Il reste à préciser les propriétés de l'opérateur Λ^d ; on suppose que, pour tout $l \in \{1, ..., \beta\}$, Λ^d est une multi-application diagonale, c'est-à-dire :

$$\Lambda^d(X) = \{\Lambda_1^d(x_1), ..., \Lambda_l^d(x_l), ..., \Lambda_\beta^d(x_\beta)\} \subset E$$

où Λ_l^d est, également, une multi-application de $D(\Lambda_l^d) \subset E_l$ dans E_l, vérifiant l'hypothèse de m-accrétivité [4] suivante :

$$(26) \quad \begin{cases} \forall x_l, x'_l \in D(\Lambda_l^d) , \quad \forall \eta_l \in \Lambda_l^d(x_l) , \quad \forall \eta'_l \in \Lambda_l^d(x'_l) \\ \exists g_l \in G_l(x_l - x'_l) \quad \text{tel que} \quad \langle \eta_l - \eta'_l, g_l \rangle_l \geqslant 0 . \end{cases}$$

2.2. Un résultat de contraction en norme vectorielle pour une décomposition en blocs du problème

Λ étant un opérateur H-accrétif, sous l'hypothèse (26), on considère le problème (19). On s'intéresse à la résolution de ce problème par des méthodes parallèles de relaxation asynchrones par blocs. Pour cela, on va considérer une décomposition du problème (19) en β sous-problèmes ; on conserve les hypothèses précédentes et on les complète par les suivantes :

$$(27) \quad \forall l \in \{1, \ldots, \beta\}, \quad \Lambda_l \text{ est défini sur } \mathcal{D}_l = \prod_{k=1}^{l-1} E_k \times D_l \times \prod_{k=l+1}^{\beta} E_k$$

$$(28) \quad \begin{cases} \text{Soit } \Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_\beta\} \in \mathbb{R}_+^\beta \text{ le cône des vecteurs de composantes} \\ \text{non négatives de } \mathbb{R}^\beta. \end{cases}$$

$$(29) \quad \begin{cases} \text{L'application } \mathfrak{J}_l \text{ étant l'identité dans } E_l, \text{ on suppose que,} \\ \forall W \in E, \quad \forall l \in \{1, \ldots, \beta\}, \text{ l'application :} \\ \qquad x_l \to \Lambda_l^d(x_l) + \Lambda_{ll}^W(x_l) - n_{ll}\,\mathfrak{J}_l \\ \text{est } m\text{-accrétive.} \end{cases}$$

Soit $W \in E$; on considère alors les problèmes :

$$(30) \quad \begin{cases} \forall l \in \{1, \ldots, \beta\}, \text{ trouver } x_l \in E_l \text{ tel que :} \\ 0 \in \Lambda_l^d(x_l) + \Lambda_{ll}^W(x_l) + \theta_l(x_l - w_l)\,. \end{cases}$$

Grâce aux hypothèses (27), (29), les problèmes (30) ont tous une solution qu'on pose :

$$X = \{x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_\beta\}$$

et on peut toujours associer au problème (30) l'application de point fixe :

$$x_l = F_{l,\theta_l}(W)$$

de telle sorte que :

$$X = \{\ldots, x_l, \ldots\} = \{\ldots, F_{l,\theta_l}(W), \ldots\} = F_\Theta(W)\,.$$

On considère de plus l'hypothèse supplémentaire :

$$(31) \quad \begin{cases} \text{les hypothèses (20), (21) et (22) étant vérifiées, on suppose que } \Lambda \\ \text{est un opérateur } H\text{-accrétif; donc } \forall l\,\{1, \ldots, \beta\}, \text{ la condition (20)} \\ \text{(ou ce qui est équivalent, les conditions (23) et (24)) sont vérifiées} \\ \text{par } \Lambda_l \text{ sur } \mathcal{D}_l \text{ défini en (27).} \end{cases}$$

Soit D la matrice diagonale de type $\{ \beta \times \beta \}$ de coefficients diagonaux $d_l = n_{ll}$; soit $\mathfrak{I}_\Theta$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux θ_l, $\forall l \in \{ 1, \dots, \beta \}$. Soit L (respectivement U) la matrice strictement triangulaire inférieure (respectivement supérieure) de coefficients :

$$L_{lk} = \begin{cases} - n_{lk} & \text{si} \quad k < l \\ 0 & \text{si} \quad k \geqslant l \end{cases} \quad \left(\text{respectivement } U_{lk} = \begin{cases} - n_{lk} & \text{si} \quad l < k \\ 0 & \text{si} \quad k \leqslant l \end{cases} \right)$$

et $\mathfrak{J}_\Theta = (D + \mathfrak{I}_\Theta)^{-1} (\mathfrak{I}_\Theta + L + U)$.

PROPOSITION 5 : *Les hypothèses* (27), (29) *et* (31) *étant vérifiées,* F_Θ *est bien définie sur E, de manière univoque, admet pour unique point fixe* X^*, *solution du problème* (19) *et de plus :*

$$\forall W \in E , \quad q(F_\Theta(X^*) - F_\Theta(W)) \leqslant \mathfrak{J}_\Theta \, q(X^* - W) \tag{32}$$

où :
$$\rho(\mathfrak{J}_\Theta) < 1 .$$

Démonstration : On indique brièvement une preuve de ce résultat, qui sera redémontré lors du prochain paragraphe dans un cadre plus général.

Soit W, $W' \in E$, $\eta_l(x_l) \in \Lambda_l^d(x_l)$ et $\eta_l(x_l') \in \Lambda_l^d(x_l')$; écrivons les problèmes (30), on obtient :

$$0 = \eta_l(x_l) + \Lambda_l(w_1, \dots, w_{l-1}, x_l, w_{l+1}, \dots, w_\beta) + \theta_l(x_l - w_l)$$
$$0 = \eta_l(x_l') + \Lambda_l(w_1', \dots, w_{l-1}', x_l', w_{l+1}', \dots, w_\beta') + \theta_l(x_l' - w_l') .$$

On soustrait membre à membre les deux égalités précédentes, et soit $g_l \in G_l(x_l - x_l')$ tel que l'hypothèse (26) soit vérifiée ; en multipliant par g_l, il vient, compte tenu de (20) et (26) :

$$\left[\sum_{k=1}^{l-1} n_{lk} \mid w_k - w_k' \mid_k + n_{ll} \mid x_l - x_l' \mid_l + \sum_{k=l+1}^{\beta} n_{lk} \mid w_k - w_k' \mid_k \right] . \mid x_l - x_l' \mid_l +$$
$$+ \theta_l \mid x_l - x_l' \mid_l^2 - \theta_l \mid w_l - w_l' \mid_l . \mid x_l - x_l' \mid_l \leqslant 0$$

d'où, pour $l \in \{ 1, \dots, \beta \}$, et compte tenu que $n_{lk} \leqslant 0$ pour $k \neq l$, on a :

$$(n_{ll} + \theta_l) \mid x_l - x_l' \mid_l \leqslant - \sum_{k=1}^{l-1} n_{lk} \mid w_k - w_k' \mid_k + \theta_l \mid w_l - w_l' \mid_l$$
$$- \sum_{k=l+1}^{\beta} n_{lk} \mid w_k - w_k' \mid_k$$

soit matriciellement :

$$(D + \mathfrak{J}_{\Theta})\, q(X - X') \leqslant (\mathfrak{J}_{\Theta} + L + U)\, q(W - W') .$$

Par hypothèse, N est une M-matrice, donc D est également une M-matrice, et :

$$N = (D + \mathfrak{J}_{\Theta}) - (L + U + \mathfrak{J}_{\Theta})$$

constituant un partitionnement régulier de N, on est assuré que (*cf.* [27]) :

$$\rho((D + \mathfrak{J}_{\Theta})^{-1} (L + U + \mathfrak{J}_{\Theta})) \leqslant 1$$

et $\mathfrak{F}_{\Theta}$ est bien une matrice de contraction pour la norme vectorielle q.

COROLLAIRE 1 : *On considère les algorithmes de relaxation asynchrones appliqués à l'approximation du point fixe X^* de l'application F_θ définie sur l'espace produit $E = \prod_{l=1}^{\beta} E_l$ à valeurs dans ce même espace.*

Sous les hypothèses de la proposition 5, il y a convergence vers X^* des itérés obtenus par ces méthodes, à partir d'un élément quelconque $X^{(0)} \in E$.

Démonstration : D'après la proposition 5, on sait que les itérés successifs vérifient l'inégalité (32) ; d'autre part, grâce au résultat rappelé à la proposition 1, on sait que si l'application F_θ est contractante pour la norme vectorielle q, alors la suite $X^{(p)}$ converge fortement dans E vers X^*.

2.3. Application à l'étude numérique d'un problème de diffusion non linéaire

Soit Ω un sous-ensemble borné, ouvert de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ et T un nombre réel positif. On considère le problème suivant :

$$(33) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ solution de :} \\ \dfrac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta\,(\exp(u(t, x))) = f(t, x), \text{ p.p. sur } [0, T] \times \Omega \\ u(t, x) = 0 \text{ p.p. sur } [0, T] \times \Gamma \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ p.p. sur } \Omega \end{cases}$$

où f et u_0 sont des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$; le changement d'inconnue :

$$v(t, x) = \exp(u(t, x)) - 1$$

conduit à un problème équivalent ; J. Robert a montré [32] que, sous des hypothèses convenables, ce dernier admet une solution unique ; pour la déterminer numériquement, on peut discrétiser implicitement en la variable temps ;

k étant le pas de temps, ceci nous conduit à étudier classiquement un problème stationnaire du type :

$$(34) \qquad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Log}(1 + \tilde{v}(x))}{k} - \Delta\tilde{v}(x) = g(x)\,, & \text{p.p. sur } \Omega \\ \tilde{v}(x) = 0\,, \quad \text{p.p. sur } \Gamma \end{cases}$$

où $\tilde{v}(x)$ est la restriction de $v(t, x)$ à chaque instant $t = jk$.

On peut discrétiser spatialement le problème précédent par différences finies classiques, et on obtient alors un système non linéaire du type

$$(35) \qquad \Lambda^d(X) + \overline{\Lambda}X - B = 0$$

où $\overline{\Lambda}$ est la matrice du potentiel, X et B des vecteurs de $E = \mathbb{R}^\nu$ (ν représentant le nombre de points de discrétisation définis dans Ω), Λ^d étant l'application :

$$\Lambda^d(x) = \left\{ \frac{1}{k}\operatorname{Log}(1 + \xi_1), \ldots, \frac{1}{k}\operatorname{Log}(1 + \xi_\nu) \right\}$$

ξ_j représentant les composantes du vecteur X.

Compte tenu de la structure de $\overline{\Lambda}$, on peut décomposer le système (35) en β blocs du type :

$$(36) \quad \frac{\operatorname{Log}(1 + x_l)}{k} + \overline{\Lambda}_{ll}\, x_l - (x_{l-1} + x_{l+1}) - b_l = 0\,, \qquad \forall l \in \{2, \ldots, \beta - 1\}$$

où x_l, $b_l \in E_l$, sous-espace de E.

Soit X^* la solution du système (35). Afin d'étudier la convergence des algorithmes de relaxation par blocs, on envisage plusieurs situations :

Situation n° 1 : Utilisation de la norme euclidienne $|\,.\,|_2$.

On considère les égalités (36) écrites pour une valeur quelconque de X ainsi que pour X^* ; on soustrait et on multiplie scalairement par $(x_l - x_l^*)$ élément de $G_l(x_l - x_l^*)$; il vient :

$$(37) \quad \langle \overline{\Lambda}_{ll}(x_l - x_l^*), x_l - x_l^* \rangle + \frac{1}{k}\langle \operatorname{Log}(1 + x_l) - \\ - \operatorname{Log}(1 + x_l^*), x_l - x_l^* \rangle = \sum_{\substack{k=l\pm 1 \\ k \neq l}} \langle x_k - x_k^*, x_l - x_l^* \rangle\,.$$

On peut minorer le membre de droite de cette égalité ; en effet, $\overline{\Lambda}_{ll}$ étant une matrice fortement définie positive, on a :

$$(38) \qquad \langle \overline{\Lambda}_{ll}(x_l - x_l^*), x_l - x_l^* \rangle \geqslant 2 \mid x_l - x_l^* \mid_2^2, \quad \forall l \in \{ 1, \dots, \beta \} ;$$

de plus, de par la monotonie de l'application logarithme, le second terme est positif. Enfin, en appliquant l'inégalité de Schwarz, on a la majoration suivante du second membre de (37) :

$$(39) \quad \sum_{k \neq l} \langle x_k - x_k^*, x_l - x_l^* \rangle \leqslant \sum_{k \neq l} -(-1) \mid x_k - x_k^* \mid_2 . \mid x_l - x_l^* \mid_2 .$$

On est donc dans les conditions d'applications de la proposition 4, et on a bien déterminé une minorante M-accrétive de coefficients :

$$\eta_{lk} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad l = k \\ -1 & \text{si} \quad k = l \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Situation n° 2 : Utilisation de la norme l_1.

On opère comme précédemment, à la seule différence qu'ici on multiplie scalairement par sign $(x_l - x_l^*)$. Or les matrices $\overline{\Lambda}_{ll}$ sont des matrices à coefficients diagonaux positifs et à dominance diagonale stricte, donc on obtient une inégalité du type (38) en norme l_1 [33] ; de plus la fonction logarithme étant croissante, elle est m-accrétive [33]. Enfin, on peut, comme précédemment, majorer le second membre de l'égalité (37) et déterminer une minorante m-accrétive de mêmes coefficients que précédemment.

Notons enfin que l'on peut également effectuer une analyse analogue en munissant chaque espace E_l de la norme du max [33]. Précisons que des essais numériques ont été effectués pour résoudre le problème précédent, qui montrent l'efficacité de l'utilisation des méthodes de relaxation [33].

2.4. Une condition suffisante de convergence des algorithmes de relaxation asynchrones associés à la décomposition en grands blocs du problème

On s'intéresse à la résolution du problème (19) par des algorithmes du type (11), mais pour un découpage en grands blocs du problème, ces derniers étant composés de blocs adjacents de la décomposition envisagée au paragraphe 2.2.

Pour cela, on considère les hypothèses suivantes :

(39) $\left\{\begin{array}{l}\text{Soit } \alpha \text{ un entier naturel tel que } \alpha \leqslant \beta, \text{ soit } \{ \beta_i \} \text{ pour } i \in \{ 1, ..., \alpha \} \\ \text{une famille d'entiers tels que :} \\ \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha} \beta_i = \beta \\ \text{et } \quad \forall i \in \{ 1, ..., \alpha \},\ \beta_i \neq 0 . \end{array}\right.$

(40) $\left\{\begin{array}{l}\text{Soit pour tout } i \in \{ 1, ..., \alpha \},\ \alpha_i = \displaystyle\prod_{j=1}^{i-1} \beta_j, \text{ avec la convention :} \\ \qquad \alpha_1 = 0 \\ \text{et} \\ \qquad \tilde{E}_i = \displaystyle\prod_{l=\alpha_i+1}^{\alpha_i+1} E_l . \end{array}\right.$

On a évidemment $E = \prod_{i=1}^{\alpha} \tilde{E}_i$.

Pour tout $W \in E$, on note :

$$W = \{ \tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_i, ..., \tilde{w}_\alpha \} \in \prod_{i=1}^{\alpha} \tilde{E}_i$$

et $\tilde{q}(W)$ est la norme vectorielle canonique définie sur E comme suit :

$$\tilde{q}(W) = \{ | \tilde{w}_1 |_1, ..., | \tilde{w}_i |_i, ..., | \tilde{w}_\alpha |_\alpha \}$$

où, pour $i \in \{ 1, ..., \alpha \}$, $| \cdot |_i$ note la norme définie sur $\tilde{E}_i$.

Λ étant l'application de $D(\Lambda) \subset E$ à valeurs dans E, précédemment définie, pour tout $W \in D(\Lambda)$, on note :

$$\Lambda(W) = \{ \tilde{\Lambda}_1(W), ..., \tilde{\Lambda}_i(W), ..., \tilde{\Lambda}_\alpha(W) \} \in \prod_{i=1}^{\alpha} \tilde{E}_i$$

et $\tilde{\Lambda}_{ij}^W$ l'application définie par :

$$\tilde{x}_j \in D(\tilde{\Lambda}_{ij}^W) = \prod_{l=\alpha_j+1}^{\alpha_{j+1}} D_l \to \tilde{\Lambda}_{ij}^W(\tilde{x}_j) \in \tilde{E}_i$$

où

$$\tilde{\Lambda}_{ij}^W(\tilde{x}_j) = \tilde{\Lambda}_i(\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_{j-1}, \tilde{x}_j, \tilde{w}_{j+1}, ..., \tilde{w}_\alpha) .$$

De la même façon pour $\Lambda^d(X)$, on envisage une nouvelle décomposition $\tilde{\Lambda}_i^d$ définie comme suit :

$$\forall \tilde{w}_i \in \prod_{l=\alpha_i+1}^{\alpha_{i+1}} D(\Lambda_l^d) \overset{\tilde{\Lambda}_i^d}{\to} \tilde{\Lambda}_i^d(\tilde{w}_i)$$

où :

$$\tilde{\Lambda}_i^d(\tilde{w}_i) = \{ \Lambda_{\alpha_i+1}^d(w_{\alpha_i+1}), \dots, \Lambda_l^d(w_l), \dots, \Lambda_{\alpha_{i+1}}^d(w_{\alpha_{i+1}}) \} .$$

Soit $\theta \in \{ \theta_1, \dots, \theta_\alpha \} \in \mathbb{R}_+^\alpha$, cône des vecteurs de composantes non négatives de $\mathbb{R}^\alpha$.

$$(41) \quad \begin{cases} \text{Pour } W \in E, \text{ on considère les problèmes :} \\ \forall i \in \{ 1, \dots, \alpha \}, \quad \text{trouver} \quad \tilde{x}_i \in \tilde{E}_i \quad \text{tel que :} \\ \tilde{\Lambda}_i^d(\tilde{x}_i) + \tilde{\Lambda}_{ii}^W(\tilde{x}_i) + \theta_i(\tilde{x}_i - \tilde{w}_i) \ni 0 . \end{cases}$$

Si les problèmes (41) ont tous une solution, alors on pose :

$$(42) \qquad X = \{ \dots, \tilde{x}_i, \dots \} = \{ \dots, F_{i,\theta_i}(W), \dots \} = F_\theta(W) .$$

On considère également l'hypothèse (31).

On partitionne la minorante M-accrétive N de l'opérateur Λ en blocs $\{ N_{ij} \}$ tels que pour tout $i, j \in \{ 1, \dots, \alpha \}$, N_{ij} ait pour coefficients n_{lk} pour

$$k \in \{ \alpha_j + 1, \dots, \alpha_{j+1} \} \qquad \text{et} \qquad l \in \{ \alpha_i + 1, \dots, \alpha_{i+1} \} .$$

Soit $\hat{D}$ la matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux N_{ii} ; soit $\mathfrak{J}_\theta$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux :

$$d_l^\theta = \theta_i \quad \text{pour tout} \quad i \in \{ 1, \dots, \alpha \} \quad \text{et} \quad l \in \{ \alpha_i + 1, \dots, \alpha_{i+1} \} .$$

Soit $\hat{L}$ (respectivement $\hat{U}$) la matrice strictement triangulaire inférieure (respectivement supérieure) par blocs, définie par :

$$\hat{L}_{ij} = \begin{cases} -N_{ij} & \text{si} \quad i > j \\ 0 & \text{si} \quad i \leqslant j \end{cases} \qquad \left(\text{resp. } \hat{U}_{ij} = \begin{cases} -N_{ij} & \text{si} \quad i < j \\ 0 & \text{si} \quad j \leqslant i \end{cases} \right)$$

et on pose :

$$(43) \qquad \hat{\mathfrak{J}}_\theta = (\hat{D} + \mathfrak{J}_\theta)^{-1} (\mathfrak{J}_\theta + \hat{L} + \hat{U}) .$$

PROPOSITION 6 : *Les hypothèses* (27), (29), (31) *et* (41) *étant vérifiées,* F_θ *est* *bien définie sur E de manière univoque, admet pour point fixe X^* solution du problème* (19), *et de plus, pour tout $W \in E$:*

$$\tilde{q}(F_\theta(W) - F_\theta(X^*)) \leqslant \hat{\mathfrak{J}}_\theta \, \tilde{q}(W - X^*)$$

où :

$$\rho(\hat{\mathfrak{J}}_\theta) < 1 .$$

Démonstration : On suppose, tout d'abord, que sous l'hypothèse (27), les problèmes (41) ont toujours une solution, ce qu'on vérifiera plus loin (*cf.* remarque 7). Soit W, $W' \in E$; on peut réécrire les problèmes (41) sous la forme : $\forall i \in \{ 1, ..., \alpha \}$

$$\tilde{\Lambda}_i^d(\tilde{x}_i) + \tilde{\Lambda}_i(\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_{i-1}, \tilde{x}_i, \tilde{w}_{i+1}, ..., \tilde{w}_\alpha) + \theta_i(\tilde{x}_i - \tilde{w}_i) \ni 0 ,$$

$$\tilde{\Lambda}_i^d(\tilde{x}'_i) + \tilde{\Lambda}_i(\tilde{w}'_1, ..., \tilde{w}'_{i-1}, \tilde{x}'_i, \tilde{w}'_{i+1}, ..., \tilde{w}'_\alpha) + \theta_i(\tilde{x}'_i - \tilde{w}'_i) \ni 0 ,$$

où :

$$\tilde{x}_i = \{ ..., x_l, ... \} \quad \text{pour} \quad l \in \{ \alpha_i + 1, ..., \alpha_{i+1} \} ,$$

$$\tilde{x}'_i = \{ ..., x'_l, ... \} \quad \text{pour} \quad l \in \{ \alpha_i + 1, ..., \alpha_{i+1} \} .$$

Soit encore :

$$0 = \eta_l(x_l) + \Lambda_l(w_1, ..., w_{\alpha_i}, x_{\alpha_i+1}, ..., x_{\alpha_{i+1}}, w_{\alpha_{i+1}+1}, ..., w_\beta) + \theta_i(x_l - w_l)$$

avec

$$\eta_l(x_l) \in \Lambda_l^d(x_l) ;$$

$$0 = \eta_l(x'_l) + \Lambda_l(w'_1, ..., w'_{\alpha_i}, x'_{\alpha_i+1}, ..., x'_{\alpha_{i+1}}, w'_{\alpha_{i+1}+1}, ..., w'_\beta) + \theta_i(x'_l - w'_l)$$

avec

$$\eta_l(x'_l) \in \Lambda_l^d(x'_l) .$$

On soustrait membre à membre les deux égalités précédentes, et soit $g_l \in G_l(x_l - x'_l)$ tel que l'inégalité (26) soit vérifiée ; et on forme :

$$\langle \eta_l - \eta'_l, g_l \rangle_l + \langle \Lambda_l(w_1, ..., w_\beta) - \Lambda_l(w'_1, ..., w'_\beta), g_l \rangle_l + \\ + \theta_i \langle x_l - x'_l, g_l \rangle_l - \theta_i \langle w_l - w'_l, g_l \rangle_l = 0 .$$

D'où, compte tenu d'une part de (20), et d'autre part de (26), on a :

$$| x_l - x'_l |_l \cdot \left[\sum_{k=1}^{\alpha_i} n_{lk} \, | w_k - w'_k |_k + \sum_{k=\alpha_i+1}^{\alpha_{i+1}} n_{lk} \, | x_k - x'_k |_k + \right. \\ \left. + \sum_{k=\alpha_{i+1}+1}^{\beta} n_{lk} \, | w_k - w'_k |_k \right] + \theta_i \, | x_l - x'_l |_l^2 - \theta_i \, | w_l - w'_l |_l . | x_l - x'_l |_l \leqslant 0 ,$$

dont on déduit, compte tenu du fait que $n_{lk} \leqslant 0$ pour $k \neq l$

$$\sum_{k=\alpha_i+1}^{\alpha_{i+1}} n_{lk} \mid x_k - x'_k \mid_k + \theta_i \mid x_l - x'_l \mid_l \leqslant$$
$$\leqslant - \sum_{k=1}^{\alpha_i} n_{lk} \mid w_k - w'_k \mid_k + \theta_i \mid w_l - w'_l \mid_l - \sum_{k=\alpha_{i+1}+1}^{\beta} n_{lk} \mid w_k - w'_k \mid_k$$

pour tout $l \in \{ \alpha_i + 1, ..., \alpha_{i+1} \}$.

Ces inéquations se réécrivent sous forme matricielle :

$$(\hat{D} + \mathfrak{J}_\theta) \tilde{q}(X - X') \leqslant (\mathfrak{J}_\theta + \hat{L} + \hat{U}) \tilde{q}(W - W'). \tag{44}$$

Par un raisonnement identique à celui effectué dans la démonstration de la proposition 5, on vérifie que :

$$\rho((\hat{D} + \mathfrak{J}_\theta)^{-1} (\mathfrak{J}_\theta + \hat{L} + \hat{U})) < 1 ;$$

donc la relation (44) implique que :

$$\tilde{q}(X - X') \leqslant (\hat{D} + \mathfrak{J}_\theta)^{-1} (\mathfrak{J}_\theta + \hat{L} + \hat{U}) \tilde{q}(W - W').$$

Remarque 7 : On vérifie que les hypothèses faites précédemment sont valables.

a) On considère tout d'abord le cas $\alpha = \beta$ et $\beta_j = 1$, pour tout j. Dans ce cas particulier, grâce à l'hypothèse (27), l'hypothèse ci-dessus est bien vérifiée.

Soit D, L, U et $\mathfrak{J}_\Theta$ les matrices définies au paragraphe 2.2 et telles que :

$$N = D - L - U.$$

Alors (44) se réécrit :

$$q(X - X') \leqslant (D + I_\Theta)^{-1} (L + U + \mathfrak{J}_\Theta) q(W - W')$$

avec

$$\rho((D + \mathfrak{J}_\Theta)^{-1} (L + U + \mathfrak{J}_\Theta)) \leqslant 1.$$

Donc, dans ce cas particulier où $\alpha = \beta$, on constate que F_Θ est bien définie, et est contractante en norme vectorielle, donc contractante pour la norme scalaire $\| \cdot \|_{v,\mathfrak{J}_\Theta}$, ce qui implique l'existence d'un point unique X^*. On vérifie, alors, aisément, que tout point fixe de F_Θ est solution du problème (19) et réciproquement.

b) On revient au cas général où $\alpha \neq \beta$. Chacun des problèmes (41) est un problème de la forme (19) pour l'opérateur $\tilde{\Lambda}_{ij}^W$ qui est lui-même H-accrétif, la minorante M-accrétive associée étant le bloc diagonal N_{ii}. Par conséquent, les problèmes (41) ont tous une solution et l'hypothèse faite plus haut est vérifiée; de plus, tout point fixe de F_θ est solution du problème (19), et réciproquement. Donc en choisissant $W' = X^*$, point fixe de F_θ, dans (44) on obtient bien :

$$\tilde{q}(F_\theta(W) - F_\theta(X^*)) \leqslant \hat{\mathfrak{J}}_\theta\, \tilde{q}(W - X^*)$$

où $\hat{\mathfrak{J}}_\theta$ est définie par (43).

COROLLAIRE 2 : *On considère les algorithmes de relaxation asynchrones appliqués à l'approximation du point fixe X^* de l'application F_θ définie sur l'espace produit $E = \prod_{i=1}^{\alpha} \tilde{E}_i$ à valeurs dans ce même espace.*

Sous les hypothèses de la proposition 6, il y a convergence vers X^* des itérés obtenus par ces méthodes, à partir d'un élément quelconque $X^{(0)} \in E$.

La démonstration de ce résultat est identique à celle du corollaire 1.

2.5. Application à l'étude numérique d'un problème de croissance cristalline

L'une des techniques utilisée pour la fabrication des cristaux est la méthode Czochralski; ce problème a été étudié et modélisé par P. Witomski [34] par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$(45)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{Pour} \quad i \in \{1, 2\} \\ \left\{\begin{array}{l} -\Delta u_i = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_i \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial n} + \varphi_i(u_i)\,|_{\Gamma_i} = 0 \\ u_i\,|_\Gamma = T_f \end{array}\right. \\ \text{et de plus pour} \quad i = 1 \\ u_1\,|_\gamma = T_f \end{array}\right.$$

où Ω_1 (resp. Ω_2) désigne le bain en fusion (resp. cristal),

Γ_1 (resp. Γ_2) la frontière du creuset contenant le bain (resp. la paroi du cristal), γ la surface libre du bain,

Γ l'interface liquide solide,

u_1 (resp. u_2) est la température absolue du bain (resp. cristal),

T_c est la température absolue des parois du creuset et T_f la température de fusion.

φ_1 et φ_2 sont des fonctions croissantes ayant même expression analytique :

$$\varphi_i = \frac{1}{\lambda_i}\left[\theta(u_i + T_f - u_a)^{1,25} + \mu(u_i + T_f)^4 - \eta\right], \qquad i = 1, 2,$$

λ_1 (resp. λ_2) représentant la conductivité thermique dans le bain (resp. cristal), u_a est la température ambiante, θ, μ et η sont des constantes physiques positives.

La discrétisation des problèmes (45) par éléments finis de type P_1, conduit à la résolution de deux systèmes non linéaires du type :

$$\overline{\Lambda}_i X_i + \Lambda_i^d(X_i) = B_i, \quad \text{pour} \quad i = \{1, 2\}, \tag{46}$$

où les matrices Λ_i sont à diagonale positive, faiblement dominante, les termes hors-diagonaux étant négatifs, et de plus sont des M-matrices [27] et les applications Λ_i^d rendant compte des non-linéarités sur les frontières Γ_i.

Afin de résoudre les systèmes (46) par des algorithmes parallèles de relaxation, on effectue une analyse distincte pour le premier et le second système d'équations du type (46) précédent. En ce qui concerne le premier système décrivant la température du bain, les techniques mises en œuvre au paragraphe 2.3 peuvent être réutilisées sans difficulté majeure et permettent d'ailleurs, dans le cas d'un maillage de Ω_1 par des points équidistants, de déterminer une minorante M-accrétive triple-diagonale, de coefficients diagonaux égaux à 2 et de coefficients co-diagonaux égaux à -1. Par ailleurs, compte tenu de la forme du domaine Ω_2 intervenant dans l'application envisagée, il n'est pas possible, pour la décomposition par blocs, de mettre en évidence une minorante M-accrétive ; on peut simplement calculer une minorante Z-accrétive [33] ; par contre, si on envisage la décomposition par points du système discrétisé, alors la matrice $\overline{\Lambda}_2$ est une minorante M-accrétive de l'opérateur associé à cette décomposition ; les applications φ_i étant croissantes, donc accrétives, on se trouve donc dans un contexte d'application du résultat de la proposition 6 ainsi que du corollaire 2.

Remarque 9 : Cette étude illustre bien le résultat de la proposition 6 qui, en clair, signifie que si la condition de H-accrétivité est vérifiée pour une décomposition donnée, ce qui constitue une condition suffisante de convergence des algorithmes de relaxation séquentiels et parallèles synchrones et asynchrones pour la décomposition en blocs correspondante, alors on est assuré de la convergence des algorithmes de relaxation pour n'importe quelle décomposition plus grossière du système à résoudre. Dans les applications pratiques [33] et afin d'envisager des décompositions en grands blocs qui correspondent aux méthodes de relaxation par sous-domaines, on vérifie l'hypothèse (31) soit pour la décomposition par points, soit pour la décomposition naturelle par blocs.

2.6. Étude d'une classe de problèmes continus

Soit à résoudre le système elliptique semi-linéaire de la forme :

$$(47) \qquad \begin{cases} \Lambda_l \, u_l = f_l(u) , & \forall l \in \{ 1, \dots, \beta \} \\ u_{l|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où $\Lambda_l \, u_l = -\nu_l \, \Delta u_l + \theta_l \, u_l$ (avec $\nu_l, \beta_l > 0$).

L'opérateur $-\Delta$ étant $\mathscr{L}^\infty$-accrétif, et si l'on note $\langle , \rangle$ la dualité $\mathscr{L}^\infty$, $\mathscr{L}^1$ alors on a :

$$(48) \qquad \begin{cases} \forall u_l \in D(\Delta) = W^{2,\infty}(\Omega) \quad \text{t.q.} \quad u_{l|\partial\Omega} = 0, \exists g_l(u_l) \in \mathscr{L}^1(\Omega) \\ \text{t.q.} \quad \langle \, u_l, g_l \, \rangle = | \, u_l \, |_\infty \quad \text{et :} \\ \langle \, - \, \nu_l \, \Delta u_l + \theta_l \, u_l, g_l \, \rangle \geqslant \theta_l \, | \, u_l \, |_\infty \, . \end{cases}$$

Si

$$q(w) = \{ \dots, | \, w_l \, |_\infty, \dots \}$$

et si

$$f(w) = \{ \dots, f_l(w), \dots \}$$

on suppose de plus que :

$$(49) \qquad \begin{cases} \exists c \in \mathbb{R}_+^\beta \quad \text{t.q.} \quad \forall u, v \text{ vérifiant } | \, u \, | < c \text{ et } | \, v \, | < c \quad \text{on ait :} \\ q(f(u) - f(v)) \leqslant A q(u - v) \, . \end{cases}$$

Soit alors $N = (n_{lk})$ la matrice de coefficients :

$$(50) \qquad n_{lk} = \begin{cases} - \, a_{lk} & \text{si} \quad l \neq k \\ \theta_l - a_{ll} & \text{si} \quad l = k \, . \end{cases}$$

Si N est une M-matrice alors l'opérateur :

$$v \to \Lambda v - f(v) = \{ \dots, \Lambda_l \, u_l - f_l(u), \dots \}$$

est H-accrétif pour la norme vectorielle q considérée.

Remarque 10 : Les conditions données ci-dessus se rencontrent tout particulièrement dans le cas de l'étude de problèmes paraboliques où l'on discrétise la variable temps par un schéma implicite, ce qui ramène à une suite de problèmes stationnaires du type (47), vérifiant aisément le type de conditions mentionnées précédemment. Par ailleurs, on peut envisager le même type de résultat non plus pour des conditions aux limites de Dirichlet mais pour d'autres conditions aux limites rencontrées classiquement dans les applications.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BAIOCCHI, V. COMMINCIOLI, L. GUERRI, G. VOLPI, *Free boundary value problems in the theory of fluid flow through media ; a numerical approach,* Calcolo X, pp. 1-86, 1973.

[2] V. BARBU, *Non linear semi-groups and differential equations in Banach spaces,* Noordhoff international publishing, 1976.

[3] G. M. BAUDET, *Asynchronous iterative methods for multiprocessors,* Journal of A.C.M., vol. 25, n° 2, pp. 226-244, 1978.

[4] Ph. BENILAN, *Équations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications,* Thèse de Doctorat ès Sciences, Orsay, 1972.

[5] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi variationnelles,* Dunod, 1982.

[6] J. CEA, *Optimisation, théorie et algorithmes,* Dunod, 1971.

[7] J. CEA, R. GLOWINSKI, *Sur des méthodes d'optimisation par relaxation,* R.A.I.R.O. R3, pp. 5-32, 1973.

[8] M. CHARNAY, *Itérations chaotiques sur un produit d'espaces métriques,* Thèse de 3e cycle, Lyon, 1975.

[9] D. CHAZAN, M. MIRANKER, *Chaotic relaxation, Linear algebra and its appl.*, vol. 2, pp. 199-222, 1969.

[10] P. COMTE, *Itérations chaotiques à retards. Étude de la convergence dans le cas d'un espace produit d'espaces vectoriellement normés,* C.R.A.S., série A, t. 281, pp. 863-866, 1975.

[11] P. COMTE, J. C. MIELLOU, P. SPITERI, *La notion de H-accrétivité, Applications,* C.R.A.S., série A, t. 283, pp. 655-658, 1976.

[12] Ph. CORTEY DUMONT, *Approximation numérique d'une inéquation variationnelle liée à des problèmes de gestion de stock,* R.A.I.R.O., vol. 14, pp. 335-346, 1980.

[13] R. W. COTTLE, G. H. GOLUB, R. S. SACHER, *On the solution of large structured linear complementary problems,* Applied Mathematics and Optimization, vol. 4, pp. 347-363, 1978.

[14] C. W. CRYER, *Successive over-relaxation methods for solving linear complementary problems arising from free boundary problems,* Proceedings of intensive seminary on free boundary problems, Pavie, Ed. Magenes, pp. 109-131, 1979.

[15] J. D. P. DONNELLY, *Periodic chaotic relaxation, Linear algebra and its appl.*, vol. 4, pp. 117-128, 1971.

[16] M. N. EL TARAZI, *Some convergence results for asynchronous algorithms,* Numerisch Mathematik, vol. 39, pp. 325-340, 1982.

[17] D. FEINGOLD, R. S. VARGA, *Block diagonally dominant matrices and generalization of the Gershgorin circle theorem,* Pac. J. of Math., vol. 12, n° 4, pp. 1241-1250, 1962.

[18] J. Ch. FIOROT, P. HUARD, *Composition et réunion d'algorithmes généraux,* Publication de l'Université de Lille, n° 43, 1975.

[19] R. GONZALEZ, E. ROFMAN, *On deterministic control problems : an approximation procedure for the optimal cost,* Rapport de recherche de l'INRIA, n° 151, 1982.

[20] I. KATO, *Demi-continuity, hemi-continuity and monotonicity,* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 70, pp. 548-550, 1964.

[21] N. X. LUONG, *Sur la méthode de sur-relaxation dans le cas des problèmes avec contrainte et un résultat de convergence asymptotique,* R.A.I.R.O.-R2, pp. 107-113, 1973.

[22] J. C. MIELLOU, *Opérateurs para-monotones,* Thèse de Doctorat ès Sciences, Grenoble, 1970.

[23] J. C. MIELLOU, *Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, sur-(sous-) relaxation par blocs appliquée à une classe de problèmes non linéaires,* C.R.A.S., série A, t. 273, pp. 1257-1260, 1971.

[24] J. C. MIELLOU, *Sur une variante de la méthode de relaxation appliquée à des problèmes comportant un opérateur somme d'un opérateur différentiable et d'un opérateur monotone maximal diagonal,* C.R.A.S., série A, t. 275, pp. 1107-1110, 1972.

[25] J. C. MIELLOU, *Algorithmes de relaxation chaotique à retards,* R.A.I.R.O.-R1, pp. 55-82, 1975.

[26] J. C. MIELLOU, *A mixte relaxation algorithm applied to quasi variational inequations,* Colloque IFIP optimisation, Nice, Math. Lect. Notes, Springer Verlag, 1975.

[27] J. M. ORTEGA, W. C. RHEINBOLDT, *Iterative solution of non linear equations in several variables,* Academic Press, 1970.

[28] A. OSTROWSKI, *Iterative solution of linear systems of functional equations,* Journal Math. Anal. and Appl., vol. 2, pp. 351-369, 1961.

[29] F. ROBERT, *Étude et utilisation de normes vectorielles en analyse numérique linéaire,* Thèse de Doctorat ès Sciences, Grenoble, 1968.

[30] F. ROBERT, *Convergence locale d'itération chaotique non linéaire,* C.R.A.S., série A, t. 284, pp. 679-682, 1977.

[31] F. ROBERT, M. CHARNAY, F. MUSY, *Itérations chaotiques série parallèle pour des équations non linéaires de point fixe,* Aplikace Mathematiky, vol. 20, pp. 1-38, 1975.

[32] J. ROBERT, *Étude d'un problème de diffusion fortement non linéaire,* Exposé au séminaire d'analyse non linéaire de l'Université de Besançon, 1977.

[33] P. SPITERI, *Contribution à l'étude de grands systèmes non linéaires, comportement d'algorithmes itératifs, stabilité de systèmes continus,* Thèse de Doctorat ès Sciences, Besançon, 1984.

[34] P. WITOMSKI, *Modélisation et étude numérique d'une expérience de croissance cristalline,* Thèse de 3e cycle, Grenoble, 1977.