

C. CARASSO

M. RASCLE

D. SERRE

**Étude d'un modèle hyperbolique en  
dynamique des câbles**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 19, n° 4 (1985), p. 573-599

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1985\\_\\_19\\_4\\_573\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_4_573_0)

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



## ÉTUDE D'UN MODÈLE HYPERBOLIQUE EN DYNAMIQUE DES CÂBLES (\*)

par C. CARASSO, M. RASCLE, D. SERRE <sup>(1)</sup>

Communicated by R. TEMAM

---

*Résumé.* — On considère un modèle de câble dont on néglige la raideur ; on montre que le câble reste en tension ce qui entraîne que les équations demeurent de nature hyperbolique. On résout le problème de Riemann associé à partir de différentes lois d'élasticité non linéaire.

*Abstract.* — We consider a model of vibrating cable whose stiffness is neglected. We study the Riemann Problem for some non linear elasticity laws and we show that, if the cable is initially in extension in all point, it remains extended, which implies that the equations remain hyperbolic.

### INTRODUCTION

On considère un câble pesant, soumis à une force de traction longitudinale, pouvant avoir des oscillations de grande amplitude. Dans une première partie, nous établissons les équations du modèle considéré. Ces équations rejoignent le modèle étudié par B. Keyfitz et H. Kranzer [2]. Nous supposons que la loi d'élasticité qui relie la tension à l'allongement relatif est non linéaire, elle sera soit convexe, soit concave suivant la nature du matériau composant le câble. On montrera de plus que si à l'instant initial le câble est en extension, il le restera constamment. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Riemann (essentiel pour les procédés numériques de construction de la solution). On montre enfin que le problème hyperbolique à 4 inconnues peut se ramener à un système hyperbolique à 2 inconnues qui apparaît dans d'autres problèmes (B. Temple [4] par exemple).

### I. MISE EN ÉQUATIONS

On considère un câble sur lequel on a défini une origine  $O$ . Dans un état de référence donné, on repère chaque point du câble par son abscisse curviligne

---

(\*) Reçu en décembre 1984.

(<sup>1</sup>) Université de Saint-Étienne.

dans la configuration de référence. Soit  $M$  un point du câble, à l'instant  $t$  les coordonnées de  $M$  sont  $w(x, t) = (w_1(x, t), w_2(x, t))$  dans un repère  $(\vec{i}, \vec{j})$  fixe ( $\vec{j}$  est supposé vertical); on suppose que le mouvement reste plan. On note  $\vec{T}(x, t)$  la tension au point  $M$  à l'instant  $t$ . L'équation du mouvement d'un élément  $MM'$  de longueur  $dx$  dans l'état de référence s'écrit :

$$\lambda dx w_{tt} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) - \lambda dx g\vec{j}$$

soit

$$\lambda w_{tt} = \vec{T}_x - \lambda g\vec{j}$$

où  $\lambda$  est la masse linéique du câble (supposée constante).

On suppose que  $\vec{T}(x, t)$  est constamment tangent au câble, on a donc la relation :

$$\vec{T}(x, t) = T(x, t) \frac{w_x}{\|w_x\|}.$$

L'équation du mouvement est donc (dans  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$\lambda w_{tt} = \left( T(x, t) \frac{w_x}{\|w_x\|} \right)_x - \lambda g\vec{j} \quad \text{avec } \vec{j} = (0,1) \quad (1)$$

où  $T(x, t)$  représente le module de la tension au point  $M$  de coordonnées  $w_1(x, t)$  et  $w_2(x, t)$ .

Si on note  $\Delta x$  la longueur de l'élément de câble  $MM'$  qui a la longueur  $dx$  dans l'état de référence, on a

$$\frac{\Delta x}{dx} = \|w_x\|.$$

La valeur de  $\|w_x\|$  augmente avec la tension  $T$  selon une loi :

$$T(x, t) = \mathfrak{C}(\|w_x\|).$$

Si la position de référence du câble correspond à une tension uniformément nulle (ce que l'on supposera dans la suite), la fonction  $\mathfrak{C}$  doit vérifier :

$$\mathfrak{C}(1) = 0.$$

S'il est évident que la loi d'élasticité  $\mathfrak{C}$  est une fonction croissante, elle peut être convexe ou concave (en particulier dans le cas d'un matériau plastique).

On supposera dans la suite que  $\lambda = 1$  et on note

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= w_1(x, t) \\ v_2(x, t) &= w_2(x, t) + \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Le système (1) s'écrit alors :

$$v_{tt} = \left( \mathfrak{C}(\|v_x\|) \frac{v_x}{\|v_x\|} \right)_x \tag{2}$$

avec

$$\|v_x\|^2 = \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 \quad \text{et} \quad v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t)).$$

On supposera dans la suite, pour l'étude de (2), que

*Hypothèses H*

$\mathfrak{C}(r)$  est définie pour  $r > 0$ , elle est strictement croissante,  $\mathfrak{C}'(r) \neq 0$  pour tout  $r$  et  $\mathfrak{C}(1) = 0$ .

*Remarque* : D'un point de vue physique, il est clair que le modèle (2) n'a de signification que si  $\|v_x\| \geq 1$ . On verra que cette condition est mathématiquement vérifiée : l'état de repos est l'état dans lequel le matériau occupe une longueur minimale.

**II. ÉTUDE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS**

On pose :

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, t) & u_2(x, t) &= \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, t) \\ u_3(x, t) &= \frac{\partial v_1}{\partial t}(x, t) & u_4(x, t) &= \frac{\partial v_2}{\partial t}(x, t) \end{aligned}$$

$\|v_x\| = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} = r$ ,  $r$  est donc fonction de  $u_1$  et  $u_2$ ;  $\Phi(r) = \frac{\mathfrak{C}(r)}{r}$ . Le système (2) s'écrit alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_3}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_4}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (\Phi(r) u_1) &= 0 \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (\Phi(r) u_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (S)$$

Soit en posant

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{bmatrix} -u_3 \\ -u_4 \\ -\Phi(r) u_1 \\ -\Phi(r) u_2 \end{bmatrix}.$$

(2) s'écrit :

$$u_t + F(u)_x = 0.$$

Si on note  $A(u)$  la matrice de la dérivée première de  $F$  et  $\lambda_i(u)$   $i = 1, \dots, 4$  ses valeurs propres. On a :

$$\begin{aligned} \lambda_1(u) &= -\sqrt{\mathfrak{C}'(r)} & \lambda_2(u) &= -\sqrt{\Phi(r)} \\ \lambda_3(u) &= \sqrt{\Phi(r)} & \lambda_4(u) &= \sqrt{\mathfrak{C}'(r)}. \end{aligned}$$

Les hypothèses faites sur  $\mathfrak{C}$  entraînent que les valeurs propres sont toutes réelles pour  $r \geq 1$ . Le problème est donc hyperbolique pour  $r \geq 1$ . Au voisinage de  $r = 1$  il est clair que l'ordre des valeurs propres est :

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \lambda_3(u) < \lambda_4(u)$$

mais si  $\mathfrak{C}$  est concave, cet ordre peut évoluer. Ainsi si  $\mathfrak{C}$  a la forme ci-dessous (fig. 1)

pour  $r < r^*$  on a  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ ,

pour  $r^* < r$  on a  $\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_4 < \lambda_3$ .

On dira que  $\mathfrak{C}$  est à croissance rapide si pour tout  $r > 1$  on a

$$\frac{\mathfrak{C}(r)}{r} = \Phi(r) < \mathfrak{C}'(r);$$

le problème est alors hyperbolique, les valeurs propres étant toujours réelles et distinctes

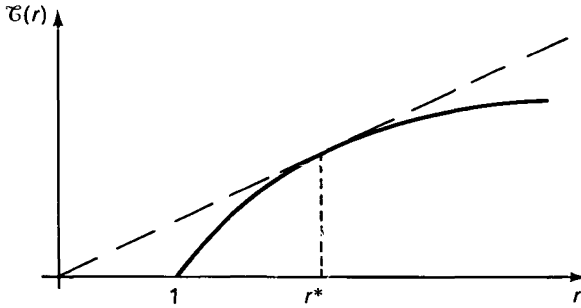


Figure 1.

III. CHAMPS CARACTÉRISTIQUES

On note  $r^i(u)$   $i = 1, \dots, 4$  les vecteurs propres à droite associés à chacune des valeurs propres  $\lambda_i(u)$ . On a

$$r^1(u) = (u_1, u_2, u_1\sqrt{\mathcal{T}(r)}, u_2\sqrt{\mathcal{T}'(r)}) \tag{3}$$

$$r^2(u) = (u_2, -u_1, u_2\sqrt{\Phi(r)}, -u_1\sqrt{\Phi(r)}) \tag{4}$$

$$r^3(u) = (u_2, -u_1, -u_2\sqrt{\Phi(r)}, u_1\sqrt{\Phi(r)}) \tag{5}$$

$$r^4(u) = (u_1, u_2, -u_1\sqrt{\mathcal{T}'(r)}, -u_2\sqrt{\mathcal{T}'(r)}) . \tag{6}$$

(5)

On a aussi :

$$r^1(u) \cdot \nabla \lambda_1(u) = -\frac{1}{2} r \mathcal{T}''(r) \cdot \mathcal{T}'(r)^{-1/2}$$

$$r^4(u) \cdot \nabla \lambda_4(u) = \frac{1}{2} r \mathcal{T}''(r) \cdot \mathcal{T}'(r)^{-1/2}$$

$$r^2(u) \cdot \nabla \lambda_2(u) = r^3(u) \cdot \nabla \lambda_3(u) \equiv 0 .$$

Ainsi les hypothèses (H) assurent (voir P. Lax [3]) que les champs 1 et 4 sont « vraiment non linéaires » et produiront des ondes de choc ou de détente alors que les champs 2 et 3 étant « linéairement dégénérés » produiront des discontinuités de contact.

Remarque : Si on considère à la place des variables  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  les variables  $(r, \theta, y, z)$  définies par :

$$u_1 + iu_2 = r e^{i\theta}$$

$$u_3 + iu_4 = (y + iz) e^{i\theta} .$$

Le système s'écrit en fonction de ces nouvelles variables :

$$\begin{aligned}\theta_t &= \frac{1}{r} y \theta_x + \frac{1}{r} z_x \\ z_t &= \left( \mathfrak{G}(r) - \frac{1}{r} y^2 \right) \theta_x - \frac{1}{r} y z_x \\ y_t &= \mathfrak{G}'(r) r_x + \frac{1}{r} z y \theta_x + \frac{1}{r} z z_x \\ r_t &= y_x - z \theta_x.\end{aligned}$$

On a donc en particulier

$$\begin{pmatrix} \theta \\ z \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} y & \frac{1}{r} \\ \mathfrak{G}(r) - \frac{1}{r} y^2 & -\frac{1}{r} y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ z \end{pmatrix}_x = M(r, y) \begin{pmatrix} \theta \\ z \end{pmatrix}_x$$

Les valeurs propres de  $M$  sont  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ , de sorte qu'au travers des (1) et (4) ondes de détente, on a  $\theta$  et  $z$  constants, ces ondes sont celles du système réduit :

$$\begin{aligned}r_t - y_z &= 0 \\ y_t - \mathfrak{G}(r)_x &= 0.\end{aligned}$$

#### IV. CONSTRUCTION DES ONDES SIMPLES LORSQUE $\mathfrak{G}$ EST A CROISSANCE RAPIDE

##### IV.1. Ondes de détente

Les ondes de détente sont solution des systèmes :

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = r^1(u(\xi)) \\ u(0) = u^g \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{du}{d\xi} = r^2(u(\xi)) \\ u(0) = u^d. \end{cases}$$

Pour la courbe de 1 détente, on a le système :

$$\dot{u}_1 = u_1, \quad \dot{u}_2 = u_2, \quad \dot{u}_3 = u_1 \sqrt{\mathfrak{G}'(r(\xi))}, \quad \dot{u}_4 = u_2 \sqrt{\mathfrak{G}'(r(\xi))}.$$

Si on prend  $r$  comme paramètre plutôt que  $\xi$ , les 2 premières relations donnent :

$$u_1(r) = r \cos \theta^g \quad u_2(r) = r \sin \theta^g$$

où  $\theta^g$  est défini par  $u_1^g = r^g \cos \theta^g$  et  $u_2^g = r^g \sin \theta^g$ .

La troisième relation s'écrit :

$$\dot{u}_3 = \dot{u}_1 \sqrt{\mathcal{C}'(r)}$$

soit

$$\frac{du_3}{du_1} = \sqrt{\mathcal{C}'(r)} \quad \text{mais} \quad \frac{du_1}{dr} = \cos \theta^g$$

d'où

$$\frac{du_3}{dr} = \cos \theta^g \sqrt{\mathcal{C}'(r)} \quad \text{soit} \quad u_3(r) = u_3^g + \cos \theta^g \int_{r^g}^r \sqrt{\mathcal{C}'(s)} ds.$$

De même de :

$$\dot{u}_4 = \dot{u}_2 \sqrt{\mathcal{C}'(r)}$$

on tire

$$u_4(r) = u_4^g + \sin \theta^g \int_{r^g}^r \sqrt{\mathcal{C}'(s)} ds.$$

Dans une 1-onde de détente, on doit avoir  $\lambda_1(u(r)) = -\sqrt{\mathcal{C}'(r)}$  qui doit croître de  $r^g$  à  $r$ , donc si  $\mathcal{C}''(r) > 0$ , on considérera la partie  $1 \leq r < r^g$  et si  $\mathcal{C}''(r) < 0$  la partie  $r^g < r$ .

On construirait de même la courbe de 4-onde de détente à gauche à partir de :

$$u^d = (r^d \cos \theta^d, r^d \sin \theta^d, u_3^d, u_4^d).$$

On a alors à résoudre

$$\dot{u}_1 = u_1 \quad \dot{u}_2 = u_2 \quad \dot{u}_3 = -\dot{u}_1 \sqrt{\mathcal{C}'(r)} \quad \dot{u}_4 = -\dot{u}_2 \sqrt{\mathcal{C}'(r)}.$$

On obtient donc en résumé :

*Courbe de 1-détente à droite à partir de*

$$u^g = (r^g \cos \theta^g, r^g \sin \theta^g, u_3^g, u_4^g)$$

$$u_1(r) = r \cos \theta^g$$

$$u_2(r) = r \sin \theta^g$$

$$u_3(r) = u_3^g - \cos \theta^g \int_r^{r^g} \sqrt{\mathcal{C}'(t)} dt$$

$$u_4(r) = u_4^g - \sin \theta^g \int_r^{r^g} \sqrt{\mathcal{C}'(t)} dt$$

avec  $1 \leq r < r^g$  si  $\mathcal{C}'' > 0$  et  $r^g < r$  si  $\mathcal{C}'' < 0$ .



*Courbe de 4-détente à gauche à partir de*

$$\begin{aligned} u^d &= (r^d \cos \theta^d, r^d \sin \theta^d, u_3^d, u_4^d) \\ u_1(r) &= r \cos \theta^d \\ u_2(r) &= r \sin \theta^d \\ u_3(r) &= u_3^d + \cos \theta^d \int_r^{r^d} \sqrt{\mathfrak{G}'(t)} dt \\ u_4(r) &= u_4^d + \sin \theta^d \int_r^{r^d} \sqrt{\mathfrak{G}'(t)} dt \end{aligned}$$

avec  $1 \leq r < r^d$  si  $\mathfrak{G}'' > 0$  et  $0 < r^d < r$  si  $\mathfrak{G}'' < 0$ .

Notons que  $\theta$  reste constant à travers une onde de détente de même que  $z$  défini dans la remarque du paragraphe 2 (ce sont des invariants de Riemann).

#### IV.2. Ondes de choc

Le système (S) s'écrit avec les variables  $(r, \theta, y, z)$  introduites dans la remarque du paragraphe 3 :

$$\begin{aligned} (r e^{i\theta})_t &= ((y + iz) e^{i\theta})_x \\ ((y + iz) e^{i\theta})_t &= (\mathfrak{G}(r) e^{i\theta})_x. \end{aligned}$$

L'état  $(r^d, \theta^d, y^d, z^d)$  à droite d'un choc de vitesse  $\sigma$  est relié à l'état à gauche  $(r^g, \theta^g, y^g, z^g)$  par la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{aligned} [(y + iz) e^{i\theta}] + \sigma [r e^{i\theta}] &= 0 \\ [\mathfrak{G}(r) e^{i\theta}] + \sigma [(y + iz) e^{i\theta}] &= 0 \end{aligned}$$

en notant  $[f(r, \theta, y, z)] = f(r^d, \theta^d, y^d, z^d) - f(r^g, \theta^g, y^g, z^g)$   
d'où

$$[(\mathfrak{G}(r) - \sigma^2 r) e^{i\theta}] = 0$$

ou

$$(\mathfrak{G}(r^g) - \sigma^2 r^g) e^{i\theta^g} = (\mathfrak{G}(r^d) - \sigma^2 r^d) e^{i\theta^d}$$

si  $\theta^g \notin \theta^d + \pi\mathbb{Z}$  on en déduit  $\mathfrak{G}(r^g) - \sigma^2 r^g = \mathfrak{G}(r^d) - \sigma^2 r^d = 0$  ( $\sigma$  est la vitesse de la discontinuité de contact) sinon

$$\theta^g = \theta^d + \pi, \mathfrak{G}(r^d) - \sigma^2 r^d = -(\mathfrak{G}(r^g) - \sigma^2 r^g) \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{\mathfrak{G}(r^d) + \mathfrak{G}(r^g)}{r^d + r^g}.$$

Ces derniers chocs ne sont pas admissibles car on n'a pas  $\lim_{r^d \rightarrow r^g} \sigma = -\sqrt{\mathcal{C}'(r^g)}$ , la courbe de choc ne relie pas l'état de gauche à celui de droite dans le plan des phases.

Si  $\theta^g = \theta^d$ ;  $[\mathcal{C}(r) - \sigma^2 r] = 0$  d'où  $\sigma = \pm \sqrt{\frac{\mathcal{C}(r^d) - \mathcal{C}(r^g)}{r^d - r^g}}$ ; dans ce cas, on tire de  $[(y + iz + \sigma r) e^{i\theta}] = 0$  (puisque  $\theta^g = \theta^d$ )  $[y + iz + \sigma r] = 0$  donc  $z^d = z^g$  et  $y^d - y^g = -\sigma(r^d - r^g)$ .

De  $r^g$  à  $r$ , on doit avoir  $\lambda_1(u(r)) = -\sqrt{\mathcal{C}'(r)}$  décroissante. On aura donc si  $\mathcal{C}'' > 0$ ,  $1 \leq r^g < r$  et si  $\mathcal{C}'' < 0$ ,  $1 \leq r < r^g$ .

De  $r$  à  $r^d$  on doit avoir  $\lambda_4(u(r)) = \sqrt{\mathcal{C}'(r)}$  décroissante, on aura donc si  $\mathcal{C}'' > 0$ ,  $1 \leq r < r^d$ , et si  $\mathcal{C}'' < 0$ ,  $1 \leq r^d < r$ .

En résumé, la courbe de 1-choc à droite à partir de

$$u^g = (r^g \cos \theta^g, r^g \sin \theta^g, u_3^g, u_4^g)$$

est

$$u_1(r) = r \cos \theta^g,$$

$$u_2(r) = r \sin \theta^g$$

$$u_3(r) = u_3^g - \sqrt{\frac{\mathcal{C}(r) - \mathcal{C}(r^g)}{r - r^g}} (r^g - r) \cos \theta^g$$

$$u_4(r) = u_4^g - \sqrt{\frac{\mathcal{C}(r) - \mathcal{C}(r^g)}{r - r^g}} (r^g - r) \sin \theta^g$$

avec  $0 < r^g < r$  si  $\mathcal{C}'' > 0$  et  $1 \leq r < r^g$  si  $\mathcal{C}'' < 0$ .

La courbe de 4-choc à gauche à partir de

$$u^d = (r^d \cos \theta^d, r^d \sin \theta^d, u_3^d, u_4^d)$$

s'écrit :

$$u_1(r) = r \cos \theta^d$$

$$u_2(r) = r \sin \theta^d$$

$$u_3(r) = u_3^d + \sqrt{\frac{\mathcal{C}(r^d) - \mathcal{C}(r)}{r^d - r}} (r^d - r) \cos \theta^d$$

$$u_4(r) = u_4^d + \sqrt{\frac{\mathcal{C}(r^d) - \mathcal{C}(r)}{r^d - r}} (r^d - r) \sin \theta^d$$

avec  $1 \leq r < r^d$  si  $\mathcal{C}'' > 0$  et  $0 < r^d < r$  si  $\mathcal{C}'' < 0$ .

On peut résumer les calculs précédents par les formules : courbe de 1-onde (choc ou détente) à partir de

$$u^g = (r^g \cos \theta^g, r^g \sin \theta^g, u_3^g, u_4^g)$$

$$u_1(r) = r \cos \theta^g \quad (7)$$

$$u_2(r) = r \sin \theta^g \quad (8)$$

$$u_3(r) = \begin{cases} u_3^g - \cos \theta^g \int_r^{r^g} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt & \text{si } \text{sgn}(r^g - r) = \text{sgn } \mathcal{G}'' \\ u_3^g - \cos \theta^g \cdot (r^g - r) \sqrt{\frac{\mathcal{G}(r) - \mathcal{G}(r^g)}{r - r^g}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

$$u_4(r) = \begin{cases} u_4^g - \sin \theta^g \int_r^{r^g} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt & \text{si } \text{sgn}(r^g - r) = \text{sgn } \mathcal{G}'' \\ u_4^g - \sin \theta^g (r^g - r) \sqrt{\frac{\mathcal{G}(r) - \mathcal{G}(r^g)}{r - r^g}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

courbe de 4-onde (choc ou détente) à partir de :

$$u^d = (r^d \cos \theta^d, r^d \sin \theta^d, u_3^d, u_4^d)$$

$$u_1(r) = r \cos \theta^d \quad (11)$$

$$u_2(r) = r \sin \theta^d \quad (12)$$

$$u_3(r) = \begin{cases} u_3^d + \cos \theta^d \int_r^{r^d} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt & \text{si } \text{sgn}(r^d - r) = \text{sgn } \mathcal{G}'' \\ u_3^d + \cos \theta^d \cdot (r^d - r) \sqrt{\frac{\mathcal{G}(r^d) - \mathcal{G}(r)}{r^d - r}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (13)$$

$$u_4(r) = \begin{cases} u_4^d + \sin \theta^d \int_r^{r^d} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt & \text{si } \text{sgn}(r^d - r) = \text{sgn } \mathcal{G}'' \\ u_4^d + \sin \theta^d \cdot (r^d - r) \sqrt{\frac{\mathcal{G}(r^d) - \mathcal{G}(r)}{r^d - r}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (14)$$

### IV.3. Ondes de discontinuité de contact

Elles correspondent aux champs 2 et 3 qui sont linéairement dégénérés. Elles s'obtiennent comme les courbes de choc avec une vitesse

$$\sigma_2(u^-, u) = \lambda_2(u^-) = -\sqrt{\Phi(r^-)} \quad \text{pour la 2 D.C.}$$

et

$$\sigma_3(u, u^+) = \lambda_3(u^+) = \sqrt{\Phi(r^+)} \quad \text{pour la vitesse de la 3 D.C.}$$

En résumé la 2-discontinuité de contact à droite de  $u^- = (r^- \cos \theta^-, r^- \sin \theta^-, u_3^-, u_4^-)$  est (en prenant  $\theta$  comme paramètre) :

$$u_1(\theta) = r^- \cos \theta \tag{15}$$

$$u_2(\theta) = r^- \sin \theta \tag{16}$$

$$u_3(\theta) = u_3^- + r^- \sqrt{\Phi(r^-)} (\cos \theta - \cos \theta^-) \tag{17}$$

$$u_4(\theta) = u_4^- + r^- \sqrt{\Phi(r^-)} (\sin \theta - \sin \theta^-) \tag{18}$$

La 3-discontinuité de contact à gauche de  $u^+ = (r^+ \cos \theta^+, r^+ \sin \theta^+, u_3^+, u_4^+)$  est (en prenant  $\theta$  comme paramètre) :

$$u_1(\theta) = r^+ \cos \theta \tag{19}$$

$$u_2(\theta) = r^+ \sin \theta \tag{20}$$

$$u_3(\theta) = u_3^+ + r^+ \sqrt{\Phi(r^+)} (\cos \theta^+ - \cos \theta) \tag{21}$$

$$u_4(\theta) = u_4^+ + r^+ \sqrt{\Phi(r^+)} (\sin \theta^+ - \sin \theta) \tag{22}$$

Notons que  $r$  est constant à travers une discontinuité de contact.

**V. RÉOLUTION DU PROBLÈME DE RIEMANN LORSQUE  $\mathfrak{C}$  EST A CROISSANCE RAPIDE**

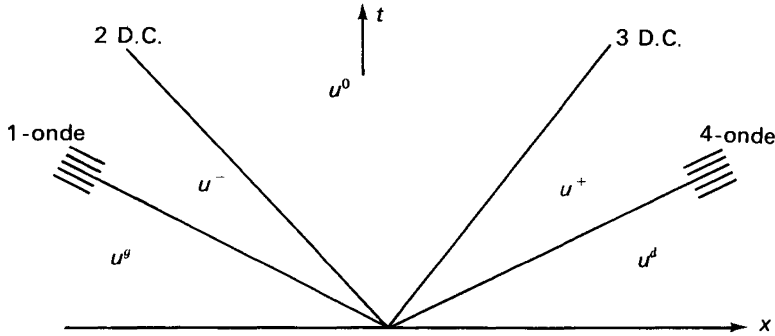
Le problème de Riemann consiste à résoudre le système (S) avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^\theta & \text{si } x < 0 \\ u^d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Lorsque  $\mathfrak{C}$  est à croissance rapide, on a vu que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ . Si on appelle onde non linéaire une onde qui est une détente ou un choc, la solution du problème de Riemann sera formée d'une suite d'états constants  $u^\theta, u^-, u^0, u^+, u^d \in \mathbb{R}^4$  tels que

$$u^\theta \xrightarrow{1 \text{ O.N.L.}} u^- \xrightarrow{2 \text{ D.C.}} u^0 \xrightarrow{3 \text{ D.C.}} u^+ \xrightarrow{4 \text{ O.N.L.}} u^d .$$

Le passage de  $u^\theta$  à  $u^-$  se fait par une 1-onde non linéaire (choc ou détente), celui de  $u^-$  à  $u^0$  par une 2-discontinuité de contact. On a le schéma suivant :



Rappelons que si  $r$  et  $\theta$  sont définis par  $u_1 = r \cos \theta$  et  $u_2 = r \sin \theta$  alors  $r$  reste constant à travers une discontinuité de contact et  $\theta$  reste constant à travers une onde non linéaire. On a donc :

$$\begin{aligned} r^- &= r^+ = r^0 \\ \theta^g &= \theta^- \quad \text{et} \quad \theta^d = \theta^+ . \end{aligned}$$

L'état  $u^0$  est atteint à partir de  $u^-$  à travers la 2 D.C. On a donc en tenant compte des relations précédentes :

$$u_3^0 = u_3^- + r^0 \sqrt{\Phi(r^0)} (\cos \theta^0 - \cos \theta^g) \quad (23)$$

$$u_4^0 = u_4^- + r^0 \sqrt{\Phi(r^0)} (\sin \theta^0 - \sin \theta^g) . \quad (24)$$

De même  $u^0$  est un état obtenu à gauche de  $u^+$  à travers la 3 D.C. On a donc :

$$u_3^0 = u_3^+ + r^0 \sqrt{\Phi(r^0)} (\cos \theta^d - \sin \theta^0) \quad (25)$$

$$u_4^0 = u_4^+ + r^0 \sqrt{\Phi(r^0)} (\sin \theta^d - \sin \theta^0) . \quad (26)$$

Les états  $u_3^-$ ,  $u_4^-$ ,  $u_3^+$  et  $u_4^+$  sont obtenus à partir de  $u^g$  et  $u^d$ .

Les relations précédentes conduisent à

$$2 t^0 \cos \theta^0 = u_3^+ - u_3^- + t^0 (\cos \theta^d + \cos \theta^g) \quad (27)$$

$$2 t^0 \sin \theta^0 = u_4^+ - u_4^- + t^0 (\sin \theta^d + \sin \theta^g) \quad (28)$$

avec

$$t^0 = r^0 \sqrt{\Phi(r^0)} = \sqrt{r^0 \mathcal{E}(r^0)} .$$

Si on élève au carré et si on somme, on obtient :

$$\begin{aligned} 4 t^{0^2} &= [u_3^+ - u_3^- + t^0 (\cos \theta^d + \cos \theta^g)]^2 + \\ &\quad + [u_4^+ - u_4^- + t^0 (\sin \theta^d + \sin \theta^g)]^2 \end{aligned}$$

Posons

$$J(r) = \frac{1}{2} [u_3^+(r) - u_3^-(r) + \sqrt{r\mathfrak{C}(r)} (\cos \theta^d + \cos \theta^g)]^2 + \frac{1}{2} [u_4^+(r) - u_4^-(r) + \sqrt{r\mathfrak{C}(r)} (\sin \theta^d + \sin \theta^g)]^2 - 2r\mathfrak{C}(r) \quad (29)$$

avec  $u_3^-(r), u_4^-(r)$  données par (9) et (10)

$u_3^+(r), u_4^+(r)$  données par (13) et (14)

$r^0$  est donc solution de  $J(r^0) = 0$ .

On a la proposition :

**PROPOSITION V.1 :** *On suppose que  $\mathfrak{C}$  est à croissance rapide  $\left(\frac{\mathfrak{C}(r)}{r} < \mathfrak{C}'(r)\right)$ .*

Le système (S) avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^g & \text{si } x < 0 \\ u^d & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\text{Problème de Riemann})$$

telle que  $(u_1^g)^2 + (u_2^g)^2 = (r^g)^2 \geq 1$  et  $(u_1^d)^2 + (u_2^d)^2 = (r^d)^2 \geq 1$  possède une solution unique vérifiant  $u_1^2(x, t) + u_2^2(x, t) \geq 1$  pour tout  $x$  et tout  $t \geq 0$ .

*Démonstration :* La solution du problème de Riemann est formée des états constants  $\bar{u}, u^0$  et  $u^+$ . L'état  $u^0$  est déterminé par  $u_1^0 = r^0 \cos \theta^0, u_2^0 = r^0 \sin \theta^0, u_3^0$  et  $u_4^0, r^0$  étant solution de  $J(r^0) = 0$ . En faisant le rapport des relations (27) et (28), on a  $\theta^0$  par la relation :

$$\text{tg } \theta^0 = \frac{u_4^+(r_0) - u_4^-(r_0) + \sqrt{r_0 \mathfrak{C}(r_0)} (\sin \theta^d + \sin \theta^g)}{u_3^+(r_0) - u_3^-(r_0) + \sqrt{r_0 \mathfrak{C}(r_0)} (\cos \theta^d + \cos \theta^g)}$$

Les valeurs de  $u_3^0$  et  $u_4^0$  sont alors déterminés par (23) et (24) (ou (25) et (26)). Les états de  $u^-$  et  $u^+$  sont donnés par les relations (7) à (14) avec  $r = r^0$ .

L'existence et l'unicité de la solution du problème de Riemann sera donc démontrée si l'équation  $J(r) = 0$  admet une solution unique  $r^0$ .

Puisque  $\mathfrak{C}(1) = 0$  d'après l'expression de  $J$ , on a  $J(1) > 0$ ; sauf si  $u_3^+(1) = u_3^-(1)$  et  $u_4^+(1) = u_4^-(1)$ , mais dans ce cas, on a une seule discontinuité de contact de vitesse  $\sqrt{\Phi(1)} = 0$ , qui permet de passer de  $u^-$  à  $u^+$  (l'état  $u^0$  disparaît).

Lorsque  $r \rightarrow +\infty$ , on a d'après (9), (10), (13) et (14)

$$u_3^-(r) \sim \begin{cases} \cos \theta^g \cdot \int_{r^g}^{+\infty} \sqrt{\mathcal{C}'(t)} dt & \text{si } \mathcal{C}'' < 0 \\ \cos \theta^g \cdot \sqrt{r\mathcal{C}(r)} & \text{si } \mathcal{C}'' > 0 \end{cases}$$

De même :

$$u_3^+(r) \sim \begin{cases} -\cos \theta^d \cdot \int_{r^d}^{+\infty} \sqrt{\mathcal{C}'(t)} dt & \text{si } \mathcal{C}'' < 0 \\ -\cos \theta^d \cdot \sqrt{r\mathcal{C}(r)} & \text{si } \mathcal{C}'' > 0 \end{cases}$$

$$u_4^-(r) \sim \begin{cases} \sin \theta^g \cdot \int_{r^g}^{+\infty} \sqrt{\mathcal{C}'(t)} dt & \text{si } \mathcal{C}'' < 0 \\ \sin \theta^g \cdot \sqrt{r\mathcal{C}(r)} & \text{si } \mathcal{C}'' > 0 \end{cases}$$

$$u_4^+(r) \sim \begin{cases} -\sin \theta^d \cdot \int_{r^d}^{+\infty} \sqrt{\mathcal{C}'(t)} dt & \text{si } \mathcal{C}'' < 0 \\ -\sin \theta^d \cdot \sqrt{r\mathcal{C}(r)} & \text{si } \mathcal{C}'' > 0 \end{cases}$$

d'où si  $\mathcal{C}'' < 0$

$$J(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \sqrt{r\mathcal{C}(r)} - \int_{r^d}^r \sqrt{\mathcal{C}'(t)} dt \right)^2 (1 + \cos(\theta^d - \theta^g)) - 2r\mathcal{C}(r)$$

Le membre de gauche est majoré par

$$\left( \sqrt{r\mathcal{C}(r)} - \int_{r^d}^r \sqrt{\mathcal{C}'(t)} dt \right)^2 - r\mathcal{C}(r) \leq -\sqrt{r\mathcal{C}(r)} \int_{r^d}^r \sqrt{\mathcal{C}'(t)} dt,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

d'où

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} J(r) = -\infty.$$

De même si  $\mathcal{C}'' > 0$

$$J(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -2r\mathcal{C}(r)$$

d'où

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} J(r) = -\infty.$$

La fonction  $J$  qui est continue et qui vérifie  $J(1) > 0$  et  $J(+\infty) = -\infty$  s'annule donc au moins une fois sur  $]1, +\infty[$ . On a donc existence d'une solution du problème de Riemann car il existe  $r^0$  tel que  $J(r^0) = 0$ .

Pour montrer l'unicité, montrons que si  $J(r^0) = 0$ , alors  $J'(r^0) < 0$ . Posons  $t(r) = \sqrt{r\mathfrak{C}(r)}$

$$q^d = \begin{pmatrix} \cos \theta^d \\ \sin \theta^d \end{pmatrix} \quad q^g = \begin{pmatrix} \cos \theta^g \\ \sin \theta^g \end{pmatrix} \quad \tilde{u}^+(r) = \begin{pmatrix} u_3^+(r) \\ u_4^+(r) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}^-(r) = \begin{pmatrix} u_3^-(r) \\ u_4^-(r) \end{pmatrix} \quad q^0(r) = \frac{1}{2} \left[ q^d + q^g + \frac{1}{t(r)} (\tilde{u}^+(r) - \tilde{u}^-(r)) \right].$$

On peut écrire  $J$  sous la forme :

$$J(r) = \frac{1}{2} \| t(r) (q^d + q^g) + \tilde{u}^+(r) - \tilde{u}^-(r) \|^2 - 2 t^2(r) \tag{30}$$

ou

$$J(r) = 2 t^2(\| q^0 \|^2 - 1)$$

d'où

$$J'(r) = 4 t(r) q^0 \cdot (t' q^0 + t q^{0'}) - 4 t t'.$$

Soit en explicitant  $q^{0'}$  :

$$J'(r) = 2 t(r) q^0(r) \cdot [\tilde{u}^{+'} - \tilde{u}^{-'} + t'(q^d + q^g)] - 4 t t'. \tag{31}$$

Les expressions de  $\tilde{u}^+$  et  $\tilde{u}^-$  tirées des formules (9), (10), (13) et (14) peuvent s'écrire :

$$\tilde{u}^-(r) = \begin{cases} \tilde{u}^g + \left( \int_{r^g}^r \sqrt{\mathfrak{C}'(t)} dt \right) q^g & \text{si } \text{sgn}(r^g - r) = \text{sgn } \mathfrak{C}'' \\ \tilde{u}^g + (r - r^g) \sqrt{\frac{\mathfrak{C}(r^g) - \mathfrak{C}(r)}{r^g - r}} \cdot q^g & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\tilde{u}^+(r) = \begin{cases} \tilde{u}^d - \left( \int_{r^d}^r \sqrt{\mathfrak{C}'(t)} dt \right) q^d & \text{si } \text{sgn}(r^d - r) = \text{sgn } \mathfrak{C}'' \\ \tilde{u}^d - (r - r^d) \sqrt{\frac{\mathfrak{C}(r^d) - \mathfrak{C}(r)}{r^d - r}} q^d & \text{sinon} \end{cases}$$



Puisqu'on a par hypothèse  $T' > 0$  (car  $\frac{\mathfrak{C}(r)}{r} < \mathfrak{C}'$ ) on a :

$$\begin{aligned}(\tilde{u}^-)'(r) &= k_1(r) q^g \quad \text{avec } k_1(r) > 0 \\(\tilde{u}^+)'(r) &= k_2(r) q^d \quad \text{avec } k_2(r) < 0.\end{aligned}$$

En reportant dans (31) on a :

$$\frac{J'(r)}{2t(r)} = q^0(r) \cdot [(t'(r) + k_2(r)) q^d + (t'(r) - k_1(r) q^g)] - 2t'(r).$$

En  $r^0$  tel que  $J(r^0) = 0$  on a  $\|q^0(r^0)\| = 1$  d'où

$$\frac{J'(r^0)}{2t(r^0)} \leq |t'(r^0) + k'(r^0)| + |t'(r^0) + h'(r^0)| - 2t'(r^0) = M(r^0)$$

avec

$$h'(r) = \begin{cases} -\sqrt{\mathfrak{C}'(r)} & \text{si } \text{sgn}(r^g - r) = \text{sgn } \mathfrak{C}'' \\ -(\sqrt{[\mathfrak{C}]^g [r]^g})' & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$k'(r) = \begin{cases} -\sqrt{\mathfrak{C}'(r)} & \text{si } \text{sgn}(r^d - r) = \text{sgn } \mathfrak{C}'' \\ -(\sqrt{[\mathfrak{C}]^d [r]^d})' & \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned}[r]^g &= r - r^g & [\mathfrak{C}]^g &= \mathfrak{C}(r) - \mathfrak{C}(r^g) \\ [r]^d &= r - r^d & [\mathfrak{C}]^d &= \mathfrak{C}(r) - \mathfrak{C}(r^d).\end{aligned}$$

Si on examine les différentes valeurs prises par  $M(r^0)$  suivant le signe de  $\mathfrak{C}''$  et celui de  $(r^g - r)$  et  $(r^d - r)$ , on vérifie aisément que  $M(r^0) < 0$  si :

- (i)  $\sqrt{\mathfrak{C}'(r)} < 2t'(r)$  pour tout  $r$
- (ii)  $(\sqrt{[\mathfrak{C}]^g [r]^g})' < 2t'(r)$  quand  $[r] = r - r_1 = \text{sgn } \mathfrak{C}''$  et  $[\mathfrak{C}] = \mathfrak{C}(r) - \mathfrak{C}(r_1)$ .

La première inégalité découle de

$$\begin{aligned}t(2t' - \sqrt{\mathfrak{C}'}) &= (t^2)' - \sqrt{r\mathfrak{C}\mathfrak{C}'} = (r\mathfrak{C})' - \sqrt{r\mathfrak{C}\mathfrak{C}'} \\ &= r\mathfrak{C}' + \mathfrak{C} - \sqrt{r\mathfrak{C}\mathfrak{C}'} > r\mathfrak{C}' + \mathfrak{C} - 2\sqrt{r\mathfrak{C}\mathfrak{C}'} \\ &= (\sqrt{r\mathfrak{C}'} - \sqrt{\mathfrak{C}})^2 > 0.\end{aligned}$$

Pour montrer (ii), on considère l'expression

$$\begin{aligned} A(r) &= 2 t \sqrt{[\mathcal{C}][r]} [2 t' - (\sqrt{[\mathcal{C}][r]})'] \\ &= 2 \sqrt{[\mathcal{C}][r]} (r\mathcal{C})' - \sqrt{r\mathcal{C}} ([\mathcal{C}][r])' \\ &= 2 \sqrt{[\mathcal{C}][r]} (r\mathcal{C}' + \mathcal{C}) - \sqrt{r\mathcal{C}} ([\mathcal{C}] + [r] \mathcal{C}') \\ &= [r] B(x) \end{aligned}$$

avec

$$B(x) = 2 x(r\mathcal{C}' + \mathcal{C}) - \sqrt{r\mathcal{C}} (x^2 + \mathcal{C}') \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{[\mathcal{C}]}{[r]}} = x.$$

Si  $\mathcal{C}'' > 0$ , on a  $1 \leq r_1 < r$ ,  $x$  est alors une fonction strictement croissante de  $r_1$ , d'où puisque  $\mathcal{C}(1) = 0$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{C}(r)}{r}} < \sqrt{\frac{\mathcal{C}(r)}{r-1}} \leq x < \sqrt{\mathcal{C}'(r)}.$$

Si  $\mathcal{C}'' < 0$  on a  $1 \leq r < r_1$  avec  $\frac{\mathcal{C}(r)}{r} < \mathcal{C}'(r)$  d'où

$$\sqrt{\frac{\mathcal{C}(r)}{r}} < x < \sqrt{\mathcal{C}'(r)}.$$

Le trinôme  $B(x)$  admet 2 racines réelles et est  $> 0$  entre ces racines. Pour prouver que  $B(x) > 0$ , il suffit de montrer que  $B\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}(r)}{r}}\right) > 0$  et  $B(\sqrt{\mathcal{C}'(r)}) > 0$ .

Or

$$\begin{aligned} B(\sqrt{\mathcal{C}'(r)}) &= 2 \sqrt{\mathcal{C}'} (r\mathcal{C}' + \mathcal{C} - \sqrt{r\mathcal{C}\mathcal{C}'}) \\ &= 2 \sqrt{\mathcal{C}'} ((\sqrt{r\mathcal{C}'})^2 + (\sqrt{\mathcal{C}})^2 - 2 \sqrt{r\mathcal{C}\mathcal{C}'} + \sqrt{r\mathcal{C}\mathcal{C}'}) \\ &> 2 \sqrt{\mathcal{C}'} (\sqrt{r\mathcal{C}'} - \sqrt{\mathcal{C}})^2 > 0 \end{aligned}$$

et

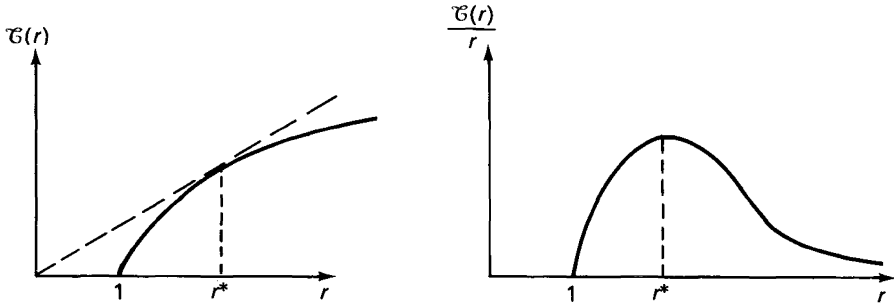
$$\begin{aligned} B\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}(r)}{r}}\right) &= 2 \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{r}} (r\mathcal{C}' + \mathcal{C}) - \sqrt{r\mathcal{C}} \left(\frac{\mathcal{C}}{r} + \mathcal{C}'\right) \\ &= \mathcal{C}' \sqrt{r\mathcal{C}} + \mathcal{C} \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{r}} > 0. \end{aligned}$$

Ce qui démontre la relation (ii) et prouve donc que si  $J(r^0) = 0$  alors  $J'(r^0) < 0$ .  $J$  étant continue, il ne peut exister une autre racine de  $J = 0$ , sinon on trouverait une solution de  $J = 0$   $J' > 0$ .

**VI. RÉOLUTION DU PROBLÈME DE RIEMANN LORSQUE  $\mathfrak{G}'' < 0$  ET  $\mathfrak{G}$  N'EST PAS A CROISSANCE RAPIDE**

Dans ce cas, il existe une valeur  $r^*$  telle que :

$$\frac{\mathfrak{G}(r)}{r} < \mathfrak{G}'(r) \text{ pour } r < r^* \text{ et } \frac{\mathfrak{G}(r)}{r} > \mathfrak{G}'(r) \text{ pour } r > r^* .$$

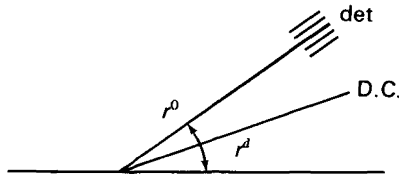


On note  $\bar{r}$  la solution différente de  $r$  de  $\frac{\mathfrak{G}(r)}{r} = \frac{\mathfrak{G}(\tau)}{\tau}$ .

On peut avoir une disposition des ondes non linéaires et des discontinuités de contact différente de celle vue au paragraphe V. Nous examinerons successivement les différents cas possibles en utilisant systématiquement le fait que, puisque  $\mathfrak{G}'' < 0$ , dans une détente  $r$  décroît, et dans un choc  $r$  croît,  $r$  restant constant à travers une discontinuité de contact.

En raison de la symétrie des ondes par rapport à la verticale, nous n'examinerons que les ondes qui ont une vitesse positive.

a) Détente-D.C.

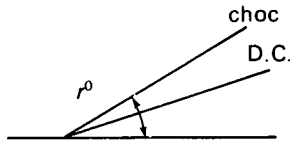


La vitesse de D.C. est  $\sqrt{\frac{\mathfrak{G}(r^d)}{r^d}}$ ; elle est supérieure à la vitesse de la détente  $\sqrt{\mathfrak{G}'(r^d)}$ , on a donc :

$$\mathfrak{G}'(r^d) \leq \frac{\mathfrak{G}(r^d)}{r^d}$$

soit  $r^* \leq r^d$ . A travers la détente,  $r^d \leq r^0$  d'où  $r^* \leq r^d \leq r^0$ .

b) Choc-D.C.

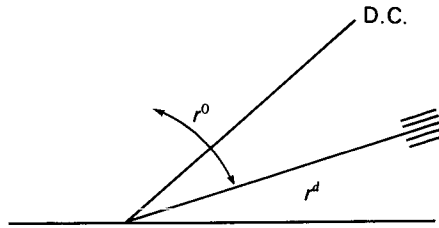


La vitesse du choc est  $\sqrt{\frac{\mathcal{E}(r^d) - \mathcal{E}(r^0)}{r^d - r^0}}$ , celle de la D.C. est  $\sqrt{\frac{\mathcal{E}(r^d)}{r^d}}$ , on a donc  $\frac{\mathcal{E}(r^d) - \mathcal{E}(r^0)}{r^d - r^0} \leq \frac{\mathcal{E}(r^d)}{r^d}$  soit  $\frac{\mathcal{E}(r^d)}{r^d} \leq \frac{\mathcal{E}(r^0)}{r^0}$ .

Puisque  $r^0 \leq r^d$  (car on a un choc) on a donc :

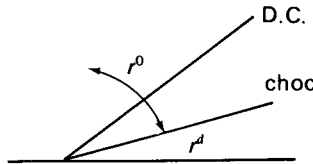
$$\bar{r}^d \leq r^0 \leq r^d \text{ et } r^* \leq r^d.$$

c) D.C.-détente



La vitesse de la D.C. est  $\sqrt{\frac{\mathcal{E}(r^0)}{r^0}}$  et celle de la détente  $\sqrt{\mathcal{E}'(r^0)}$ . On a donc  $\frac{\mathcal{E}(r^0)}{r^0} \leq \mathcal{E}'(r^0)$  soit  $r^0 \leq r^*$  et dans la détente  $r$  décroît d'où  $r^d \leq r^0 \leq r^*$ .

d) D.C.-choc



La vitesse du choc est  $\sqrt{\frac{\mathcal{E}(r^d) - \mathcal{E}(r^0)}{r^d - r^0}}$  on a donc

$$\frac{\mathcal{E}(r^0)}{r^0} \leq \frac{\mathcal{E}(r^d) - \mathcal{E}(r^0)}{r^d - r^0} \text{ soit } \frac{\mathcal{E}(r^0)}{r^0} \leq \frac{\mathcal{E}(r^d)}{r^d}$$

d'où puisque dans le choc  $r^0 \leq r^d$  :  $r^0 \leq r^d \leq \bar{r}^0$ .

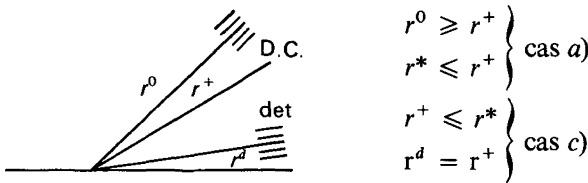
Lorsque  $\mathcal{T}$  n'est pas à croissance rapide, nous avons vu que le problème n'était plus strictement hyperbolique. Il est donc a priori possible d'avoir plusieurs ondes non linéaires (détente ou choc) ou discontinuités de contact dans le quadrant  $x > 0$  et  $t > 0$ . Cependant, on a vu qu'entre deux ondes simples non linéaires  $r$  est constant, il n'y a donc qu'une D.C. possible de vitesse  $\sqrt{\frac{\mathcal{T}(r)}{r}}$ . Entre deux D.C. le système est  $r_t = y_x$  et  $y_t = \mathcal{T}(r)_x$  (voir la remarque du § 3). Il n'y a donc qu'une onde non linéaire (choc ou détente) puisque la vitesse doit être positive. Nous devons donc étudier les deux cas suivants (en fait 6 puisque l'onde non linéaire est soit un choc soit une détente)

O.N.L.-D.C.-O.N.L.

D.C.-O.N.L.-D.C.

e) Détente-D.C.-det.

C'est la combinaison des cas a) et c). Si on note  $r^+$  la valeur de  $r$  entre les deux détente, on a :



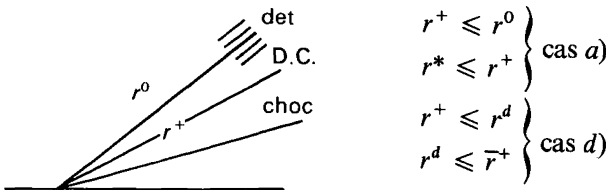
$$\left. \begin{aligned} r^0 &\geq r^+ \\ r^* &\leq r^+ \end{aligned} \right\} \text{cas a)}$$

$$\left. \begin{aligned} r^+ &\leq r^* \\ r^d &= r^+ \end{aligned} \right\} \text{cas c)}$$

d'où :  $r^+ = r^*$  et  $r^d \leq r^* \leq r^0$ .

La discontinuité de contact sépare deux détente.

f) Détente-D.C.-choc cas a) et d)

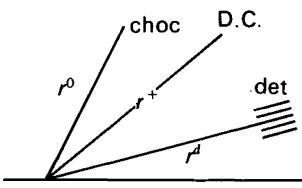


$$\left. \begin{aligned} r^+ &\leq r^0 \\ r^* &\leq r^+ \end{aligned} \right\} \text{cas a)}$$

$$\left. \begin{aligned} r^+ &\leq r^d \\ r^d &\leq \bar{r}^+ \end{aligned} \right\} \text{cas d)}$$

d'où  $r^+ = r^* = \bar{r}^+ = r^d$  il ne peut donc y avoir de choc. Ce cas est en fait le cas a).

g) Choc-D.C.-détente cas b) et c)

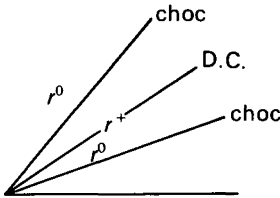


$$\left. \begin{aligned} \bar{r}^+ &\leq r^0 \leq r^+ \\ r^* &\leq r^+ \end{aligned} \right\} \text{cas b)}$$

$$r^d \leq r^+ \leq r^* \quad \text{cas c)}$$

d'où  $r^+ = r^* = \bar{r}^+ = r^0$  il n'y a pas de choc, ce cas est en fait le cas c).

h) Choc-D.C.-choc cas b) et d)

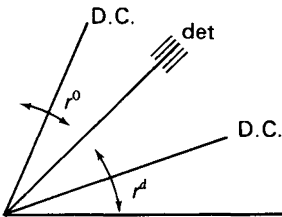


$$\left. \begin{aligned} \bar{r}^+ &\leq r^0 \leq r^+ \\ r^* &\leq r^+ \end{aligned} \right\} \text{cas b)}$$

$$r^+ \leq r^d \leq \bar{r}^+ \quad \text{cas d)}$$

D'où  $r^+ = r^* = r^d = r^0$  il n'y a aucun choc ; ce cas est l'un des cas a), b), c) ou d).

i) D.C.-détente-D.C. cas c) et a)

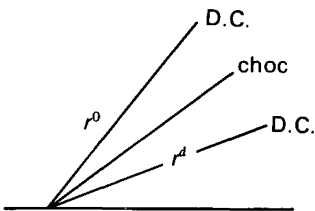


$$r^d \leq r^0 \leq r^* \quad \text{cas c)}$$

$$r^* \leq r^d \leq r^0 \quad \text{cas a)}$$

On a donc  $r^d = r^0 = r^*$  ; il n'y a donc pas de détente ; ce cas est l'un des cas a), b), c) ou d).

j) D.C.-choc-D.C. cas d) et b)



$$\left. \begin{aligned} r^0 &\leq r^d \\ r^0 &\leq r^d \leq \bar{r}^0 \end{aligned} \right\} \text{cas d)}$$

$$r^* \leq r^d \quad \text{cas b)}$$

On a donc  $r^d = \bar{r}^0$  ou  $r^d = r^0$ .

Les deux D.C. ont la même vitesse, elles sont donc confondues avec le choc. On est donc en fait dans l'un de cas *b)* ou *d)*.

Finalement, les cas *f)*, *g)*, *h)*, *i)* ou *j)* se ramènent à l'un des 4 cas suivants *a)*, *b)*, *c)* ou *d)*.

Pour déterminer la solution du problème de Riemann, nous examinerons chacun des cas *a)*, *b)*, *c)*, *d)* ou *e)*.

On notera comme précédemment  $u^0$  l'état médian,  $u^+$  et  $u^d$  les états définis suivants le schéma :



Cas *a)*

A travers la détente, on a :

$$u_4^0 = u_4^+ + \sin \theta^+ \int_{r^0}^{r^+} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt = u_4^+ + \sin \theta^0 \int_{r^0}^{r^d} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt$$

$$u_3^0 = u_3^+ + \cos \theta^+ \int_{r^0}^{r^+} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt = u_3^+ + \cos \theta^0 \int_{r^0}^{r^d} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt .$$

A travers la D.C.

$$u_4^+ = u_4^d + \sqrt{r^d \mathcal{G}(r^d)} (\sin \theta^d - \sin \theta^0)$$

$$u_3^+ = u_3^d + \sqrt{r^d \mathcal{G}(r^d)} (\cos \theta^d - \cos \theta^0) .$$

Ce qui peut encore s'écrire en utilisant les notations du paragraphe *V* :

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}^+ + \left( \int_{r^0}^{r^d} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt \right) q^0$$

$$\tilde{u}^+ = \tilde{u}^d + \sqrt{r^d \mathcal{G}(r^d)} (q^d - q^0)$$

d'où

$$u^0 = u^d + \sqrt{r^d \mathcal{G}(r^d)} q^d + \left( \int_{r^0}^{r^d} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt - \sqrt{r^d \mathcal{G}(r^d)} \right) q^0$$

avec  $r^* \leq r^d \leq r^0$ .

b) On a à travers le choc (formules (13) et (14))

$$u_3^0 = u_3^+ + \cos \theta^0 \sqrt{(r^d - r^0) (\mathfrak{C}(r^d) - \mathfrak{C}(r^0))}$$

$$u_4^0 = u_4^+ + \sin \theta^0 \sqrt{(r^d - r^0) (\mathfrak{C}(r^d) - \mathfrak{C}(r^0))}.$$

A travers la D.C.

$$u_3^+ = u_3^d + \sqrt{r^d \mathfrak{C}(r^d)} (\cos \theta^d - \cos \theta^0)$$

$$u_4^+ = u_4^d + \sqrt{r^d \mathfrak{C}(r^d)} (\sin \theta^d - \sin \theta^0)$$

soit

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}^d + \sqrt{r^d \mathfrak{C}(r^d)} q^d + (\sqrt{(r^d - r^0) (\mathfrak{C}(r^d) - \mathfrak{C}(r^0))} - \sqrt{r^d \mathfrak{C}(r^d)}) q^0$$

avec  $\bar{r}^d \leq r^0 \leq r^d$  et  $r^* \leq r^d$ .

c) A travers la D.C. on a

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}^+ + \sqrt{r^0 \mathfrak{C}(r^0)} (q^d - q^0).$$

A travers la détente

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}^d + \left( \int_{r^0}^{r^d} \sqrt{\mathfrak{C}'(t)} dt + \sqrt{r^0 \mathfrak{C}(r^0)} \right) q^d - \sqrt{r^0 \mathfrak{C}(r^0)} q^0$$

avec  $r^d \leq r^0 \leq r^*$ .

d) A travers la D.C. on a la même relation qu'en c).

A travers le choc on a

$$\tilde{u} = \tilde{u}^d + \sqrt{(r^d - r^0) (\mathfrak{C}(r^d) - \mathfrak{C}(r^0))} q^d$$

d'où

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}^d + (\sqrt{(r^d - r^0) (\mathfrak{C}(r^d) - \mathfrak{C}(r^0))} + \sqrt{r^0 \mathfrak{C}(r^0)}) q^d - \sqrt{r^0 \mathfrak{C}(r^0)} q^0$$

avec  $r^0 \leq r^*$  et  $r^0 \leq r^d \leq \bar{r}^0$ .

e) Si on note  $\tilde{u}^1$  et  $\tilde{u}^2$  les états à gauche et à droite de la discontinuité de contact, on a :

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}^1 + \left( \int_{r^0}^{r^*} \sqrt{\mathfrak{C}'(t)} dt \right) q^0$$

$$\tilde{u}^1 = \tilde{u}^2 + \sqrt{r^* \mathfrak{C}(r^*)} (q^d - q^0)$$

$$\tilde{u}^2 = \tilde{u}^d + \left( \int_{r^*}^{r^d} \sqrt{\mathfrak{C}'(t)} dt \right) q^d$$



d'où

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}^d + \left( \int_{r^*}^{r^d} \sqrt{\mathfrak{G}'(t)} dt + \sqrt{r^* \mathfrak{G}(r^*)} \right) q^d + \left( \int_{r^0}^{r^*} \sqrt{\mathfrak{G}'(t)} dt - \sqrt{r^* \mathfrak{G}(r^*)} \right) q^0$$

avec  $r^d \leq r^* \leq r^0$ .

En résumé, on a la

**PROPOSITION VI.1 :** *La connaissance de  $r^0$  et  $\theta^0$ , correspondant à l'état médian permet de construire de façon unique à partir de  $u^d$  les états  $u^+$  et  $u^0$  solution du problème de Riemann.*

*Démonstration :* Il suffit de voir que  $r^0$  et  $r^d$  étant donnés, ils ne vérifient qu'un seul des cas a), b), c), d) ou e) (ou plusieurs mais avec des égalités au lieu des inégalités) :

1) Si  $r^d \leq r^*$

$$\begin{aligned} r^0 &\leq r^d && \text{on a le cas d)} \\ r^d &\leq r^0 \leq r^* && \text{on a le cas c)} \\ r^* &\leq r^0 && \text{on a le cas e)}. \end{aligned}$$

2) Si  $r^* \leq r^d$

$$\begin{aligned} r^0 &\leq \bar{r}^d && \text{on a le cas d)} \\ \bar{r}^d &\leq r^0 \leq r^d && \text{on a le cas b)} \\ r^d &\leq r^0 && \text{on a le cas a)}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

*Remarque :* Notons que l'on peut écrire dans tous les cas a), b), c), d) ou e)  $\tilde{u}^0$  sous la forme

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}^d + S_+(r^0, r^d) q^0 + T_+(r^0, r^d) q^d \quad (\text{voir [2]}). \quad (32)$$

Si  $r^d \leq r^*$

$$S_+(r^0, r^d) = \begin{cases} -\sqrt{r^0 \mathfrak{G}(r^0)} & \text{si } r^0 \leq r^* \\ \int_{r^0}^{r^*} \sqrt{\mathfrak{G}'(t)} dt - \sqrt{r^* \mathfrak{G}(r^*)} & \text{si } r^* \leq r^0 \end{cases}$$

$$T_+(r^0, r^d) = \begin{cases} \sqrt{(r^d - r^0) (\mathfrak{G}(r^d) - \mathfrak{G}(r^0))} + \sqrt{r^0 \mathfrak{G}(r^0)} & \text{si } r^0 \leq r^d \\ \int_{r^0}^{r^d} \sqrt{\mathfrak{G}'(t)} dt + \sqrt{r^0 \mathfrak{G}(r^0)} & \text{si } r^d \leq r^0 \leq r^* \\ \int_{r^*}^{r^d} \sqrt{\mathfrak{G}'(t)} dt + \sqrt{r^* \mathfrak{G}(r^*)} & \text{si } r^* \leq r^0 \end{cases}$$

Si  $r^* \leq r^d$

$$S_+(r^0, r^d) = \begin{cases} -\sqrt{r^0} \mathfrak{G}(r^0) & \text{si } r^0 \leq \bar{r}^d \\ \sqrt{(r^d - r^0) (\mathfrak{G}(r^d) - \mathfrak{G}(r^0))} - \sqrt{r^d} \mathfrak{G}(r^d) & \text{si } \bar{r}^d \leq r^0 \leq r^d \\ \int_{r^0}^{r^d} \sqrt{\mathfrak{G}'(t)} dt - \sqrt{r^d} \mathfrak{G}(r^d) & \text{si } r^d \leq r^0 \end{cases}$$

$$T_+(r^0, r^d) = \begin{cases} \sqrt{(r^d - r^0) (\mathfrak{G}(r^d) - \mathfrak{G}(r^0))} + \sqrt{r^0} \mathfrak{G}(r^0) & \text{si } r^0 \leq \bar{r}^d \\ \sqrt{r^d} \mathfrak{G}(r^d) & \text{si } \bar{r}^d \leq r^0 \end{cases}$$

On obtiendrait de même une expression de  $\tilde{u}^0$  à partir de  $u^g$  de la forme :

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}^g + S_-(r^0, r^g) q^0 + T_-(r^0, r^g) q^g. \tag{33}$$

Soient  $u^g$  et  $u^d$ , si le problème de Riemann possède une solution alors l'état médian  $u^0$  vérifie les équations (32) et (33). L'élimination de  $u^0$  entre ces équations donne :

$$\tilde{u}^d + T_+(r^0, r^d) q^d - \tilde{u}^g - T_-(r^0, r^g) q^d = (S_-(r^0, r^g) - S_+(r^0, r^g)) q^0 \tag{34}$$

Puisque  $\|q^0\| = 1$  on a

$$\|\tilde{u}^d - \tilde{u}^g + T_+(r^0, r^d) q^d - T_-(r^0, r^g) q^g\|^2 - (S_-(r^0, r^g) - S_+(r^0, r^g))^2 = 0.$$

On pose :

$$J(r) = \|\tilde{u}^d - \tilde{u}^g + T_+(r, r^d) q^d - T_-(r, r^g) q^g\|^2 - (S_-(r, r^d) - S_+(r, r^g))^2. \tag{35}$$

Ainsi  $r^0$  est solution de :

$$J(r^0) = 0. \tag{36}$$

Réciproquement si  $r^0$  est solution de (36) il existe  $q^0 = \begin{pmatrix} \cos \theta^0 \\ \sin \theta^0 \end{pmatrix}$  vérifiant (34)

et l'une des équations (32) ou (33) fournit le vecteur  $\tilde{u}^0$ , on a donc  $u^0$ . La proposition VI.1 montre que le problème de Riemann possède une solution d'état médian  $u^0$ . On a donc la

**PROPOSITION VI.2 :** *La résolution du problème de Riemann est équivalente à résoudre  $J(r^0) = 0$  où  $J$  est fonction de  $u^g$  et  $v^g$ . Il y a bijection entre les solutions de  $J = 0$  et les solutions du problème de Riemann.*

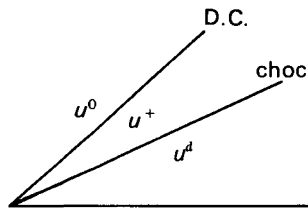
On a le

**THÉORÈME VI.1 :** Si  $\int_1^{+\infty} \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt = +\infty$ , alors il existe une et une seule solution du problème de Riemann.

*Démonstration :* Il suffit d'après la proposition VI.2 de montrer que (35) a une solution et que cette solution est unique.

L'unicité se démontre comme dans la proposition V.1 (voir aussi [2]).

Pour montrer l'existence d'une solution du problème de Riemann, il suffit d'après la proposition VI.2 de montrer que  $J(1) \geq 0$  et  $\lim_{r \rightarrow +\infty} J(r) = -\infty$  ainsi il existera une solution de  $J(r) = 0$  puisque  $J$  est continue.



$J(1)$  se calcule par  $d$ .

On a  $S_+(1, r^d) = -\sqrt{\mathcal{G}'(1)} = 0$  de même  $S_-(1, r^d) = 0$  donc  $J(1) \geq 0$ .

Pour  $r$  grand  $J(r)$  se calcule en considérant le cas  $a$ ) ou le cas  $e$ ). On a

$$S_+(r, r^d) \sim \int_{r^*}^r \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt$$

de même

$$S_-(r, r^d) \sim \int_{r^*}^r \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt.$$

Par ailleurs  $T_+(r, r^d)$  ne dépend pas de  $r$  de même que  $T_-(r, r^d)$ , d'où pour  $r$  grand

$$J(r) = \text{cst} - (S_- - S_+)^2 \sim -4 \left( \int_{r^*}^r \sqrt{\mathcal{G}'(t)} dt \right)^2$$

d'où  $\lim_{r \rightarrow +\infty} J(r) = -\infty$ .

Q.E.D.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. S. ANTMAN, *Equilibrium states of non linearly elastic strings*, SIAM J. Appl. Math. 37 (1979).
- [2] B. L. KEYFITZ and H. C. KRANZER, *A system of non-strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory*, Arch. Rat. Mech. Anal. 72 (1980) 219-241.
- [3] P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957) 537-566.
- [4] B. TEMPLE, *Global solution of the Cauchy Problem for a class of  $2 \times 2$  non-strictly hyperbolic conservation laws*, Adv. Appl. Math. 3 (1982) 335-375.
- [5] M. SHEARER, *Elementary wave solutions of the equations describing the motion of an elastic string*, SIAM J. Math. Anal. 16 (1985) 447-459.