M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique

Françoise Demengel

Relaxation et existence pour le problème des matériaux à blocage

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 19, n° 3 (1985), p. 351-395

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_3_351_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(vol. 19, n° 3, 1985, p. 351 à 395)

RELAXATION ET EXISTENCE POUR LE PROBLÈME DES MATÉRIAUX A BLOCAGE (*)

par Françoise DEMENGEL ([1])

Communiqué par R. TÉMAM

Résumé. — *Cet article est consacré au problème mécanique des matériaux à blocage. Ce problème, introduit par Praeger, puis par P. Suquet a été formulé de façon variationnelle par P. Suquet et l'auteur Les espaces convenables pour les contraintes et les déplacements ont été édudiés par l'auteur dans* [1]. *Le problème en contrainte est relativement difficile à résoudre, puisqu'il consiste à minimiser une fonctionnelle convexe qui est seulement coercive sur l'espace*

$$\{ \sigma \in L^1(\Omega, E), \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \} .$$

Dans le présent article, nous montrons l'existence d'une solution à un problème relaxé — problème équivalent au problème d'origine, où nous avons relaxé la condition aux limites $\sigma . n = F/\Gamma_1$ *— dans l'espace*

$$Z(\Omega, E) = \{ \sigma \in M^1(\Omega, E), \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \} .$$

Abstract. — *This paper is concerned with the mechanical problem of locking materials. This problem, introduced by Praeger, and later by P. Suquet has been formulated as a variational problem by P. Suquet and the author. The convenient spaces for stresses and displacements were studied by the author in* [1]. *The stress problem is rather difficult to solve, since it consists in minimizing a convex functional which is only coercive on the space* :

$$\{ \sigma \in L^1(\Omega, E), \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \} .$$

In the present paper we show that there exists a solution to a relaxed problem — a problem which is equivalent to the stress problem, and where we have relaxed the boundary condition $\sigma . n = F/\Gamma_1$ *— in the space*

$$Z(\Omega, E) = \{ \sigma \in M^2(\Omega, E), \operatorname{div} \sigma \in L^N(\Omega, \mathbb{R}^N) \} .$$

0. INTRODUCTION

Cet article est en quelque sorte la troisième partie d'un travail dont les deux premières parties peuvent être considérées comme indépendantes entre elles : la première [2] a été réalisée en collaboration avec P. Suquet et a permis de

(*) Reçu en mai 1984, révisé en février 1985.
([1]) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris-Sud, Bât. 425, 91405, Orsay (France).

poser le problème des matériaux à blocage sous une forme mathématique, et d'obtenir des résultats importants et indispensables à l'étude entreprise ici, qui concerne l'existence de solutions en contrainte à ce problème. La deuxième partie [1] est entièrement théorique et nous apporte les outils nécessaires à une bonne approche du problème : elle étudie les espaces fonctionnels appropriés, tant pour les déplacements que pour les contraintes.

Nous décrivons maintenant le contenu du présent travail. Il débute par l'introduction d'un problème généralisé $\mathcal{Q}$ (ou relaxé) qui est lié au problème variationnel en contrainte $\mathcal{P}$ introduit dans [2], [4], [6], [8] de la manière suivante : $\mathcal{Q}$ prolonge $\mathcal{P}$, c'est-à-dire qu'il minimise la même fonctionnelle que $\mathcal{P}$, mais sur un espace plus grand. En second lieu, les infima de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ sont les mêmes, et enfin $\mathcal{Q}$ possède des solutions, qui sont points d'accumulation d'une suite minimisante à $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ pour une certaine topologie que nous avons étudiée en partie dans [1]. La « résolution » du problème $\mathcal{Q}$ a nécessité l'introduction d'un nouvel espace fonctionnel, que nous avons étudié dans les Sections 2 et 3 de [1]. Il s'agit de

$$Z(\Omega, E) = \{ \sigma \in M^1(\Omega, E) , \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega) \}$$

(où $M^1(\Omega, E)$ désigne l'espace des mesures bornées sur Ω).

La Section 1 du présent travail définit donc le problème dit relaxé et précise ses liens avec les problèmes en déplacement et en contrainte établis dans [2]. Par le calcul du dual d'un problème intermédiaire, dans lequel on relaxe à la fois la condition aux limites $\sigma . n = F$ et l'équation d'équilibre $\operatorname{div} \sigma + f = 0$, nous parvenons à montrer que le problème relaxé et le problème d'origine ont des infima égaux.

La Section 2 concerne le problème d'analyse de blocage, déjà partiellement étudié dans [2]. On donne ici l'expression d'un problème relaxé et par des démarches analogues à celles employées dans la Section 1, nous parvenons à montrer l'égalité des infima du problème d'analyse limite et de son problème relaxé. Nous devons noter ici que le problème relaxé n'étant introduit que dans le but d'établir l'existence d'une solution à ce problème, nous avons été amenés à relaxer aussi la condition $\hat{L}\sigma = 1$ qui intervient dans le problème d'analyse limite.

Dans la Section 3 nous prolongeons le problème relaxé et le problème d'origine à l'espace Z. Pour ce faire, nous utilisons les fonctions convexes de mesure telles qu'elles ont été définies dans [3]. En outre nous montrons l'égalité des infima du problème prolongé à Z et du problème relaxé défini dans la Section 1, par l'utilisation d'un théorème de densité établi dans [1], et que nous rappelons ici :

THÉORÈME 0.1 : *Si* $\sigma \in Z(\Omega, E)$, *il existe une suite* $\sigma_m \in L^2(\Omega, E)$,

$$| \sigma_m | \to | \sigma | \text{ étroitement sur } \Omega,$$

$$\operatorname{div} \sigma_m = \operatorname{div} \sigma \ \forall m .$$

En outre lorsque ψ *est une fonction convexe ayant une croissance au plus linéaire à l'infini on peut imposer la convergence étroite de* $\psi(\sigma_m)$ *vers* $\psi(\sigma)$ (*au sens des fonctions convexes de mesure étudiées par* [3]).

La Section 3 nécessitera aussi la connaissance de certaines propriétés démontrées dans [1], concernant la « trace » $\sigma . n$ d'un élément de Z :

THÉORÈME 0.2 : *Soit* Ω *un ouvert borné,* Ω^+ *et* Ω^- *deux ouverts disjoints tels que* $\overline{\Omega}^+ \cap \overline{\Omega}^- = \Gamma$ *est une sous-variété de dimension* $N - 1$ *et de classe* C^2, *soit aussi*

$$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma ,$$

et on suppose que Γ *est intérieure à* Ω. *Alors si* $\sigma \in Z(\Omega, E)$,

$\sigma_{|\Gamma} . n$ *n'a pas de masse sur* Γ
$[\sigma . n . n]$ *est une mesure bornée sur* Γ *absolument continue par rapport à* σ. *Plus précisément, on a l'inégalité*

$$| [\sigma . n . n] | \leqq | \sigma | \, | \varepsilon(\vec{n}) |_\infty . \tag{0.1}$$

La 4e Section concerne l'existence proprement dite d'une solution σ aux problèmes relaxés introduits respectivement dans les Sections 1 et 2. Une des idées importantes consiste à mettre la fonctionnelle sous la forme d'une fonctionnelle semi-continue inférieure pour la topologie de $Z(\Omega, E)$, définie dans [1]. Nous aurons besoin alors d'un théorème établi sans [1], qui définit une mesure $\sigma : \varepsilon(u)$ lorsque u est dans U^∞ [1] et σ dans $Z(\Omega, E)$.

THÉORÈME 0.3 : *Soit* v *dans* $U^\infty(\Omega)$ *et* σ *dans* $Z(\Omega, E)$. *Nous définissons la distribution* $\varepsilon(v) : \sigma$ *par*

$$\langle \varepsilon(v) : \sigma, \varphi \rangle = - \int \operatorname{div} \sigma v \varphi - \int \sigma : v \otimes \nabla \varphi . \tag{0.2}$$

Alors :

i) $\varepsilon(v) : \sigma$ *est une mesure bornée, absolument continue par rapport à* $| \sigma |$, *qui coïncide avec la mesure* $\varepsilon(v) : \sigma$ *lorsque* $\varepsilon(v) \in \mathscr{C}_b(\Omega)$. *Plus précisément, l'inégalité*

[1] $U^\infty(\Omega) = \{ u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \varepsilon(u) \in L^\infty(\Omega, E) \}$. Pour les propriétés de cet espace, voir [1].

suivante a lieu :

(0.3) $$|\varepsilon(v):\sigma| \leqq |\varepsilon(v)|_\infty |\sigma| .$$

ii) *Lorsque σ_n converge faiblement vers σ dans Z et v_n converge faiblement vers v dans $U^\infty(\Omega)$, $\varepsilon(v_n):\sigma_n$ converge vaguement vers $\varepsilon(v):\sigma$. Si de plus $|\sigma_n|$ converge vers $|\sigma|$ étroitement, $\varepsilon(v_n):\sigma_n$ converge étroitement vers $\varepsilon(v):\sigma$.*

iii) *Soit $\sigma = G\,dx + \mu_S$ la décomposition de Lebesgue de σ, μ_S étant singulière et G dx-intégrable, et soit $\mu_S:\varepsilon(u) = \sigma:\varepsilon(u) - G:\varepsilon(u)$. Alors $\mu_S:\varepsilon(u)$ est singulière et même absolument continue par rapport à $|\mu_S|$.*

iv) *La formule de Green a lieu pour $\varphi \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$*

(0.4) $$\int \varepsilon(u):\sigma\varphi = -\int u \operatorname{div} \sigma\varphi - \int u\sigma\nabla\varphi + \int u\sigma . n\varphi .$$

1. DUALITÉ POUR LE PROBLÈME RELAXÉ

1.1. *Rappels et notations*

Nous commençons par rappeler les notations et principaux résultats établis dans [2].

(1.1) Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont le bord $\partial\Omega$ est C^2, $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_0$, Γ_0 et Γ_1 étant deux ouverts de $\partial\Omega$, connexes disjoints, tels que si $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 \neq \varnothing$, $\Gamma^* = \overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$ est une sous-variété de dimension $N-2$ et de classe C^2, et Γ^* est une sous-variété fixe de dimension $N-2$ de classe C^2 de Γ_0 sinon. En outre

(1.2) $u_0 \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$, $u_0 = 0$ sur Γ^*, $u_0 = \chi_0 u_0$, avec χ_0 la fonction caractéristique de Γ_0.

(1.3) $f \in L^2(\Omega)$.

(1.4) $F \in L^2(\Gamma_1)$, avec $\int_\Omega fr + \int_{\Gamma_1} Fr = 0$ pour tout r déplacement rigide s'annulant sur Γ (1).

(1.5) B désigne un convexe compact de E (2), contenant 0 à son intérieur.

(1) On verra que cette condition se réduit à rien lorsque $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \Gamma^* \neq \varnothing$. Lorsque $\Gamma_0 = \varnothing$, $\Gamma^* = \varnothing$ et on trouve la condition déjà rencontrée en plasticité, ou en élasticité $\int_\Omega fr + \int_{\Gamma_1} Fr = 0$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

(2) E désigne l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^N$.

On donne l'expression des espaces statiquement et cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{U}_{ad}(\lambda) = \{ u \in H^1(\Omega), u = \lambda u_{0|\Gamma_0} \}$$

$$\mathcal{S}_{ad} = \{ \sigma \in L^2, \operatorname{div} \sigma + f = 0, \sigma.\vec{n} = F_{|\Gamma_1} \}.$$

On suppose que A est un opérateur symétrique de E dans E, défini positif ;

$$(1.6) \qquad \psi^*(\xi) = A\xi : \xi \quad \text{si} \quad \xi \in B$$
$$+ \infty \text{ sinon}.$$

Sa conjuguée ψ vérifie alors

Il existe des constantes c_1 et $c_2 > 0$ telles que

$$c_1(|\xi| - 1) \leqq \psi(\xi) \leqq c_2(|\xi| + 1).$$

Soient alors les fonctionnelles définies sur $L^p(\Omega, E)$, pour $1 \leqq p < +\infty$ (resp. L^{p^*} avec p^* le conjugué de p)

$$(1.8) \qquad \Psi(v) = \int \psi(v(x))\, dx$$

$$(1.9) \qquad \Psi^*(v) = \int \psi^*(v(x))\, dx.$$

Un Théorème de Ekeland-Temam [5] établit que Ψ^* n'est autre que la conjuguée de Ψ sur L^p.

Nous rappelons maintenant l'énoncé du problème en contrainte pour le problème de blocage, introduit dans [2] :

$$(1.10) \qquad \inf_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega, E) \\ \operatorname{div} \sigma + f = 0 \\ \sigma.n = F_{|\Gamma_1}}} \left\{ \int \psi(\sigma) - \lambda \int \sigma.n u_0 \right\}$$

et celui du Problème en déplacement :

$$(1.11) \qquad \operatorname*{Sup}_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u = \lambda u_{0|\Gamma_0}}} \left\{ - \int \psi^*(\varepsilon(u)) + \int fu + \int Fu \right\}.$$

On rappelle que si $\mathcal{B}$ désigne le convexe de $L^2(\Omega, E)$:

$$\mathcal{B} = \{ u \in H^1, \varepsilon(u) \in B \}$$

et si l'on suppose que $\mathcal{B} \cap \mathcal{U}_{ad}$ est non vide, le Problème (1.11) admet une unique solution. En outre, on a établi dans [2] le résultat.

THÉORÈME 1.1 : $\inf(1.10) = \operatorname{Sup}(1.11)$.

1.2. *Définition du Problème relaxé*

Donnons maintenant quelques définitions et propriétés relatives au problème relaxé. Nous rappelons la définition de l'espace

$$U^{\infty}(\Omega) = \{ u \in L^{\infty}(\Omega), \varepsilon(u) \in L^{\infty}(\Omega) \}$$

et la propriété suivante, établie dans [1], qui sera fréquemment utilisée dans les propositions à venir :

(1.12) Si u_m est bornée dans $U^{\infty}(\Omega)$, il existe u dans $U^{\infty}(\Omega)$ et une sous-suite de u_m encore notée u_m, telle que

$$u_m \to u \text{ dans } \mathscr{C}(\overline{\Omega})$$

$$\varepsilon(u_m) \to \varepsilon(u) \text{ dans } L^{\infty}(\Omega) \text{ faible * et dans } W^{1,p}\ \forall p\ 1 \leqq p < \infty .$$

Nous supposons pour ce qui suit que $\Gamma_0 \neq \emptyset$ et que Γ^* n'est pas contenu dans un $N - 2$ plan, ce qui est vérifié dès que $\Gamma^* = \overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$.

Nous définissons le sous-ensemble $\mathbb{K}$ de $L^2(\Gamma)$

$$\mathbb{K} = \{ \chi_1 u, \varepsilon(u) \in B, u = 0_{|\Gamma^*} \} \tag{1.13}$$

où χ_1 est la fonction caractéristique de Γ_1. Nous avons alors la

PROPOSITION 1.1 : i) $\mathbb{K}$ *défini par* (1.13) *est un convexe compact de* $H^{1/2}(\Gamma)$.

ii) *Soit* $\mathscr{C}$ *la fonctionnelle conjuguée sur* $H^{1/2}(\Gamma)$ *de la fonction indicatrice de* $\mathbb{K}$. *Alors* $\mathscr{C}$ *est faiblement continue sur* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *et* $\mathscr{C}^* = \chi_{\mathbb{K}}$.

Démonstration : Montrons tout d'abord que $\chi_1 u \in H^{1/2}(\Gamma)$ dès que $u \in U^{\infty}(\Omega)$ et $u = 0_{|\Gamma^*}$. On se ramène par cartes locales et partitions de l'unité au cas où Γ n'est autre que l'hyperplan $X_N = 0$, et Γ^* le $N - 2$ plan $X_{N-1} = X_N = 0$, Γ_1 la portion de Γ définie par $X_{N-1} < 0$, Γ_0 la portion de Γ définie par $X_{N-1} > 0$. En utilisant la caractérisation de $H^{1/2}(\mathbb{R}^{N-1} \times 0)$ donnée dans Lions-Magenès [7], il suffit de montrer que si u à support compact dans $\mathbb{R}^{N-1}$ vérifie $u = 0$ sur $\mathbb{R}^{N-2} \times \{0\} \times \{0\}$, et $u \in U^{\infty}(\Omega)$ (par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \frac{\overline{u}(x + te_{N-1}) - \overline{u}(x)}{t} \right|^2 dx\, dt < +\infty) \tag{1.14}$$

alors on a aussi

$$\iint \left| \frac{\chi_1 u(x + te_{N-1}) - \chi_1 u(x)}{t} \right|^2 dx\, dt < +\infty$$

avec χ_1 la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^{N-2} \times \mathbb{R}^- \times 0$. Or cette expression s'écrit encore

$$\int_{\mathbb{R}^{N-2}\times\mathbb{R}^-} \int_{-\infty}^{-x_{N-1}} \left| \frac{u(x', x_{N-1} + t) - u(x', x_{N-1})}{t} \right|^2 dx\, dt +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{N-2}\times\mathbb{R}^+} \int_{-\infty}^{-x_{N-1}} \left| \frac{u(x', x_{N-1} + t)}{t} \right|^2 dx\, dt$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{N-2}\times\mathbb{R}^-} \int_{-x_{N-1}}^{+\infty} \left| \frac{u(x', x_{N-1})}{t} \right|^2 dx\, dt$$

$$= a + b + c\,.$$

a est fini d'après (1.14). Dans chacune des intégrales b et c le signe de x_{N-1} entraîne que $|t| \geqq |x_{N-1}|$. Dans b on écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-2}\times\mathbb{R}^+} \int_{-\infty}^{-x_{N-1}} \left| \frac{u(x', x_{N-1} + t)}{t} \right|^2 dx\, dt \leqq$$

$$\leqq \int_{\mathbb{R}^{N-2}\times\mathbb{R}^+} \int_{-\infty}^{x_{N-1}} \left| \frac{u(x', x_{N-1} + t) - u(x', x_{N-1})}{t} \right|^2 dx\, dt$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}^+} \int_{-\infty}^{-x_{N-1}} \left| \frac{u(x', x_{N-1})}{t} \right|^2 dx\, dt$$

$$= e + f\,.$$

e est fini d'après (1.14). Pour montrer que f est fini, remarquons que puisque u est nulle sur $\mathbb{R}^{N-2} \times 0$ et holdérienne pour tout λ dans $]0, 1[$, on a

$$|u(x', x_{N-1})| \leqq k\,|x_{N-1}|^\lambda \leqq kt^\lambda$$

d'où

$$\left| \frac{u(x', x_{N-1})}{t} \right| \leqq kt^{\lambda-1}\,\chi_{\mathrm{Sup}^t u}$$

où $\chi_{\mathrm{Sup}^t u}$ désigne la fonction caractéristique du support de u. En choisissant

$\lambda > \frac{1}{2}$, $t^{2(\lambda-1)}$ est intégrable sur tout compact et on obtient le résultat :

$$a + b + c < +\infty .$$

En outre on a facilement l'inégalité

$$| \chi_1 u |_{H^{1/2}(\Omega)} \leqq c | u |_{U\infty(\Omega)}$$

en utilisant à nouveau la caractérisation précédente (avec une constante indépendante de u).

Montrons maintenant que $\mathbb{K}$ est compact. Il suffit de montrer qu'il est séquentiellement relativement compact et fermé. Soit donc u_m telle que $\varepsilon(u_m) \in B$, $u_m = 0 |_{\Gamma^*}$. En utilisant le Lemme 1.1 ci-dessous, démontré dans l'appendice, on voit que u_m est bornée dans $U^\infty(\Omega)$.

LEMME 1.1 : *Soit Σ une sous-variété de $\partial\Omega$ de dimension $N-2$ et de classe C^2, qui n'est pas un $N-2$ plan. Lorsque $\infty > q > N$ et u est dans $W^{1,q}$ nous définissons*

$$p(u) = \operatorname*{Sup}_{x \in \Sigma} | u(x) | .$$

Alors p est une semi-norme continue pour $W^{1,q}$ qui est une norme sur $\mathcal{R}$, puis nous appliquons la conséquence suivante de l'inégalité de Korn dans $W^{1,q}$, pour $q > N$:

Si $\mathcal{N}$ est une semi-norme continue sur $W^{1,q}$ qui est une norme sur $\mathcal{R}$, il existe une constante $c > 0$, telle que $\forall u \in W^{1,q}$

$$| u - \mathcal{N}(u) |_{W^{1,q}} \leqq c | \varepsilon(u) |_q . \tag{1.17}$$

En effet si $u_m \in U^\infty$ s'annule sur Σ, et si $\varepsilon(u_m) \in B$ on a, compte tenu du théorème d'injection de Sobolev $W^{1,q} \subset c(\overline{\Omega})$:

$$\begin{aligned} | u_m |_\infty = | u_m - p(u_m) |_\infty &\leqq c_1 | u_m - p(u_m) |_{W^{1,q}} \\ &\leqq c_1 C | \varepsilon(u_m) |_q \\ &\leqq c_1 C | \varepsilon(u_m) |_\infty \end{aligned}$$

de sorte que u_m est bien bornée dans $U^\infty(\Omega)$.

En utilisant (1.12) avec $p = 2$ on peut extraire de u_m une suite notée $u_{m'}$, et trouver un élément $u \in U^\infty(\Omega)$ tel que

$$u_{m'} \to u \quad \text{dans} \quad \mathscr{C}(\Omega), H^1 \text{ fort;} \tag{1.18}$$

$$\varepsilon(u_m) \to \varepsilon(u) \text{ dans } L^\infty \text{ faible } *. \tag{1.19}$$

Il est classique, puisque B est un convexe fermé, donc faible $*$ fermé, que $\varepsilon(u)$ appartienne à B. La convergence uniforme de u_m vers u, jointe à $u_m = 0\,|_{\Gamma^*}$, entraîne que $u = 0$ sur Γ^*. Maintenant l'inégalité (1.16) entraîne que $\chi_1\, u_m$ est bornée dans $H^{1/2}(\Gamma)$; soit donc v_m dans $H^1(\Omega)$ telle que $|\, v_m\,|_{H^1(\Omega)}$ est bornée, $v_m = \chi_1\, u_m\,|_\Gamma$. On extrait de v_m une sous-suite $v_{m''}$ telle que

(1.20) $\quad v_{m''} = \chi_1\, u_{m''}\,|_\Gamma$

et

(1.21) $\quad v_{m''} \to v \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega)$ faible $*$.

(1.20), (1.21) et (1.18) entraînent que

$$v = u \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\,, \qquad v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0\,.$$

On en déduit que $v = \chi_1\, u$ et ceci achève la démonstration de la compacité de $\mathbb{K}$.

ii) La continuité résulte facilement du fait que $\mathcal{T}$ est convexe et partout finie sur l'espace de Hilbert $H^{1/2}(\Gamma)$, et du Corollaire 2.5 de Ekeland-Temam [5]. Démontrons plus précisément la faible continuité. Supposons donc que σ_m converge vers σ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ faiblement ; puisque $\mathbb{K}$ est un compact, il existe pour chaque m, v_m dans $\mathbb{K}$ tels que

$$\mathcal{T}(\sigma_m) = \langle\, \sigma_m, v_m\,\rangle = \operatorname*{Sup}_{v \in \mathbb{K}} \langle\, \sigma_m, v\,\rangle\,.$$

Toujours par la compacité, on peut extraire de v_m une sous-suite qui converge dans $H^{1/2}(\Gamma)$ fort vers v. Mais alors $\langle\, \sigma_m, v_m\,\rangle$ converge vers $\langle\, \sigma, v\,\rangle$. En outre, par définition de σ_m, on a pour tout $v' \in \mathbb{K}$:

$$\langle\, \sigma_m, v_m\,\rangle = \mathcal{T}(\sigma_m) \geqq \langle\, \sigma_m, v'\,\rangle$$

d'où par passage à la limite :

$$\langle\, \sigma, v\,\rangle \geqq \langle\, \sigma, v'\,\rangle\,.$$

On en déduit que $\langle\, \sigma, v\,\rangle = \mathcal{T}(\sigma)$ et que $\mathcal{T}(\sigma_m)$ converge vers $\mathcal{T}(\sigma)$. Puisque $\mathbb{K}$ est fermé, $\chi_{\mathbb{K}}$ est semi-continue inférieure et d'après Ekeland-Temam [5],

$$\mathcal{T}^* = \chi_{\mathbb{K}}^{**} = \chi_{\mathbb{K}}\,.$$

La démonstration du résultat à venir concernant le problème relaxé nécessitera l'introduction d'un convexe auxiliaire, noté $\hat{\mathbb{K}}$, défini comme suit :

(1.22) $\hat{\mathbb{K}} = \{ (u, \chi_1 u), u, \varepsilon(u) \in B, u = 0 |_{\Gamma^*} \}$

et de sa fonctionnelle conjuguée sur $L^2(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ notée $\hat{\mathcal{C}}$. En suivant la démonstration de la Proposition 1.1, nous obtenons :

(1.23) $\hat{\mathbb{K}}$ *est un convexe compact de* $L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ *et* $\hat{\mathcal{C}}$ *est une fonctionnelle convexe faiblement continue sur* $L^2(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, *avec* $\hat{\mathcal{C}} = \varphi_{\hat{\mathbb{K}}}{}^*$.

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire le problème relaxé; il s'agit de :

(1.24) $$\inf_{\substack{\sigma \in L^2 \\ \operatorname{div} \sigma \in L^2}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) + \mathcal{C}(F - \sigma . n) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma . n u_0 \right\}.$$

La suite nécessitera, ainsi que nous l'avons déjà dit, l'introduction du problème auxiliaire suivant

(1.25) $$\inf_{\sigma \in L^2(\Omega, E)} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) + \hat{\mathcal{C}}(\operatorname{div} \sigma + f, F - \sigma . n) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma . n u_0 \right\}.$$

1.3. *Dualité pour le problème relaxé*

Le but de cette sous-section est de montrer que le problème relaxé est « équivalent » en un certain sens au problème d'origine. Plus précisément, on désire montrer que

$$\inf (1.24) = \inf (1.10).$$

Pour cela, il suffit de montrer le :

THÉORÈME 1.2 : $\inf (1.25) = \operatorname{Sup} (1.11)$.

En effet supposons cette égalité montrée. Puisque $\hat{\mathcal{C}}(0, F - \sigma . n) = \mathcal{C}(F - \sigma . n)$ et $\mathcal{C}(0) = 0$, on remarque que (1.10), (1.24) et (1.25) consistent à minimiser la même fonctionnelle sur trois espaces emboîtés les uns dans les autres, et par conséquent

$$\inf (1.25) \leqq \inf (1.24) \leqq \inf (1.10).$$

On déduit alors du Théorème 1.1 et du résultat rappelé dans la sous-section 1.1, que

$$\inf(1.25) = \inf(1.24) = \inf(1.10) = \operatorname{Sup}(1.11).$$

Il nous reste donc à montrer le Théorème 1.2 :

Démonstration du Théorème 1.2. Elle est divisée en deux : dans un premier temps (étape *i*)), nous calculons le dual de (1.25) et montrons qu'il n'est autre que (1.10) et dans une deuxième étape nous appliquons un critère de Ekeland-Temam pour établir l'égalité des extrema du primal et du dual.

i) Le cadre de dualité est le suivant : nous introduisons les espaces

$$V = \{ \sigma \in L^2(\Omega, E), \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \};$$
$$Y = L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \times H^{-1/2}(\Gamma);$$

l'opérateur

$$\Lambda : V \to Y$$
$$\sigma \to (\operatorname{div} \sigma, \sigma . n);$$

les fonctionnelles convexes

$$F(\sigma) = \int_\Omega \psi(\sigma) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma . n u_0$$
$$G(p, q) = \hat{\mathcal{C}}(p + f, F - q).$$

Un couple (u, v) étant donné dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \times H^{1/2}(\Gamma)$, $F^*(\Lambda^*(u, v))$ est donné par la

PROPOSITION 1.2 :

$$F^*(\Lambda^*(u, v)) = \left| \begin{array}{ll} \Psi^*(-\varepsilon(u)) & si \quad -\varepsilon(u) \in B \\ & \qquad u + v + \lambda u_0 = 0_{|\Gamma} \\ + \infty \; sinon & \end{array} \right.$$

Admettons un instant cette proposition dont la démonstration est un peu délicate. En utilisant la Proposition 1.1, nous avons le résultat

$$\mathcal{C}^*(u, v) = \left| \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \quad (u, -v) \in \mathbb{K} \\ + \infty \ \text{sinon} . \end{array} \right.$$

On en déduit aisément que

$$G^*(u, v) = \begin{cases} -\displaystyle\int_\Omega fu + \int_{\Gamma_1} Fv & \text{si } u \text{ vérifie } \varepsilon(u) \in B \\ & \quad u = 0_{|\Gamma^*} \\ & \quad v = -\chi_1 u \\ +\infty \text{ sinon}. \end{cases}$$

Nous avons obtenu finalement que $G^*(u, v)$ et $F^*(\Lambda^*(-u, -v))$ ne sont simultanément finies que si

$$\varepsilon(u) \in B, \quad u + v = \lambda u_{0|\Gamma} \quad \text{et} \quad v = -\chi_1 u,$$

ce qui entraîne que $u = \lambda u_0$ sur Γ_v et le problème dual s'écrit :

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{u \\ \varepsilon(u) \in K \\ u = \lambda u_{0|\Gamma}}} \left\{ -\int \psi^*(\varepsilon(u)) + \int fu + \int Fu \right\},$$

ce qui est exactement (1.11).

ii) Nous appliquons maintenant un critère de Ekeland-Temam [5] :

> S'il existe $\sigma_0 \in V$, $F(\sigma_0) < +\infty$ et G est continue en $\Lambda\sigma_0$, alors $\inf \mathscr{P} = \operatorname{Sup} \mathscr{P}^*$ (et $\operatorname{Sup} \mathscr{P}^*$ a au moins une solution).

Ce critère s'applique ici pour σ_0 quelconque, puisque G est partout continue. Nous avons donc démontré le théorème, moyennant la démonstration de la Proposition 1.2.

Démonstration de la proposition 1.2.

$$(1.26) \quad F^*(\Lambda^*(u, v)) = \operatorname*{Sup}_{\sigma \in V} \left[\int_\Omega u \operatorname{div} \sigma + \int_\Gamma \sigma.nv - \int_\Omega \psi(\sigma) + \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma.nu^0 \right]$$
$$\geqq \operatorname*{Sup}_{\sigma \in \mathscr{D}(\Omega, E)} \left[-\langle \varepsilon(u), \sigma \rangle - \int \psi(\sigma) \right].$$

Cherchons des conditions nécessaires pour que le 1er membre de (1.26) soit fini. En notant C cette valeur finie on a en vertu de (1.7)

$$-\langle \varepsilon(u) : \sigma \rangle \leqq C + C_2(|\sigma|_1 + \operatorname{mes} \Omega)$$

pour tout σ dans $\mathscr{D}(\Omega, E)$. En particulier la distribution $(-\varepsilon(u))$ est bornée sur les bornés de $L^1(\Omega, E)$, et s'identifie donc à un élément de $L^\infty(\Omega, E)$. Mais un résultat d'Ekeland-Temam [5] permet d'affirmer que

$$\sup_{\sigma \in \mathscr{D}(\Omega,E)} \left\{ - \langle \varepsilon(u), \sigma \rangle - \int \psi(\sigma) \right\} =$$

$$= \sup_{\sigma \in L^1(\Omega,E)} \left\{ \langle - \varepsilon(u) : \sigma \rangle - \int \psi(\sigma) \right\} = - \int_\Omega \psi^*(- \varepsilon(u))$$

où ψ^* désigne la conjuguée de la fonction convexe ψ. Par conséquent

$$\int \psi^*(- \varepsilon(u)) = \frac{1}{2} \int A(- \varepsilon(u), - \varepsilon(u)) \quad \text{si} \quad - \varepsilon(u) \in B$$

$$+ \infty \text{ sinon} .$$

et donc l'hypothèse $F^*(\Lambda^*(u, v))$ finie entraîne que $- u \in \mathscr{B}$. Ensuite la régularité de u ainsi obtenue (l'appartenance de u à $\mathbb{H}^1(\Omega)$ suffit) nous permet d'utiliser la formule de Green :

$$F^*(\Lambda^*(u, v)) = \sup_{\substack{\sigma \in L^2 \\ \operatorname{div} \sigma + f = 0}} \left\{ - \int \varepsilon(u)\, \sigma + \int \sigma . n(u + v) - \int \psi(\sigma) \right.$$

$$\left. + \int \sigma . n\, \lambda u_0 \right\}$$

et nous allons montrer que sous l'hypothèse $F^*(\Lambda^*(u, v))$ finie, v coïncide avec la trace de $- u - \lambda u_0$ sur Γ. Supposons donc, par l'absurde, qu'il n'en soit pas ainsi ; il existe alors (par le Théorème de Hahn Banach) un élément t_0 de $H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que

$$(1.27) \qquad \int_\Omega t_0(u + v + \lambda u_0) > 0 .$$

Il est classique qu'il existe alors σ_0 dans X tel que

$$t_0 = \sigma_0 . n .$$

Nous définissons alors, pour m dans $\mathbb{R}^+$:

$$(1.28) \qquad \Omega_m = \left\{ x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) < \frac{1}{m^3} \right\}$$

et soit φ_m une fonction de $\mathscr{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$(1.29) \quad \varphi_m = m \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\,, \quad 0 \leqq \varphi_m \leqq m, \quad \mathrm{Supp}^t(\varphi_m) \subset \Omega_m\,.$$

Alors $\varphi_m\,\sigma^0$ est dans X et

$$(1.30) \quad \left| \int - \varepsilon(u)\,\varphi_m\,\sigma^0\,dx - \int \psi(\varphi_m\,\sigma^0) \right| \leqq C\,|\,\varphi_m\,\sigma^0\,|_1\,.$$

Or

$$|\,\varphi_m\,\sigma^0\,|_1 \leqq |\,\varphi_m\,|_2\,|\,\sigma^0\,|_2$$

et

$$(1.31) \quad |\,\varphi_m\,|_2 \leqq (m^2 \text{ mes } \Omega_m)^{1/2} \leqq \frac{C}{m^{1/2}}\,.$$

D'autre part

$$(1.32) \quad \lim_{m \to +\infty} \int_{\partial\Omega} \varphi_m\,\sigma^0.n(u+v+\lambda u_0)\,ds = \lim_{m\to\infty} \left[m \int_{\Omega} \sigma^0.n(u+v+\lambda u_0) \right] = +\infty\,.$$

(1.30), (1.31) et (1.32) sont absurdes si on suppose que $F^*(\Lambda^*(u, v))$ est fini. Les conditions nécessaires sur (u, v) pour que $F^*(\Lambda^*(u, v)) < +\infty$ sont donc :

$$(1.33) \quad -u \in \mathscr{B}, \quad u + v + \lambda u_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\,.$$

Réciproquement si (1.33) est satisfaite, nous avons, en revenant à la définition de $F^*(\Lambda^*(u, v))$

$$\begin{aligned} F^*(\Lambda^*(u, v)) &= \sup_{\sigma \in X} \left\{ \int - u \operatorname{div} \sigma - \int \psi(\sigma) + \int \sigma.n\lambda u_0 + \int \sigma.nv \right\} \\ &= \sup \left\{ - \int \varepsilon(u) : \sigma - \int \psi(\sigma) + \int \sigma.n(u + v + \lambda u_0) \right\} \\ &= \sup \left\{ - \int \varepsilon(u) : \sigma - \int \psi(\sigma) \right\} \\ &= - \int \psi^*(-\varepsilon(u))\,, \end{aligned}$$

et la Proposition 1.2 est montrée. □

Remarque 1.2. Lorsque $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$, Γ^* est une sous-variété de dimension $N - 2$ et de classe C^2 incluse dans Γ_0. Les définitions et démonstrations précédentes sont inchangées si l'on suppose que Γ^* n'est pas contenu dans un $N - 2$ plan. Dans le cas contraire, il existe des déplacements rigides s'annulant sur Γ^*. On introduit alors de nouveaux espaces :

$$\mathscr{R}_{\Gamma^*} = \{ r \in \mathscr{R}, r = 0_{|\Gamma^*} \}$$
$$\hat{\mathscr{R}}_{\Gamma^*} = \{ (r, -\gamma_0 r), r \in \mathscr{R}, r = 0_{|\Gamma^*} \}$$
$$Y = L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)_{/\hat{\mathscr{R}}_{\Gamma^*}}$$

de sorte que le dual de Y n'est autre que l'orthogonal de $\hat{\mathscr{R}}_{\Gamma^*}$ dans $L^2(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Les convexes $\mathbb{K}$ et $\hat{\mathbb{K}}$ doivent être modifiés comme suit :

$$\mathbb{K} = \{ \gamma_0 u, u \in H^1{}_{/\mathscr{R}_{\Gamma^*}}, \varepsilon(u) \in B, u = 0_{|\Gamma^*} \}$$
$$\hat{\mathbb{K}} = \{ (\overline{u, \gamma_0 u}), \varepsilon(u) \in B, u = 0_{|\Gamma^*} \} .$$

De même nous définissons de nouvelles fonctionnelles $\mathscr{C}$ et $\hat{\mathscr{C}}$:

$$\mathscr{C}(q) = \operatorname*{Sup}_{\substack{\varepsilon(u) \in B \\ u = 0_{|\Gamma^*}}} \langle q, \bar{u} \rangle \quad \bar{u} \text{ est la projection orthogonale de } u \text{ sur } R^{\perp}$$

$$\hat{\mathscr{C}}(p, q) = \operatorname*{Sup}_{(u, \gamma_0 u) \in \hat{\mathbb{K}}} \int pu + \int q\gamma_0 u$$

et nous définissons les problèmes relaxés

$$(1.34) \quad \inf \left\{ \int \psi(\sigma) + \mathscr{C}(F - \sigma.n) - \lambda \int \sigma.nu_0 \right\}.$$

$$(1.35) \quad \inf \left\{ \int \psi(\sigma) + \hat{\mathscr{C}}(\operatorname{div} \sigma + f, F - \sigma.n) - \lambda \int \sigma.nu_0 \right\},$$

et pour voir que

$$(1.38) \qquad \inf(1.35) = \inf(1.10)$$

nous montrons que le dual de (1.35) n'est autre que

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{u \in H^1{}_{/\mathscr{R}^*} \\ u = u_{0|\Gamma_0}}} \left\{ - \int \psi^*(\varepsilon(u)) + \lambda Lu \right\}$$

Donnons rapidement les modifications à apporter à la démonstration du Théorème 1.2 pour établir ici que (1.38) a lieu. Y et Y^* sont définis comme ci-dessus, V et Λ sont inchangés, de même que F et G. Nous avons l'analogue de la Proposition 1.2.

$$F^*(\Lambda^*(\overline{u,v})) = \left| \begin{array}{ll} -\psi^*(-\varepsilon(u)) & \text{si} \quad -\varepsilon(u) \in B \\ & \phantom{\text{si}} \quad u + v + \lambda u_0 = 0_{|\Gamma} \\ & \phantom{\text{si}} \quad u = 0_{|\Gamma^*} \\ +\infty \text{ sinon}. & \end{array} \right.$$

et

$$G^*(u,v) = \left| \begin{array}{ll} -\int fu + \int Fv & \text{si} \quad \varepsilon(u) \in B \\ & \phantom{\text{si}} \quad u = 0_{|\Gamma^*} \\ & \phantom{\text{si}} \quad v = -u_{|\Gamma}. \\ +\infty \text{ sinon}. & \end{array} \right.$$

On obtient par conséquent le résultat voulu (1.38).

Remarque 1.3. Lorsque $\Gamma_0 = \varnothing$, $\Gamma^* = \varnothing$, $\mathcal{R}_{\Gamma^*} = \mathcal{R}$ et compte tenu de ces propriétés et de la Remarque 1.2 le résultat est encore valable.

2. RAPPELS SUR L'ANALYSE DE BLOCAGE : COMPORTEMENT DES SUITES MINIMISANTES DE (1.10).

Nous rappelons l'énoncé du problème d'analyse de blocage, introduit dans [2] :

$$(2.1) \qquad \inf_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega, E) \\ \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ dans } \Omega \\ \sigma.n = 0_{|\Gamma_1} \\ \int \sigma.n u_0 = 1}} \int \psi_\infty(\sigma)$$

et nous introduisons aussi le problème

$$(2.2) \qquad \operatorname*{Sup}_{\substack{\exists u,\, \varepsilon(u) \in B \text{ et} \\ u = \lambda u_{0|\Gamma_0}}} \{\lambda\} = \bar{\lambda}$$

Il est montré dans [2] que

$$\inf(2.1) = \operatorname{Sup}(2.2),$$

et (2.2) admet une solution.

Nous introduisons le problème relaxé d'analyse limite

$$(2.3)\qquad \inf_{\operatorname{div}\sigma=0}\left\{\int_\Omega \psi_\infty(\sigma) + \mathscr{C}(-\sigma.n) + \bar{\lambda}\,|\,\hat{L}\sigma - 1\,|\right\}$$

où $\hat{L}\sigma = \int_{\Gamma_0} \sigma.nu_0$, et nous nous proposons de montrer que le dual de (2.3) n'est autre que (2.2). A cette fin nous introduisons comme on l'a déjà fait dans la Section 1 un problème intermédiaire, dans lequel on relaxe aussi la condition div $\sigma = 0$. Il s'agit du problème

$$(2.4)\qquad \inf\left\{\int_\Omega \psi_\infty(\sigma) + \hat{\mathscr{C}}(\operatorname{div}\sigma, -\sigma.n) + \bar{\lambda}\,|\,\hat{L}\sigma - 1\,|\right\}.$$

Nous établirons que

$$(2.5)\qquad \inf(2.4) = \operatorname{Sup}(2.2)$$

et nous en déduirons le résultat voulu puisque

$$\operatorname{Sup}(2.2) = \inf(2.1) \geqq \inf(2.3) \geqq \inf(2.4) = \operatorname{Sup}(2.2).$$

Pour établir (2.5) nous calculons le dual de (2.4) et nous utilisons le critère classique d'Ekeland-Temam, déjà employé dans la Section 1. Dans ce but nous reprenons le cadre de dualité déjà employé dans la Section 1 : les espaces V et Y sont inchangés, de même que l'opérateur Λ. Les fonctionnelles convexes F et G sont maintenant définies comme suit

$$F(\sigma) = \psi_\infty(\sigma) + \bar{\lambda}\,|\,\hat{L}\sigma - 1\,|$$

$$G(p.q) = \hat{\mathscr{C}}(p, -q).$$

Nous montrons plus loin le résultat.

PROPOSITION 2.1.

$$F^*(\Lambda^*(u, v)) = \left|\begin{array}{l} \xi \quad \text{si} \quad -\varepsilon(u) \in B \quad et \quad \exists \xi \in \mathbb{R},\ |\,\xi\,| \leqq \bar{\lambda} \quad et \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u + v = \xi u_0 \\ +\infty \ sinon. \end{array}\right.$$

Rappelons maintenant que

$$G^*(u, v) = \hat{\mathcal{G}}^*(u, -v) = \left| \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \quad u, -v \in \mathbb{K} \\ +\infty \quad \text{sinon}. \end{array} \right.$$

Alors ces résultats permettent d'écrire le dual de (2.4) sous la forme

$$\operatorname{Sup} \{ -F^*(\Lambda^*(u, v)) - G^*(-u, -v) \},$$

soit encore

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{-\varepsilon(u) \in B \\ u = -v_{|\Gamma_1} \\ v = 0_{|\Gamma_0} \\ u = \xi u_0 \\ |\xi| \leqq \bar{\lambda}}} \{ -\xi \}$$

D'où, en changeant u en $-u$ et ξ en $-\xi$:

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{\varepsilon(u) \in B \\ u = \xi u_{0|\Gamma_0} \\ |\xi| \leqq \bar{\lambda}}} \{ \xi \}$$

ce qui est exactement (2.2). Il nous reste à démontrer la Proposition 2.1.

Démonstration de la Proposition (2.1).

$$\begin{aligned} F^*(\Lambda^*(u, v)) &= \operatorname{Sup} \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} \sigma + \int_\Gamma v\sigma . n - \int_\Omega \psi_\infty(\sigma) - \bar{\lambda} \,|\, \hat{L}\sigma - 1 \,| \right\} \\ &\geqq \operatorname*{Sup}_{\sigma \in \mathcal{D}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} \sigma - \int_\Omega \psi_\infty(\sigma) \right\}. \end{aligned}$$

On a déjà vu dans la Section 1 que si ce Sup est fini, $-\varepsilon(u) \in B$. En utilisant alors la formule de Green, on est ramené à calculer

$$\begin{aligned} a = \operatorname{Sup} \Big\{ \int_\Gamma \sigma . n(u + v) - \bar{\lambda} \,|\, \hat{L}\sigma - 1 \,| \,+ \\ + \int_\Omega -\varepsilon(u) : \sigma - \int_\Omega \psi_\infty(\sigma) \Big\}. \end{aligned}$$

Soit σ_0 tel que $\hat{L}\sigma_0 = 1$. Alors a s'écrit

$$a = \int_\Gamma (\sigma_0 . n)(u + v) + \operatorname*{Sup}_{\sigma, L\sigma = 0} \left\{ \int_\Gamma (\sigma . n)(u + v) - \bar{\lambda} \, | \hat{L}\sigma | - \right.$$

$$\left. - \int_\Omega \varepsilon(u) : \sigma + \sigma_0) - \int_\Omega \psi_\infty(\sigma_0 + \sigma) \right\} \geqq$$

$$\geqq \int_\Gamma (\sigma_0 . n)(u + v) + - (\varepsilon(u) : \sigma_0) - \psi_\infty(\sigma_0)$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{\sigma, \hat{L}\sigma = 0} \left\{ \int (\sigma . n)(u + v) - \bar{\lambda} \, | \hat{L}\sigma | - \right.$$

$$\left. - \int_\Omega \varepsilon(u) : (\sigma) - \int_\Omega \psi_\infty(\sigma) \right\} . \text{ (}^1\text{)}$$

Supposons maintenant qu'il existe σ_1 tel que

$$\int_\Gamma (\sigma_1 . n)(u + v) - \bar{\lambda} \, | L\sigma_1 | > 0 .$$

On utilise alors un procédé déjà employé dans la Section 1. Soit donc Ω_m, φ_m définis par (1.28) et (1.29). $\varphi_m \, \sigma_1$ est admissible pour le supremum dans a et nous avons

$$\left| \int_\Omega - \varepsilon(u) . \varphi_m \, \sigma_1 - \int_\Omega \psi_\infty(\varphi_m \, \sigma_1) \right| \leqq C \, | \varphi_m \, \sigma_1 |_1 \leqq \frac{C}{m^{1/2}} .$$

D'autre part :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_\Gamma \varphi_m(\sigma_1 . n)(u + v) - \bar{\lambda} \, | \hat{L}(\varphi_m \, \sigma_1) |$$

$$= \lim_{m \to +\infty} m \left\{ \int_\Gamma \sigma_1 . n(u + v) - \bar{\lambda} \, | \hat{L}\sigma_1 | \right\}$$

$$= + \infty .$$

Nous obtenons par conséquent qu'une condition nécessaire pour que

(1) On a utilisé l'inégalité $\psi_\infty(\sigma + \sigma_0) \leqq \psi_\infty(\sigma) + \psi_\infty(\sigma_0)$ qui est une conséquence de : ψ_∞ homogène et convexe.

$F^*(\Lambda^*(u, v))$ soit fini est que

$$(2.6) \qquad \int_\Gamma \sigma . n(u + v) - \bar{\lambda} \mid \hat{L}\sigma \mid \leqq 0 ,$$

pour tout σ. En particulier la forme linéaire

$$\sigma \to \int_\Gamma \sigma . n(u + v)$$

doit s'annuler sur le noyau $\hat{L}$; il existe donc un réel ξ, tel que

$$u + v = \xi u_0 .$$

En utilisant à nouveau (2.6) avec σ tel que $L(\text{Sign}\,(\xi)\,\sigma) > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\geqq \mid \xi \mid L(\text{Sign}\,(\xi)\,\sigma) - \bar{\lambda} \mid L(\sigma \text{ sign } \xi) \mid \\ &= (\mid \xi \mid - \bar{\lambda}) \mid L(\text{sign}\,(\xi)\,\sigma) \mid \end{aligned}$$

d'où l'inégalité

$$\mid \xi \mid \leqq \bar{\lambda}$$

qui en retour est suffisante pour que (2.6) soit vérifié. Nous pouvons vérifier que les conditions $-\varepsilon(u) \in B$, $u + v = \xi u_0$ et $\mid \xi \mid \leqq \bar{\lambda}$ sont suffisantes pour que réciproquement, $F^*(\Lambda^*(u, v))$ soit fini. En outre, dans ces conditions

$$\begin{aligned} a &\leqq \int_\Gamma (\sigma_0 . n)(u + v) + \text{Sup} \left\{ \int_\Gamma \sigma . n(u + v) - \bar{\lambda} \mid \hat{L}\sigma \mid \right\} + \\ &\quad + \text{Sup} \left\{ \int_\Omega - \varepsilon(u) : (\sigma + \sigma_0) - \int_\Omega \psi_\infty(\sigma + \sigma_0) \right\} \\ &= \int_\Gamma (\sigma_0 . n)(u + v) + 0 + 0 \\ &= \xi \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} a &\geqq \int_\Gamma \sigma_0 . n(u + v) + \underset{\sigma \in \mathcal{D}(\Omega)}{\text{Sup}} \left\{ - \int_\Omega \varepsilon(u)(\sigma + \sigma_0) - \int_\Omega \psi_\infty(\sigma + \sigma_0) \right\} \\ &= \int_\Gamma \sigma_0 . n(u + v) + \underset{\sigma \in L^1}{\text{Sup}} \left\{ - \int_\Omega \varepsilon(u) : (\sigma + \sigma_0) - \int_\Omega \psi_\infty(\sigma + \sigma_0) \right\} \end{aligned}$$

par densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans L^1, soit encore, en faisant un changement de variable :

$$\begin{aligned} a &\geqq \int_\Gamma \sigma_0 . n(u+v) + \operatorname*{Sup}_{\sigma \in L^1} \left\{ - \int_\Omega \varepsilon(u) : \sigma + \int_\Omega \psi_\infty(\sigma) \right\} \\ &= \xi + 0 , \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition 2.1. □

Dans le cas où le convexe n'est pas symétrique nous devons aussi introduire les problèmes relaxés qui concernent la charge limite inférieure, à savoir :

$$(2.7) \qquad \inf_{\operatorname{div} \sigma = 0} \left\{ \int_\Omega \psi_\infty(\sigma) + \mathscr{C}(-\sigma . n) + \underline{\lambda} \mid \hat{L}\sigma + 1 \mid \right\}$$

où $\underline{\lambda}$ est défini dans [2] par :

$$\underline{\lambda} = \operatorname{Sup} \{ -\xi \}$$
$$\exists u, \ \varepsilon(u) \in B, \ u = \xi u_{0|\Gamma_0} .$$

On démontrerait comme précédemment que le dual de (2.7) n'est autre que

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{\exists u, \ \varepsilon(u) \in B \\ u = \xi u_{0|\Gamma_0}}} \{ -\xi \}$$

Nous concluons ce paragraphe en mettant en évidence l'utilité du problème dit d'analyse de blocage. Outre le problème d'existence d'une solution au problème d'analyse de blocage proprement dit, qui sera étudié au paragraphe 3, ces problèmes nous donnent des renseignements concernant la nature des suites minimisantes du problème de départ. Nous avons en effet le résultat, analogue à celui démontré en plasticité :

THÉORÈME 2.1 : *Soient* $\bar{\lambda}$ *et* $\underline{\lambda}$ *définis par* (2.2) *et* (2.7). *Alors* :

i) inf (1.10) $< +\infty$ *si et seulement si* $-\underline{\lambda} \leqq \lambda \leqq \bar{\lambda}$.

ii) *si* $-\underline{\lambda} < \lambda < \bar{\lambda}$ *les suites minimisantes au problème* (1.10) *sont bornées dans* $L^1(\Omega, E)$.

Démonstration.

i) Si $\Gamma_1 = \Gamma$, la condition $\int_\Omega fr + \int_\Gamma Fr = 0$ entraîne l'existence de σ tel que $\operatorname{div} \sigma + f = 0$, $\sigma . n = F_{|\Gamma_0}$. Si mes $\Gamma_0 > 0$ un tel σ existe toujours. Nous avons donc

$$\inf (1.10) < +\infty .$$

Ensuite si $-\underline{\lambda} \leqq \lambda \leqq \bar{\lambda}$ la définition de (2.2) entraîne qu'il existe u tel que $\varepsilon(u) \in B$ et $u = \lambda u_{0|\Gamma_0}$. En conséquence Sup (1.11) $> -\infty$ et compte tenu du Théorème 1.1 rappelé dans la Section 1 et démontré dans [2],

$$- \infty < \inf (1.10) < + \infty .$$

ii) Si $-\underline{\lambda} < \lambda < \bar{\lambda}$. Supposons par exemple que $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ et soit $\lambda_1 > 0$ tel que $\lambda < \lambda_1 < \bar{\lambda}$. On note $A(\lambda_1)$ l'infimum (fini) du problème

$$\inf_{\substack{\operatorname{div} \sigma + f = 0 \\ \sigma . n = F_{|\Gamma_1}}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) - \lambda_1 \int_{\Gamma_0} \sigma . n u_0 \right\}$$

et soit σ_m une suite minimisante du problème

$$\inf_{\substack{\operatorname{div} \sigma + f = 0 \\ \sigma . n = F_{|\Gamma_1}}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma . n u_0 \right\} .$$

On note c un réel positif tel que $\left| \int_\Omega \psi(\sigma_m) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma_m . n u_0 \right|$ est borné par c. On écrit ensuite

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int_\Omega \psi(\sigma_m) + \frac{\lambda}{\lambda_1} \left[\int_\Omega \psi(\sigma_m) - \lambda_1 \int_{\Gamma_0} \sigma_m . nu \right] = \int_\Omega \psi(\sigma_m) - \\ - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma_m . n u_0 \leqq c$$

d'où

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int_\Omega \psi(\sigma_m) \leqq c - \frac{\lambda}{\lambda_1} \left[\int_\Omega \psi(\sigma_m) - \lambda_1 \int_{\Gamma_0} \sigma_m . n u_0 \right] \\ \leqq c - \frac{\lambda}{\lambda_1} A(\lambda_1) ,$$

et par conséquent $\psi(\sigma_m)$ est bornée ; compte tenu des propriétés de coercivité de ψ, rappelées dans la Section 1, σ_m est donc bornée dans L^1.

3. ÉGALITÉ DES INFIMA

Dans ce paragraphe nous étendons le problème en contrainte et son problème relaxé à un espace plus grand que L^2. Dans ce but, nous rappelons la définition de l'espace

$$Z(\Omega) = \{ \sigma \in M^1(\Omega, E), \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \} ,$$

dont une étude détaillée est faite dans [1]. On y montre en particulier l'existence d'une « trace » $\sigma.n$ qui appartient au dual de $\gamma_0(U^\infty(\Omega))$ et qui coïncide avec $\sigma_{ij}\, n_j$ au sens ordinaire, lorsque σ est assez régulier. Le terme $\langle \sigma.n, u_0 \rangle$ qui interviendra dans le problème en contrainte étendu à Z sera pris en ce sens.

Nous rappelons maintenant, compte tenu de l'étude faite par Demengel-Temam [3], que lorsque σ est une mesure bornée sur Ω on peut définir une mesure bornée, notée $\psi(\sigma)$, dès que ψ a une croissance au plus linéaire à l'infini et possède une fonction asymptote, notée ψ_∞ (1). Lorsque ψ est de plus convexe, cette mesure possède des propriétés remarquables, pour lesquelles nous renvoyons à [3]. Nous pouvons donc prolonger le problème relaxé sous la forme (3.1) ci-dessous, tous les termes intervenant dans la fonctionnelle ayant alors un sens.

$$(3.1) \qquad \inf_{\substack{\sigma.n = F_{|\Gamma_1} \\ \sigma \in M^1(\Omega, E) \\ \operatorname{div} \sigma + f = 0}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) - \int_{\Gamma_0} \sigma.nu_0 \right\}$$

Nous supposons maintenant que Ω' est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, à bord C^2, tel que

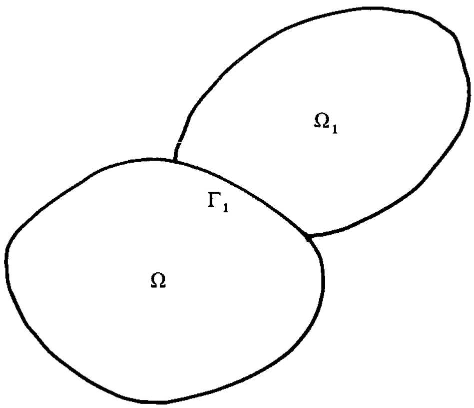
$$\Omega \cap \Omega' = \varnothing$$

$$\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega}' = \Gamma_1$$

et on définit Ω_1 par

$$\Omega_1 = \Omega \cup \Omega' \cup \Gamma_1 .$$

De tels ouverts sont représentés sur la figure 1 ci-dessous.



(1) On rappelle que $\psi_\infty(\xi) = \lim_{t \to +\infty} \dfrac{\psi(t\xi)}{t}$ dès que cette limite existe.

On suppose que σ_1 est un élément de $L^2(\Omega', E)$ tel que div $\sigma_1 \in L^2(\Omega', \mathbb{R}^N)$ et $\sigma_1 . n = F_{|\Gamma_1}$. Soit alors $\tilde{f}$ définie par

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ &= \operatorname{div} \sigma_1 \quad \text{dans} \quad \Omega'\end{aligned}$$

et aussi le sous-espace affine de $Z(\Omega_1, E)$:

$$\{ \sigma \in Z(\Omega_1, E) , \sigma/\Omega' = \sigma_1/\Omega' \} . \tag{3.2}$$

Lorsque $\sigma \in Z(\Omega_1, E)$, on a montré dans [1] que si $[\sigma . n]\, n$ désigne la discontinuité de la « trace » $[\sigma . n] . n$ sur la sous-variété Γ_1 intérieure à Ω_1, $[\sigma . n]\, n$ est une mesure bornée sur Γ_1, qui vérifie $|\, [\sigma . n] . n\, |_{M_1(\Gamma_1)} \leqq |\, \sigma\, |_{M_1(\Gamma_1)}\, |\, \varepsilon(n)\, |_\infty$; par conséquent lorsque $u \in U^\infty(\Omega)$ et $u = 0$ sur Γ^*, $\chi_1\, u$ est donc continue, et vérifie $|\, \chi_1\, u\, |_\infty \leqq |\, u\, |_{\mathscr{C}(\bar{\Omega})} \leqq |\, u\, |_{U^\infty(\Omega)}$, le terme $\int [\sigma . n . n]\, \chi_1(u . n)$ a bien un sens et vérifie $\left| \int [\sigma . n . n]\, \chi_1(u . n) \right| \leqq |\, \sigma\, |_{M^1(\Gamma_1)} (|\, \varepsilon(u)\, |_\infty + |\, u\, |_\infty)$. Nous donnons un sens dans ce qui suit au terme $[\sigma . n]\, \chi_1\, u_t$. Ce résultat dépend d'un certain nombre de définitions et de propositions établies dans la Section 1 de [1]. Nous les rappelons ici.

PROPOSITION 3.1 : *Soit Σ une courbe C^2 orientée de $\bar{\Omega}$, φ un paramétrage de Σ ; il existe alors une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in U^\infty(\Omega)$, et pour tous λ, λ' paramètres réels :*

$$\begin{aligned}|\, \vec{u}(\varphi(\lambda)) . \vec{\varphi}'(\lambda) - \vec{u}(\varphi(\lambda')) . \varphi'(\lambda') &\leqq C(N) (|\, \varphi'\, |_\infty\, |\, \varepsilon(u)\, |_\infty + \\ &+ |\, \varphi''\, |_\infty\, |\, u\, |_\infty)\, |\, \lambda' - \lambda\, | .\end{aligned}$$

DÉFINITION 3.1.

$$\begin{aligned}X &= \{ u \in U^\infty(\Omega),\ \textit{il existe}\ C > 0,\ \textit{telle que} \\ &\forall x \in \bar{\Omega},\ |\, u(x)\, | \leqq C\, d(x, \Gamma^*) \} \\ X_1 &= \{ u \in U^\infty(\Omega), \chi_1\, u \in \gamma_0(U^\infty(\Omega)) \} .\end{aligned}$$

PROPOSITION 3.2 : *X coïncide avec X_1, algébriquement et topologiquement.*

Le terme $[\sigma . n]\, \chi_1\, u_t$ aura un sens (resp. $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{\substack{\varepsilon(u) \in B \\ u = 0_{|\Gamma^*}}} [\sigma . n]\, \chi_1\, u_t < + \infty$) si nous montrons que u appartient à X_1, ou encore à X (resp. si $\{ \chi_1\, u_t, \varepsilon(u) \in B, u = 0/\Gamma^* \}$ est borné dans $\gamma_\tau(U^\infty(\Omega))$). Toutes ces conditions seront remplies si on montre l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\forall u \in U^{\infty}(\Omega)$, $\varepsilon(u) \in B$, $u = 0_{|\Gamma^*}$, $\forall x \in \Omega$:

$$(3.3) \qquad | u_t(x) | \leqq C d(x, \Gamma^*) .$$

Pour démontrer (3.3) on reprend les notations de la preuve de la Proposition (3.1). On a localement

$$\Omega = \{ (x', x_N), x' \in \mathcal{O}', x_N < a(x') \}$$

avec a une fonction C^1, et d'un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$.

On note $\hat{\Gamma}^* = \{ (x', 0), x \in \Gamma^* \}$, $p(x')$ la projection de x' sur $\hat{\Gamma}^*$ et $\vec{e}$ le vecteur unitaire

$$\vec{e} = \frac{- p(x') + x'}{| x' - p(x') |} .$$

Soit Σ la courbe de paramétrage φ définie par

$$\varphi(\lambda) = p(x') + \lambda e + a(p(x') + \lambda \vec{e}) e_N$$

qui est tracée sur $\overline{\Omega}$. En appliquant alors la Proposition 3.1 entre les points $\varphi(0)$ et $\varphi(| x' - p(x') |)$ on obtient

$$\begin{aligned} | u_t(x', a(x')) | &\leqq C_1 \, | u |_{U^{\infty}(\Omega)} \, | x' - p(x') | \\ &\leqq C \, | u |_{U^{\infty}(\Omega)} \, d(x, \Gamma^*) , \end{aligned}$$

car il est facile de voir que $| x' - p(x') | \leqq C \, d(x, \Gamma^*)$ (pour plus de détails cf. [1]). On a donc bien le résultat souhaité.

Ces remarques étant faites, nous pouvons à présent expliciter le terme relaxé $\mathcal{C}(F - \sigma . n)$ lorsque $\sigma \in Z(\Omega_1, E)$ et $\sigma = \sigma_1$ sur Ω' ; il s'agit de

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(F - \sigma . n) = \sup_{\substack{u, \, \varepsilon(u) \in B \\ u = 0_{|\Gamma^*}}} & \left\{ \int (F - \sigma . n) . n(\chi_1 \, u . n) + \right. \\ & \left. + \langle (F - \sigma . n) . t, \chi_1 \, u_t \rangle \right\} . \end{aligned}$$

On a en outre, en utilisant des remarques déjà faites

$$(3.4) \qquad \mathcal{C}(F - \sigma . n) \leqq \sup_{\substack{u, \, \varepsilon(u) \in B \\ u = 0_{|\Gamma^*}}} \{ 2 \, | \sigma |_{Z(\Omega_1, E)} \, | u |_{U^{\infty}(\Omega)} \} \leqq C \, | \sigma |_{Z(\Omega_1, E)}$$

dès que Γ^* est une sous-variété qui n'est pas un $N - 2$ plan en utilisant le

Lemme 1.1 de la Section 1 [1]. Nous définissons à présent le problème relaxé du problème de blocage. Il s'agit de :

$$(3.5)\qquad \inf_{\substack{\sigma \in Z(\Omega_1) \\ \operatorname{div} \sigma + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \sigma = \sigma_1 \text{ dans } \Omega'}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) + \mathcal{C}(F - \sigma.n) - \int_{\Gamma_0} \sigma.nu_0 \right\}$$

et nous démontrons dans ce qui suit le

THÉORÈME 3.1 : $\inf(3.5) = \inf(1.10)$.

Démonstration : Nous avons aisément

$$\begin{aligned}
\inf(1.10) &= \inf_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega, E) \\ \operatorname{div} \sigma + \tilde{f} = 0 \\ F - \sigma.n = 0_{|\Gamma_1}}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma.nu_0 \right\} \\
&= \inf_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega_1, E) \\ \operatorname{div} \sigma + \tilde{f} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \sigma = \sigma_1 \text{ sur } \Omega'}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma.nu_0 \right\} \\
&= \inf_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega_1, E) \\ \operatorname{div} \sigma + \tilde{f} = 0/\Omega_1 \\ \sigma = \sigma_1/\Omega'}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) + \mathcal{C}(F - \sigma.n) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma.nu_0 \right\} \\
&\geqq \inf_{\substack{\sigma \in Z(\Omega_1, E) \\ \operatorname{div} \sigma + \tilde{f} = 0/\Omega \\ \sigma = \sigma_1/\Omega'}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) + \mathcal{C}(F - \sigma n) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma.nu_0 \right\} \\
&= \inf(3.5)\,.
\end{aligned}$$

Nous montrons maintenant l'inégalité $\inf(3.5) \geqq \inf(1.24)$; en utilisant alors le Théorème 1.2, nous obtiendrons le résultat voulu. Soit donc $\sigma \in Z(\Omega_1, E)$, tel que $\operatorname{div} \sigma + \tilde{f} = 0$, $\sigma = \sigma_1/\Omega'$. D'après le théorème 0.1 appliqué à σ/Ω, il existe $\sigma_m \in L^2(\Omega, E)$, telle que $|\sigma_m|$ converge vers $|\sigma|$ étroitement, et

$$(3.6)\qquad \int_\Omega \psi(\sigma_m) \to \int_\Omega \psi(\sigma)\,.$$

$$(3.7)\qquad \operatorname{div} \sigma_m + f = 0\,.$$

[1] On montrera plus précisément plus loin que $\mathcal{C}(F - \sigma.n) \leqq \int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma)$.

La convergence étroite et le Théorème 0.3 de l'Introduction permettent d'affirmer la convergence de $\int \sigma_m . n u_0$ vers $\int \sigma . n u_0$. Il reste à vérifier que le terme $\mathcal{T}(F - \sigma_m . n)$ converge vers $\mathcal{T}(F - \sigma . n)$: par définition de $\mathcal{T}(F - \sigma_m . n)$ il existe pour tout m, u_m qui vérifie $\varepsilon(u_m) \in B$ et $u_m = 0_{|\Gamma^*}$, tel que

$$\mathcal{T}(F - \sigma_m . n) \leqq \int (F - \sigma_m . n) \chi_1 u_m + \frac{1}{m}.$$

Puisque u_m est bornée dans $U^\infty(\Omega)$ (d'après le Lemme 1.1 par exemple), et en utilisant à nouveau 1.12, on peut trouver u dans $U^\infty(\Omega)$ et $u_{m'}$ une sous-suite de u_m telle que

$$u_{m'} \to u \quad \text{dans} \quad \mathscr{C}(\overline{\Omega})$$
$$\varepsilon(u_{m'}) \to \varepsilon(u) \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible } * .$$

Ces conditions entraînent, grâce à un raisonnement déjà fait, que $\varepsilon(u) \in B$ et $u = 0_{|\Gamma^*}$. En faisant appel à la définition de $|\ |_{\gamma_\tau(U^\infty(\Omega))}$, il existe $v_{m'} \in U^\infty(\Omega)$ tel que $v_{m''} . n = 0_{|\Gamma}$ et

$$(v_{m'})_\tau = (\chi_1 u_m)_\tau \quad \text{et} \quad | v_{m'} |_{U^\infty(\Omega)} \leqq | u_{m'} |_{U^\infty(\Omega)} + \frac{1}{m'} (^1) .$$

Par un raisonnement maintenant classique, soit $v_{m''}$ une suite extraite de $v_{m'}$, et v dans $U^\infty(\Omega)$ tel que

$$v_{m''} \to v \quad \text{dans} \quad \mathscr{C}(\overline{\Omega})$$
$$\varepsilon(u_{m''}) \to \varepsilon(u) .$$

On a alors $v = 0$ sur Γ_0, et $v = v_\tau = (\chi_1 u)_\tau$ sur Γ_1. En utilisant la « formule de Green » (I.4) de l'Introduction, nous avons

$$\int_\Gamma (\sigma_m . n)_\tau (\chi_1 u_m)_\tau = \int (\varepsilon(v_m) : \sigma_m) + \int \operatorname{div} \sigma_m v_m .$$

D'après le Théorème 0.3 de l'Introduction, la mesure $\varepsilon(u_m) : \sigma_m$ converge étroitement vers $\varepsilon(v) : \sigma$. D'autre part $\int \operatorname{div} \sigma_m v_m$ converge évidemment vers

[1] En fait la propriété de compacité (1.12) permet de voir que les normes $| u |_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))}$, $| u |_{\gamma_\tau(U^\infty(\Omega))}$, et $| u |_{\gamma_\nu(U^\infty(\Omega))}$ sont atteintes.

$\int \operatorname{div} \sigma v$, de sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \int_\Gamma (\sigma_m . n)_\tau (\chi_1 u_m)_\tau &= \int_\Omega \varepsilon(v) : \sigma + \int_\Omega \operatorname{div} \sigma v \\ &= \int_\Gamma (\sigma . n)_\tau v_\tau \\ &= \int_\Gamma (\sigma . n)_\tau (\chi_1 u)_\tau .\end{aligned}$$

Maintenant la convergence uniforme de u_m vers u sur Γ entraîne celle de $\chi_1 u_m$ vers $\chi_1 u$ de sorte que

$$\int_{\Gamma_1} (F - \sigma_{m''} . n) . n u_{m''} . n \to \int_{\Gamma_1} (F - \sigma . n) . n (u . n) .$$

En récapitulant, nous avons obtenu

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\, \mathcal{C}(F - \sigma_m . n) &\leqq \overline{\lim} \int_\Gamma (F - \sigma_m . n) \chi_1 u_m + \frac{1}{m} \\ &\leqq \int_{\Gamma_1} (F - \sigma . n) . \chi_1 u \\ &\leqq \mathcal{C}(F - \sigma . n) .\end{aligned}$$

Cette inégalité, jointe à (3.6), (3.7), et à la convergence de $\int \sigma_m . n u_0$ vers $\int \sigma . n u_0$ entraîne que

$$\inf (1.24) \leqq \inf (3.5) ,$$

et compte tenu du Théorème (1.1), achève la démonstration du Théorème 3.1.

Remarque 2.1 : Il eut été plus naturel d'introduire le problème

$$(3.8) \qquad \inf_{\substack{\sigma \in (\Omega, E) \\ \operatorname{div} \sigma + f = 0}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) + \mathcal{C}(F - \sigma . n) - \int_{\Gamma_0} \sigma . n u_0 \right\} .$$

Mais il ne convient pas a priori. En effet lorsque σ est quelconque dans $Z(\Omega, E)$, $(F - \sigma . n) . n$ n'est pas en général une mesure bornée (cf. Section 3 de

[1]) ; on peut seulement dire qu'il appartient à $\gamma_0(U^\infty(\Omega))'$. D'autre part la condition $u = 0$ sur Γ^* n'est pas suffisante en général pour que $(\chi_1(u.n)) \in \gamma_0(U^\infty(\Omega))$. Le terme $\langle (F - \sigma.n).n\chi_1(u.n) \rangle$ n'aura donc en général pas de sens, En outre, on verra au cours de la démonstration du théorème d'existence dans la Section 4, que si σ est limite faible d'une suite minimisante pour (1.10), $(F - \sigma.n).n$ est bien une mesure bornée.

Remarque 3.1 : Lorsque $\bar\Gamma_0 \cap \bar\Gamma_1 = \emptyset$, les résultats obtenus dans la Section 3.1 sont encore valables en modifiant $\mathcal{C}$ et $\hat{\mathcal{C}}$ comme on l'a fait au cours de la Remarque 1.2 de la Section 1, et le seul point à démontrer est que si $\sigma \in Z(\Omega, E)$, et $|\sigma_m|$ converge vers $|\sigma|$, étroitement, $\psi(\sigma_m)$ converge vers $\psi(\sigma)$ étroitement, $\operatorname{div} \sigma_m + f = 0$, alors $\overline{\lim}\, \mathcal{C}(F - \sigma_m.n) \leqq \mathcal{C}(F - \sigma.n)$. Pour ce faire, on agit comme on l'a déjà fait. Par définition de $\mathcal{C}$, soit $u_m \in U^\infty(\Omega)$, u_m nulle sur Γ^*, $\varepsilon(u_m) \in B$, telle que

$$\mathcal{C}(F - \sigma_m.n) \leqq \int_{\Gamma_1} (F - \sigma_m.n)\,\bar{u}_m + \frac{1}{m}$$

où $\bar{u}_m$ est la projection de u_m sur $\mathcal{R}_{\Gamma^*}^\perp$. $\bar{u}_m$ est bornée dans $U^\infty(\Omega)$ et en utilisant (1.12) on peut trouver $\bar{u}$ dans $U^\infty(\Omega)$ (et dans $R_{\Gamma^*}^\perp$ aussi puisqu'il est fermé), tel que pour sous-suite $u_{m'}$, on a :

$$\bar{u}_{m'} \to \bar{u} \quad \text{dans} \quad \mathscr{C}(\bar\Omega)/\mathcal{R}_{\Gamma^*}$$
$$\varepsilon(\bar{u}_{m'}) \to \varepsilon(\bar{u}) \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } {}^*/\mathcal{R}_{\Gamma^*}\,.$$

On en déduit par un raisonnement maintenant classique que $\varepsilon(\bar{u}) \in B$, et $\bar{u} = 0_{|\Gamma}$. Puisque nous sommes dans le cas où $\bar\Gamma_1 \cap \bar\Gamma_0 = \emptyset$, on peut choisir φ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi = 1$ sur un voisinage ouvert de Γ_1 dans $\mathbb{R}_1$ dans $\mathbb{R}^N$, et le support de φ ne rencontre pas Γ_0. La « formule de Green » appliquée à $\bar{u}_m\, \varphi$ dans Ω donne :

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_m.n\bar{u}_m = \int_\Gamma \sigma_m.n\varphi\bar{u}_m$$
$$= \int_\Omega \varepsilon(\bar{u}_m\,\varphi)\,\sigma_m + \int_\Omega \operatorname{div} \sigma_m\,\bar{u}_m\,\varphi\,.$$

Et le Théorème 0.3 entraîne la convergence du membre de droite vers

$$\int_\Omega \varepsilon(\bar{u}\varphi)\,\sigma + \int_\Omega \operatorname{div} \sigma\bar{u}\varphi$$

qui vaut

$$\int_{\Gamma} \sigma . n\bar{u}\varphi = \int_{\Gamma_1} \sigma . n\bar{u} .$$

Remarque 3.2 : Nous avons l'analogue des résultats précédents pour le problème relaxé du problème d'analyse de blocage. Nous rappelons l'expression de ce problème, introduit dans la Section 2 :

$$(3.9) \qquad \inf_{\substack{\operatorname{div} \sigma = 0 \\ \sigma \in L^2(\Omega, E)}} \left\{ \int_{\Omega} \psi_{\infty}(\sigma) + \mathscr{C}(-\sigma . n) + \bar{\lambda} \mid \hat{L}\sigma - 1 \mid \right\}$$

et nous prolongeons le problème par la définition suivante

$$(3.10) \qquad \inf_{\substack{\sigma \in \Sigma(\Omega_1, E) \\ \sigma = 0_{|\Omega'} \\ \operatorname{div} \sigma = 0_{|\Omega_1}}} \left\{ \int_{\Omega} \psi_{\infty}(\sigma) + \mathscr{C}(-\sigma . n) + \bar{\lambda} \mid \hat{L}\sigma - 1 \mid \right\}$$

et nous établissons que inf (3.9) = inf (3.10). En effet on a immédiatement :

$$\inf (3.10) \leqq \inf (3.9) .$$

Pour l'inégalité inverse, soit $\sigma \in Z(\Omega_1, E)$, $\sigma = 0_{|\Omega'}$ $\operatorname{div} \sigma = 0_{|\Omega_1}$ et σ_m comme dans le Théorème 0.1 tel que

$$\sigma_m \in \mathscr{D}(\Omega, E) ,$$

$$| \sigma_m | \to | \sigma | \text{ étroitement sur } \Omega$$

$$\psi(\sigma_m) \to \psi(\sigma) \text{ étroitement sur } \Omega$$

$$\operatorname{div} \sigma_m = 0 \text{ dans } \Omega .$$

Comme on l'a déjà vu, on a alors

$$\mathscr{C}(-\sigma_m . n) \to \mathscr{C}(-\sigma . n)$$

et aussi

$$\int \sigma_m . nu_0 \to \int \sigma . nu_0 ,$$

de sorte que $\hat{L}\,\sigma_m \to \hat{L}\sigma$ et que

$$\int_\Omega \psi(\sigma_m) + \mathcal{C}(-\,\sigma_m.n) + \bar{\lambda}\,|\,\hat{L}\sigma_m - 1\,|$$

converge vers

$$\int_\Omega \psi(\sigma) + \mathcal{C}(-\,\sigma.n) + \bar{\lambda}\,|\,\hat{L}\sigma - 1\,|$$

et démontre que $\inf(3.9) = \inf(3.10)$.

4. THÉORÈMES D'EXISTENCE

4.1. Existence pour le problème relaxé du problème en contrainte

Nous cherchons dans cette section à établir l'existence d'une solution au problème relaxé (3.4) sous des hypothèses assez faibles. Pour plus de commodité, nous rappelons les problèmes déjà utilisés.

$$(4.1)\qquad \inf_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega)\\ \operatorname{div}\sigma + f = 0\\ \sigma.n = F_{|\Gamma_1}}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma.nu_0 \right\}$$

$$(4.2)\qquad \operatorname{Sup}_{\substack{u,\\ \varepsilon(u) \in B\\ u = u_{0|\Gamma_0}}} \left\{ -\int_\Omega \psi^*(\varepsilon(u)) + \int_\Omega fu + \int_{\Gamma_1} Fu \right.$$

$$(4.3)\qquad \inf_{\substack{\sigma \in Z(\Omega_1, E\\ \operatorname{div}\sigma + f - 0}} \left\{ \int_\Omega \psi(\sigma) + \mathcal{C}(F - \sigma.n) - \lambda \int_{\Gamma_0} \sigma.nu_0 \right\}$$

et nous énonçons le

THÉORÈME. *On suppose que* $-\,\lambda < \lambda < \bar{\lambda}$. *Alors de toute suite minimisante au Problème* (4.1) *on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans* $M^1(\Omega_1, E)$ *vers une solution de* (4.3).

Démonstration : Puisque $-\,\lambda < \lambda < \bar{\lambda}$ d'après le Théorème (2.1), inf (4.1) est fini et toute suite minimisante σ_m est bornée dans $L^1(\Omega, E)$. Soit alors $\tilde{\sigma}_m$ définie dans Ω_1 par

$$\tilde{\sigma}_m = \left|\begin{array}{l} \sigma_m \text{ dans } \Omega \\ \sigma_1 \text{ dans } \Omega'. \end{array}\right.$$

$\tilde{\sigma}_m$ appartient à $L^2(\Omega, E)$ et div $\tilde{\sigma}_m + \tilde{f} = 0$ dans Ω_1 car $\sigma_m . n = F$ sur Γ_1. $\tilde{\sigma}_m$ est bornée dans $L^1(\Omega_1, E)$ (puisque σ_m est bornée dans $L^1(\Omega, E)$. On peut donc extraire de $\tilde{\sigma}_m$ une sous-suite qui converge vaguement vers $\sigma \in Z(\Omega_1, E)$. Puisque div $\tilde{\sigma}_m$ converge vers div σ dans $\mathscr{D}'(\Omega_1, E)$, div $\sigma + \tilde{f} = 0$ dans Γ_1. En outre $\sigma = \sigma_1$ dans Ω' ; il s'agit de montrer maintenant que σ est bien solution du problème (4.3). Pour cela nous utilisons la Proposition 4.1 :

PROPOSITION 4.1 : i) *Pour tout* $\sigma \in \mathscr{D}(\Omega_1, E)$ *et pour tout* $u \in U^{\infty}(\Omega)$, $\varepsilon(u) \in B$, *l'inégalité suivante a lieu au sens des mesures :*

$$(4.4) \qquad \psi(\sigma) \geqq (\varepsilon(u) : \sigma) - \psi^*(\varepsilon(u)) .$$

ii) *On définit sur* Γ_1 *la distribution* $\varepsilon(u) : \sigma_{/\Gamma_1}$ par

$$(4.5) \qquad \langle \varepsilon(u) : \sigma, \varphi \rangle = \int_{\Gamma_1} [\sigma . n]\, u\varphi - \int_{\Gamma_1} \sigma u \,\nabla\varphi \ \textit{lorsque}\ \varphi \in \mathscr{D}(\Gamma_1) .$$

Alors $\varepsilon(u) : \sigma_{|\Gamma_1}$ *est une mesure bornée sur* Γ_1, *qui vérifie l'inégalité entre mesures* :

$$(4.6) \qquad \varepsilon(u) : \sigma_{|\Gamma_1} \leqq \psi_\infty(\sigma)_{|\Gamma_1} .$$

Admettons un instant cette proposition. Pour $\lambda > 0$ on définit le voisinage de Γ_0 dans $\mathbb{R}^N$:

$$(4.7) \qquad \Omega_\lambda = \{ x \in \mathscr{R}^N, d(x, \Gamma_0) < \lambda \} .$$

Pour $\delta > 0$ soit φ_δ une fonction de $\mathscr{D}(\Omega_{2\delta})$ qui vaut un sur Ω_δ, $0 < \varphi_\delta < 1$, et g_δ une fonction de $\mathscr{D}(\Omega_1)$ qui vaut $(1 - \varphi_\delta)$ sur $\bar{\Omega}$. Nous définissons la mesure

$$(4.8) \qquad \varepsilon(u) : \sigma_{|\Omega \cup \Gamma_1} = \varepsilon(u) : \sigma_{|\Omega} + \varepsilon(u) : \sigma_{|\Gamma_1}$$

où $\varepsilon(u) : \sigma_{|\Omega}$ a été définie au cours du Théorème 0.3 de l'Introduction, et $\varepsilon(u) : \sigma_{|\Gamma_1}$ au cours de la Proposition 4.1 ii). Nous avons compte tenu du fait que $\tilde{\sigma}_m$ n'a pas de masse sur Γ_1, $\sigma_m . n = F_{|\Gamma_1}$, et g_δ s'annule sur un voisinage de Γ_0 :

$$(4.9) \qquad \int_{\Omega \cup 1} (\varepsilon(u) : \tilde{\sigma}_m)\, g_\delta = - \int_\Omega u \operatorname{div} \sigma_m\, g_\delta - \int_\Omega \sigma_m\, u \,\nabla g_\delta + \int_{\Gamma_1} F u g_\delta .$$

Puisque div $\tilde{\sigma}_m$ converge dans L^2 vers div σ, le terme $\int_\Omega u \operatorname{div} \sigma_m\, g_\delta$ converge vers $\int_\Omega u \operatorname{div} \sigma g_\delta$. Ensuite on peut prolonger u en fonction $\tilde{u}$ continue sur

Ω_1. On obtient alors

$$(4.10) \qquad \int_\Omega \sigma_m\, u\, \nabla g_\delta = \int_{\Omega_1} \tilde{\sigma}_m\, \tilde{u}\, \nabla g_\delta - \int_\Omega \sigma_1\, u\, \nabla g_\delta$$

et la convergence vague de σ_m vers σ entraîne la convergence de $\int_\Omega \tilde{\sigma}_m\, \tilde{u}\, \nabla g_\delta$ vers $\int_{\Omega_1} \sigma\tilde{u}\, \nabla g_\delta$ (en effet $\tilde{u}\, \nabla g_\delta$ est continue à support compact dans Ω_1). On déduit de tout cela que

$$(4.11) \qquad \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varepsilon(u) : \tilde{\sigma}_m\, g_\delta \text{ converge vers } - \int_\Omega u \operatorname{div} \sigma g_\delta$$

$$- \int_\Omega \sigma u\, \nabla g_\delta - \int_{\Gamma_1} \sigma u\, \nabla g_\delta + \int_{\Gamma_1} F u g_\delta$$

$$= \int_\Omega (\varepsilon(u) : \sigma)\, g_\delta + \int_{\Gamma_1} (F - \sigma . n)\, u g_\delta - \int_{\Gamma_1} \sigma u\, \nabla g_\delta$$

$$= \int_{\Omega \cup \Gamma_1} (\varepsilon(u) : \sigma)\, g_\delta\,.$$

Lorsque $\sigma \in M^1(\Omega, E)$, nous définissons :

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\sigma) = \int_{\Omega_1} \psi(\sigma) - \int_{\Omega'} \psi(\sigma)$$

$\left(= \int_\Omega \psi(\sigma) + \int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) \right.$, d'après la définition 1.4 des fonctions convexes de mesure, [3]).

Nous avons aussi pour $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_1)$:

$$(4.12) \qquad \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\sigma)\, \varphi = \int_{\Omega_1} \psi(\sigma)\, \varphi - \int_{\Omega'} \psi(\sigma)\, \varphi\,,$$

en particulier pour $\varphi = g_\delta$ et $\sigma = \sigma_{1|\Omega'}$

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\sigma)\, g_\delta = \int_{\Omega_1} \psi(\sigma)\, g_\delta - \int_{\Omega'} \psi(\sigma_1)\, g_\delta$$

de sorte que par semi-continuité inférieure

$$(4.13)\qquad \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\sigma)\, g_\delta \leqq \lim_{m \to \infty} \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\tilde{\sigma}_m)\, g_\delta\,.$$

Maintenant nous appliquons (4.1) et (4.2) avec $\varphi = \varphi_\delta$

$$(4.14)\qquad \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\tilde{\sigma}_m)\, \varphi_\delta - \int_{\Omega \cup \Gamma_1} (\varphi_\delta\, \tilde{\sigma}_m : \varepsilon(u)) \geqq - \int_\Omega \psi^*(\varepsilon(u))\, \varphi_\delta\,.$$

En rassemblant (4.12), (4.11), (4.13) et (4.14), nous avons les inégalités successives :

$$\begin{aligned} \underline{\lim} \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\tilde{\sigma}_m) - \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \tilde{\sigma}_m : \varepsilon(u) &\geqq \\ \geqq \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\tilde{\sigma})\, g_\delta - \int_{\Omega \cup \Gamma_1} g_\delta\, \tilde{\sigma} : \varepsilon(u) - \int \psi^*(\varepsilon(u))\, \varphi_\delta \\ = \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\tilde{\sigma}) - \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \tilde{\sigma}\varepsilon(u) - E_\delta \end{aligned}$$

où on a défini E_δ par :

$$E_\delta = - \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varphi_\delta(\sigma : \varepsilon(u)) + \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\sigma)\, \varphi_\delta + \int_\Omega \psi^*(\varepsilon(u))\, \varphi_\delta$$

et il s'agit de montrer que E_δ est arbitrairement petit lorsque δ l'est. Nous avons par le Théorème 0.3 et par (4.3) :

$$\begin{aligned} (4.15)\qquad \left| \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varphi_\delta\, \sigma : \varepsilon(u) \right| &\leqq |\, \varepsilon(u)\, |_\infty \left(\int_\Omega |\, \sigma . \varphi_\delta \,| + \int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma)\, \varphi_\delta \right) \\ &\leqq |\, \varepsilon(u)\, |_\infty \int_{\Omega_1} |\, \sigma : \varphi_\delta \,| \\ &\leqq |\, \varepsilon(u)\, |_\infty \int_{\Omega_{2\delta} \cap \Omega_1} |\, \sigma \,|\,. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\psi(\sigma)$ est absolument continue par rapport à σ, on a

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\sigma)\, \varphi_\delta \leqq c \int_{\Omega \cup \Gamma_1} |\, \varphi_\delta\, \sigma\,| \leqq c \int_{\Omega_{2\delta} \cap \Omega_1} |\, \sigma\,|$$

et ce terme tend vers 0 quand $\delta \to 0$, car σ est une mesure bornée sur Ω_1. Enfin $\int_{\mathrm{Supp}^t \varphi_\delta \cap \Omega} \psi^*(\varepsilon(u))$ tend vers 0 quand $\delta \to 0$ (car $\psi^* \in L^1$). Nous avons donc établi $\lim\limits_{\delta \to 0} E_\delta = 0$, et nous avons obtenu l'inégalité

$$(4.16) \quad \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\tilde{\sigma}) - \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varepsilon(u) : \tilde{\sigma} \leqq \underline{\lim} \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\tilde{\sigma}_m) - \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varepsilon(u) : \tilde{\sigma}_m = - \int_\Omega \psi^*(\varepsilon(\tilde{u}))\,.$$

Il reste à voir que $\sigma_{|\Omega}$ est bien solution du problème relaxé. L'inégalité (4.16), jointe à (4.1) et (4.2) pour $\varphi = 1$ donne :

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi(\tilde{\sigma}) - \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varepsilon(\tilde{u}) : \tilde{\sigma} + \int_\Omega \psi^*(\varepsilon(\tilde{u})) = 0\,.$$

Soit encore

$$(4.17) \quad \int_\Omega \psi(\sigma) - \int_\Omega \varepsilon(\overline{u}) : \sigma + \int_\Omega \psi^*(\varepsilon(\overline{u})) = 0$$

et

$$(4.18) \quad \int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) - \int_{\Gamma_1} (F - \sigma . n)(\overline{u}) = 0\,.$$

Nous remarquons maintenant que la relation (4.2) donne pour tout u tel que $\varepsilon(u) \in B$, $u = 0_{|\Gamma^*}$:

$$\int_{\Gamma_1} (F - \sigma . n)\, \overline{u} = \int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) \geqq \int_{\Gamma_1} (F - \sigma . n)\, \chi_1\, u\,.$$

On en déduit :

$$\int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) = \sup_{\substack{u,\, \varepsilon(u) \in B \\ u = 0_{|\Gamma^*}}} \int (F - \sigma . n)\, \chi_1\, u$$
$$= \mathcal{C}(\tilde{F} - \sigma . n)\,,$$

ce qui montre en utilisant encore (4.16) que σ est bien solution du problème relaxé.

Remarque. Lorsque $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$ et si Γ^* est contenue dans une sous-variété de dimension $N - 2$ et de classe C^2, nous rappelons que nécessairement

$$\int fr + \int Fr = 0 \quad \forall r \in \mathcal{R}\,, \quad r = 0_{|\Gamma^*}\,.$$

En outre la solution du problème en déplacement est déterminée à l'addition d'un déplacement rigide nul sur Γ^* près. Si $p(\overline{u})$ est la projection orthogonale de $\overline{u}$ sur $\mathcal{R}^\perp$ on a alors d'après (4.16) :

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_1} \{\, \psi^*(\varepsilon(p(\overline{u}))) - \varepsilon(p(\overline{u})) : \sigma - \psi(\sigma)\,\} = 0$$

en particulier

$$\int_{\Gamma_1} \{\, \psi_\infty(\sigma) - (F - \sigma . n)\, p(\overline{u})\,\} = 0$$

en utilisant (4.2) ; nous en déduisons que

$$\int_{\Gamma_1} (F - \sigma . n)\, p(\overline{u}) = \psi_\infty(\sigma) \geqq \int_{\Gamma_1} (F - \sigma . n)\, p(u)$$

pour tout u, tel que $u = 0_{|\Gamma^*}$, $\varepsilon(u) \in B$, et par conséquent

$$\int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) = \sup_{\substack{u,\, \varepsilon(u) \in B \\ u = 0_{|\Gamma^*}}} \int_{\Gamma_1} (F - \sigma . n)\, p(u)$$
$$= \mathcal{C}(F - \sigma . n)$$

et σ est donc bien solution du problème relaxé.

Démonstration de la Proposition 4.1.

i) Soit $\sigma \in Z(\Omega_1, E)$ et $\sigma_m \in L^2(\Omega, E)$ donné par le Théorème 0.1 tel que

$$\begin{aligned} &|\sigma_m| \to |\sigma| \text{ étroitement sur } \Omega \\ &\operatorname{div} \sigma_m = \operatorname{div} \sigma \\ &\psi(\sigma_m) \to \psi(\sigma) \text{ étroitement sur } \Omega . \end{aligned}$$

Par définition de $\psi(\sigma_m)(x)$, nous avons l'inégalité, vraie pour tout x de Ω :

$$\psi(\sigma_m)(x) \geqq (\varepsilon(u) : \sigma_m)(x) - \psi^*(\varepsilon(u))(x)$$

d'où pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ positif :

$$\psi(\sigma_m)\,\varphi \geqq \int (\varepsilon(u) : \sigma_m)\,\varphi - \int \psi^*(\varepsilon(u))\,\varphi .$$

Nous obtenons donc le résultat souhaité par passage à la limite, et en utilisant le Théorème 0.3 de l'Introduction.

ii) Nous commençons par démontrer l'inégalité (4.3) lorsque $u \in U^\infty(V)$ où V est un voisinage ouvert dans $\mathscr{R}^N$ de Γ_1. Sous cette hypothèse alors soit $\varphi \geqq 0$ dans $\mathscr{D}(\Gamma_1)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ qui prolonge φ ; soit aussi $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < d(\operatorname{Sup}^t \varphi, \partial V)$, ρ une fonction régularisante, $\sigma_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N}\,\rho\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$. Alors $\rho_{\varepsilon *}\, u$ est régulière sur $\operatorname{Sup}^t \varphi$ et $\varepsilon(\rho_\varepsilon * u) = \rho_\varepsilon * \varepsilon(u)$ appartient à B. Maintenant, l'utilisation de la formule de dualité démontrée par Demengel-Temam [3] donne :

$$\int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma)\,\varphi \geqq \int_{\Gamma_1} \sigma(\rho_\varepsilon * \varepsilon(u))\,\varphi .$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \sigma(\rho_\varepsilon * \varepsilon(u))\,\varphi = \int_{\Omega_1} &\sigma(\rho_\varepsilon * \varepsilon(u))\,\varphi - \\ &- \int_{\Omega'} \sigma(\rho_\varepsilon * \varepsilon(u)) - \int_{\Omega} \sigma\rho_\varepsilon * \varepsilon(u)\,\varphi \end{aligned}$$

qui converge vers $\int_{\Omega_1} (\sigma : \varepsilon(u))\,\varphi - \int_{\Omega'} \sigma : \varepsilon(u)\,\varphi - \int_{\Omega} \sigma\varepsilon(u)\,\varphi$ d'après le

Théorème (3.1). Maintenant la « formule de Green » (I.3) donne

$$\int_{\Omega_1} (\sigma : \varepsilon(u))\, \varphi = - \int_{\Omega_1} u \operatorname{div} \sigma\varphi - \int_{\Omega_1} u\sigma \nabla\varphi$$

$$\int_{\Omega'} \sigma\varepsilon(u)\, \varphi = - \int_{\Omega'} u \operatorname{div} \sigma\varphi - \int_{\Omega'} u\sigma \nabla\varphi - \int (\sigma . n)\, u\varphi$$

$$\int_{\Omega} \sigma\varepsilon(u)\, \varphi = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \sigma\varphi - \int_{\Omega} u\sigma \nabla\varphi + \int (\sigma . n)\, u\varphi$$

d'où

$$\int_{\Omega_1} (\sigma\varepsilon(u))\, \varphi - \int_{\Omega'} \sigma\varepsilon(u)\, \varphi - \int_{\Omega} \sigma\varepsilon(u)\, \varphi =$$

$$= - \int_{\Gamma_1} u\sigma \nabla\varphi + \int [\sigma . n]\, u\varphi\,.$$

Nous obtenons donc (4.3) par passage à la limite.

Soit maintenant u, tel que $\varepsilon(u) \in B$. Les hypothèses faites sur Ω entraînent qu'il existe un réel r, un nombre fini de points $x^i \in \Gamma$ et de boules $B(x_i, r)$ $0 \leqq i \leqq m$, $x_j \notin B(x_i, r)$ dès que $j \neq i$, et tels que Ω_0 est relativement compact dans Ω et il existe pour chaque i, une fonction a^i, un système de coordonnées e^i_j $1 \leqq j \leqq N$ tel que e^i_N dirige la normale à Γ en x_i tel que

$$\Omega^i = \Omega_\cap B^i = \{ (x', x_N), \mid X - X_i \mid < r, X_N < a^i(x') \}$$

$$\partial\Omega_\cap B^i = \{ (x', x_N), X_N = a'(X'), X \in B^i \}\,.$$

Soit alors $(\varphi_i)_{a<i<m}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, φ_i étant à support compact dans B^i ; soit aussi $\eta < d(\mathrm{Sup}^t\, \varphi_i, \partial B^i)$; on définit l'ouvert Ω^i par

$$\Omega^i = \{ x \in \mathscr{R}^N, x = y_i + \lambda e^i_N(x_i), 0 \leqq \lambda < 1, y_i \in \Omega^i \}\,,$$

et la fonction u^i_η sur cet ouvert par :

$$u^i_\eta(x) = u(x - \eta e^i_N(x_i))\,.$$

Cette fonction est bien définie sur Ω^i_η car si $x \in \Omega^i_\eta$, $x = y_i + \lambda\eta e^i_N(x_i)$ et $x - \eta e^i_N(x_i) = y_i + (\lambda - 1)\, \eta e^i_N(x_i)$ qui appartient à Ω car

$$(y_i + (\lambda - 1)\, \eta e^i_N(x_i))_N = (y_i)_N + (\lambda - 1)\, \eta < (y_i)_N < a(y'_i)$$
$$= a((y'_i + (\lambda - 1)\, \eta e^i_N(x_i))\,.$$

u^i_η est définie sur un voisinage dans $\mathbb{R}^N$ de $\Gamma_\cap$ $\mathrm{Supt}^t\ \varphi_i$. En outre sur ce voisinage $\varepsilon(u^i_\eta) \in B$. On en déduit, en utilisant ce qui précède, que

$$(4.19) \qquad \sigma : \varepsilon(u^i_\eta) \leqq \psi_\infty(\sigma)$$

au sens des mesures, sur $\Gamma_\cap$ $\mathrm{Sup}^t\ \varphi_i$.

D'autre part montrons que $\sigma : \varepsilon(u^i_\eta)$ converge vers $\sigma : \varepsilon(u)$ dans $\mathscr{D}'(\Gamma_1)$: u^i_η converge uniformément vers u sur $\overline{\mathrm{Sup}^t\ \varphi_{i\cap}\ \Omega}$, et est à déformation bornée dans L^∞, donc converge dans $U^\infty(\mathrm{Sup}^t\ \varphi_i)$ faiblement. La formule de Green généralisée du Théorème 0.3 de l'Introduction, appliquée à l'ouvert ($\mathrm{Sup}^t\ \varphi_{i\cap}\ \Omega$) permet d'affirmer la convergence de $\int_{\Gamma_1} \sigma . n u_\eta\ \varphi_i\ \psi$ vers $\int_{\Gamma_1} \sigma . n u \varphi_i\ \psi$ lorsque $\psi \in \mathscr{D}(\Gamma_1)$. La convergence uniforme de u_η vers u sur $\mathrm{Sup}^t\ \varphi_{i_\eta}\ \partial\Omega$ entraîne d'autre part la convergence de $\int \sigma u_\eta\ \nabla\varphi_i\ \psi$ vers $\int \sigma u\ \nabla\varphi_i\ \psi$. On en déduit que

$$\int_{\Gamma_1} \sigma : \varepsilon(u_\eta)\ \varphi_i\ \psi \quad \text{converge vers} \quad \int_{\Gamma_1} \sigma : \varepsilon(u)\ \varphi_i\ \psi\,.$$

Finalement, pour $\psi \leqq 0$ dans $\mathscr{D}(\Gamma_1)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \sigma : \varepsilon(u)\ \psi &= \sum_i \int_{\Gamma_1} \sigma : \varepsilon(u)\ \varphi_i\ \psi \\
&= \sum_i \lim_{\eta \to 0} \int_{\Gamma_1} \sigma : \varepsilon(u_\eta)\ \varphi_i\ \psi \\
&\leqq \sum_i \int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma)\ \varphi_i\ \psi \text{ (en utilisant l'inégalité 4.19)} \\
&= \int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma)\ \psi\,.
\end{aligned}$$

Ceci démontre à la fois l'inégalité (4.3) et le fait que (4.2) est une mesure bornée. En effet l'inégalité précédente appliquée avec $-\sigma$ donne finalement

$$\left| \int_{\Gamma_1} \sigma\varepsilon(u)\ \varphi \right| \leqq \mathrm{Sup} \left\{ \int \psi_\infty(\sigma)\ \varphi, \int \psi_\infty(-\sigma)\ \varphi \right\}$$

ce qui entraîne bien que $\sigma\varepsilon(u)$ ainsi définie est une mesure bornée sur Γ_1, absolument continue par rapport à σ sur Γ_1.

Relation d'extrémalité.

THÉORÈME 4.2 : *Si $\bar{u}$ et $\bar{\sigma}$ sont respectivement solutions des Problèmes* (1.11) *et* (4.3) *on a les relations d'extrémalité :*

(i) $\psi^*(\varepsilon(u)(x)) + \psi(G(x)) - (\varepsilon(u) : G)(x) = 0$

p.p. $x \in \Omega$, *ou encore*

$\varepsilon(u)(x) \in \partial\psi(G(x))$

et $G(x) \in \partial\psi^*(\varepsilon(u)(x))$, p.p. x.

(ii) $\psi_\infty(\mu_S) = \mu_S : \varepsilon(u)$.

En outre si e est la fonction μ_S mesurable, qui vérifie $\mu_S : \varepsilon(u) = e\mu_S$, $\varepsilon(u) \in \partial K$ p.p. $x \in \mathrm{Sup}^t\, \mu_S$.

(iii) $\psi_\infty(\sigma) = \mathscr{C}(F - \sigma.n)$ *sur* Γ_1.

Démonstration : (i) et (iii) sont évidents en utilisant l'égalité entre mesures

$$\psi^*(\varepsilon(u)) + \psi(\sigma) - \varepsilon(u) : \sigma = 0,$$

et la Proposition (4.1). Le début de (ii) en découle aussi. Maintenant, puisque $\mu_S : \varepsilon(u)$ est absolument continue par rapport à $|\mu_S|$, il existe une fonction e', $|\mu_S|$ mesurable, telle que $\mu_S : \varepsilon(u) = e' |\mu_S|$; $e = e' \dfrac{\mu_S}{|\mu_S|}$ vérifie alors $\mu_S : \varepsilon(u) = e\mu_S$.

Supposons par l'absurde qu'il existe N de $|\mu_S|$ mesure non nulle, telle que sur N, $e \in \mathring{K}$. On peut supposer N compact. Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in N$, $e(x) + B(o, r) \subset B$. Alors

$$e(x) + \frac{r\,|\mu_S|}{|\mu_S|} \in B$$

et

$$(e : \mu_S) = \psi_\infty(\mu_S) \geqq \left(e + \frac{r\,|\mu_S|}{\mu_S} : \mu_S\right) = e\mu_S + r\,|\mu_S|$$

sur N. Ceci constitue une contradiction puisque $|\mu_S| > 0$ sur N.

4.2. Résolution du problème relaxé d'analyse de blocage

Nous rappelons le problème introduit au paragraphe 2, dit problème relaxé du problème d'analyse limite

$$(4.20)\qquad \inf_{\substack{\operatorname{div}\sigma = 0\\ \sigma\in\Sigma(\Omega_1, E)\\ \sigma = 0_{|\Omega'}}} \left\{ \int_\Omega \psi_\infty(\sigma) + \bar\lambda\,|\,L\sigma - 1\,| + \mathcal{C}(-\sigma.n) \right\}$$

ainsi que du problème d'analyse limite

$$(4.21)\qquad \inf_{\substack{\operatorname{div}\sigma = 0\\ \sigma.n = 0_{|\Gamma_1}\\ L\sigma = 1}} \left\{ \int_\Omega \psi_\infty(\sigma) \right\}$$

et nous montrons l'analogue du Théorème 4.1.

THÉORÈME 4.2 : *De toute suite minimisante au problème* (4.21) (*ou* (4.20)) *on peut extraire une sous-suite qui converge vaguement dans* $M^1(\Omega_1, E)$ *vers une solution de* (4.20).

Soit donc σ_m une suite minimisante de (4.21). On prolonge σ_m par 0 hors de Ω et on note $\tilde\sigma_m$ cette prolongée ; on a alors div $\sigma_m = 0_{|\Omega_1}$. σ_m est alors bornée dans $M^1(\Omega_1, E)$ et on peut extraire une sous-suite encore notée $\tilde\sigma_m$ telle que

$$\tilde\sigma_m \to \sigma \quad \text{dans} \quad M^1(\Omega_1, E)\,.$$

En outre, on a

$$\sigma = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega'$$
$$\operatorname{div}\sigma = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1\,.$$

Nous allons établir que σ est solution du problème relaxé (4.20). Pour cela il faut remarquer en raisonnant comme dans la partie (4.1) qu'il y a semi-continuité inférieure, ou encore

$$\int_{\Omega\cup\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) - \int_{\Omega\cup\Gamma_1} \varepsilon(\bar u) : \sigma \leqq \varliminf \int_{\Omega\cup\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma_m) - \int_{\Omega\cup\Gamma_1} \varepsilon(u) : \sigma_m\,.$$

Or

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi_\infty(\sigma_m) = \int_\Omega \psi_\infty(\sigma_m)\,,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varepsilon(\bar{u}) : \sigma_m &= \int_\Omega \varepsilon(\bar{u}) : \sigma_m \\ &= - \int \bar{u} \operatorname{div} \sigma_m + \bar{\lambda} \int_{\Gamma_0} \sigma_m . n u_0 + \int_{\Gamma_1} \sigma_m . n u \\ &= \bar{\lambda} \int_{\Gamma_0} \sigma_m . n u_0 \\ &= \bar{\lambda} \hat{L} \sigma_m \\ &= \bar{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Puisque σ_m est minimisante, on a

$$\underline{\lim} \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi_\infty(\sigma_m) = \bar{\lambda}$$

de sorte que

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) - \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varepsilon(\bar{u}) : \sigma \leqq 0\,.$$

Ou encore, d'après la Proposition 4.1 :

$$\psi_\infty(\sigma) = \varepsilon(\bar{u}) : \sigma \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et

$$\int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) = \int_{\Gamma_1} \varepsilon(u) : \sigma = \int [\sigma . n]\, u\,.$$

On en déduit en utilisant (4.2) et comme on l'a déjà fait, que

$$\psi_\infty(\sigma) = (- \sigma . n)\, u \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\,.$$

Ensuite

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) = \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varepsilon(\bar{u}) : \sigma = - \int \bar{u} \operatorname{div} \sigma + \int_{\Gamma_0} \sigma . n u_0$$
$$= \bar{\lambda} \hat{L} \sigma .$$

En particulier $\hat{L}\sigma \geqq 0$, et par semi-continuité inférieure

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) = \int_{\Omega_1} \psi_\infty(\sigma)$$
$$\leqq \underline{\lim} \int_{\Omega_1} \psi_\infty(\tilde{\sigma}_m)$$
$$= \underline{\lim} \int_{\Omega} \psi_\infty(\sigma_m)$$
$$= \bar{\lambda} .$$

et par conséquent,

$$0 \leqq \hat{L}\sigma \leqq 1 .$$

On a alors

$$\int_\Omega \psi_\infty(\sigma) + \bar{\lambda} \,|\, 1 - \hat{L}\sigma \,|\, + \mathcal{C}(- \sigma . n)$$
$$= \int_\Omega \psi_\infty(\sigma) + \bar{\lambda}(1 - L\sigma) + \int_{\Gamma_1} \psi_\infty(\sigma)$$
$$= \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \psi_\infty(\sigma) - \bar{\lambda} L\sigma + \bar{\lambda}$$
$$= \bar{\lambda}$$

APPENDICE

Proposition : *On suppose que Σ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2, de dimension $N - 2$, qui n'est pas un $(N - 2)$ plan. Si r est un déplacement rigide s'annulant sur Σ, r est identiquement nul.*

Démonstration : Les hypothèses faites entraînent qu'il existe un point $(x_1, ..., x_N)$, un voisinage $\mathcal{O}$ de ce point dans Σ et un système de coordonnées telles que

$$\mathcal{O} = \{ (x_1 \dots x_N), (x_1 \dots x_{N-2}) \in \mathcal{O}_1, x_{N-1} = \varphi(x_1 \dots x_{N-2} \times$$
$$\times\ x_N = \psi(x_1 \dots x_{n-2}) \}$$

avec φ(resp. ψ) deux fonctions de classe C^2 sur $\mathcal{O}_1$ (resp. $\varphi(\mathcal{O}_1)$), qui ne sont pas des équations d'hyperplan. Soit maintenant $\overrightarrow{B}$ une matrice antisymétrique, $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ un vecteur et r le déplacement rigide :

$$r = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}.\vec{x}\,.$$

Écrivons que r s'annule sur $\mathcal{O}$; nous avons

(1) $$a_i + \sum_1^{N-2} b_{ij}\, x_j + b_{i_{N-1}}\, \varphi + b_{iN}\, \psi = 0$$

pour tout $i \in [1, N]$. En dérivant par rapport à x_j

(2) $$b_{ij} + b_{i_{N-1}}\, \varphi_{,ij} + b_{iN}\, \psi_{,ij} = 0\,,$$

et en dérivant à nouveau, nous obtenons $\forall j, k, i$:

(3) $$b_{iN_{-1}}\, \varphi_{,jk} + b_{i_N}\, \psi_{,jk} = 0\,.$$

Les hypothèses faites permettent de dire qu'il existe un couple j_0, k_0 $t.q$

ou bien $\varphi_{,j_0k_0} \neq 0$

ou bien $\psi_{,j_0k_0} \neq 0$.

De cela, on déduit avec (3) que les lignes d'ordre $N - 1$ et N sont proportionnelles. Ensuite si

(1) $b_{iN_{-1}} = b_{iN} = 0$, alors en reportant dans 1 on obtient

$$b_{ij} = 0 \quad \forall j$$
$$a_i = 0\,,$$

sinon supposons par exemple $b_{iN} \neq 0$. D'après l'équation (3) le rapport $\frac{b_{i_{N-1}}}{b_{iN}}$ ne dépend pas de i. On le note λ. En divisant par b_{iN} dans (1) on obtient alors

$$\frac{a_i}{b_{iN}} + \sum \frac{b_{ij}}{b_{iN}}\, x_j + \lambda\varphi + \psi = 0\,.$$

De sorte que $\forall i, k$:

$$\frac{a_i}{b_{iN}} + \sum \frac{b_{ij}}{b_{iN}} x_j = \frac{a_k}{b_{kN}} + \sum \frac{b_{kj}}{b_{kN}} x_j .$$

On obtient :

$$\frac{a_i}{b_{iN}} = \frac{a_k}{b_{kN}},$$

et aussi

$$\frac{b_{ij}}{b_{iN}} = \frac{b_{kj}}{b_{kN}} = \lambda_j ,$$

ce qui implique que toutes les colonnes sont proportionnelles. En choisissant $k = j$ on obtient :

$$b_{ij} = \frac{b_{ij}}{b_{jN}} b_{iN} = 0 \quad \text{car} \quad b_{ij} = 0 .$$

Finalement $b_{ij} = 0$, $\forall i$ et j.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. DEMENGEL, *Déplacements à déformations bornées et champs de contrainte mesure.* Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Pise (à paraître).

[2] F. DEMENGEL, P. SUQUET, *On locking materials,* Acta Aplicandae Matematica, à paraître.

[3] F. DEMENGEL, R. TEMAM, *Convex functions of a measure,* Indiana Journal of Mathematics, Vol. 33, n° 5, September-October 1984.

[4] DUVAUT-LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique,* Dunod, 1972.

[5] I. EKELAND, R. TEMAM, *Convex analysis and variational problems,* North Holland, 1976.

[6] LIONS, MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Dunod, Paris, Vol. 1 et 2, 1968.

[7] PRAGER, *Elastic solids of limited incompressibility,* Proc. of the 9th Int. Congress on Applied Mechanics, Bruxells, 1958, 5, p. 205-211.

[8] STRAUSS, *Variations of Korn's Sobolev's inequalities,* Proc. Symp. Pure Math., Vol. 23, D. Spencer Ed., AMS, Providence, R.I., 1973.

[9] R. TEMAM, *Problèmes mathématiques en plasticité,* Dunod, 1983.