

BERNARD LACOLLE

**Un procédé d'approximation d'une fonction convexe  
lipschitzienne et de ses singularités**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modéli-  
sation mathématique et analyse numérique*, tome 19, n° 2 (1985),  
p. 285-313

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1985\\_\\_19\\_2\\_285\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_2_285_0)

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UN PROCÉDÉ D'APPROXIMATION D'UNE FONCTION CONVEXE LIPSCHITZIENNE ET DE SES SINGULARITÉS (\*)

par Bernard LACOLLE <sup>(1)</sup>

Communique par F ROBERT

---

*Résumé — Nous proposons un procédé d'approximation d'une fonction réelle de la variable réelle, convexe et lipschitzienne. Les approximants sont définis dans un voisinage complexe de l'axe réel et les singularités réelles de la fonction convexe sont points d'accumulation des singularités complexes d'une suite convergente d'approximants.*

*Les approximants sont définis par des logarithmes de polynômes et leurs singularités se déduisent des racines de ces polynômes.*

*Nous présentons une famille d'algorithmes de calcul de suites convergentes d'approximants et nous donnons quelques résultats numériques.*

*Abstract — We study a particular approximation of convex functions of the real variable which satisfy a lipschitz condition. The approximating functions are defined in a complex neighborhood of the real axis, the real singularities of the convex function are accumulation points of the complex singularities associated with a convergent sequence of approximating functions.*

*These approximating functions are logarithms of polynomials and their singularities are related to the roots of these polynomials.*

*We present a family of algorithms for the computation of convergent sequences of approximating functions and we give some numerical experiments.*

### INTRODUCTION

Nous proposons un procédé d'approximation d'une fonction convexe lipschitzienne de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Son originalité est que les approximants sont définis dans un voisinage complexe de l'axe réel et que les singularités réelles de la fonction convexe sont points d'accumulation des singularités complexes d'une suite convergente d'approximants.

Dans le § I nous mettrons en évidence une suite de polynômes  $P_n^f$  et les approximants  $\frac{1}{n} \log P_n^f(e^t)$  de  $f(t)$ . Dans le § II la fonction  $f$  sera exprimée en

---

(\*) Reçu en décembre 1983

(1) Université Scientifique et Médicale, Laboratoire IMAG, Analyse Numérique, Tour des Mathématiques, B P n° 68, 38402 Saint Martin d'Hères, Cedex, France

faisant intervenir les mesures de répartition des racines des  $P_n^f$ . Le § III sera consacré à l'approximation des singularités de  $f$  illustrée avec quelques exemples.

L'origine de ce travail se situe en physique statistique où la démarche est différente car ce sont les  $P_n^f$  appelés alors « fonctions de partition des systèmes de taille  $n$  » qui sont seuls accessibles d'ailleurs souvent au prix de calculs très coûteux. La fonction  $f$  est la fonction d'« énergie libre » dont on recherche les singularités. Les relations entre les racines des  $P_n^f$  et les singularités de  $f$  ont fait l'objet de travaux en physique [1, 5, 7, 11, 14] portant essentiellement sur la localisation des racines des  $P_n^f$ , l'étude de modèles particuliers et quelques expériences numériques.

## I. APPROXIMATION D'UNE FONCTION CONVEXE LIPSCHITZIENNE

### I.0. Notations

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  de la variable réelle définie par la propriété  $(P_E)$  :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Il existe une suite de polynômes à coefficients positifs (et non tous} \\ \text{nuls) } \{ P_n^f \} \text{ et une constante réelle } C^f \text{ tels que :} \\ \\ d^\circ P_n^f \leq n C^f \quad n \in \mathbb{N} \\ \\ f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t) \quad t \in \mathbb{R}. \end{array} \right\} (P_E)$$

Soit  $F$  l'ensemble des fonctions  $f$  de la variable réelle définie par la propriété  $(P_F)$  :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Il existe } C \in \mathbb{R} \text{ et } g \in E \text{ tels que :} \\ \\ f(t) = Ct + g(t) \quad t \in \mathbb{R}. \end{array} \right\} (P_F)$$

### I.1. Caractérisation de $E$

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle vérifiant  $(P_E)$  (I.0). Nous avons :

$$E = \{ f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexe, non décroissante, lipschitzienne } \}.$$

*Démonstration*

i) Montrons d'abord que  $f \in E$  vérifie les propriétés annoncées et pour cela posons :

$$\begin{aligned}d^\circ P_n^f &= d_n (\leq nC^f \quad C^f \geq 0) \\P_n^f(z) &= \sum_{i=0}^{d_n} a_i^n z^i \quad a_i^n \geq 0 \\f_n(t) &= \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t) \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$f$  est convexe

$$\begin{aligned}P_n^f\left(e^{\frac{t+u}{2}}\right) &= \sum_{i=0}^{d_n} a_i^n \left(e^{\frac{t+u}{2}}\right)^i = \sum_{i=0}^{d_n} a_i^n ((e^t)^i)^{1/2} ((e^u)^i)^{1/2} \\0 < P_n^f\left(e^{\frac{t+u}{2}}\right) &\leq \left(\sum_{i=0}^{d_n} a_i^n (e^t)^i\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{d_n} a_i^n (e^u)^i\right)^{1/2}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \log P_n^f\left(e^{\frac{t+u}{2}}\right) &\leq \frac{1}{2n} \log P_n^f(e^t) + \frac{1}{2n} \log P_n^f(e^u) \\f_n\left(\frac{t+u}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} f_n(t) + \frac{1}{2} f_n(u)\end{aligned}$$

et le résultat en passant à la limite.

$f$  est non décroissante car les  $f_n$  sont non décroissantes.

$f$  est lipschitzienne.

Nous pouvons écrire :

$$f_n(t) - f_n(u) = (t - u) f_n'(\xi) = (t - u) \frac{e^\xi (P_n^f)'(e^\xi)}{nP_n^f(e^\xi)}, \quad \xi \in (t, u)$$

avec

$$0 \leq e^\xi (P_n^f)'(e^\xi) = e^\xi \sum_{i=1}^{d_n} i a_i^n (e^\xi)^{i-1} = \sum_{i=1}^{d_n} i a_i^n (e^\xi)^i \leq d_n P_n^f(e^\xi)$$

donc :

$$|f_n(t) - f_n(u)| \leq |t - u| \frac{d_n}{n} \leq C^f |t - u|$$

d'où le résultat par passage à la limite.

ii) Réciproquement, considérons une fonction  $f$  convexe, non décroissante, lipschitzienne de constante  $C$  et nous allons construire une suite de polynômes  $P_n^f$  à coefficients positifs (non tous nuls) et une constante  $C^f$  vérifiant :

$$d^\circ P_n^f \leq nC^f \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit  $I_n = [-\log n, +\log n]$  divisé en  $n$  sous-intervalles égaux avec

$$t_i = -\log n + 2i \frac{\log n}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  considérons l'interpolation linéaire de  $f$  :

$$l_i(t) = f(t_i) + \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i)$$

$$l_i(t) = \frac{t_{i+1} f(t_i) - t_i f(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} + \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} t.$$

Choisissons  $p_i = \mathbb{E}\left(n \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)$  ( $\mathbb{E}$  étant la fonction partie entière) et posons :

$$\lambda_i(t) = \frac{t_{i+1} f(t_i) - t_i f(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} + \frac{p_i}{n} t.$$

Pour  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  nous avons :

$$0 \leq l_i(t) - f(t) = f(t_i) + \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i) - f(t)$$

$$0 \leq l_i(t) - f(t) = f(t_i) - f(t) + \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i)$$

$f$  étant lipschitzienne de constante  $C$  :

$$0 \leq l_i(t) - f(t) \leq C |t_i - t| + C |t - t_i|$$

$$0 \leq l_i(t) - f(t) \leq 4C \frac{\log n}{n}.$$

Il résulte de la convexité de  $f$  que :

$$l_i(t) - f(t) \leq 0 \quad t \notin [t_i, t_{i+1}].$$

Et en conséquence, pour tout point  $t$  de  $I_n$  nous avons :

$$0 \leq \text{Max}_{i=0,1,\dots,n-1} l_i(t) - f(t) \leq \frac{4 C \log n}{n}. \tag{1}$$

De par la définition de  $\lambda_i$  nous avons :

$$\lambda_i(t) - l_i(t) = \left( \frac{p_i}{n} - \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right) t$$

d'où

$$|\lambda_i(t) - l_i(t)| \leq \frac{|t|}{n} \leq \frac{\log n}{n} \quad t \in I_n$$

et :

$$\left| \text{Max}_{i=0,\dots,n-1} \lambda_i(t) - \text{Max}_{i=0,\dots,n-1} l_i(t) \right| \leq \frac{\log n}{n}, \quad t \in I_n. \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) permettent d'écrire :

$$\left| \text{Max}_{i=0,1,\dots,n-1} \lambda_i(t) - f(t) \right| \leq (4 C + 1) \frac{\log n}{n}, \quad t \in I_n. \tag{3}$$

Écrivons  $\lambda_i$  sous la forme :

$$\lambda_i(t) = \alpha_i + \frac{p_i}{n} t \quad \left( \alpha_i = \frac{t_{i+1} f(t_i) - t_i f(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} \right)$$

et considérons le polynôme :

$$P_n^f(z) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{n\alpha_i} z^{p_i}.$$

Nous avons d'abord

$$p_i = \mathbb{E} \left( n \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right) \leq \mathbb{E}(nC)$$

et donc en posant  $C^f = C$  nous avons :

$$d^\circ P_n^f \leq nC^f, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour  $t$  fixé posons :

$$\lambda_{i_t}(t) = \operatorname{Max}_{i=0,1,\dots,n-1} \lambda_i(t)$$

nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{n} \log e^{n \operatorname{Max} \lambda_{i_t}(t)} \leq \frac{1}{n} \log \sum_{i=0}^{n-1} e^{n \lambda_i(t)} = \frac{1}{n} \log e^{n \lambda_{i_t}(t)} + \frac{1}{n} \log \sum_{i=0}^{n-1} e^{n(\lambda_i(t) - \lambda_{i_t}(t))}.$$

Ce qui permet d'affirmer

$$\operatorname{Max}_i \lambda_i(t) \leq \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t) \leq \operatorname{Max}_i \lambda_i(t) + \frac{\log n}{n}$$

et en tenant compte de l'inégalité (3) :

$$\left| \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t) - f(t) \right| \leq (4C + 2) \frac{\log n}{n} \quad t \in I_n.$$

Ce qui permet de conclure que :

$$\frac{1}{n} \log P_n^f(e^t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La convergence étant uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .

*Remarque* : En général plusieurs fonctionnelles  $\lambda_i$  ont la même pente  $\frac{p_i}{n}$  et dans ce cas on ne retiendra que celle dont la valeur  $\alpha_i$  est maximale. Ceci nous permet aussi de prendre une subdivision plus fine que le découpage en  $n$  sous-intervalles sans augmenter le degré du polynôme mais en améliorant la qualité de l'approximation.

## I.2. Caractérisation de $F$

Soit  $F$  l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle vérifiant la propriété  $(P_F)$  (I.0). Nous avons :

$$F = \{ f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexe, lipschitzienne } \}.$$

*Démonstration* : Soit  $f \in F$ . Par définition (I.0) il existe  $g \in E$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que

$$f(t) = Ct + g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$f$  est donc convexe et lipschitzienne (somme de deux fonctions convexes lipschitziennes).

Réciproquement, si  $f$  est convexe lipschitzienne de constante  $C$  la fonction  $g : t \rightarrow f(t) + Ct$  est convexe lipschitzienne et non décroissante car :

$$g(t_1) - g(t_2) = f(t_1) - f(t_2) + C(t_1 - t_2)$$

$$g(t_1) - g(t_2) \leq C |t_1 - t_2| + C(t_1 - t_2)$$

et donc  $g(t_1) - g(t_2) \leq 0$  si  $t_1 \leq t_2$

or :  $f(t) = g(t) - Ct$

ce qui démontre le résultat.

### I.3. Algorithmes de construction d'une suite de polynômes associés

#### Fonction convexe, lipschitzienne, non décroissante.

La démonstration du § I.1 (ii) donne pour une fonction  $f$  convexe non décroissante lipschitzienne un algorithme de construction d'une suite de polynômes  $\{P_n^f\}$  à coefficients positifs non tous nuls vérifiant

$$\frac{1}{n} \log P_n^f(e^t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

et  $d^\circ P_n^f \leq nC^f$

où  $C^f$  est une constante de lipschitz de  $f$ .

#### Fonction convexe lipschitzienne

Pour  $f$  convexe lipschitzienne nous allons montrer comment construire une suite de polynômes  $\{P_n^f\}$  à coefficients positifs non tous nuls et une suite convergente de réels  $\{C_n^f\}$  tels que :

$$f(t) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^f \right) t + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Avec les mêmes notations qu'au § I.1 posons :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i(t) &= \alpha_i + \frac{p_i}{n} t \\ \alpha_i &= \frac{t_{i+1} f(t_i) - t_i f(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} \\ p_i &= \mathbb{E} \left( n \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right) \\ R_n^f(z) &= \sum_{i=0}^{n-1} e^{n\alpha_i} z^{p_i} \end{aligned} \right\} i = 0, \dots, n-1$$

Il est trivial de vérifier que :

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log R_n^f(e^t), \quad t \in \mathbb{R}$$

car la démonstration I.1 (ii) ne fait pas intervenir la croissance de  $f$ .

Mais  $R_n^f$  n'est plus un polynôme car les  $p_i$  peuvent être négatifs et il nous faut poser :

$$P_n^f(z) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{n\alpha_i} z^{p_i - p_0}$$

$$R_n^f(z) = z^{p_0} P_n^f(z)$$

$P_n^f$  est un polynôme car il résulte de la convexité de  $f$  que  $p_i \geq p_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . En écrivant  $p_0 : p_0^n$  (car il dépend de  $n$ ) il reste à montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{1}{n} \log (e^t)^{p_0^n} = \frac{p_0^n}{n} t \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ct$$

ce qui revient à montrer que la suite  $\left\{ \frac{p_0^n}{n} \right\}$  converge.

Rappelons que  $p_0^n = \mathbb{E} \left( \frac{f(t_1^n) - f(t_0^n)}{t_1^n - t_0^n} n \right)$  avec :

$$t_0^n = -\log n \quad t_1^n = -\log n + \frac{2 \log n}{n}$$

et les formules correspondantes pour  $n+1$ .

Nous avons donc :  $t_0^{n+1} \leq t_0^n$  et comme la suite  $\frac{\log n}{n}$  est décroissante pour  $n \geq 3$  :  $t_1^{n+1} < t_1^n$ .

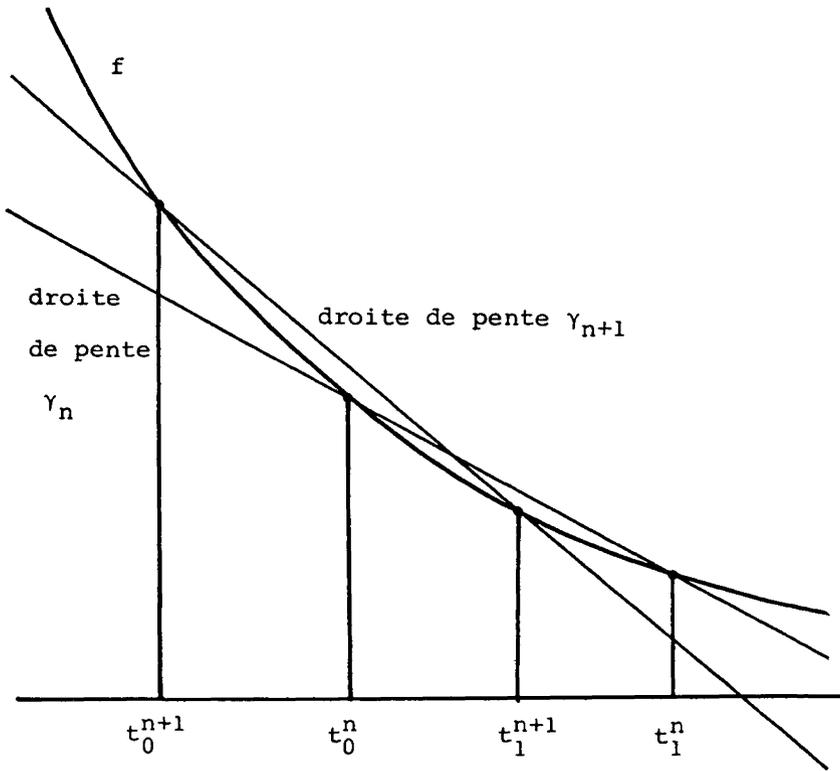


Figure 1.

Nous avons compte tenu de la convexité de  $f$  (fig. 1) :

$$\gamma_{n+1} = \frac{f(t_0^{n+1}) - f(t_1^{n+1})}{t_0^{n+1} - t_1^{n+1}} \leq \frac{f(t_0^n) - f(t_1^n)}{t_0^n - t_1^n} = \gamma_n.$$

La suite  $\{\gamma_n\}$  est donc décroissante minorée (car  $f$  est lipschitzienne) et convergente. De plus :

$$p_0^n \leq n\gamma_n < p_0^n + 1$$

d'où 
$$\gamma_n - \frac{1}{n} < \frac{p_0^n}{n} \leq \gamma_n.$$

La suite  $\left\{ \frac{p_0^n}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  est donc convergente.

#### I.4. Variantes des algorithmes de base

Signalons simplement ici conformément à la remarque faite à la fin du § I.1 que le nombre de subdivisions peut être pris supérieur à  $n$ . Ceci sera fait pour un exemple numérique à la fin de cet article.

Il est clair qu'en faisant varier l'intervalle, les subdivisions, on peut mettre en évidence d'autres algorithmes de construction de  $P_n^f$ .

### II. EXPRESSION INTÉGRALE LOCALE D'ÉLÉMENTS DE $E$ ET $F$

#### II.0. Notations et généralités

Soit  $f \in E$ ,  $\{P_n^f\}$  une suite de polynômes à coefficients positifs non tous nuls vérifiant

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t), \quad t \in \mathbb{R}$$

et  $C^f$  un nombre réel vérifiant :

$$d^\circ P_n^f \leq nC^f \quad n \in \mathbb{N}$$

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq C^f |t_1 - t_2| \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Posons

$$d^\circ P_n^f = d_n$$

$$P_n^f(z) = a_{d_n}^n \prod_{j=1}^{d_n} (z - z_j^n)$$

$$D_n = \{z_j^n \quad j = 1, \dots, d_n\}.$$

Nous allons étudier  $f$  au voisinage de  $t_0 \in \mathbb{R}$  et pour cela posons  $u_0 = e^{t_0}$  et  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} : (x - u_0)^2 + y^2 \leq r^2\}$  avec  $r < 1/2$  et  $r < e^{t_0}$  et  $V = ]u_0 - r, u_0 + r[$ .

Soit  $\mu_n$  la mesure à support dans  $K$  définie par :

$$\mu_n = \sum_{\substack{z_j^n = x + iy \in D_n \\ (x, y) \in K}} \frac{\alpha_j}{n} \delta(x, y)$$

où  $\alpha_j^n$  est la multiplicité de la racine  $x + iy$  :  $\mu_n$  est la mesure de répartition uniforme des racines des  $P_n^f$  dans  $K$ .

**II.1. Théorème II.1 (énoncé)**

**Représentation intégrale d'un élément de  $E$  [4]**

Soit  $f \in E$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Il existe :

- une fonction (réelle de la variable réelle)  $\phi$ , analytique dans un voisinage  $W$  de  $t_0$
- un voisinage (dans  $\mathbb{R}^2$ ) compact de  $(e^{t_0}, 0) : K$
- une mesure positive bornée  $\mu$  à support dans  $K$  tels que :

$$f(t) = \phi(t) + \int_K \log ([e^t - x]^2 + y^2)^{1/2} d\mu(x, y) \quad t \in W.$$

De plus  $\mu$  est limite vague d'une sous-suite des mesures  $\mu_n$  de répartition des racines des  $\{ P_n^f \}$  dans  $K$ .

**II.2. Décomposition de la fonction  $f$  et notations**

Considérons le polynôme  $P_n^f$  introduit au § II.0 et scindons-le en deux morceaux :

$$P_n^f(z) = Q_n(z) R_n(z)$$

avec 
$$Q_n(z) = \prod_{\substack{Z_j^* = x + iy \in D_n \\ (x, y) \in K}} (z - (x + iy))^{\alpha_j^*}$$

$R_n(z)$  correspondant aux racines de  $P_n^f$  qui n'appartiennent pas à  $K$ . Pour  $u \in ]0, +\infty[$  et du fait de la symétrie des racines de  $P_n^f$  (à coefficients réels positifs) nous avons :

$$\frac{1}{n} \log P_n^f(u) = \frac{1}{n} \log Q_n(u) + \frac{1}{n} \log R_n(u).$$

Et si  $U$  désigne le point  $(u, 0)$ ,  $UM$  la distance euclidienne de  $U$  à  $M$  :

$$\frac{1}{n} \log Q_n(u) = - \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu_n(M).$$

LEMME II.3 : Pour  $u \in V = ]u_0 - r, u_0 + r[$  soit  $h_n^u(\rho)$  la fonction de répartition radiale des racines de  $Q_n$  autour de  $(u, 0)$  définie pour  $\rho \in [0, 1]$  par :

$$h_n(\rho) = \frac{1}{n} \times \{ \text{nombre de racines } z \text{ de } Q_n \text{ telle que } : |z - u| \leq \rho \}$$

on a :

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \int_0^\rho \frac{h_n^u(v)}{v} dv \leq C_1 \rho \\ 0 \leq \int_0^\rho \log \frac{1}{v} dh_n^u(v) \leq C_2 \sqrt{\rho} \end{array} \right\} \rho \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux réels indépendants de  $u$ .

*Démonstration* : Nous utilisons la propriété suivante ([10] ex. 34) : si  $g$  est une fonction entière (ici un polynôme) avec  $g(0) \neq 0$ ,  $M(\rho) = \text{Max}_{|z| \leq \rho} |g(z)|$  et  $N(\rho) =$  nombre de zéros de  $g$  dans  $\{z : |z| \leq \rho\}$  alors :

$$\int_0^\rho \frac{N(v)}{v} dv \leq \log M(\rho) - \log |g(0)|.$$

Nous prenons  $g(z) = P_n^f(u_0 + z)$  en remarquant que les racines  $Q_n$  sont racines de  $P_n^f$ .

Nous avons

$$\text{Max}_{|z| \leq \rho} |g(z)| = P_n(u_0 + \rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

car  $P_n^f$  est à coefficients positifs. Il vient alors :

$$\int_0^\rho \frac{h_n^u(v)}{v} dv \leq \frac{1}{n} (\log P_n^f(u + \rho) - \log P_n^f(u)).$$

Mais :

$$\frac{1}{n} (\log P_n^f(u + \rho) - \log P_n^f(u)) = \frac{\rho}{n} \frac{(P_n^f)'(u + \xi)}{P_n^f(u + \xi)}, \quad \xi \in ]0, \rho[$$

ce qui peut être majoré par :

$$\frac{d^\circ P_n^f}{n} \times \frac{\rho}{u + \xi} \leq \frac{d^\circ P_n^f}{n} \frac{\rho}{u_0 - r} \leq \rho C_1, \quad \rho \in [0, 1]$$

(car  $d^\circ P_n^f \leq nC^f$  d'après les hypothèses II.0).

En ce qui concerne la seconde inégalité, il existe  $\eta : 0 < \eta \leq \rho$  tel que :

$$\int_0^\rho \log \frac{1}{v} dh_n^u(v) = \int_\eta^\rho \log \frac{1}{v} dh_n^u(v) = \log \frac{1}{\rho} h_n^u(\rho^-) - \log \frac{1}{\eta} h_n^u(\eta^+) + \\ + \int_\eta^\rho \frac{h_n^u(v)}{v} dv \leq \log \frac{1}{\rho} h_n^u(\rho^-) + C_1 \rho.$$

Or

$$0 \leq \log \frac{1}{\rho} h_n^u(\rho^-) = 2 h_n^u(\rho^-) \int_\rho^{\sqrt{\rho}} \frac{dv}{v} \leq 2 \int_\rho^{\sqrt{\rho}} \frac{h_n^u(v)}{v} dv \leq 2 C_1 \sqrt{\rho}$$

d'où :

$$0 \leq \int_0^\rho \log \frac{1}{v} dh_n^u(v) \leq 2 C_1 \sqrt{\rho} + C_1 \rho \leq C_2 \sqrt{\rho} \quad \rho \in [0, 1].$$

**PROPRIÉTÉ II.4 :** Soit  $u \in V = ]u_0 - r, u_0 + r[$ , il existe une mesure borélienne positive bornée  $\mu$ , limite vague d'une sous-suite  $\{\mu_{m_n}\}$  des  $\mu_n$  (mesures de répartition des racines définies au § II.0), telle que :

$$\int_K \log \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu(M), \quad U = (u, 0) \quad u \in V.$$

*Démonstration :* De la suite  $\{\mu_n\}$  de mesures positives uniformément bornées nous pouvons extraire une sous-suite  $\{\mu_{m_n}\}$  « vaguement » convergente vers  $\mu$ .

Prouvons d'abord l'existence de  $\int_K \log \frac{1}{UM} d\mu(M)$  en étudiant les intégrales

$$\int_K \log_\varepsilon \frac{1}{UM} d\mu(M), \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \text{ avec}$$

$$\log_\varepsilon \frac{1}{v} = \begin{cases} 0 & v \geq 1 \\ \log \frac{1}{v} & \varepsilon \leq v \leq 1 \\ \log \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq v \leq \varepsilon. \end{cases}$$

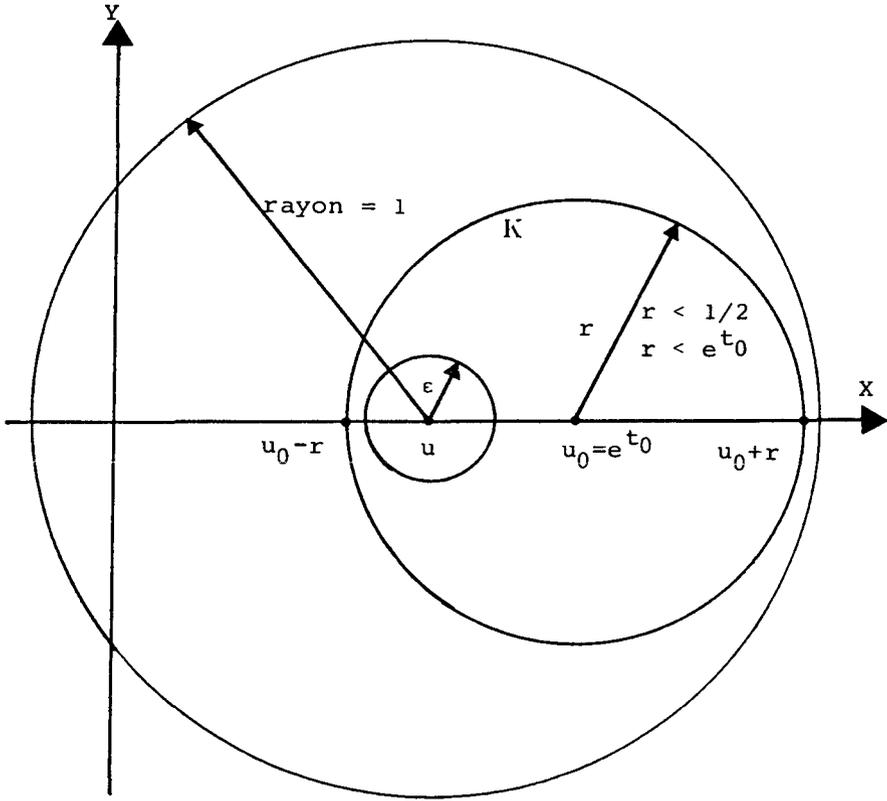


Figure 2.

$\log_\epsilon \frac{1}{UM}$  étant continue à support compact  $\mu_{m_n}$  et  $\mu$  à support dans  $K$  compact (fig. 2) :

$$\int_K \log_\epsilon \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_K \log_\epsilon \frac{1}{UM} d\mu(M)$$

Or 
$$\int_K \log_\epsilon \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) = \int_0^1 \log_\epsilon \frac{1}{v} dh_{m_n}^u(v)$$

( $h_{m_n}^u$  étant définie au lemme II. 3).

En appliquant ce lemme :

$$0 \leq \int_K \log_{\varepsilon} \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) \leq \int_0^1 \log \frac{1}{v} dh_{m_n}^u(v) \leq C_2.$$

Les intégrales  $\int_K \log_{\varepsilon} \frac{1}{UM} d\mu(M)$  sont donc uniformément bornées par  $C_2$ , ce qui prouve que  $\int_K \log \frac{1}{UM} d\mu(M)$  existe (car les  $\log_{\varepsilon} \frac{1}{UM}$  positives convergent en croissant vers  $\log \frac{1}{UM}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0).

Étudions maintenant la différence :

$$\left| \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu(M) - \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) \right|$$

que nous pouvons majorer par :

$$\begin{aligned} & \left| \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu(M) - \int_K \log_{\varepsilon} \frac{1}{UM} d\mu(M) \right| + \\ & \left| \int_K \log_{\varepsilon} \frac{1}{UM} d\mu(M) - \int_K \log_{\varepsilon} \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) \right| + \\ & \left| \int_K \log_{\varepsilon} \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) - \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) \right|. \end{aligned}$$

La dernière valeur absolue est égale à :

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \left( \log \frac{1}{\varepsilon} - \log \frac{1}{v} \right) dh_{m_n}^u(v) \right|$$

que nous pouvons majorer (en utilisant le lemme II. 3) par :

$$\int_0^{\varepsilon} \log \frac{1}{v} dh_{m_n}^u(v) \leq C_2 \varepsilon^{1/2}$$

$\eta > 0$  étant donné, choisissons  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$C_2 \varepsilon^{1/2} \leq \frac{\eta}{3}$$

et 
$$\left| \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu(M) - \int_K \log_{e^\varepsilon} \frac{1}{UM} d\mu(M) \right| \leq \frac{\eta}{3}.$$

Ensuite  $\log_{e^\varepsilon}$  étant continue à support compact et  $\{\mu_{m_n}\}$  vaguement convergente vers  $\mu$  nous pouvons choisir  $N\eta$  tel que pour tout  $n \geq N_\eta$  :

$$\left| \int_K \log_{e^\varepsilon} \frac{1}{UM} d\mu(M) - \int_K \log_{e^\varepsilon} \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) \right| \leq \frac{\eta}{3}$$

ce qui démontre que :  $\forall n \geq N\eta$

$$\left| \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu(M) - \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M) \right| \leq \eta$$

d'où la propriété annoncée.

**PROPRIÉTÉ II.5 :** Soit  $u \in V = ]u_0 - r, u_0 + r[$  et  $R_m(u)$  le polynôme défini au § II.2, il existe une sous-suite  $\{m_n\}$  de  $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ , un voisinage  $V$  (réel) de  $u_0 = e^{t_0}$  et  $\Phi$  fonction réelle de la variable réelle analytique dans  $V$  tels que

$$\frac{1}{m_n} \log R_{m_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(u) \quad u \in V.$$

*Démonstration :* Rappelons le théorème de Vitali [2] :

Si  $\{\Phi_n\}$  est une suite de fonctions analytiques sur un domaine  $S$ , uniformément bornées sur tout compact de  $S$  et convergente sur  $Q \subset S$ ,  $Q$  possédant un point d'accumulation dans  $S$ , alors  $\Phi_n$  converge vers une fonction analytique sur  $S$  et uniformément sur tout compact de  $S$ .

Rappelons (II.0) que

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - u_0)^2 + y^2 \leq r^2 \}$$

avec  $r < 1/2$  et  $r < e^{t_0}$  et  $S = \{ z \in \mathbb{C} : |z - u_0| < r \}$ .

Si nous posons :

$$R_n(z) = a_{d_n}^n \prod_{i=1}^{p_n} (z - W_i^n) (z - \overline{W_i^n}) \prod_{i=1}^{q_n} (z - a_i^n)$$

avec  $W_i^n \notin \mathbb{R}$  et  $a_i^n \in \mathbb{R}^-$ , nous pouvons définir avec la détermination usuelle du logarithme complexe :

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{n} \log a_{d_n}^n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p_n} \log (z - W_i^n) (z - \overline{W_i^n}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{q_n} \log (z - a_i^n)$$

analytique dans  $S$  et coïncidant avec  $\frac{1}{n} \log R_n(u)$  pour  $u \in ]u_0 - r, u_0 + r[$ .  
 En effet  $S$  ne contient aucune racine  $W_i^n, \overline{W}_i^n$  et  $\alpha_i^n$  car  $S \subset K$  et  $R_n$  n'a aucune racine dans

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - u_0)^2 + y^2 \leq r^2 \}.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi_n(z) &= \frac{1}{n} \log |R_n(z)| \\ |\operatorname{Im} \Phi_n(z)| &\leq \frac{1}{n} (p_n + q_n) \pi \leq \frac{d^\circ P_n^f}{n} \pi \leq C^f \pi. \end{aligned} \tag{1}$$

Soit  $H$  un compact de  $S$ . Il existe  $\eta \in ]0, r[$  tel que :

$$\forall z \in H : |z - u_0| \leq \eta.$$

Pour toute racine  $z_i$  de  $R_n$  et  $z$  de  $H$  (fig. 3), on a donc :

$$|z - z_i| \leq |z - u_0| + |u_0 - z_i| \leq |u_0 - z_i| + \eta$$

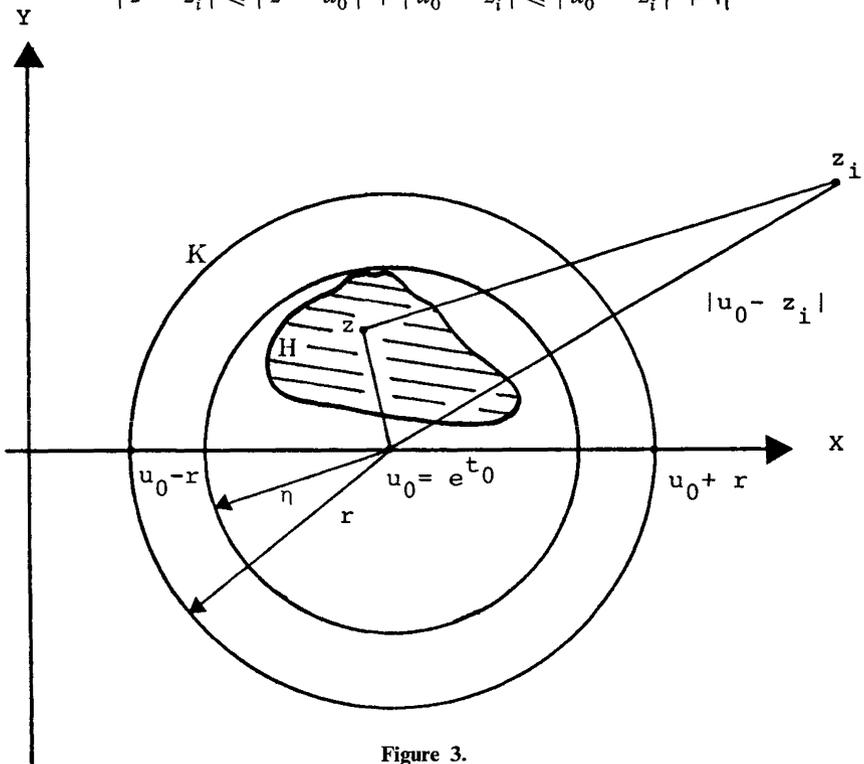


Figure 3.

et

$$|u_0 - z_i| \leq |u_0 - z| + |z - z_i| \leq \eta + |z - z_i|$$

d'où

$$|u_0 - z_i| - \eta \leq |z - z_i| \leq |u_0 - z_i| + \eta$$

et

$$1 - \frac{\eta}{|u_0 - z_i|} \leq \frac{|z - z_i|}{|u_0 - z_i|} \leq 1 + \frac{\eta}{|u_0 - z_i|}$$

et puisque  $|u_0 - z_i| \geq r$  il existe donc  $\mu$  et  $\nu$  tels que :

$$0 < \mu < 1 < \nu$$

$$\mu \leq \frac{|z - z_i|}{|u_0 - z_i|} \leq \nu$$

pour tout  $z \in H$  et tout  $z_i$  racine de  $R_n$ .

En conséquence  $\forall z \in H$

$$\mu^{nC^f} \leq \mu^{d^2 P_n^f} \leq \mu^{d^2 P_n} \leq \left| \frac{R_n(z)}{R_n(u_0)} \right| \leq \nu^{d^2 R_n} \leq \nu^{d^2 P_n^f} \leq \nu^{nC^f}$$

$$\frac{1}{n} \log |R_n(u_0)| + C_f \log \mu \leq \frac{1}{n} \log |R_n(z)|$$

$$\leq \frac{1}{n} \log |R_n(u_0)| + C_f \log \nu. \quad (2)$$

Mais nous savons (II. 2 et II. 4) que pour  $u \in V = ]u_0 - r, u_0 + r[$  et une sous-suite (vaguement convergente vers  $\mu$ ) des mesures de répartition des racines  $\{\mu_n\}$  :

$$\frac{1}{m_n} \log R_{m_n}(u) = \frac{1}{m_n} \log P_{m_n}(u) + \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu_{m_n}(M)$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{m_n} \log R_{m_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\log u) + \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu(M).$$

Nous pouvons en tirer deux conclusions :

1)  $\frac{1}{m_n} \log R_{m_n}(u_0)$  converge et les  $\frac{1}{m_n} \log R_{m_n}(z)$  sont donc uniformément bornés pour  $z \in H$  compact inclus dans  $S$ . (Il suffit d'appliquer les inégalités (1) et (2)).

2)  $\frac{1}{m_n} \log R_{m_n}(z)$  converge pour  $z \in V = ]u_0 - r, u_0 + r[$ . Nous pouvons donc appliquer le théorème de Vitali et affirmer que  $\frac{1}{m_n} \log R_{m_n}(z)$  converge pour  $z \in S$  vers une fonction analytique sur  $S \subset \Phi$ . Il nous suffit de prendre la restriction de  $\Phi$  à  $V$  pour démontrer la propriété II. 5.

**II. 6. Démonstration du théorème II. 1**

Avec les résultats des propriétés II. 4 et II. 5 nous pouvons écrire que pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$  il existe :

- 1) une mesure positive  $\mu$  bornée à support dans

$$K = \{ (x, y) : (x - e^{t_0})^2 + y^2 \leq r^2 \}$$

limite vague d'une sous-suite de la suite des mesures des répartitions des racines des  $P_n^f$  situées dans  $K$  ;

- 2) une fonction analytique  $\Phi$  de la variable réelle dans un voisinage  $V = ]u_0 - r, u_0 + r[$  vérifiant

$$f(\log u) = \Phi(u) - \int_K \log \frac{1}{UM} d\mu(M)$$

$$u \in ]u_0 - r, u_0 + r[ \quad U = (u, 0).$$

Nous pouvons en conclure l'existence d'un voisinage  $W$  de  $t_0$  tel que

$$f(t) = \phi(t) + \int_K \log ((x - e^t)^2 + y^2)^{1/2} d\mu(x, y) \quad t \in W$$

avec  $\phi(t) = \Phi(e^t)$  analytique sur  $W$  ce qui démontre le théorème.

**II.7. Expression intégrale d'un élément de  $F$**

Soit  $f \in F$  définie par

$$f(t) = Ct + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t)$$

avec  $d^\circ P_n^f \leq nC^f$  et  $P_n^f$  à coefficients positifs. Avec les mêmes notations qu'au § II. 1 on peut énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME II.8 :** *Représentation intégrale d'un élément de  $F$ . Soit  $f \in F$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

*Il existe :*

- *une fonction (réelle de la variable réelle)  $\phi$  analytique dans un voisinage  $W$  de  $t_0$*
- *un voisinage (dans  $\mathbb{R}^2$ ) compact de  $(e^{t_0}, 0) : K$*
- *une mesure positive bornée  $\mu$  à support dans  $K$  tels que :*

$$f(t) = \phi(t) + \int_K \log ([e^t - x]^2 + y^2)^{1/2} d\mu(x, y), \quad t \in W$$

*de plus  $\mu$  est limite vague d'une sous-suite des mesures de répartition dans  $K$  des racines des polynômes  $P_n^f$ .*

*Démonstration :* C'est la même que celle du théorème II.1 la fonction  $\phi$  étant remplacée par  $t \rightarrow Ct + \phi(t)$ .

### III. APPROXIMATION DES SINGULARITÉS D'UNE FONCTION $f$ CONVEXE LIPSCHITZIENNE

**THÉORÈME III [3, 4] :** *Soit  $C \in \mathbb{R}$ ,  $C^f \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction réelle de la variable réelle, convexe et lipschitzienne définie par :*

$$f(t) = Ct + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t) \quad t \in \mathbb{R}$$

*les  $P_n^f$  étant des polynômes à coefficients positifs non tous nuls, vérifiant  $d^\circ P_n^f \leq C^f n$   $n \in \mathbb{N}$ .*

*Si  $t_c \in \mathbb{R}$  est une singularité de  $f$ , alors  $e^{t_c}$  est un point d'accumulation dans  $\mathbb{C}$  des racines des polynômes  $P_n^f$ .*

*Démonstration :* Par définition  $t_c$  sera une singularité de  $f$  si et seulement si  $f$  (fonction de la variable réelle) n'est pas analytique autour de  $t_c$ .

Si  $e^{t_c}$  n'est pas point d'accumulation des racines des polynômes  $P_n^f$  il existe  $B_\varepsilon = \{ (x, y) : ((x - e^{t_c})^2 + y^2)^{1/2} \leq \varepsilon \}$  tel que aucun des polynômes  $P_n^f$  ne possède de racines dans  $B_\varepsilon$ . On peut trouver  $K = \{ (x, y) : ((x - e^{t_c})^2 + y^2)^{1/2} \leq r \}$ ,  $W$  voisinage de  $t_c$  et  $\phi$  analytique sur  $W$  tels que :

$$f(t) = \phi(t) + \int_K \log ((e^t - x)^2 + y^2)^{1/2} d\mu(x, y) \quad t \in W$$

où  $\mu$  est limite d'une sous-suite  $\{\mu_{m_n}\}$  des mesures de répartitions des racines des polynômes  $P_{m_n}^f$  dans  $K$ . Or  $\mu_{m_n}$  est nulle sur  $B_\varepsilon$  et par conséquent  $\mu$  aussi. La partie intégrale de l'expression de  $f$  est donc analytique autour de  $t_c$  donc  $f$  aussi.

### III. 1. Illustration du théorème III

Prenons

$$f(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

On peut écrire

$$f(t) = -t + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P_n^f(e^t)$$

avec

$$P_n^f(z) = 1 + z^{2n}.$$

Il est clair que le seul point d'accumulation réel positif des racines de  $P_n^f$  est  $z_c = 1$  correspondant à la singularité  $t_c = 0$  de  $f$ .

### III. 2. Recherche des singularités d'une fonction convexe lipschitzienne

La méthode consiste à calculer à partir de valeurs réelles de la fonction  $f$  des polynômes  $P_n^f$  et d'en étudier les répartitions de racines dans  $\mathbb{C}$ . Nous n'avons pas à développer ici une méthode numérique de recherche de points d'accumulation mais les exemples ont pour but de montrer que cette approche est tout à fait raisonnable. D'ailleurs plus qu'un algorithme figé des moyens interactifs de calcul (utilisant un écran graphique par exemple) sont beaucoup plus adaptés au problème.

D'un point de vue numérique la méthode demande seulement l'évaluation des différences premières de la fonction et ceci quel que soit l'ordre de la singularité. De plus, nous n'avons pas utilisé des polynômes de degré supérieur à 40 ce qui est raisonnable pour une bonne procédure de calcul de racines de polynômes.

*Exemple numérique 1* : Nous considérons la fonction convexe lipschitzienne :

$$f(t) = \frac{|t|^{1.5}}{(1 + |t|)^{0.5}}$$

qui appartient à  $C^1(\mathbb{R})$  mais dont la dérivée seconde est discontinue en  $t_c = 0$ .

Conformément à l'algorithme du § I.3 nous calculons les polynômes  $P_n^f$  pour  $n = 10$  et  $n = 20$ . Les polynômes obtenus sont de degré 20 et 38 et leur calcul utilise respectivement 11 et 21 évaluations de la fonction  $f$  en des valeurs comprises dans  $[-\log 10, \log 10]$  et  $[-\log 20, \log 20]$ .

La figure 4 montre la répartition des racines de  $P_{10}^f$  la figure 5 celles de  $P_{20}^f$  et la figure 6 superpose les images des racines des polynômes  $P_{10}^f, P_{12}^f, P_{14}^f, P_{16}^f, P_{18}^f$  et  $P_{20}^f$ .

On remarque qu'une courbe limite coupant nettement l'axe réel positif en  $z_c = 1$  (correspondant à  $z_c = e^{t_c}, t_c = 0$ ) apparaît sur ces figures.

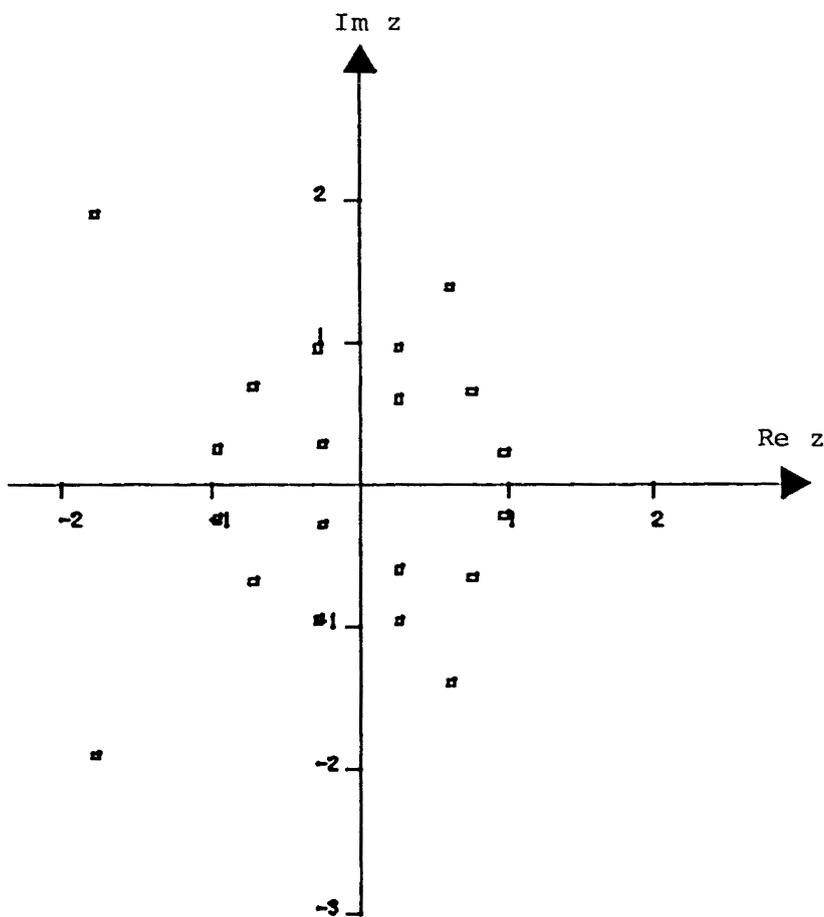


Figure 4. — Racines du polynôme  $P_{10}^f$ .

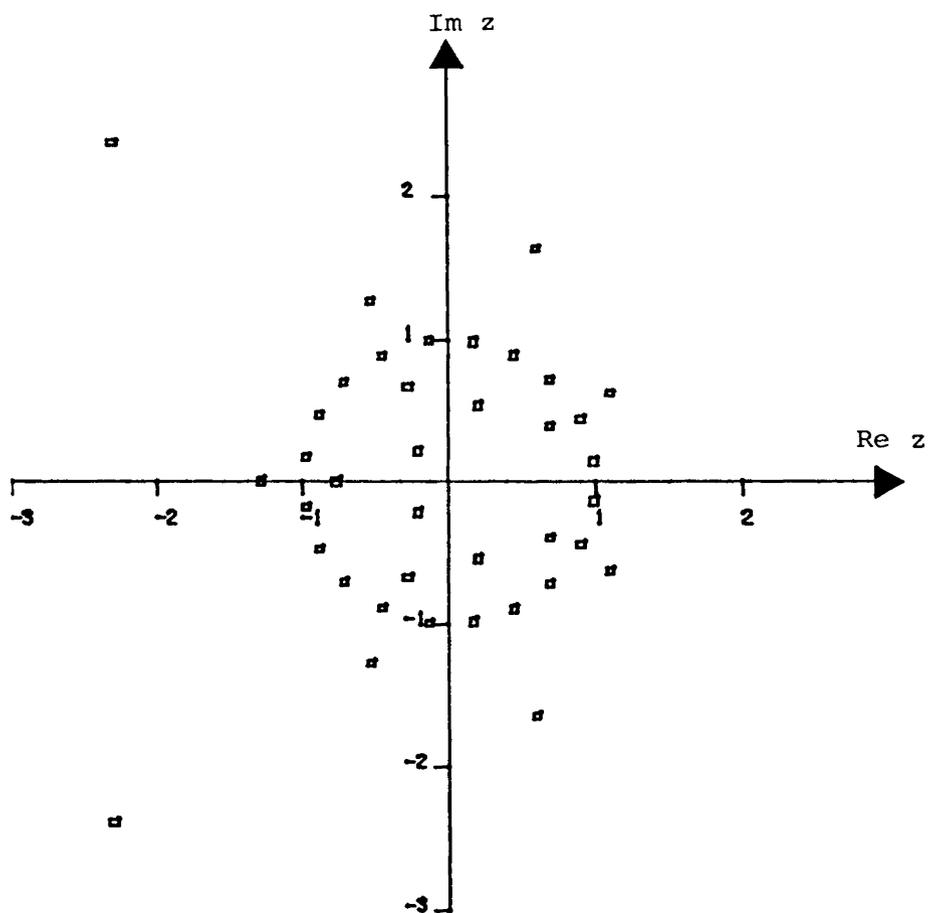


Figure 5. — Racines du polynôme  $P_{20}^f$ .

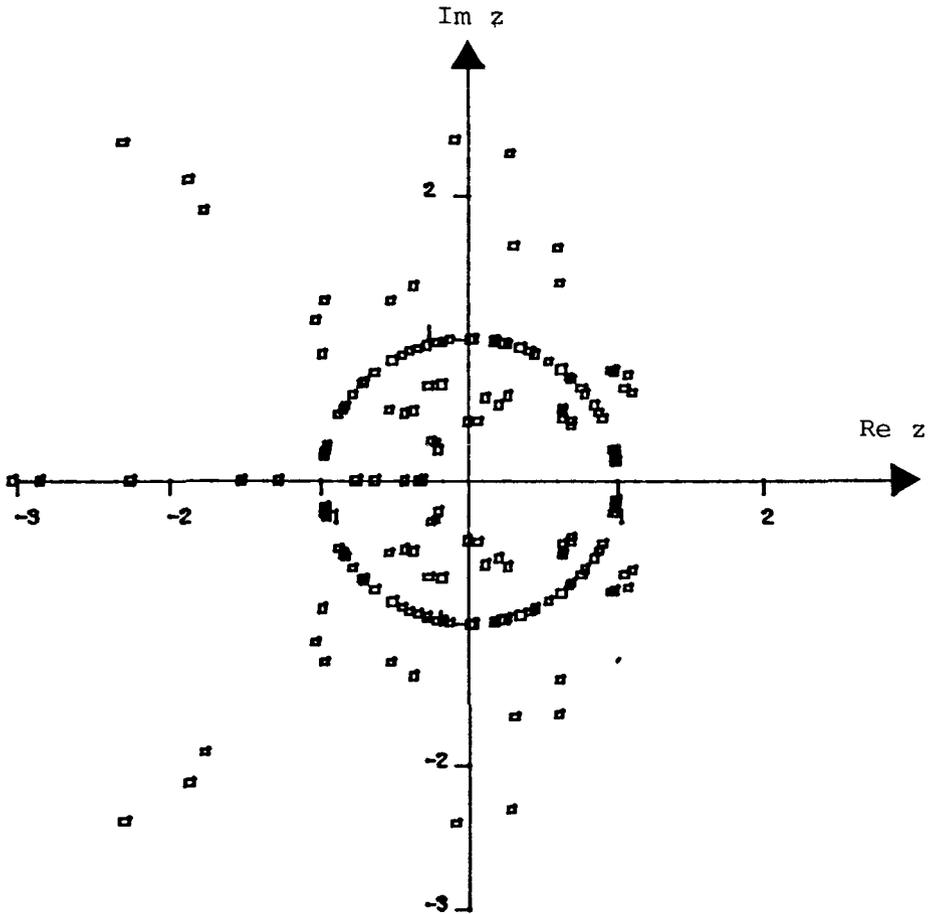


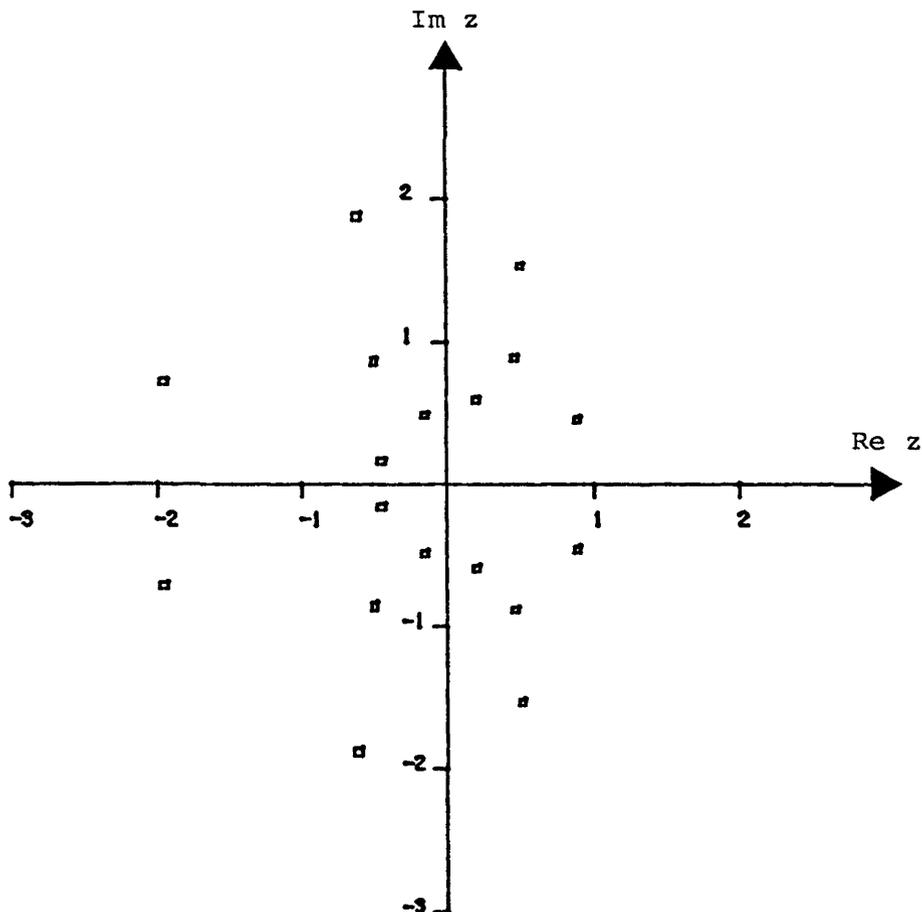
Figure 6. — Superposition de racines de polynômes  $P_n^f$ .

*Exemple numérique 2* : Nous considérons la fonction convexe lipschitzienne :

$$g(t) = \frac{t^2}{1 + |t|}$$

qui appartient à  $C^2(\mathbb{R})$  mais dont la dérivée troisième est discontinue en  $t_c = 0$ .

De plus, nous appliquons une variante de l'algorithme I.3 en subdivisant l'intervalle  $[-\log n, \log n]$  en  $4n$  sous-intervalles au lieu de  $n$  (voir § I.4).

Figure 7. — Racines du polynôme  $P_{10}^g$ .

Sur la figure 7 sont visualisées les racines du polynôme  $P_n^g$ , pour  $n = 10$  (40 sous-intervalles de  $[-\log 10, \log 10]$  avec degré de  $P_n^g = 18$ ).

Sur la figure 8 sont visualisées les racines du polynômes  $P_n^g$  pour  $n = 20$  (8 sous-intervalles de  $[-\log 20, \log 20]$  avec degré de  $P_n^g = 38$ ).

La figure 9 est la superposition des images des racines des polynômes  $P_{10}^g, P_{12}^g, P_{14}^g, P_{16}^g, P_{18}^g$  et  $P_{20}^g$ .

De la figure 7 à la figure 8 on voit se dessiner la possibilité d'un point d'accumulation en  $z_c = 1$  (correspondant à la singularité  $t_c = 0$  de  $g$ ) qui se voit beaucoup plus clairement sur la figure 9.

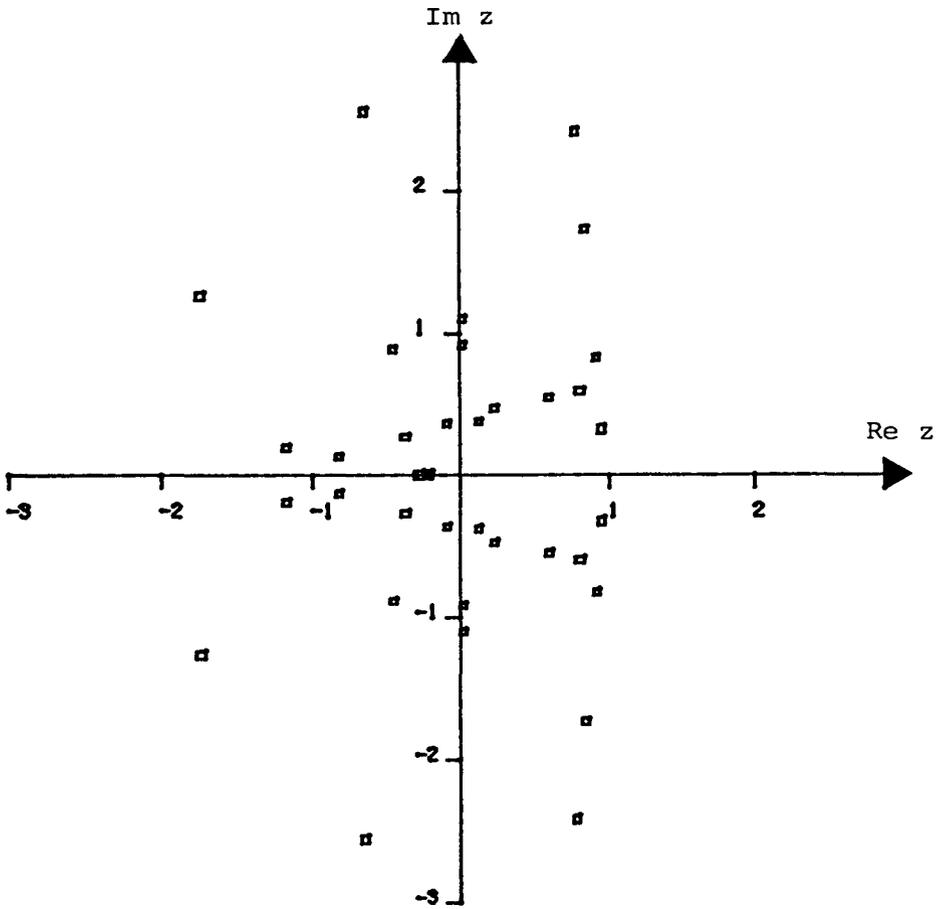


Figure 8. — Racines du polynôme  $P_{20}^s$ .

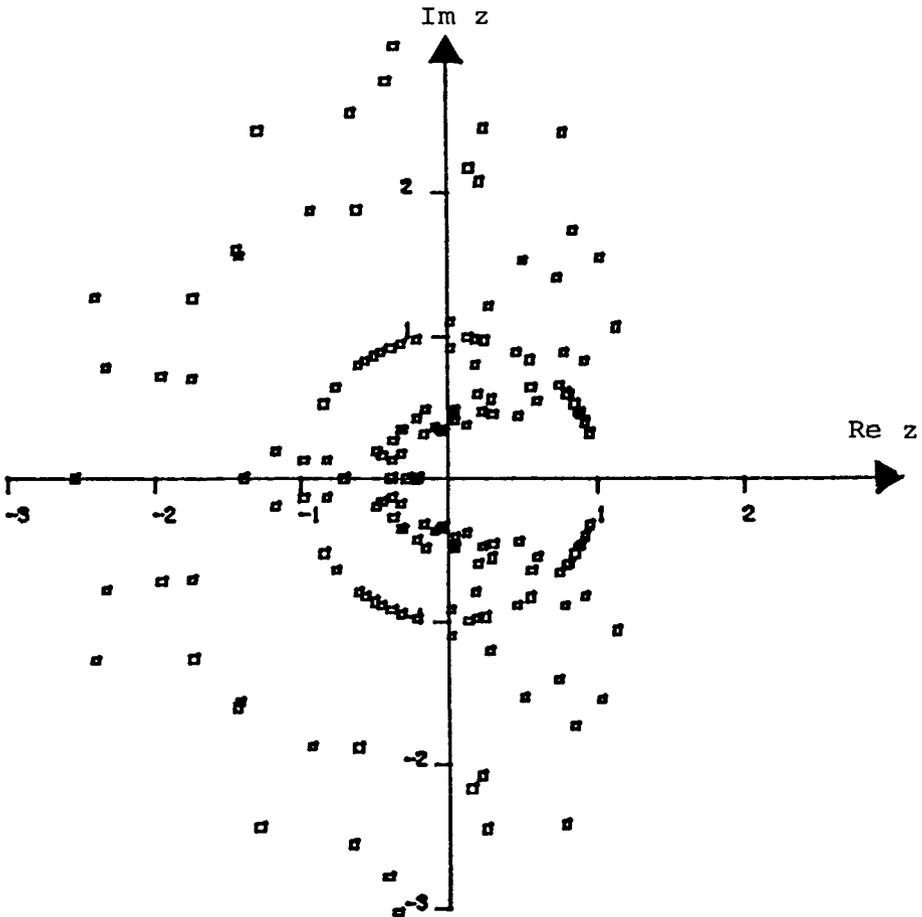


Figure 9. — Superposition de racines de polynômes  $P_n^g$ .

*Exemple numérique 3* : Nous prenons la fonction  $h(t) = (1 + t^2)^{0,5}$  qui est une fonction analytique de  $t \in \mathbb{R}$ . En prenant  $n$  points dans l'intervalle  $[-\log n, \log n]$  nous calculons les polynômes  $P_{10}^h, P_{12}^h, P_{14}^h, P_{16}^h, P_{18}^h$  et  $P_{20}^h$  dont les racines sont superposées sur la figure 10. Contrairement aux exemples 2 et 3 le lieu de répartition des racines semble exclure l'axe réel positif ce qui est conforme à la théorie.

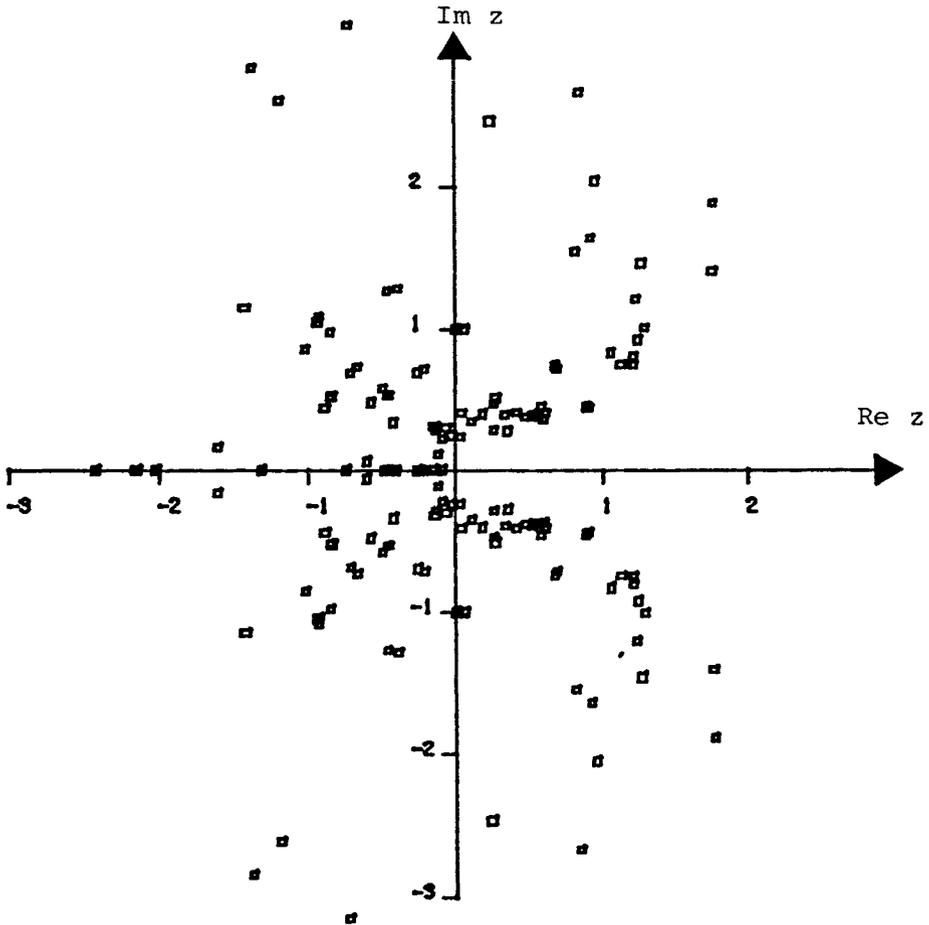


Figure 10. — Superposition de racines de polynômes  $P_n^h$ .

## CONCLUSION

Dans cet article, nous donnons les bases minimum d'une méthode originale d'approximation des singularités d'une fonction convexe lipschitzienne et nous montrons que son utilisation numérique semble raisonnable.

La méthode proposée peut se développer dans plusieurs directions :

- 1) Étude des classes d'algorithmes permettant de calculer des suites de polynômes  $P_n^f$ .

2) Étude des répartitions des racines des  $P_n^f$ . Il serait fondamental de savoir s'il existe certaines répartitions limites universelles attachés à des algorithmes de constructions particuliers. En particulier l'existence de courbes limites est suggérée par les expériences numériques réalisées (ainsi d'ailleurs que par les expériences réalisées par les physiciens [7, 11])

3) Possibilité de faire du prolongement analytique d'une fonction convexe définie sur l'axe réel

Ces trois points sont très liés les uns aux autres

### Bibliographie

- [1] M. E. FISHER, *The nature of critical points* Lecture in theoretical physics 7c Boulder University of Colorado Press (1964)
- [2] P. HENRICI, *Applied and computational complex analysis*, Vol II, J. Wiley and Sons
- [3] B. LACOLLE, *Algebraic method for the computation of the partition functions of spin glasses and numerical study of the distributions of zeros* « Critical phenomena in Physics, Biology, Chemistry and other fields » Springer Series in Synergetics (1980)
- [4] B. LACOLLE, *Potentiel logarithmique et transition de phase*, S A N G n° 338, IMAG
- [5] T. D. LEE, C. N. YANG, *Statistique theory of equation of state and phase transition II Lattice gas and Ising Model* Physical Review, vol 87, number 3, August 1952
- [6] C. M. MARLE *Mesures et probabilités* Hermann
- [7] S. ONO, Y. KARAKI, C. KAWABATA, *Statistical thermodynamics of finite Ising Model I* Journal of Phys. Soc. of Japan, Vol 25, n° 1 (1968)
- [8] H. POINCARÉ, *Le potentiel Newtonien*
- [9] G. POLYA, G. SZEGO, *Problems and theorems in Analysis* Vol I, Springer-Verlag
- [10] G. POLYA, G. SZEGO, *Problems and theorems in Analysis* Vol II, Springer-Verlag
- [11] M. SUZUKI, C. KAWABATA, S. ONO, Y. KARAKI, M. IKEDA, *Statistical thermodynamics of finite Ising Model II* Journal of Phys. Soc. of Japan Vol 29, n° 4 (1970)
- [12] A. E. TAYLOR, *General theory of functions and Integration* Blaisdell Publishing Company (1965)
- [13] G. VALIRON, *Théorie des fonctions* Masson (1966)
- [14] C. N. YANG, T. D. LEE, *Statistical theory of equation of state and phase transition I Theory of condensation* Physical Review, Volume 87, n° 3, August 1952