

F. ROBERT

**Meilleure approximation en norme vectorielle  
et minima de Pareto**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 19, n° 1 (1985), p. 89-110

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1985\\_\\_19\\_1\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_1_89_0)

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



## MEILLEURE APPROXIMATION EN NORME VECTORIELLE ET MINIMA DE PARETO (\*)

par F. ROBERT <sup>(1)</sup>

Résumé. — *La notion de meilleur approximant au sens d'une norme vectorielle est un cas particulier intéressant de l'optimisation multicritère au sens de Pareto. L'ensemble des meilleurs approximants est toujours non vide, mais à la différence du cas scalaire usuel, il peut n'être ni convexe, ni compact.*

*On donne alors des conditions suffisantes pour que l'ensemble des meilleurs approximants stricts soit convexe et compact : il est alors caractérisé comme la fermeture convexe de certains sous-ensembles (eux-mêmes convexes et compacts) bien déterminés.*

Abstract. — *The notion of best approximation relative to a vectorial norm is an interesting particular case of the so-called Pareto-type approximation. The set of the best approximants is always non-empty. But, by contrast with the usual scalar case, this set may be not convex, nor compact.*

*Sufficient conditions are then given, which ensure the set of strictly best approximants to be convex and compact. Indeed, this set is then characterized as the convex closure of some well-defined, convex and compact subsets.*

### 1. INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier ici la notion de *meilleure approximation au sens d'une norme vectorielle* : nous nous donnons un sous-espace vectoriel  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , un élément  $a$  de  $\mathbb{R}^n$  non situé dans  $X$ , et nous munissons  $\mathbb{R}^n$  d'une *norme vectorielle  $p$  de taille  $k$*  [4]. Il s'agit alors de savoir ce qu'est un *meilleur approximant de  $a$  dans  $X$  au sens de la norme vectorielle  $p$*  : nous compliquons ainsi la situation classique (où l'on minimise un seul critère :  $z \in X \rightarrow \|z - a\| \in \mathbb{R}_+$ ) pour étudier un contexte qui va correspondre à une minimisation multicritères (convexes).

Nous verrons qu'il s'agit en fait d'une situation géométrique intéressante, qui s'interprète exactement comme *la minimisation, au sens de Pareto, de*

---

(\*) Reçu en décembre 1983.

(<sup>1</sup>) Laboratoire IMAG et INPG, Analyse Numérique, B.P. 68, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France.

$k$  critères convexes :  $z \in X \rightarrow p_i(z - a)$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Dans cette situation, l'ensemble des meilleurs approximants est toujours fermé non vide, mais il peut être « compliqué » et ne pas être convexe, ni même compact.

Le principal résultat de ce travail (Proposition 2) consiste à élaborer des conditions suffisantes « raisonnables » permettant d'assurer que l'ensemble  $S$  des meilleures approximants stricts de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  est une partie convexe, compacte (non vide) de  $X$ , car caractérisée comme la fermeture convexe dans  $X$  de certaines parties caractéristiques, elles-mêmes convexes et compactes (non vides). De plus, l'ensemble  $p(S - a)$  des meilleures approximations  $p(\bar{a} - a)$ , pour  $\bar{a}$  pris dans  $S$ , est caractérisé, dans ce contexte, comme la portion, située dans l'octant positif de  $\mathbb{R}^k$ , d'un certain hyperplan de  $\mathbb{R}^k$  : il est alors, lui aussi, compact et convexe.

2. NOTIONS DE BASE

Soit donc  $X$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a$  un élément de  $\mathbb{R}^n$  non situé dans  $X$ . Voici quelques brefs rappels sur la notion de norme vectorielle (cf. [4]).

Se donner une norme vectorielle de taille  $k$  sur  $\mathbb{R}^n$ , c'est se donner sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $k$  semi-normes  $p_i$ , de noyaux notés  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) dont l'intersection est réduite à  $\{0\}$ .

$$\bigcap_{i=1}^k V_i = \{0\}.$$

Avec le formalisme :

$$x \in \mathbb{R}^k \rightarrow p(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_k(x) \end{pmatrix}$$

$p$  vérifie les axiomes usuels de la notion de norme :  $\mathbb{R}^n$  se trouve ainsi muni d'un outil topologique (vectoriel) équivalent à la norme suivante sur  $\mathbb{R}^n$

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \Phi(x) = \text{Max}_{i=1}^k p_i(x) \quad (\text{cf. [4]}).$$

On pose alors, pour tout  $i$  de 1 à  $k$

$$W_i = \bigcap_{j \neq i} V_j.$$

Les  $W_i$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  ayant les propriétés suivantes :

- 1)  $W_i \cap V_i = \{0\}$   $i = 1, 2, \dots, k$
- 2)  $W_i \cap W_j = \{0\}$  pour  $i \neq j$
- 3) la somme directe  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  est définie,
- 4) alors, pour tout  $x$  de  $W$ , décomposé (de façon unique) en  $x = x_1 + \dots + x_k$  ( $x_i \in W_i$ ) on a :

$$p(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} p_1(x_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ p_2(x_2) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ p_k(x_k) \end{pmatrix}}.$$

soit

$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_k)$$

*Norme vectorielle régulière* : La norme vectorielle est dite *régulière* si  $W$  est  $\mathbb{R}^n$  tout entier. Alors la décomposition et la propriété précédentes sont valides pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , ce qui simplifie considérablement la situation. A noter qu'une norme vectorielle régulière sur  $\mathbb{R}^n$  est nécessairement de taille  $k \leq n$  ([4]).

Ces rappels faits, on peut entrer dans le vif du sujet, en introduisant les :

#### DÉFINITIONS

1. Soit  $a$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ , non situé dans le sous-espace vectoriel  $X$ .  $\bar{a}$ , élément de  $X$ , est appelé meilleur approximant de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  s'il n'existe aucun élément  $z$  dans  $X$  tel que :

$$p(z - a) < p(\bar{a} - a)$$

(inégalité stricte, composante à composante).

Si  $\bar{a}$  est un tel élément,  $p(\bar{a} - a)$  sera appelé la meilleure approximation correspondante (attention, c'est un vecteur de  $\mathbb{R}_+^k$ ).

2.  $\tilde{a}$ , élément de  $X$ , est appelé meilleur approximant strict de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ , s'il n'existe aucun élément  $z$  dans  $X$  tel que :

$$p(z - a) \not\leq p(\tilde{a} - a)$$

(inégalité  $\leq$  composante à composante, avec au moins une inégalité stricte).

*Remarques :*

1. Ces définitions sont naturelles, et tout meilleur approximant strict de  $a$  est évidemment un meilleur approximant de  $a$  (dans  $X$ , selon  $p$ ).

2. Les notions que nous venons d'introduire sont exactement celles des *minima de Pareto* ([1], [3]) relatifs aux  $k$  critères (convexes) :

$$x \in X \rightarrow p_i(x - a) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Précisément, ce que nous avons appelé un *meilleur approximant* est un *minimum de Pareto faible*, et ce que nous avons appelé un *meilleur approximant strict* est un *minimum de Pareto*.

3. La question générale qui se pose est donc d'étudier et de caractériser ces meilleurs approximants et les meilleures approximations correspondantes. (Bien entendu, pour le cas d'une norme vectorielle de taille 1, on retrouve la notion usuelle.)

**3. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES (existence, fermeture, caractérisation...)**

Des résultats généraux concernant les minima de Pareto ([1], [3]) nous allons tirer un certain nombre d'informations pour notre cas particulier. Nous les regroupons dans la proposition suivante :

**PROPOSITION 1**

1. *L'ensemble des meilleurs approximants de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  est toujours fermé non vide.*

2. *Pour qu'un élément  $\bar{a}$  de  $X$  soit un meilleur approximant de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ , il faut et il suffit qu'il existe des constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0$ , non toutes nulles, telles que  $\bar{a}$  soit un meilleur approximant dans  $X$  pour la semi-norme :*

$$\Psi_\lambda(z) = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i(z),$$

*c'est-à-dire que l'on a :*

$$\Psi_\lambda(\bar{a} - a) = \underset{z \in X}{\text{Min}} \Psi_\lambda(z - a)$$

*(de tels  $\lambda_i$ , définis à une constante multiplicative positive près, sont des multiplicateurs).*

3. *Si de plus tous les  $\lambda_i$  sont strictement positifs, alors  $\Psi_\lambda$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\bar{a}$  est alors un meilleur approximant strict de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  (la réciproque est fausse).*

4. Si toutes les semi-normes  $p_i$  sont strictement convexes, tout meilleur approximant de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  est strict (attention, il n'y a pas unicité).

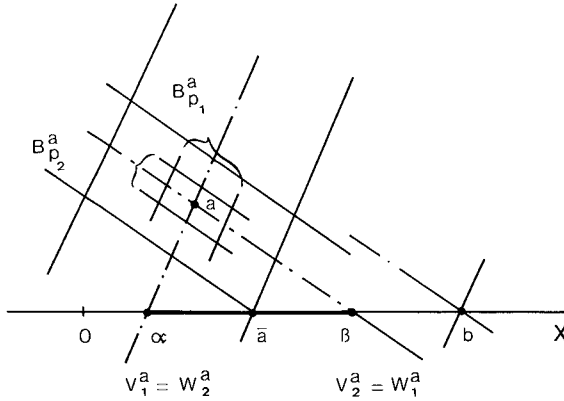
Remarques :

1. Bien que la proposition précédente apporte, dans le cas le plus général, un ensemble de résultats positifs (en particulier, grâce à la caractérisation citée) les exemples qui suivent montrent en fait que l'ensemble des meilleurs approximants de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  peut n'être ni convexe, ni compact (à la différence de ce qui se passe avec une norme scalaire) et ce même si la norme vectorielle  $p$  utilisée est régulière.

2. Ce sera alors l'objet du paragraphe 5 que d'élaborer un contexte « raisonnable » permettant d'assurer que l'ensemble des meilleurs approximants stricts de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  est une partie convexe et compacte de  $X$ .

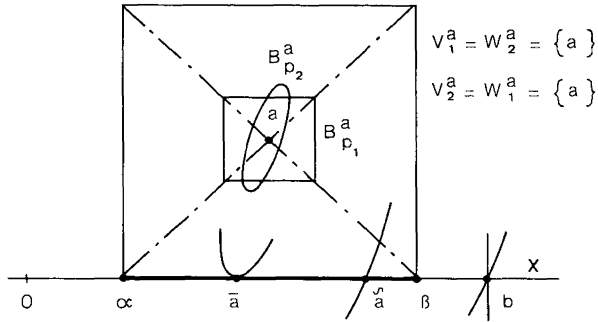
4. DES EXEMPLES (certaines notations renvoient au paragraphe 5)

Exemple 1 :  $n = k = 2$   $p$  est régulière.



Dans cet exemple, le lieu des meilleurs approximants de  $a$  est  $[\alpha, \beta]$ . Ils sont tous stricts.  $b$  n'est pas meilleur approximant.

Exemple 2 :  $n = k = 2$   $p_1$  et  $p_2$  sont des normes sur  $\mathbb{R}^2$   
 $p$  n'est pas régulière .



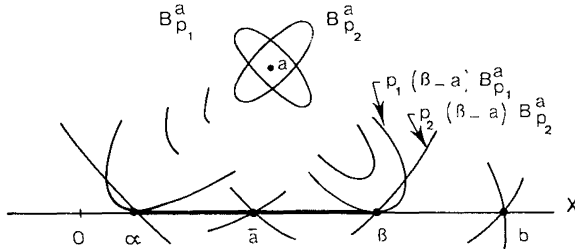
Dans cet exemple, le lieu des meilleurs approximatifs de  $a$  est  $[\alpha, \beta]$ . Seul  $\bar{a}$  est strict.  $b$  n'est pas meilleur approximant.

Exemple 3 :  $n = 2, k = 2$   $p_1$  et  $p_2$  sont des normes sur  $\mathbb{R}^2$

$$V_1^a = W_2^a = \{a\}$$

$$V_2^a = W_1^a = \{a\}$$

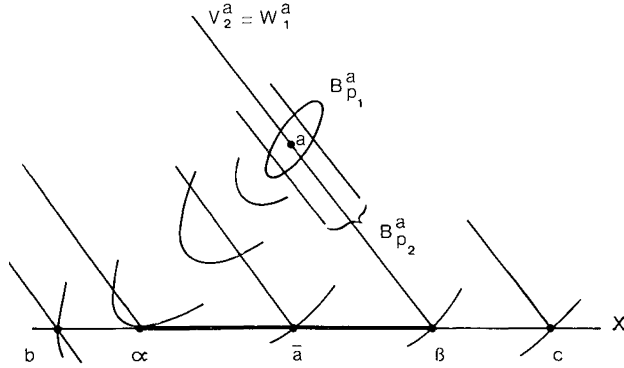
$p$  n'est pas régulière



Le lieu des meilleurs approximatifs de  $a$  est  $[\alpha, \beta]$ . Ils sont tous stricts.  $b$  n'est pas meilleur approximant.

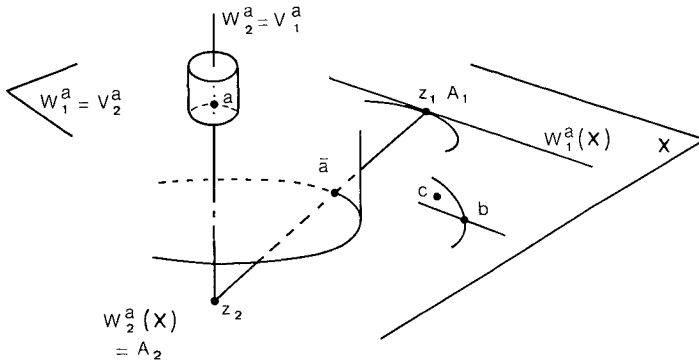
Exemple 4 :  $n = 2, k = 2$   $p_1$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$   
 $p$  n'est pas régulière

$$W_2^a = \{ a \} .$$



Le lieu des meilleurs approximants de  $a$  est  $[\alpha, \beta]$ . Ils sont tous stricts.  
 $b$  et  $c$  ne sont pas meilleurs approximants.

Exemple 5 :  $n = 3, k = 2$  la norme vectorielle  $p$  est régulière.



L'ensemble des meilleurs approximants stricts de  $a$  est  $[z_1, z_2]$  : il est convexe et compact.

L'ensemble de tous les meilleurs approximants de  $a$  est l'ensemble

$$[z_1, z_2] \cup W_1^a(X)$$

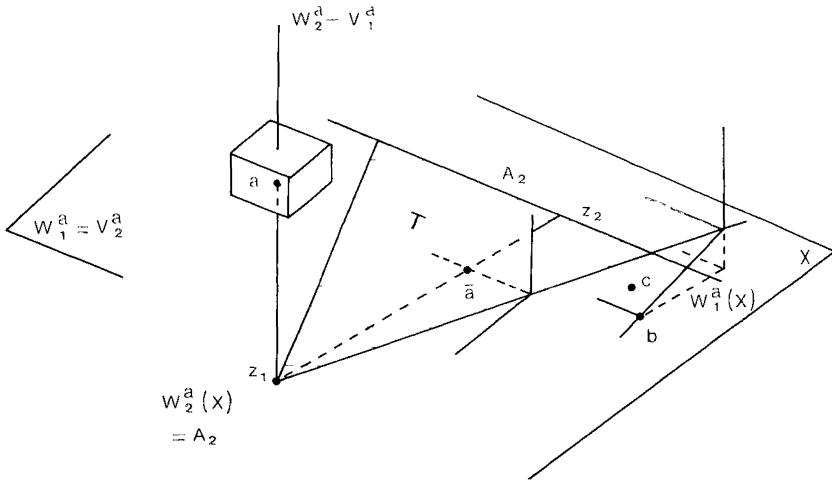
il n'est ni convexe, ni compact .

$b$  n'est pas meilleur approximant de  $a$  car :

$$p(c - a) < p(b - a) .$$



Exemple 6 :  $n = 3, k = 2$  la norme vectorielle  $p$  est régulière.



L'ensemble des meilleurs approximatants stricts de  $a$  est le triangle  $T$  hachuré : il est convexe et compact.

L'ensemble de tous les meilleurs approximatants est l'ensemble :

$$T \cup W_1^a(x)$$

il n'est ni convexe, ni compact .

$b$  n'est pas un meilleur approximant de  $a$  car :

$$p(c - a) < p(b - a) .$$

Exemple 7 :  $n = 3, k = 3$  la norme vectorielle  $p$  est régulière.

(voir figure page suivante)

L'ensemble des meilleurs approximatants stricts de  $a$  est le triangle  $T$  hachuré : il est convexe et compact.

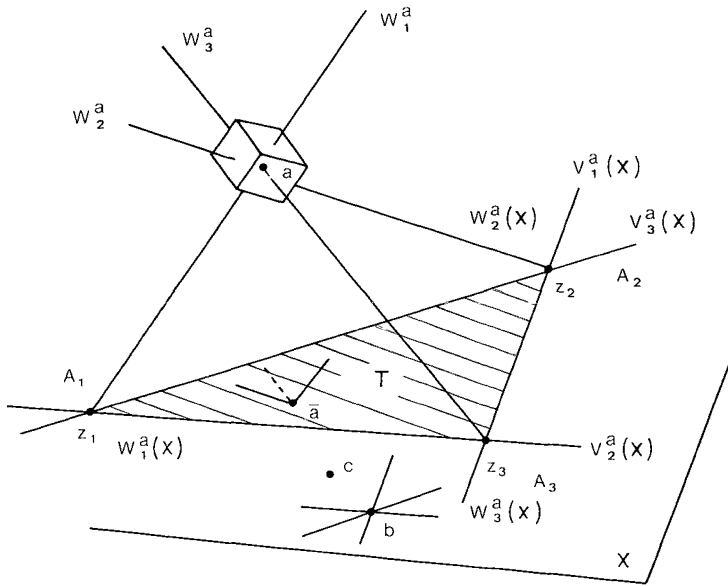
L'ensemble de tous les meilleurs approximatants de  $a$  est l'ensemble :

$$T \cup V_1^a(X) \cup V_2^a(X) \cup V_3^a(X)$$

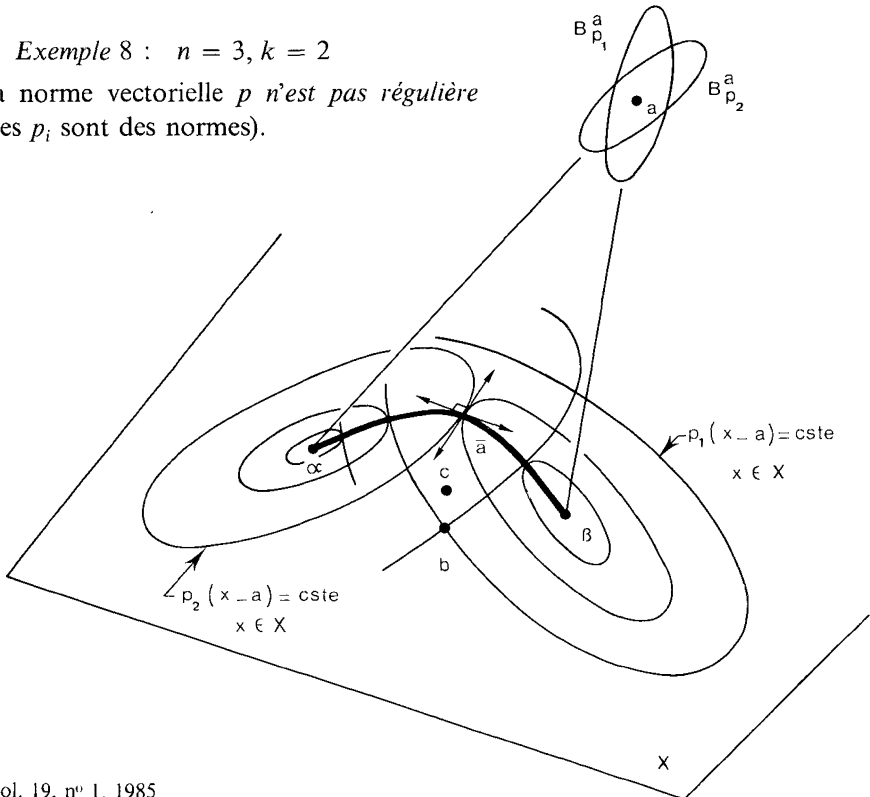
il n'est ni convexe, ni compact .

$b$  n'est pas un meilleur approximant de  $a$  car :

$$p(c - a) < p(b - a) .$$



Exemple 8 :  $n = 3, k = 2$   
 la norme vectorielle  $p$  n'est pas régulière  
 (les  $p_i$  sont des normes).



L'ensemble des meilleurs approximants de  $a$  est la *courbe*  $[\alpha, \beta]$  il n'est pas convexe (mais il est compact)

Tous les meilleurs approximants sont *stricts*

$b$  n'est pas meilleur approximant de  $a$  car

$$p(c - a) < p(b - a).$$

5. UN RÉSULTAT DE COMPACTITÉ-CONVEXITÉ

Dans ce qui suit, on va élaborer des conditions *suffisantes* assurant que l'ensemble  $S$  des meilleurs approximants *stricts* de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  est une partie *convexe, compacte* (non vide) de  $X$

La principale de ces conditions est la *régularité* de la norme vectorielle  $p$  utilisée.

*En fait, on peut valablement conjecturer que cette condition de régularité est suffisante* pour assurer que l'ensemble des meilleurs approximants *stricts* de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  soit une *partie convexe compacte* (non vide) de  $X$ , et ce, quel que soit le sous-espace  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , et quel que soit  $a$  pris en dehors de  $X$ .

Néanmoins, nous ne pourrons établir réellement ce résultat qu'en rajoutant deux hypothèses techniques supplémentaires, probablement inutiles, mais simplificatrices du point de vue des positions relatives de différents sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^n$ .

Par ailleurs, dans le contexte que nous délimiterons, nous serons capables de *caractériser* l'ensemble  $S$  des meilleurs approximants *stricts* de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  comme la *fermeture convexe* d'un certain nombre de parties de  $X$  (elles-mêmes convexes, compactes, non vides) d'où, de fait, la *convexité* et la *compacité* de  $S$ .

De plus, l'ensemble des *meilleures approximations*  $p(\bar{a} - a)$ , pour  $a$  pris dans  $S$ , sera aussi caractérisé de façon simple. C'est la portion d'un certain hyperplan située dans l'octant positif de  $\mathbb{R}^k$ . Ces résultats s'illustreront sur les exemples précédents.

Nous allons introduire d'abord un minimum de notations

Rappelons que l'on a défini les sous-espaces vectoriels suivants de  $\mathbb{R}^n$  (cf. paragraphe 2) :

$$\left. \begin{aligned} V_i &= \text{Ker}(p_i) \\ W_i &= \bigcap_{j \neq i} V_j \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, k$$

$a$  étant donné dans  $\mathbb{R}^n$ , on posera

$$V_i^a = a + V_i; \quad W_i^a = a + W_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Ce sont des sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^n$  et puisqu'il s'agit d'une simple translation (de  $a$ ) on a encore :

$$W_i^a = \bigcap_{j \neq i} V_j^a \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

$X$  étant le sous-espace vectoriel donné de  $\mathbb{R}^n$  ( $a \notin X$ ) on définit alors les sous-espaces affines (éventuellement vides) suivants, contenus dans  $X$  :

$$V_i^a(X) = V_i^a \cap X; \quad W_i^a(X) = W_i^a \cap X \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

et l'on a évidemment :

$$W_i^a(X) = \bigcap_{j \neq i} V_j^a(X) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Notons que les  $W_i^a(X)$  sont des parties deux à deux *disjointes* de  $X$ . Car si  $z \in W_i^a(X) \cap W_j^a(X)$ , pour  $j \neq i$ , on a à la fois :

$$z \in X, \quad z - a \in W_i, \quad z - a \in W_j \quad \text{d'où} \quad z - a \in W_i \cap W_j = \{0\}$$

d'où  $z = a$  ce qui est impossible car par hypothèse  $z \in X$  et  $a \notin X$ .

Nous ferons dorénavant les deux hypothèses suivantes :

H1 La norme vectorielle  $p$  utilisée est *régulière* (d'où  $k \leq n$ ).

H2 Pour tout  $i$  de 1 à  $k$ ,  $W_i^a(X)$  est non vide, ce qui signifie que  $a + W_i$  recoupe le sous-espace  $X$ .

(Remarque : Puisque  $W_i^a(X) \subset V_j^a(X)$  pour tout  $j \neq i$ , H2 implique également que tous les  $V_j^a(X)$  sont non vides.)

Considérons alors, pour  $i = 1, 2, \dots, k$ , l'application :

$$z \in W_i^a(X) \rightarrow p_i(z - a) \in \mathbb{R}_+.$$

On notera  $A_i$  l'ensemble des meilleurs approximants de  $a$  dans  $W_i^a(X)$  relativement à  $p_i$  :

$$\forall \tilde{a} \in A_i, \quad p_i(\tilde{a} - a) = \underset{z \in W_i^a(X)}{\text{Min}} p_i(z - a) \stackrel{\text{df}}{=} \gamma_i \in \mathbb{R}_+.$$

$A_i$  est une partie fermée, non vide, de  $W_i^a(X)$ , lui-même fermé dans  $X$ . Notons que les  $A_i$ , puisqu'ils sont dans les  $W_i^a(X)$ , sont a fortiori disjoints 2 à 2.

Ces définitions prises, nous allons énoncer quatre lemmes préparant notre résultat principal. Pour alléger l'exposé, les démonstrations, simples, sont schématiquement indiquées en Annexe.

LEMME 1 : Pour  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $A_i$  est une partie compacte convexe (non vide) de  $X$ .

LEMME 2 : Pour  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $\gamma_i > 0$ .

LEMME 3 : Pour  $i = 1, 2, \dots, k$ ,

- a)  $V_i^a(X)$  est un ensemble de meilleurs approximants de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ .
- b)  $W_i^a(X)$  de même.
- c)  $A_i$  est un ensemble de meilleurs approximants stricts de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ .

Dans ce qui suit, nous serons amenés à choisir un élément particulier  $z_i$  (quelconque) dans chaque  $A_i$  (rien n'empêche que l'un des  $z_i$  puisse être nul) et à considérer le sous-espace vectoriel de  $X$  engendré par  $z_2 - z_1, z_3 - z_1, \dots, z_k - z_1$ , que nous noterons :

$$\mathcal{L}(z_2 - z_1, \dots, z_k - z_1).$$

LEMME 4 :  $z_2 - z_1, \dots, z_k - z_1$  forme un système de  $k - 1$  vecteurs linéairement indépendants dans  $X$ .

$\mathcal{L}(z_2 - z_1, \dots, z_k - z_1)$  est donc un sous-espace vectoriel de dimension  $k - 1$  contenu dans  $X$ .

Remarques : L'hypothèse H2 a donc pour conséquence que  $\dim(X) \geq k - 1$ . On a donc défini une situation où :

$$\begin{array}{c} k - 1 \leq \dim(X) < n \\ \uparrow \\ \text{inégalité stricte car } a \notin X. \end{array}$$

Ces inégalités autorisent  $k$  à être entre 1 et  $n$ , fait compatible avec la régularité de  $p$ . Autrement dit, la taille de la norme vectorielle peut être quelconque entre 1 et  $n$ , inclusivement, mais le sous-espace  $X$  doit être nécessairement de dimension *suffisante* ( $\geq k - 1$ ) pour que les  $W_i^a(X)$  puissent être tous non vides.

Ces préliminaires terminés, nous pouvons alors établir notre principal résultat, dans lequel sont récapitulées les notions introduites :

PROPOSITION 2 : Soit  $X$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $a$  un élément de  $\mathbb{R}^n$  n'appartenant pas à  $X$ . Soit  $p$  une norme vectorielle de taille  $k$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

On cherche à caractériser l'ensemble des meilleurs approximants stricts de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ . Alors, sous les hypothèses suivantes :

H1 : La norme vectorielle  $p$  est régulière :

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k = \mathbb{R}^n.$$

On pose  $W_i^a = a + W_i$ , et  $W_i^a(X) = W_i^a \cap X$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

H2 : Tous les  $W_i^a(X)$  sont non vides.

On note alors  $A_i$  l'ensemble des meilleurs approximants de  $a$  dans  $W_i^a(X)$ , relativement à  $p_i$ , et l'on pose :

$$\gamma_i = \text{Min}_{z \in W_i^a(X)} p_i(z - a) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

H3 :  $\dim(X) = k - 1$ .

Les conclusions suivantes sont valides :

1) L'ensemble  $S$  des meilleurs approximants stricts de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  est caractérisé comme la fermeture convexe des  $A_i$  : c'est une partie convexe compacte (non vide) de  $X$  :

$\bar{a}$  meilleur approximant strict de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  :

$$\left. \begin{array}{l} \exists z_i \in A_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ \exists \beta_1, \dots, \beta_k \text{ réels } \geq 0 \\ \sum_{i=1}^k \beta_i = 1 \end{array} \right\} \text{ avec } \bar{a} = \sum_{i=1}^k \beta_i z_i.$$

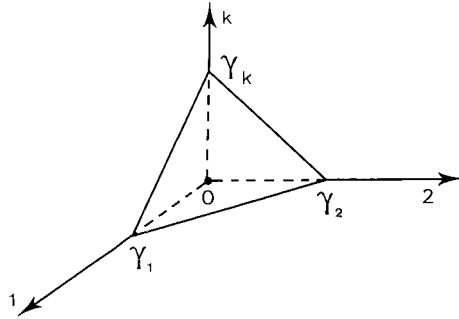
2) On a alors :

$$p(\bar{a} - a) = \begin{vmatrix} \beta_1 p_1(z_1 - a) \\ \vdots \\ \beta_k p_k(z_k - a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 \gamma_1 \\ \vdots \\ \beta_k \gamma_k \end{vmatrix}$$

3) L'ensemble  $S$  des meilleurs approximants stricts  $\bar{a}$  de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  ainsi caractérisé, l'ensemble des meilleures approximations  $p(\bar{a} - a)$  est, quant à lui, caractérisé par :

$$p(\bar{a} - a) = \begin{vmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{vmatrix} \text{ avec : } \begin{cases} s_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{\gamma_i} = 1 \end{cases}$$

C'est donc la portion d'un certain hyperplan de  $\mathbb{R}^k$  contenue dans l'octant positif : elle est compacte et convexe (non vide) elle aussi. Schématiquement :



*Démonstration :*

a) Sous les hypothèses prises, choisissons  $z_i$  *quelconque* dans  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Considérons le sous-ensemble  $F$  de  $X$  ainsi défini :  $F$  est l'ensemble des  $z$  de la forme :

$$(*) \quad z = \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i \quad \text{avec} \quad \alpha_i \text{ réel et} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

D'après un résultat classique [6]  $F$  est le sous-espace affine suivant de  $X$  :

$$F = z_1 + \mathcal{L}(z_2 - z_1, \dots, z_k - z_1).$$

Or ce dernier est de dimension  $k - 1$  d'après le Lemme 4. C'est la dimension de  $X$  d'après l'hypothèse  $H3$ , donc finalement  $F = X$ , ce qui signifie que *tout*  $z$  de  $X$  admet la décomposition (\*).

b) Il vient, alors, pour tout  $z$  de  $X$  :

$$(**) \quad z - a = \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i - a = \sum_{i=1}^k \alpha_i (z_i - a)$$

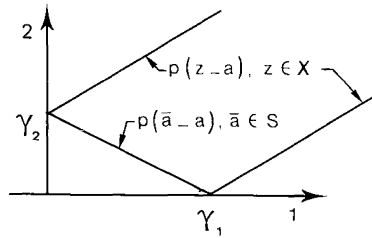
(ceci car  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ ) où  $z_i \in A_i \subset W_i^a(X)$  par conséquent  $z_i - a \in W_i$ .

Il en résulte que (\*\*) représente la décomposition de  $z - a$  dans la somme directe des  $W_i$ , d'où, d'après la propriété énoncée au paragraphe 2,

$$p(z - a) = \begin{pmatrix} |\alpha_1| p_1(z_1 - a) \\ \vdots \\ |\alpha_k| p_k(z_k - a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha_1| \gamma_1 \\ \vdots \\ |\alpha_k| \gamma_k \end{pmatrix}$$

Ainsi, lorsque  $z$  décrit  $X$ ,  $p(z - a)$  décrit dans l'octant positif de  $\mathbb{R}^k$  une

surface formée de morceaux raccordés d'hyperplans, selon le schéma suivant (pour  $k = 2$ ) :



Pour  $\alpha_i = 1$  et  $\alpha_j = 0, \forall j \neq i$  on retrouve  $z = z_i$  avec  $p(z_i - a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

c) Notons  $C_0(A_i)$  la fermeture convexe de l'ensemble des  $A_i$  : C'est une partie convexe de  $X$ , compacte car chaque  $A_i$  est compact d'après le Lemme 1 :

$$z \in C_0(A_i) : z = \sum_{i=1}^k \beta_i z_i \text{ avec } \begin{cases} z_i \in A_i \\ \beta_i \text{ réel } \geq 0 \\ \sum_{i=1}^k \beta_i = 1 \end{cases}$$

d) Nous allons montrer que l'ensemble  $S$  des meilleurs approximants stricts de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  est exactement  $C_0(A_i)$ .

$\alpha) C_0(A_i) \subset S.$

Soit  $z \in C_0(A_i)$ . D'après ce qui précède, il vient :

$$z = \sum_{i=1}^k \beta_i z_i \text{ avec } z_i \in A_i, \beta_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^k \beta_i = 1$$

d'où :

$$p(z - a) = \begin{pmatrix} \beta_1 \gamma_1 \\ \vdots \\ \beta_k \gamma_k \end{pmatrix}$$



S'il existait  $t \in X$  avec  $p(t - a) \not\leq p(z - a)$  on aurait, d'après ce qui précède :

$$t = \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i \quad \text{avec } \alpha_i \text{ réel et } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

d'où :

$$p(t - a) = \begin{vmatrix} |\alpha_1| \gamma_1 \\ \vdots \\ |\alpha_k| \gamma_k \end{vmatrix}$$

D'où par conséquent, puisque tous les  $\gamma_i$  sont  $> 0$  (Lemme 2) :

$$\begin{vmatrix} |\alpha_1| \\ \vdots \\ |\alpha_k| \end{vmatrix} \not\leq \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix}.$$

On en déduirait :

$$1 = \sum_{i=1}^k \beta_i > \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \geq \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i \right| = 1$$

ce qui est impossible.

Donc  $z$  est bien meilleur approximant strict de  $a$  dans  $X$  selon  $p$  et l'inclusion annoncée est établie.

Démontrons l'inclusion réciproque :

$\beta) S \subset C_0(A_i)$

Soit  $z$  dans  $X$ , n'appartenant pas à  $C_0(A_i)$ . Alors, d'après  $a$ ),  $z$  s'écrit :

$$z = \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i \quad \text{avec } z_i \in A_i \text{ et } \alpha_i \text{ réels vérifiant } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

Puisque  $z \notin C_0(A_i)$ , l'un au moins des  $\alpha_i$  est  $< 0$ .

Or on a le lemme élémentaire suivant :

**LEMME 5 :** Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont des réels (dont l'un au moins est  $< 0$ ) vérifiant  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ , il existe  $k$  réels  $\geq 0$ ,  $\beta_i$ , vérifiant  $\sum_{i=1}^k \beta_i = 1$  et tels que .

$$\begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} |\alpha_1| \\ \vdots \\ |\alpha_k| \end{vmatrix}$$

(la démonstration, simple, est omise).

Utilisant de tels  $\beta_i$ , on introduit évidemment l'élément suivant de  $X$  :

$$t = \sum_{i=1}^k \beta_i z_i$$

( $t$  appartient d'ailleurs à  $C_0(A_i)$ ) et l'on a :

$$p(t - a) = \left| \begin{array}{c} \beta_1 \gamma_1 \\ \vdots \\ \beta_k \gamma_k \end{array} \right| \leq \left| \begin{array}{c} |\alpha_1| \gamma_1 \\ \vdots \\ |\alpha_k| \gamma_k \end{array} \right| = p(z - a)$$

car tous les  $\gamma_i$  sont  $> 0$ .

$z$  n'est donc pas un meilleur approximant strict de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ . Donc  $S \subset C_0(A_i)$ .

e) Le point 1) est donc établi, et tout  $\bar{a} \in S$  s'écrit donc :

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^k \beta_i z_i$$

avec  $z_i \in A_i$ ,  $\beta_i$  réels  $\geq 0$  tels que  $\sum_{i=1}^k \beta_i = 1$ , et l'on a vérifié qu'alors :

$$p(\bar{a} - a) = \left| \begin{array}{c} \beta_1 \gamma_1 \\ \vdots \\ \beta_k \gamma_k \end{array} \right|$$

d'où les points 2) et 3).

*Remarques* : L'hypothèse  $H3$  impose à  $X$  d'être de dimension  $k - 1$ , c'est-à-dire, d'après la remarque consécutive au Lemme 4, d'être de dimension *minimum*, compte tenu de l'hypothèse  $H2$ .

## 6. EXEMPLES D'APPLICATION

Reprenons les exemples du paragraphe 4 et examinons comment ils illustrent la Proposition 2 précédente.

On écarte d'abord les exemples 2, 3, 4, et 8 pour lesquels la norme vectorielle utilisée n'est pas régulière. (On remarque néanmoins que dans l'exemple 8, l'ensemble  $S$  des meilleurs approximants stricts n'est pas convexe, alors qu'il l'est cependant dans les exemples 2, 3, 4.)

\* Dans l'exemple 1, toutes les conditions de la Proposition 2 sont vérifiées (outre la régularité de  $p$ , on a

$$W_1^a(X) = A_1 = \{ \beta \}; \quad W_2^a(X) = A_2 = \{ \alpha \}, \quad \text{et} \quad \dim(X) = k - 1 = 1.$$

Cet exemple simple illustre donc la Proposition 2, l'ensemble  $S$  est l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ .

\* Dans l'exemple 5,  $p$  est régulière et les  $W_i^a(X)$  sont non vides. Néanmoins  $\dim(X) = 2 > k - 1 = 1$ .

Pourtant l'ensemble des meilleurs approximatifs stricts de  $a$  est encore convexe, compact, et fermeture convexe des  $A_i$ . Par contre, l'ensemble de tous les meilleurs approximatifs n'est ni convexe, ni compact.

Ce type d'exemple incite à penser que l'hypothèse H3 de la Proposition 2 est en fait inutile et qu'elle reste vraie quelle que soit la dimension de  $X$  (entre  $k - 1$  et  $n - 1$  inclus).

Mêmes conclusions dans l'exemple 6 qui est une simple variation de l'exemple précédent, la semi-norme  $p_1$  étant polyédrale au lieu d'être circulaire. A cause de la disposition relative particulière du sous-espace  $X$  et de la boule unité de la semi-norme  $p_1$ , l'ensemble des meilleurs approximatifs stricts de  $a$  est un triangle et non plus un segment.

Enfin, l'exemple 7, illustre complètement la Proposition 2 précédente : la norme vectorielle est régulière, les  $W_i^a(X)$  sont non vides (et ici, sont tous trois réduits à un point : ils coïncident donc avec les  $A_i$ ); enfin

$$\dim(X) = k - 1 = 2.$$

On vérifie que l'ensemble des meilleurs approximatifs stricts de  $a$  est le triangle  $T$ , compact, convexe, fermeture convexe des  $A_i$ . Là encore l'ensemble de tous les meilleurs approximatifs n'est ni convexe, ni compact.

## 7. CONCLUSIONS

Nous avons étendu au cas d'une norme vectorielle  $p$  de taille  $k$  sur  $\mathbb{R}^n$  la notion de meilleur approximant, dans un sous-espace  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , d'un élément  $a$  de  $\mathbb{R}^n$  n'appartenant pas à  $X$ . Cette notion s'interprète en termes de minima de Pareto pour l'application  $x \in X \rightarrow p(x - a) \in \mathbb{R}_+^k$ .

Dans notre contexte, l'ensemble des meilleurs approximatifs est toujours fermé non vide, mais, à la différence du cas scalaire usuel ( $k = 1$ ) il peut ne pas être convexe, ni même compact, et ce, même si la norme vectorielle  $p$  utilisée est régulière (exemples 5 et 6 précédents).

En fait, la bonne notion à considérer est celle de *meilleur approximant strict* de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ .

Notre résultat principal (Proposition 2) caractérise l'ensemble  $S$  des meilleurs approximants *stricts* de  $a$  comme la *fermeture convexe* de  $k$  parties convexes compactes de  $X$  : d'où la *compacité* et la *convexité* de  $S$  lui-même, sous les trois hypothèses prises.

Parmi ces trois hypothèses, la principale (régularité de  $p$ ) semble essentielle, alors que les deux autres semblent accessoires au vu de tous les exemples considérés. *On aboutit alors à la conjecture du paragraphe 5, qui envisage la régularité de  $p$  comme suffisante pour assurer à elle seule la compacité et la convexité de  $S$  et ce, quel que soit le sous-espace  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  et quel que soit  $a$  pris en dehors de  $\mathbb{R}^n$ .*

Il serait donc intéressant de voir comment on peut éventuellement s'affranchir des hypothèses  $H2$  et  $H3$  (mais la situation géométrique correspondante peut être complexe). Un pas de plus consisterait à remplacer  $X$  par une partie convexe, fermée de  $\mathbb{R}^n$ . Enfin, l'aspect *calcul* de tels ensembles de meilleurs approximants est certainement une source de problèmes numériques non triviaux, même dans des cas standard.

## 8. ANNEXE. DÉMONSTRATIONS

### 1. Du Lemme 1

Lieu de meilleurs approximants de  $a$  dans le sous-espace affine  $W_i^a(X)$  au sens de la semi-norme  $p_i$ ,  $A_i$  est convexe, fermé, non vide. Pour montrer que  $A_i$  est de plus *borné*, il suffit de montrer ceci :

{ Soit  $z \in W_i^a(X)$  (non vide par hypothèse). Alors le sous-espace vectoriel  $W_i^a(X) - z$  est d'intersection réduite à  $\{0\}$  avec  $V_i$ , le noyau de  $p_i$ .

En effet, si  $u \in (W_i^a(X) - z) \cap V_i$ , on a :

$$u \in V_i, \quad y = u + z \in W_i^a(X) \quad \text{donc} \quad \begin{cases} y \in X \\ y - a \in W_i \end{cases}$$

Or

$$z \in W_i^a(X) \quad \text{donc} \quad \begin{cases} z \in X \\ z - a \in W_i \end{cases}$$

finalement :

$$\begin{aligned} u &= y - z \in X, \\ &= (y - a) - (z - a) \in W_i. \end{aligned}$$

D'où  $u \in W_i \cap V_i = \{0\}$ .

## 2. Du Lemme 2

S'il existe un  $\gamma_i$  nul, il existe  $z \in A_i$  tel que  $p_i(z - a) = 0$ . On a donc à la fois  $z \in X$ ,  $z - a \in V_i$ ,  $z - a \in W_i$  (car  $z \in A_i \subset W_i^a(X)$ ). Donc  $z - a \in V_i \cap W_i$ , d'où  $z = a$  ce qui est impossible car  $z \in X$  et  $a \notin X$ .

## 3. Du Lemme 3

a) Soit  $\bar{a} \in V_i^a(X)$ ; cela signifie que :

$$\bar{a} \in X; \quad \bar{a} - a \in V_i \quad \text{donc} \quad p_i(\bar{a} - a) = 0$$

et l'on a :

$$p(\bar{a} - a) = \begin{array}{c} \times \\ \times \\ 0 \leftarrow i \\ \times \\ \times \end{array}$$

il est clair qu'aucun  $z$  de  $X$  ne peut être tel que :

$$p(z - a) < p(\bar{a} - a)$$

$\bar{a}$  est donc un meilleur approximant de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ .

b) Puisque  $W_i^a(X) = \bigcap_{j \neq i} V_j^a(X)$ ,  $W_i^a(X)$  est donc lui aussi un ensemble de meilleurs approximants de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ . D'ailleurs si  $\bar{a} \in W_i^a(X)$ , il vient :

$$p(\bar{a} - a) = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_i(\bar{a} - a) \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array}.$$

Par contre  $\bar{a}$  n'est pas forcément un meilleur approximant strict (car on a seulement  $\gamma_i \leq p_i(\bar{a} - a)$ ).

c) Alors, si  $\bar{a} \in A_i$  on a, cette fois :

$$p(\bar{a} - a) = \begin{array}{|l} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_i(\bar{a} - a) = \gamma_i \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$

S'il existait  $z$  dans  $X$  tel que :

$$p(z - a) \ll p(\bar{a} - a)$$

on aurait nécessairement, puisque  $0 \leq p(z - a)$ ,

$$p(z - a) = \begin{array}{|l} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_i < \gamma_i \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$

ce qui est impossible, car alors, par construction :

$$z \in X, \quad z - a \in W_i \quad \text{donc} \quad z \in W_i^a(X),$$

et alors par définition :

$$\gamma_i \leq p_i(z - a) = \alpha_i$$

d'où la contradiction.

$\bar{a}$  est donc bien un meilleur approximant *strict* de  $a$  dans  $X$  selon  $p$ .

#### 4. Du Lemme 4

Soient  $\alpha_1 \dots \alpha_k$  des réels tels que :

$$\omega = \sum_{j=1}^k \alpha_j (z_j - z_1) = 0$$

On a donc  $p(\omega) = 0$  d'où  $p_i(\omega) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Or  $z_j \in A_j \subset W_j^a(X)$  d'où  $z_j - a \in W_j$  ( $j = 2, \dots, k$ )  
 $z_1 \in A_1 \subset W_1^a(X)$  d'où  $z_1 - a \in W_1$

en particulier, pour  $i$  pris dans  $2 \dots k$  et pour  $j \neq i$ , il vient

$$\begin{aligned} z_j - a &\subset V_i \\ z_1 - a &\subset V_i \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad z_j - z_1 \subset V_i$$

il en résulte que

$$p_i(\omega) = p_i(\alpha_i(z_i - z_1)) = 0 \quad (i = 2, \dots, k)$$

d'où

$$\begin{aligned} |\alpha_i| p_i((z_i - a) - \underbrace{(z_1 - a)}) &= 0 \\ &\in W_1 \subset V_i \end{aligned}$$

d'où encore

$$\begin{aligned} |\alpha_i| \underbrace{p_i(z_i - a)} &= 0 \\ &= \gamma_i > 0 \quad \text{car } z_i \in A_i \end{aligned}$$

d'où nécessairement  $\alpha_i = 0$  les vecteurs  $z_j - z_1$  sont linéairement indépendants et  $\mathcal{L}(z_2 - z_1, \dots, z_k - z_1)$  est de dimension  $k - 1$

*Remarque* Le résultat est encore vrai pour  $z_i$  pris dans  $W_i^a(X)$  (pas seulement dans  $A_i$ ) car alors  $p_i(z_i - a) \geq \gamma_i > 0$

## REFERENCES

- [1] J P AUBIN *Mathematical methods of games and economic theory*, 2nd edition, North-Holland (1982)
- [2] P J LAURENT *Approximation-Optimisation*, Hermann (1972)
- [3] H MOULIN, F FOGELMAN *La convexité dans les mathématiques de la décision*, Hermann
- [4] F ROBERT *Matrices non négatives et normes vectorielles*, Polycopie IMAG Grenoble (1974)
- [5] F ROBERT *Meilleure approximation en norme vectorielle et minima de Pareto*, Rapport de Recherche n° 392, IMAG (octobre 1983)
- [6] R T ROCKAFELLAR *Convex Analysis*, Princeton U Press (1970)