

D. BLANCHARD

J. C. PAUMIER

**Une justification de modèles de plaques
viscoplastiques**

RAIRO. Analyse numérique, tome 18, n° 4 (1984), p. 377-406

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1984__18_4_377_0

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE JUSTIFICATION DE MODÈLES DE PLAQUES VISCOPLASTIQUES (*)

par D. BLANCHARD ⁽¹⁾ et J. C. PAUMIER ⁽²⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *On justifie mathématiquement des modèles de plaques viscoplastiques bidimensionnels à partir d'un modèle tridimensionnel de type NORTON-HOFF posé sur un ouvert $\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. La méthode utilisée est celle des développements asymptotiques suivant le paramètre ε . Avec diverses hypothèses sur les forces appliquées, on obtient successivement deux modèles en membrane et un modèle en flexion. Enfin, un résultat de convergence forte de la solution du problème tridimensionnel vers celle du problème limite est donné sous des hypothèses de régularité et de monotonie du potentiel souvent vérifiées en pratique.*

Abstract. — *Starting with a three-dimensional Norton-Hoff model over an open set $\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, we give a mathematical justification of bidimensional viscoplastic plate models. We use the asymptotic expansion method with the parameter ε . We obtain two membrane models and a flexion model according to the various assumptions on the applied loads. Finally a convergence result of the three dimensional solution to the bidimensional solution is proved under regularity and monotonicity assumptions on the potential.*

1. INTRODUCTION

L'objet de cette étude est la justification mathématique de modèles de comportement viscoplastiques bidimensionnels à partir de modèles tridimensionnels de type Norton-Hoff. Plus précisément, nous considérons la loi de Norton-Hoff généralisée introduite par Friaâ et Frémond et décrite dans la thèse de Friaâ [8], qui associe à tout critère de plasticité parfaite (caractérisée par un convexe des contraintes C) une loi de comportement viscoplastique. Dans certains cas particuliers cette loi décrit la déformation visqueuse de matériaux très divers (l'acier à haute température, les sols gelés, les glaciers, certains types de verre, etc.).

(*) Reçu en septembre 1983.

⁽¹⁾ Service de mathématiques, Laboratoire central des Ponts et Chaussées, 58, bld Lefèbvre, 75732 Paris Cedex 15.

⁽²⁾ Laboratoire de mathématiques, Faculté des Sciences de Rouen, 76130 Mont Saint Aignan.

Pour des raisons géométriques ou des raisons d'économie de calcul, on préfère traiter les problèmes d'écoulement associés en utilisant des modèles plans obtenus à partir d'hypothèses a priori sur la forme de la solution des problèmes tridimensionnels. Notre but est de justifier certains de ces modèles en se débarrassant de ces hypothèses. Pour cela, nous utilisons la méthode mise au point par Ciarlet et Destuynder [3], [4] pour les modèles de plaques en élasticité linéaire (petits déplacements) ou non linéaire (grands déplacements). Il s'agit d'une méthode de développement asymptotique (le paramètre de développement étant l'épaisseur de la structure suivant la direction x_3) de la solution d'un problème tridimensionnel posé sous forme variationnelle mixte (contraintes-vitesses). Le problème limite que nous obtenons est un « problème bidimensionnel » dans le sens où, dans la plupart des cas, les inconnues peuvent se calculer en résolvant un problème posé sur un ouvert du plan (x_1, x_2) .

Dans la section 2, nous décrivons le modèle tridimensionnel de plaque viscoplastique choisi en donnant les équations aux dérivées partielles décrivant l'équilibre de la structure sous l'action des forces extérieures et la loi de comportement en tout point de la structure. Le cadre fonctionnel et la formulation variationnelle du problème ainsi posé sont décrits à la section 3. Dans la section 4, nous faisons apparaître explicitement le paramètre ε (l'épaisseur de la plaque étant 2ε) dans les équations pour appliquer la méthode des développements asymptotiques à la section 5 et obtenir ainsi le « problème limite ». Ce problème \mathcal{P}^0 , étudié à la section 6, est en fait un modèle de « plaque viscoplastique », les composantes $\gamma_{i3}(u)$ du tenseur des vitesses de déformations étant nulles et celles, σ_{i3} , du tenseur des contraintes ne l'étant pas. A la section 7, nous étudions le modèle ainsi obtenu lorsque le convexe des contraintes C est la boule unité et à la section 8, grâce à certaines hypothèses sur les forces appliquées, nous retrouvons un modèle bien connu de vitesses de déformations planes pour lequel les inconnues ne dépendent pas de x_3 et la vitesse u_3 est nulle. Dans les sections 9 et 10 nous montrons comment obtenir un modèle de membrane et un modèle en flexion pour les plaques viscoplastiques. Un résultat de convergence de la solution du problème tridimensionnel vers la solution du problème limite est donné à la section 11 si certaines hypothèses de régularité et de monotonie du pseudo-potentiel sont vérifiées. Enfin dans la section 12, nous montrons comment, à partir du problème limite \mathcal{P}^0 posé sur l'ouvert de référence, on peut retrouver la signification physique de la solution de ce problème sur l'ouvert donné à la section 2.

2. POSITION DU PROBLÈME D'ÉCOULEMENT VISCOPLASTIQUE

Soit ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^2 dont la frontière γ est partitionnée en deux sous-ensembles γ_0 et γ_1 , γ_0 étant de mesure non nulle.

Pour $\varepsilon > 0$, on définit alors (voir fig. 1) :

$$\begin{aligned} \Omega^\varepsilon &= \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[, \\ \Gamma_+^\varepsilon &= \omega \times \{+\varepsilon\}, \quad \Gamma_-^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon\}, \\ \Gamma^\varepsilon &= \gamma \times]-\varepsilon, +\varepsilon[, \\ \Gamma_1^\varepsilon &= \gamma_1 \times]-\varepsilon, +\varepsilon[, \\ \Gamma_0^\varepsilon &= \gamma_0 \times]-\varepsilon, +\varepsilon[, \end{aligned}$$

et $n = (n_1, n_2, n_3)$ note la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega^\varepsilon$ de l'ouvert Ω^ε .

L'ouvert Ω^ε est occupé par un matériau viscoplastique de Norton-Hoff généralisé. On cherche les équilibres quasi statiques de ce corps lorsqu'il est soumis aux forces suivantes :

- des forces volumiques, de densité (f_i^ε) (*) dans Ω^ε ,
- des forces surfaciques de densité (g_i^ε) sur $\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$ et (h_x^ε) sur Γ_1^ε .

En ce qui concerne les conditions aux limites sur les champs de vitesses $v = (v_i)$ admissibles, nous supposons que :

$$\begin{cases} v_3 = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon, \\ v_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ v_\alpha & \text{indépendant de } x_3 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon. \end{cases}$$

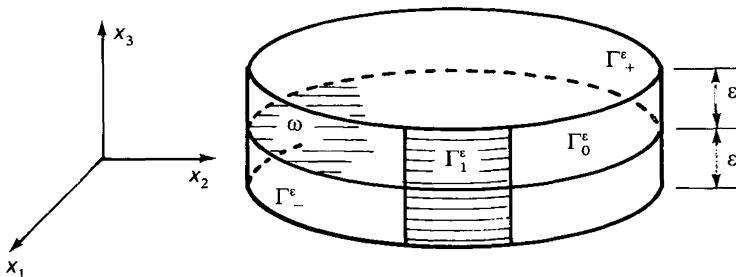


Figure 1.

(*) Les indices latins varient de 1 à 3 tandis que les indices grecs varient de 1 à 2. Par ailleurs on utilisera la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés.

Ces conditions aux limites ont été introduites par Ciarlet [2], pour l'obtention des équations de Von Kármán.

Notons S_n l'espace euclidien des tenseurs d'ordre 2 sur \mathbb{R}^n , $n = 2$ ou 3 , muni du produit scalaire $\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}$ et de la norme associée $|\sigma| = (\sigma \cdot \sigma)^{1/2}$.

A tout point $x^e \in \Omega^e$, on associe un sous-ensemble convexe fermé $C(x^e)$ de S_3 et on note $g^e(x^e, \cdot)$ la fonction de jauge de ce convexe définie sur S_3 par :

$$g(x^e, \sigma) = \inf \{ \mu > 0 ; \sigma \in \mu C(x^e) \}.$$

La loi de comportement de Norton-Hoff généralisée reliant en tout point $x^e \in \Omega^e$ le tenseur des vitesses de déformations $\gamma(v)(x^e)$ au tenseur des contraintes $\sigma(x^e)$ est définie par :

$$\gamma(v)(x^e) \in \partial \phi_q(x^e, \sigma(x^e)),$$

où $\partial \phi_q(x^e, \sigma(x^e))$ désigne le sous-différentiel au point $\sigma(x^e)$ de l'application convexe $\phi_q(x^e, \cdot)$ définie sur S_3 par :

$$\phi_q(x^e, s) = \lambda [g(x^e, s)]^q,$$

q étant un réel fixé, $q > 1$, et λ une constante, $\lambda > 0$.

Le problème consiste alors à trouver un champ de contraintes $\sigma(x^e)$ et un champ de vitesses $u(x^e)$ définis sur Ω^e et vérifiant :

$$\partial_j \sigma_{ij}(x^e) + f_i^e(x^e) = 0, \quad \text{dans } \Omega^e, \quad (2.1)$$

$$\int_{-c}^c \sigma_{\alpha\beta}(x^e) n_\beta dx_3^e = \int_{-c}^c h_\alpha(x^e) dx_3^e \quad \text{sur } \Gamma_1^e, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{i3}(x^e) = \pm g_i^e(x^e) \quad \text{sur } \Gamma_\pm^e, \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_i(x^e) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^e, \\ u_\alpha(x^e) \text{ indépendant de } x_3^e, \\ u_3(x^e) = 0, \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_1^e, \quad (2.4)$$

$$\gamma(u)(x^e) \in \partial \phi_q(x^e, \sigma(x^e)) \quad \text{dans } \Omega^e. \quad (2.5)$$

3. FORMULATION VARIATIONNELLE

Soit le réel p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On introduit les espaces :

$$V^e = \{ v = (v_i) \in (W^{1,p}(\Omega^e))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^e, v_3 = 0 \text{ et } v_\alpha \text{ indépendante de } x_3^e \text{ sur } \Gamma_1^e \},$$

$$D^e = (L^p(\Omega^e))_s^9,$$

muni de la norme $|d|_{D^\varepsilon} = \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |d(x^\varepsilon)|^p dx^\varepsilon \right)^{1/p}$ et

$$S^\varepsilon = (L^q(\Omega^\varepsilon))_s^q,$$

muni de la norme $|\sigma|_{S^\varepsilon} = \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |\sigma(x^\varepsilon)|^q dx^\varepsilon \right)^{1/q}$.

Remarquons que les espaces S^ε et D^ε sont mis en dualité par le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$ défini sur $S^\varepsilon \times D^\varepsilon$ par :

$$\langle \sigma, d \rangle_\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma(x^\varepsilon) \cdot d(x^\varepsilon) dx^\varepsilon.$$

De plus, si $v \in V^\varepsilon$, on a :

$$\gamma(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j^\varepsilon} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i^\varepsilon} \right) \in D^\varepsilon,$$

et, grâce à l'inégalité de Korn généralisée, l'espace V^ε est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme :

$$|v|_\varepsilon = |\gamma(v)|_{D^\varepsilon}$$

(puisque $\text{mes}(\Gamma_0^\varepsilon) > 0$, voir [8] et [9]).

En ce qui concerne les forces appliquées, on suppose que

$$\left. \begin{aligned} f &\in (L^q(\Omega^\varepsilon))^3, \\ g &\in (L^q(\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon))^3, \\ h &\in (L^q(\Gamma_1^\varepsilon))^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Dans toute la suite, on suppose que pour tout $x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ le convexe $C(x^\varepsilon)$ vérifie les hypothèses habituelles [8] :

(H1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } r > 0, \text{ indépendant de } x^\varepsilon \text{ et de } \varepsilon \text{ tel que} \\ B(0, r) = \{ \sigma \in S_3, |\sigma| < r \} \subset C(x^\varepsilon). \end{array} \right.$

(H2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \sigma \in S_3, \text{ l'application } x^\varepsilon \mapsto g(x^\varepsilon, \sigma) \text{ est mesurable de } \Omega^\varepsilon \\ \text{dans } \mathbb{R}^+. \end{array} \right.$

En utilisant l'hypothèse (H1) et une propriété de convexité il vient que

$$\left. \begin{aligned} \forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \quad \forall \sigma_1 \in S_3 \text{ et } \sigma_2 \in S_3, \\ |g(x^\varepsilon, \sigma_1) - g(x^\varepsilon, \sigma_2)| \leq \frac{1}{r} |\sigma_1 - \sigma_2|. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

La famille d'application $\sigma \mapsto g(x^\varepsilon, \sigma)$, $x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$, est donc en particulier équi-continue et, avec l'hypothèse (H2), on en déduit que, pour tout $\sigma \in S^\varepsilon$, la fonction $x^\varepsilon \mapsto g(x^\varepsilon, \sigma(x^\varepsilon))$ est mesurable (voir [7]). On définit alors la fonction convexe F_q de S^ε dans \mathbb{R}^+ par :

$$F_q(\sigma) = \frac{1}{q} \int_{\Omega^\varepsilon} \phi_q(x^\varepsilon, \sigma(x^\varepsilon)) dx^\varepsilon, \quad (3.3)$$

et on note $\partial F_q(\sigma)$ le sous-différentiel de l'application F_q au point σ pour la dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (voir [7]).

Une formulation variationnelle mixte du problème (2.1)-(2.5) est (voir [8], [12]) :

Problème \mathcal{P}^ε : Trouver $(u, \sigma) \in V^\varepsilon \times S^\varepsilon$ tels que :

$$\forall v \in V^\varepsilon, \quad \langle \sigma, \gamma(v) \rangle_\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i + \int_{\Gamma_\mp^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon} g_i^\varepsilon v_i + \int_{\Gamma_\mp^\varepsilon} h_\alpha^\varepsilon v_\alpha, \quad (3.4)$$

$$\gamma(u) \in \partial F_q(\sigma). \quad (3.5)$$

Pour l'existence d'une solution au problème \mathcal{P}^ε , on trouvera la démonstration du théorème suivant dans Friaâ [8] :

THÉORÈME 3.1 : *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (3.1), et s'il existe $R > 0$ (dépendant éventuellement de ε), tel que $C(x^\varepsilon) \subset B(0, R)$, pour presque tout $x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$, le problème \mathcal{P}^ε admet au moins une solution.*

4. LE PROBLÈME TRIDIMENSIONNEL SUR L'OUVERT DE RÉFÉRENCE Ω

On définit l'ouvert Ω de \mathbb{R}^3 par $\Omega = \omega \times]-1, +1[$, et on note

$$\begin{aligned} \Gamma &= \gamma \times]-1, +1[, \\ \Gamma_0 &= \gamma_0 \times]-1, +1[, \\ \Gamma_1 &= \gamma_1 \times]-1, +1[, \\ \Gamma_\pm &= \omega \times \{ \pm 1 \}. \end{aligned}$$

A tout point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ nous associons le point

$$x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \Omega^\varepsilon$$

et nous introduisons les espaces :

$$\begin{aligned} W_t &= \{ v \in W^{1,p}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \text{ et } v \text{ indépendant de } x_3 \text{ sur } \Gamma_1 \}, \\ W_3 &= \{ v \in W^{1,p}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma \}, \\ V &= W_t^2 \times W_3, \\ D &= (L^p(\Omega))_s^p, \\ S &= (L^q(\Omega))_s^q. \end{aligned}$$

Les espaces V, D et S sont respectivement munis de normes :

$$\begin{aligned} \| v \|_V &= | \gamma(v) |_D, \\ | d |_D &= \left(\int_{\Omega} | d(x) |^p dx \right)^{1/p}, \\ | s |_S &= \left(\int_{\Omega} | s(x) |^q dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Comme S^ε et D^ε , les espaces S et D sont mis en dualité par le crochet $\langle ., . \rangle$ défini par :

$$\langle \sigma, d \rangle = \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot d(x) dx.$$

On associe à tout couple $(\tau, v) \in S^\varepsilon \times V^\varepsilon$, le couple $(\tau^\varepsilon, v^\varepsilon) \in S \times V$ défini par les relations suivantes :

$$\tau_{\alpha\beta}^\varepsilon(x) = \tau_{\alpha\beta}(x^\varepsilon), \quad \tau_{\alpha 3}^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \tau_{\alpha 3}(x^\varepsilon), \quad \tau_{33}^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2} \tau_{33}(x^\varepsilon), \quad (4.1)$$

$$v_\alpha^\varepsilon(x) = v_\alpha(x^\varepsilon), \quad v_3^\varepsilon(x) = \varepsilon v_3(x^\varepsilon). \quad (4.2)$$

En ce qui concerne les forces appliquées nous supposerons que les densités de forces $f_i^\varepsilon, g_i^\varepsilon$ et h_α^ε vérifient :

$$f_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = f_\alpha(x), \quad f_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon f_3(x) \quad (4.3)$$

$$g_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon g_\alpha(x), \quad g_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 g_3(x), \quad h_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = h_\alpha(x) \quad (4.4)$$

où $(f_i) \in (L^q(\Omega))^3, (g_i) \in (L^q(\Gamma_+ \cup \Gamma_-))^3, (h_\alpha) \in (L^q(\Gamma_1))^2$ sont indépendants de ε .

Pour des justifications sur les changements de fonctions (4.1)-(4.4) nous renvoyons à Ciarlet [2] et Ciarlet-Destuynder [3], [4], Destuynder [6] et indiquons juste que pour tout $(\tau, v) \in S^\varepsilon \times V^\varepsilon$ on a :

$$\langle \tau, \gamma(v) \rangle_\varepsilon = \varepsilon \langle \tau^\varepsilon, \gamma(v^\varepsilon) \rangle. \quad (4.5)$$

Les formules (4.1) nous conduisent à introduire pour tout $\varepsilon \geq 0$ l'application Q^ε de S_3 dans S_3 définie par :

$$\left. \begin{aligned} (Q^\varepsilon s)_{\mu\beta} &= s_{\alpha\beta} \\ (Q^\varepsilon s)_{\alpha 3} &= \varepsilon s_{\alpha 3} \\ (Q^\varepsilon s)_{3\alpha} &= \varepsilon s_{3\alpha} \\ (Q^\varepsilon s)_{33} &= \varepsilon^2 s_{33} . \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Les relations (4.1) s'écrivent donc pour $\varepsilon > 0$:

$$\forall \sigma \in S, \quad \sigma(x^\varepsilon) = Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon(x). \quad (4.7)$$

Au sujet de la dépendance en x^ε du convexe $C(x^\varepsilon)$, nous supposons, bien que cette hypothèse ne soit certainement pas optimale, que le convexe $C(x^\varepsilon)$ est indépendant de la coordonnée x_3^ε . Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout point $x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$, nous supposons donc que, en notant $x^0 = (x_1, x_2, 0)$:

$$C(x^\varepsilon) = C(x^0). \quad (4.8)$$

D'un point de vue mécanique, cette hypothèse signifie que les caractéristiques mécaniques du matériau occupant le volume Ω^ε sont constantes dans la direction x_3^ε , ce qui n'est pas très gênant, notre but étant d'obtenir un modèle bidimensionnel.

Pour tout $\varepsilon \geq 0$ et $x \in \Omega$, on associe alors au convexe $C(x^0)$ de S_3 le convexe fermé $C^\varepsilon(x)$ de S_3 , image réciproque de $C(x^\varepsilon)$ par l'application Q^ε :

$$C^\varepsilon(x) = (Q^\varepsilon)^{-1} C(x^\varepsilon). \quad (4.9)$$

Pour $\varepsilon \geq 0$, la fonction de jauge $g^\varepsilon(x, \cdot)$ du convexe $C^\varepsilon(x)$ définie sur S_3 par :

$$g^\varepsilon(x, \sigma) = \inf \{ \mu > 0, \sigma \in \mu C^\varepsilon(x) \},$$

qui d'après (4.8)-(4.9) vérifie bien sûr :

$$g^\varepsilon(x, \sigma) = g(x^\varepsilon, Q^\varepsilon \sigma) = g(x^0, Q^\varepsilon \sigma). \quad (4.10)$$

Remarquons que $g^0(x, s)$ ne dépend pas des composantes s_{i3} et s_{3i} ($1 \leq i \leq 3$) de $s \in S_3$. De plus, si nous définissons, pour $x \in \Omega$, le convexe $\tilde{C}^0(x)$ de S_2 par

$$\tilde{C}^0(x) = C^0(x) \cap \{ s \in S_3, s_{i3} = s_{3i} = 0, 1 \leq i \leq 3 \}, \quad (4.11)$$

et si nous notons $\tilde{g}^0(x, \tau)$ la fonction de jauge de $\tilde{C}^0(x)$, il est clair que :

$$g^0(x, \tau) = \tilde{g}^0(x, Q^0 \tau).$$

Nous pouvons alors énoncer le

THÉORÈME 4.1 : *Pour $\varepsilon > 0$, soit $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in S \times V$ auquel on fait correspondre $(\sigma, u) \in S^\varepsilon \times V^\varepsilon$ obtenu à l'aide des formules (4.1)-(4.2). Alors (σ, u) est solution du problème \mathcal{P}^ε si et seulement si $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ vérifie les équations :*

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \sigma^\varepsilon \cdot \gamma(v) \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_1} h_\alpha v_\alpha + \int_{\Gamma_- \cup \Gamma_+} g_i v_i, \quad (4.12)$$

$$\gamma(u^\varepsilon) \in \partial F_q^\varepsilon(\sigma^\varepsilon), \quad (4.13)$$

où la fonction F_q^ε de S dans \mathbb{R}^+ est définie par :

$$F_q^\varepsilon(\tau) = \frac{1}{q} \int_{\Omega} \Phi_q^\varepsilon(x, \tau(x)) \, dx,$$

avec, pour tout $x \in \Omega$ et pour $s \in S$:

$$\Phi_q^\varepsilon(x, s) = \lambda [g^\varepsilon(x, s)]^q.$$

Démonstration : L'obtention de (4.12) repose sur un calcul simple. Pour (4.13) on écrit l'équation (3.5) sous la forme :

$$\forall \tau \in S^\varepsilon, \quad \langle \tau - \sigma, \gamma(u) \rangle_\varepsilon \leq \frac{1}{q} \int_{\Omega^\varepsilon} [g(x^\varepsilon, \tau(x^\varepsilon))]^q - \frac{1}{q} \int_{\Omega^\varepsilon} [g(x^\varepsilon, \sigma(x^\varepsilon))]^q.$$

Compte tenu de (4.10), nous obtenons que le second membre de cette inéquation s'écrit :

$$\frac{\varepsilon}{q} \int_{\Omega} [g^\varepsilon(x, \tau^\varepsilon(x))]^q - \frac{\varepsilon}{q} \int_{\Omega} [g^\varepsilon(x, \sigma^\varepsilon(x))]^q,$$

tandis qu'avec (4.5) le premier membre s'écrit :

$$\varepsilon \langle \tau^\varepsilon - \sigma^\varepsilon, \gamma(u^\varepsilon) \rangle.$$

Par conséquent, il vient que :

$$\forall \tau \in S, \quad \langle \tau - \sigma^\varepsilon, \gamma(u) \rangle \leq \frac{1}{q} \int_{\Omega} [g^\varepsilon(x, \tau(x))]^q - \frac{1}{q} \int_{\Omega} [g^\varepsilon(x, \sigma^\varepsilon(x))]^q,$$

ce qui est la définition de (4.3).

5. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE FORMEL DE LA SOLUTION

Suivant la méthode des développements asymptotiques (dont l'idée est développée dans Lions [11] et des applications dans Ciarlet-Destuynder [3], ...) nous considérons ε comme un petit paramètre et nous cherchons à priori $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ sous la forme d'un développement :

$$(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) = (\sigma^0, u^0) + \varepsilon(\sigma^1, u^1) + \varepsilon^2(\sigma^2, u^2) + \dots \quad (5.1)$$

Remarque 5.1 : L'existence du développement (5.1) est justifiée par exemple dans le cas de l'élasticité linéaire (voir Destuynder [6]) pour une plaque encadrée et pour d'autres conditions aux limites (voir Blanchard [1]), ainsi que pour les problèmes de valeur propre (voir Ciarlet-Kesavan [5]). Cependant dans notre cas comme dans le cas de l'élasticité non linéaire (voir Ciarlet [2] ainsi que Paumier [13]) le problème reste ouvert.

Nous définissons le « problème limite » \mathcal{P}^0 de la façon suivante :

Problème \mathcal{P}^0 : Trouver $(\sigma^0, u^0) \in S \times V$ tel que :

$$\int_{\Omega} \sigma^0 \cdot \gamma(v) = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_1} h_\alpha v_\alpha + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i, \quad \forall v \in V, \quad (5.2)$$

$$\gamma(u^0) \in \partial F_q^0(\sigma^0), \quad (5.3)$$

où la fonction F_q^0 de S dans \mathbb{R}^+ est définie par :

$$F_q^0(\tau) = \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} [g^0(x, \tau(x))]^q, \quad (5.4)$$

et vérifie :

$$F_q^0(\tau) = \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} [\tilde{g}^0(x, Q^0 \tau(x))]^q.$$

Remarque 5.2 : Le problème \mathcal{P}^0 n'est autre que le problème \mathcal{P}^ε lorsque l'on remplace formellement ε par 0 dans (4.12)-(4.13). Cependant cette démarche peut être justifiée car, si on est en droit de s'attendre à une convergence de $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ vers (σ^0, u^0) (lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$), même dans un espace plus grand que $S \times V$ (voir Destuynder [6] dans le cas de l'élasticité), alors nécessairement (σ^0, u^0) est solution du problème \mathcal{P}^0 défini ci-dessus.

6. ÉTUDE DU PROBLÈME \mathcal{P}^0

On va d'abord exploiter la relation (5.3) que l'on pourrait qualifier de « loi de comportement limite ». Puisque la fonction $\tau \mapsto g^0(x, \tau)$ ne dépend pas des composantes $\tau_{\alpha 3}$, $\tau_{3\alpha}$ et τ_{33} de $\tau \in S_3$, il est clair que (5.3) implique :

$$\gamma_{i3}(u^0) = 0, \quad 1 \leq i \leq 3. \tag{6.1}$$

On retrouve ici une relation classique en élasticité pour les déplacements dans les modèles de plaques. Remarquons, comme c'est le cas en élasticité (voir Ciarlet [2] et Ciarlet-Destuynder [3]), que cette relation est ici une conséquence de la méthode des développements asymptotiques. En élasticité, les déplacements qui vérifient (6.1) sont appelés « déplacements de Kirchhoff-Love », et par similitude nous dirons que (6.1) implique que u^0 est une « vitesse de Kirchhoff-Love ».

Si nous définissons les espaces :

$$\begin{aligned} V_t &= \{ v \in W^{1,p}(\omega), \quad v = 0 \text{ sur } \gamma_0 \}, \\ V_3 &= W_0^{2,p}(\omega), \\ V_{KL} &= \{ v = (v_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3, v_3); (v_\alpha) \in V_t^2, v_3 \in V_3 \}, \end{aligned}$$

la relation (6.1) montre que :

$$u^0 \in V_{KL}, \tag{6.2}$$

et on notera

$$u_\alpha^0 = \underline{u}_\alpha^0 - x_3 \partial_\alpha u_3, \quad 1 \leq \alpha \leq 2, \tag{6.3}$$

où $(\underline{u}_\alpha^0) \in V_t^2$.

Introduisons aussi les espaces :

$$\begin{aligned} D_{KL} &= \{ d \in D; d_{i3} = 0, 1 \leq i \leq 3 \}, \\ S_{KL} &= \{ s \in S; s_{i3} = 0, 1 \leq i \leq 3 \}. \end{aligned}$$

Il est clair que si $v \in V_{KL}$ alors $\gamma(v) \in D_{KL}$ et que S_{KL} et D_{KL} sont en dualité par $\langle \dots \rangle$ entre S et D .

Le problème \mathcal{P}^0 est donc équivalent à trouver $(\sigma^0, u^0) \in S \times V_{KL}$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \langle \sigma^0, \gamma(v) \rangle = \int_\Omega f_i v_i + \int_{\Gamma_1} h_\alpha v_\alpha + \int_{\Gamma_- \cup \Gamma_+} g_i v_i \tag{6.4}$$

$$\gamma(u^0) \in \partial F_q^0(Q^0 \sigma^0). \tag{6.5}$$

Dans la relation (6.5), $Q^0 \sigma^0$ note par extension l'élément de S_{KL} de composantes $(\sigma_{\alpha\beta}(x), 0, 0)$ et on a remplacé, dans l'équation (5.3), σ^0 par $Q^0 \sigma^0$ puisque $F_q^0(s)$ ne dépend pas de $s_{\alpha 3}$ et s_{33} . Le sous-différentiel dans (6.5) est donc pris au sens de la dualité entre S_{KL} et D_{KL} .

THÉORÈME 6.1 : *Sous les hypothèses du théorème 3.1, il existe un élément $(Q^0 \sigma^0, u^0) \in S_{KL} \times V_{KL}$ tel que*

$$\forall v \in V_{KL}, \quad \langle Q^0 \sigma^0, \gamma(v) \rangle = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_1} h_{\alpha} v_{\alpha} + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i, \quad (6.6)$$

$$\gamma(u^0) \in \partial F_q^0(Q^0 \sigma^0). \quad (6.7)$$

Si $Q^0 \sigma^0 \in (W^{2,q}(\Omega))_s^4$ le problème \mathcal{P}^0 admet la solution $(\sigma^0, u^0) \in S \times V_{KL}$ où les composantes σ_{i3}^0 de σ^0 sont données par les formules :

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = - \int_{-1}^{x_3} (\partial_{\beta} \sigma_{\alpha\beta}^0 + f_{\alpha}) - g_{\alpha}^{-} \quad (6.8)$$

$$\sigma_{33}^0 = - \int_{-1}^{x_3} (\partial_{\alpha} \sigma_{\alpha 3}^0 + f_3) - g_3^{-} \quad (6.9)$$

où on a posé $g_i^{-} = g_{ij\Gamma_-} \in L^q(\omega)$.

Démonstration : On procède en deux étapes :

Étape 1 (détermination du $Q^0 \sigma^0$ et u^0).

En restreignant l'équation (5.2) à des champs de vitesses dans V_{KL} , nous voyons que si $(\sigma^0, u^0) \in S \times V_{KL}$ est solution du problème \mathcal{P}^0 :

$$(Q^0 \sigma^0, u^0) \in S_{KL} \times V_{KL}$$

vérifie les relations (6.6)-(6.7). Pour montrer que ce problème a une solution, on rappelle que V_{KL} est un espace de Banach pour la norme de l'espace V et que

$$F_q^0(Q^0 \sigma^0) = \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} [\tilde{g}^0(x, Q^0 \sigma^0(x))]^q dx,$$

où $\tilde{g}^0(x, \cdot)$ est la fonction de jauge du convexe $\tilde{C}^0(x)$ défini par (4.11). Le convexe $\tilde{C}^0(x)$ vérifie de plus les propriétés

$$B(0, r) \cap S_2 \subset \tilde{C}^0(x) \subset B(0, R) \cap S_2.$$

Enfin l'application

$$v \mapsto \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_1} h_{\alpha} v_{\alpha} + \int_{\Gamma_- \cup \Gamma_+} g_i v_i$$

est une forme linéaire et continue sur V_{KL} . On peut donc, comme pour le théorème 3.1 appliqué à nouveau le résultat de Friaa [8] et affirmer que le problème (6.6)-(6.7) admet au moins une solution dans l'espace $S_{KL} \times V_{KL}$. On explicite maintenant l'équation (6.6) car ce sera utile pour la suite :

$$\forall (\underline{v}_{\alpha}) \in V_i^2, \quad \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\beta}^0 \right) \partial_{\alpha} v_{\beta} = \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} f_{\alpha} + g_{\alpha}^{-} + g_{\alpha}^{+} \right) v_{\alpha} + \int_{\gamma_1} \left(\int_{-1}^{+1} h_{\alpha} \right) v_{\alpha},$$

$$\forall v_3 \in V_3, \quad - \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^0 \right) \partial_{\alpha\beta} v_3 = - \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} x_3 f_{\alpha} + g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-} \right) \partial_{\alpha} v_3 + \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} f_3 + g_3^{+} + g_3^{-} \right) v_3.$$

En appliquant la formule de Green on voit $(\sigma_{\alpha\beta}^0) \in S_{KL}$ vérifie, au moins formellement, les équations suivantes :

$$- \int_{-1}^{+1} \partial_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^0 = \int_{-1}^{+1} f_{\alpha} + g_{\alpha}^{-} + g_{\alpha}^{+} \quad \text{dans } \omega, \tag{6.10}$$

$$\int_{-1}^{+1} n_{\beta} \sigma_{\alpha\beta}^0 = \int_{-1}^{+1} h_{\alpha} \quad \text{sur } \gamma_1, \tag{6.11}$$

$$- \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^0 = \int_{-1}^{+1} f_3 + g_3^{+} + g_3^{-} + \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_{\alpha} f_{\alpha} + \partial_{\alpha} g_{\alpha}^{+} - \partial_{\alpha} g_{\alpha}^{-}. \tag{6.12}$$

Étape 2 (calcul de $\sigma_{i3}^0, 1 \leq i \leq 3$).

On calcule maintenant $\sigma_{i3}^0, 1 \leq i \leq 3$, à partir de $Q^0 \sigma^0 = (\sigma_{\alpha\beta}^0, 0, 0)$ déterminé à l'étape 1, de façon à vérifier l'équation (6.4). On découple d'abord

cette équation sous la forme :

$$\forall (v_\alpha) \in W_t^2, \quad \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3} \partial_3 v_\alpha = \int_{\Omega} f_\alpha v_\alpha + \int_{\Gamma_- \cup \Gamma_+} g_\alpha v_\alpha + \int_{\gamma_1} \left(\int_{-1}^{+1} h_\alpha \right) v_\alpha, \quad (6.13)$$

$$\forall v_3 \in W_3, \quad \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_\alpha v_3 + \int_{\Omega} \sigma_{33}^0 \partial_3 v_3 = \int_{\Omega} f_3 v_3 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3. \quad (6.14)$$

Si la solution $(\sigma_{\alpha\beta}^0)$ de (6.6)-(6.7) vérifie :

$$Q^0 \sigma^0 = (\sigma_{\alpha\beta}^0) \in (W^{2,q}(\Omega))_s^4, \quad (6.15)$$

en utilisant la formule de Green et l'équation (6.11) on voit que (6.13) équivaut aux problèmes aux limites :

$$\partial_3 \sigma_{\alpha 3}^0 = - \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}^0 - f_\alpha \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.16)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = g_\alpha \quad \text{sur } \Gamma_+, \quad (6.17)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = - g_\alpha \quad \text{sur } \Gamma_-. \quad (6.18)$$

Puisque (6.15) montre que $\partial_3 \sigma_{\alpha 3}^0 \in L^q(\Omega)$ on peut définir la trace de $\sigma_{\alpha 3}^0$ dans $L_q(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$ (équations (6.17)-(6.18)). Il suffit alors de vérifier que l'unique solution de (6.16)-(6.18) est

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = - \int_{-1}^{x_3} (\partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}^0 + f_\alpha) - g_\alpha^- \quad \text{dans } \Omega,$$

puisque la relation de compatibilité

$$- \int_{-1}^{+1} (\partial_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^0 + f_\alpha) - g_\alpha^- = g_\alpha^+ \quad \text{dans } \omega$$

est donnée par (6.10). Remarquons que $\sigma_{\alpha 3}^0 \in W^{1,q}(\Omega)$. En procédant de même nous voyons que (6.14) est équivalent aux problèmes aux limites :

$$\partial_3 \sigma_{33}^0 = - \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^0 - f_3 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.19)$$

$$\sigma_{33}^0 = g_3 \quad \text{sur } \Gamma_+, \quad (6.20)$$

$$\sigma_{33}^0 = - g_3 \quad \text{sur } \Gamma_-. \quad (6.21)$$

La seule solution de (6.19)-(6.21) est

$$\sigma_{33}^0 = - \int_{-1}^{x_3} (\partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^0 + f_3) - g_3^- \quad \text{dans } \Omega ,$$

puisque la condition de compatibilité

$$- \int_{-1}^{+1} (\partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^0 + f_3) - g_3^- = g_3^+ \quad \text{dans } \omega$$

est vérifiée d'après (6.12) et (6.10).

7. MODÈLE OBTENU DANS UN CAS DIFFÉRENTIABLE

Dans cette section nous supposerons que la fonction $F_q(\sigma)$ définie en (3.3) est Gâteau-différentiable. Pour fixer les idées, nous supposerons que $C(x^\varepsilon)$ est donné par :

$$C(x^\varepsilon) = \{ s \in S_3 ; |s| \leq 1 \}, \quad \forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \quad (7.1)$$

mais le contenu de la section s'étend au cas où $F_q(\sigma)$ est différentiable sauf le résultat d'unicité (Théorème 7.1), qui provient de la forme particulière du convexe $C(x^\varepsilon)$ donnée en (7.1). La fonction de jauge de ce convexe est tout simplement :

$$g(x^\varepsilon, \sigma) = |\sigma|, \quad \forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \quad \forall \sigma \in S_3 .$$

Les hypothèses du théorème 3.1 sont donc vérifiées.

Le problème tridimensionnel sur Ω^ε s'écrit :

Trouver $(\sigma, u) \in S^\varepsilon \times V^\varepsilon$ tel que

$$\forall \tau \in S^\varepsilon, \quad \int_{\Omega^\varepsilon} \gamma(u) \cdot \tau = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\lambda}{q} |\sigma|^{q-2} \sigma \cdot \tau, \quad (7.2)$$

$$\forall v \in V^\varepsilon, \quad \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma \cdot \gamma(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i + \int_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon} g_i^\varepsilon v_i + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} h_\alpha^\varepsilon v_\alpha. \quad (7.3)$$

On sait, d'après le théorème 3.1, que ce problème admet au moins une solution. En fait on peut démontrer, par un argument de stricte convexité, qu'elle est unique.

Le problème \mathcal{P}^ε , équivalent à (7.2)-(7.3), posé sur l'ouvert Ω s'écrit ici :

Trouver $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in S \times V$ tel que :

$$\forall \tau \in S, \quad \int_{\Omega} \gamma(u^\varepsilon) \cdot \tau = \int_{\Omega} \frac{\lambda}{q} |Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon|^{q-2} Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon \cdot Q^\varepsilon \tau, \quad (7.4)$$

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \sigma^\varepsilon \cdot \gamma(v) = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i + \int_{\Gamma_1} h_\alpha v_\alpha. \quad (7.5)$$

Le problème limite s'écrit donc :

Problème \mathcal{P}^0 : Trouver $(\sigma^0, u^0) \in S \times V_{KL}$ tel que

$$\forall \tau \in S, \quad \int_{\Omega} \gamma(u^0) \cdot \tau = \int_{\Omega} \frac{\lambda}{q} |Q^0 \sigma^0|^{q-2} \sigma_{\alpha\beta}^0 \tau_{\alpha\beta}, \quad (7.6)$$

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \sigma^0 \cdot \gamma(v) = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i + \int_{\Gamma_1} h_\alpha v_\alpha. \quad (7.7)$$

D'après le théorème 6.1, le problème \mathcal{P}^0 admet au moins une solution $(\sigma^0, u^0) \in S \times V_{KL}$ (si $Q^0 \sigma^0 \in (W^{2,q}(\Omega))_s^4$). Nous pouvons donner ici une démonstration directe de l'existence et de l'unicité d'une solution au problème \mathcal{P}^0 .

THÉORÈME 7.1 : *Le problème (\mathcal{P}^0), (7.6)-(7.7), admet une solution unique (toujours si $Q^0 \sigma^0 \in (W^{2,q}(\Omega))_s^4$).*

Démonstration : Les équations (6.6)-(6.7) s'écrivent dans ce cas :

$$\forall \tau \in S_{KL}, \quad \int_{\Omega} \gamma_{\alpha\beta}(u^0) \tau_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \frac{\lambda}{q} |Q^0 \sigma^0|^{q-2} \sigma_{\alpha\beta}^0 \tau_{\alpha\beta} \quad (7.8)$$

$$\forall v \in K_{KL}, \quad \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \gamma_{\alpha\beta}(v) = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i + \int_{\Gamma_1} h_\alpha v_\alpha. \quad (7.9)$$

La relation (7.8) montre que :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u^0) = \frac{\lambda}{q} |Q^0 \sigma^0|^{q-2} \sigma_{\alpha\beta}^0 \quad (7.10)$$

qui peut être inversée en :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = k |\gamma(u^0)|^{p-2} \gamma_{\alpha\beta}(u^0). \quad (7.11)$$

avec $k = \left(\frac{\lambda}{q}\right)^{1-p}$.

En reportant $\sigma_{\alpha\beta}^0$ donnée en (7.11) dans l'équation (7.9) on voit que u^0 apparaît comme l'unique point où la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{k}{p} \int_{\Omega} |\gamma(v)|^p - \int_{\Omega} f_i v_i - \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i - \int_{-\Gamma_1} h_{\alpha} v_{\alpha},$$

(strictement convexe continue et coercive) est minimum sur l'espace de Banach V_{KL} . Il suffit, pour terminer la démonstration, de calculer $\sigma_{\alpha\beta}^0$ par (7.11), puis σ_{i3}^0 ($1 \leq i \leq 3$) avec les formules (6.8) et (6.9) si $\sigma_{\alpha\beta}^0 \in W^{2,q}(\Omega)$.

8. MODÈLE OBTENU EN DÉFORMATIONS PLANES

On donne ici un cas particulier important puisqu'il conduit à un modèle de plaque viscoplastique en (vitesses de) déformations planes (équations (8.5)-(8.6)).

On note $\tilde{\pi}_0(x^0, \cdot)$ la fonction d'appui du convexe $\tilde{C}^0(x^0)$ (voir (4.8) et (4.11)) définie sur S_2 par :

$$\tilde{\pi}_0(x^0, \tau) = \sup \{ \langle \sigma, \tau \rangle, \sigma \in \tilde{C}^0(x^0) \} \tag{8.1}$$

et F_q^* la fonction (duale de F_q^0) définie sur D_{KL} par

$$F_q^*(d) = \frac{1}{p} \lambda^{1-p} \int_{\Omega} [\tilde{\pi}_0(x^0, d(x))]^p dx. \tag{8.2}$$

Enfin, on note φ_q la fonction définie sur $(L^q(\omega))_s^4$ par

$$\varphi_q(s) = \frac{1}{q} \lambda \int_{\omega} [\tilde{g}^0(x^0, s(x^0))]^q dx^0, \tag{8.3}$$

et par φ_q^* sa fonction duale égale sur $(L^p(\omega))_s^4$ à :

$$\varphi_q^*(d) = \frac{1}{p} \lambda^{1-p} \int_{\omega} [\tilde{\pi}_0(x^0, d(x^0))]^p dx^0. \tag{8.4}$$

Problème $\tilde{\mathcal{P}}^0$: Trouver $(m^0, u^0) \in (L^q(\omega))_s^4 \times V_t^2$ tel que

$$\forall (\varrho_{\alpha}) \in V_t^2, \int_{\omega} m_{\alpha\beta}^0 \gamma_{\alpha\beta}(\varrho) = \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} f_{\alpha} + g_{\alpha}^- + g_{\alpha}^+ \right) v_{\alpha} + \int_{\Gamma_1} \left(\int_{-1}^{+1} h_{\alpha} \right) v_{\alpha}. \tag{8.5}$$

$$\gamma(u^0) \in \partial\varphi_q(m^0). \tag{8.6}$$

Dans (8.6) le sous-différentiel est pris au sens de la dualité entre les espaces $(L^p(\omega))_s^4$ et $(L^q(\omega))_s^4$ définie par l'intégrale

$$\int_{\omega} d(x^0) \cdot s(x^0) dx^0, \quad d \in (L^p(\omega))_s^4 \quad \text{et} \quad s \in (L^q(\omega))_s^4.$$

THÉORÈME 8.1 : *Il existe au moins un élément (m^0, u^0) solution du problème $\tilde{\mathcal{P}}^0$. Si $m^0 \in (W^{2,q}(\omega))_s^4$ et si les forces appliquées sont telles que :*

$$\int_{-1}^{+1} f_3 dx_3 + g_3^+ + g_3^- + \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_{\alpha} f_{\alpha} dx_3 + \partial_{\alpha} (g_{\alpha}^+ - g_{\alpha}^-) = 0 \quad \text{dans } \omega,$$

alors (σ^0, u^0) est solution du problème (\mathcal{P}^0) où on a posé

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^0 &= m_{\alpha\beta}^0, \\ \sigma_{\alpha 3}^0 &= -(x_3 + 1) \partial_{\beta} m_{\alpha\beta}^0 - g_{\alpha}^- - \int_{-1}^{x_3} f_{\alpha}, \\ \sigma_{33}^0 &= \frac{1}{2} (x_3 + 1)^2 \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}^0 + (x_3 + 1) \partial_{\alpha} g_{\alpha}^- + \int_{-1}^{x_3} \int_{-1}^t \partial_{\alpha} f_{\alpha}. \end{aligned} \right\} \tag{8.7}$$

Démonstration : Pour démontrer que le problème $\tilde{\mathcal{P}}^0$ admet au moins une solution $(m^0, u^0) \in (L^q(\omega))_s^4 \times V_t^2$ on procède comme à la démonstration du théorème 6.1.

On sait aussi (d'après [7]), que (m^0, u^0) vérifie :

$$\varphi_q(m^0) + \varphi_q^*(\gamma(u^0)) = \int_{\omega} m_{\alpha\beta}^0 \gamma_{\alpha\beta}(u^0) dx^0.$$

Mais ceci peut encore s'écrire

$$F_q^0(m^0) + F_q^*(\gamma(u^0)) = \int_{\Omega} m_{\alpha\beta}^0 \gamma_{\alpha\beta}(u^0) dx,$$

c'est-à-dire que $m^0 \in \partial F_q^*(\gamma(u^0))$ ou encore que $\gamma(u^0) \in \partial F_q^0(m^0)$. Comme avec (8.7) on a $Q^0 \sigma^0 = m^0$ la relation (6.7) est bien vérifiée tandis que la relation (6.6) l'est trivialement grâce aux hypothèses sur les forces. Quant aux formules (6.8) et (6.9) elles découlent directement des formules (8.7).

Remarque 8.1 : Si la solution du problème \mathcal{P}^0 est unique il en va de même pour la solution du problème $\tilde{\mathcal{P}}^0$. Pour résoudre, dans ce cas, le problème \mathcal{P}^0

il suffit de résoudre le problème $\tilde{\mathcal{P}}^0$ posé sur l'ouvert ω de \mathbb{R}^2 . Par contre, si la solution du problème $\tilde{\mathcal{P}}^0$ est unique il est moins évident que la solution du problème \mathcal{P}^0 le soit aussi.

9. MODÈLE DE MEMBRANE POUR LES PLAQUES VISCOPLASTIQUES

Pour simplifier l'écriture on supposera dans cette section que le convexe $\tilde{C}_0(x^0)$ ne dépend pas de x^0 ; on le notera \tilde{C}_0 .

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 9.1 : *On suppose que les forces appliquées vérifient :*

$$\int_{-1}^{+1} f_3 dx_3 + g_3^+ + g_3^- + \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_\alpha f_\alpha dx_3 + \partial_\alpha (g_\alpha^- - g_\alpha^+) = 0, \quad \text{dans } \omega. \tag{9.1}$$

Soit (Q^0, σ^0, u^0) une solution du problème (6.6)-(6.7). Notons $n = (n_{\alpha\beta})$ avec

$$n_{\alpha\beta} = \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3.$$

Alors $(n, \underline{u}^0) \in (L^q(\omega))_s^4 \times V_t^2$ est solution du problème :

$$\forall (\underline{v}_\alpha) \in V_t^2, \quad \int_\omega n_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta = \int_\omega \left\{ \int_{-1}^{+1} f_\alpha dx_3 + g_\alpha^- + g_\alpha^+ \right\} v_\alpha + \int_{\gamma_1} \left\{ \int_{-1}^{+1} h_\alpha \right\} v_\alpha, \tag{9.2}$$

$$\gamma(\underline{u}^0) \in \partial G_q^0(n), \tag{9.3}$$

où, pour $\underline{\tau} \in (L^q(\omega))_s^4, G_q^0(\underline{\tau}) = \frac{\lambda 2^{1-q}}{q} \int_\omega |\tilde{g}_0(\underline{\tau})|^q.$

Démonstration : Posons $m_{\alpha\beta} = \int_{-1}^{+1} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3.$

Avec l'hypothèse (9.1) l'équation (6.6) montre que

$$\forall (\underline{v}_\alpha) \in V_t^2, \quad \int_\omega n_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta = \int_\omega \left\{ \int_{-1}^{+1} f_\alpha dx_3 + g_\alpha^- + g_\alpha^+ \right\} v_\alpha + \int_{\gamma_1} \left\{ \int_{-1}^{+1} h_\alpha \right\} v_\alpha. \tag{9.4}$$

$$\forall v_3 \in V_3, \quad \int_{\omega} m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} v_3 = 0. \quad (9.5)$$

D'autre part, la relation (6.7) s'écrit en particulier, si $\tau = \frac{1}{2} \underline{\tau}$ avec $\underline{\tau} \in (L^q(\omega))_s^4$,

$$\int_{\omega} \gamma(u^0) \cdot \underline{\tau} - \int_{\omega} \gamma(u^0) \cdot n + \int_{\omega} \partial_{\alpha\beta} u_3^0 m_{\alpha\beta} \leq \frac{\lambda 2^{1-q}}{q} \int_{\omega} |\tilde{g}_0(\underline{\tau})|^q - \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} |\tilde{g}_0(Q^0 \sigma^0)|^q.$$

Or $\tilde{g}_0 : S_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe (et positivement homogène); avec le lemme de Jensen, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} |\tilde{g}_0(n)|^q &= \int_{\omega} \left| \tilde{g}_0 \left(2 \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{\alpha\beta}(2t) dt \right) \right|^q = 2^q \int_{\omega} \left| \tilde{g}_0 \left(\int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{\alpha\beta}(2t) dt \right) \right|^q \leq \\ &\leq 2^q \int_{\omega} \left| \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{g}_0(\sigma_{\alpha\beta}(2t)) dt \right|^q \leq 2^{q-1} \int_{\Omega} |\tilde{g}_0(Q^0 \sigma^0)|^q. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\forall \underline{\tau} \in (L^q(\omega))_s^4,$$

$$\int_{\omega} \gamma(u^0) \cdot (\underline{\tau} - n) \leq \frac{\lambda 2^{1-q}}{q} \int_{\omega} |\tilde{g}_0(\underline{\tau})|^q - \frac{\lambda 2^{1-q}}{q} \int_{\omega} |\tilde{g}_0(n)|^q$$

ce qui achève la démonstration. \square

Sous l'hypothèse sur les forces (9.1) nous trouvons donc un modèle pour les efforts normaux ($n_{\alpha\beta}$) dans la plaque. Cette hypothèse signifie que la résultante des forces suivant x_3 (c'est-à-dire perpendiculaire à la plaque) est nulle. Dans le cas où le problème (6.6)-(6.7) a une solution *unique* nous savons alors que $u_3^0 = 0$ et que $n_{\alpha\beta} = 2 \sigma_{\alpha\beta}^0$ (voir section précédente).

Le pseudo potentiel $G_q^0(\underline{\tau})$ peut s'écrire

$$G_q^0(\underline{\tau}) = \frac{\lambda}{q} \int_{\omega} |g_n(\underline{\tau})|^q,$$

où g_n est la fonction de jauge du convexe $C_n = 2^{1/p} \tilde{C}_0$.

On peut donc considérer que la loi de comportement (9.3) est une loi de Norton Hoff généralisée associée au convexe C_n .

10. MODÈLE DE FLEXION POUR LES PLAQUES VISCOPLASTIQUES

On suppose dans cette section que la fonction de jauge \tilde{g}_0 du convexe \tilde{C}_0 vérifie

$$\forall \tau \in S_2, \quad \tilde{g}_0(-\tau) = \tilde{g}_0(\tau). \tag{10.1}$$

Remarquons que cette hypothèse est vérifiée si \tilde{C}_0 est symétrique par rapport à l'origine.

On suppose de plus que les forces appliquées vérifient :

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f_\alpha dx_3 + g_\alpha^- + g_\alpha^+ &= 0 \quad \text{dans } \omega, \\ \int_{-1}^{+1} h_\alpha &= 0 \quad \text{sur } \gamma_1. \end{aligned} \right\} \tag{10.2}$$

On rappelle les notations $n_{\alpha\beta} = \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3$ et $m_{\alpha\beta} = \int_{-1}^{+1} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3$

et on note $\partial^2 u_3 = (\partial_{\alpha\beta} u_3)$.

PROPOSITION 10.1 : Soit $(Q^0 \sigma^0, u^0)$ une solution du problème (6.6)-(6.7). Alors $m = (m_{\alpha\beta})$ et u_3^0 sont solutions du problème :

$$\forall v_3 \in V_3, \quad \int_\omega m \cdot \partial^2 v_3 = - \int_\omega \left\{ \int_{-1}^{+1} x_3 f_\alpha dx_3 + g_\alpha^+ - g_\alpha^- \right\} \partial_\alpha v_3 + \int_\omega \left\{ \int_{-1}^{+1} f_3 dx_3 + g_3^+ + g_3^- \right\} v_3, \tag{10.3}$$

$$\partial^2 u_3^0 \in \partial H_q^0(m), \tag{10.4}$$

où pour $\tau \in (L^q(\omega))_s^4$, $H_q^0(\tau) = \frac{\lambda}{p} \left(\frac{p+1}{2} \right)^{q-1} \int_\omega |\tilde{g}_0(\tau)|^q$.

Démonstration : L'hypothèse (10.2) sur les forces appliquées montre que

$$\forall (\underline{v}_\alpha) \in V_t^2, \quad \int_\omega n_{\alpha\beta} \partial_\alpha \underline{v}_\beta = 0, \tag{10.5}$$

$$\forall v_3 \in V_3, \int_{\omega} m \cdot \partial^2 v_3 = - \int_{\omega} \left\{ \int_{-1}^{+1} x_3 f_{\alpha} + g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-} \right\} \partial_{\alpha} v_3 + \\ + \int_{\omega} \left\{ \int_{-1}^{+1} f_3 + g_3^{+} + g_3^{-} \right\} v_3. \quad (10.6)$$

La relation (6.7) s'écrit :

$$\forall \tau \in S, \int_{\Omega} \gamma(\underline{u}^0) \cdot \tau - \int_{\Omega} x_3 \partial^2 u_3^0 \cdot \tau - \int_{\omega} \gamma(\underline{u}^0) \cdot n + \int_{\omega} \partial^2 u_3^0 \cdot m \leq \\ \leq \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} |\tilde{g}_0(\tau)|^q - \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} |\tilde{g}_0(Q^0 \sigma^0)|^q.$$

En prenant $\tau = \frac{p+1}{2} |x_3|^{p-2} x_3 \underline{\tau}$ avec $\underline{\tau} \in (L^q(\omega))_s^4$, et en utilisant (10.5) on obtient :

$$- \int_{\omega} \partial^2 u_3^0 \cdot \underline{\tau} + \int_{\omega} \partial^2 u_3^0 \cdot m \leq \frac{\lambda}{q} \left(\frac{p+1}{2} \right)^{q-1} \int_{\omega} |\tilde{g}_0(\underline{\tau})|^q - \\ - \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} |\tilde{g}_0(Q^0 \sigma^0)|^q, \quad (10.7)$$

puisque l'hypothèse (10.1) entraîne que la fonction \tilde{g}_0 vérifie $\tilde{g}_0(\lambda s) = |\lambda| \tilde{g}_0(s)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall s \in S_3$. De plus comme cette fonction est convexe avec le lemme de Jensen, on a

$$\tilde{g}_0 \left(\int_{-1}^{+1} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3 \right) = 4 \tilde{g}_0 \left(\int_{-1/2}^{1/2} t \sigma_{\alpha\beta}^0(2t) dt \right) \leq \int_{-1}^{+1} |x_3| \tilde{g}_0(\sigma_{\alpha\beta}^0) dx_3$$

On peut donc écrire :

$$\int_{\omega} |\tilde{g}_0(m)|^q = \int_{\omega} \left| \tilde{g}_0 \left(\int_{-1}^{+1} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3 \right) \right|^q \leq \int_{\omega} \left| \int_{-1}^{+1} |x_3| \tilde{g}_0(\sigma_{\alpha\beta}^0) dx_3 \right|^q \leq \\ \leq \int_{\omega} \left\{ \left[\int_{-1}^{+1} |x_3|^p \right]^{q/p} \left[\int_{-1}^{+1} |\tilde{g}_0(\sigma_{\alpha\beta}^0)|^q dx_3 \right] \right\} \\ \leq \left(\frac{2}{p+1} \right)^{q-1} \int_{\Omega} |\tilde{g}_0(\sigma_{\alpha\beta}^0)|^q.$$

La relation (10.7) montre donc que

$$\forall \underline{\tau} \in (L^q(\omega))_s^4, \quad \int_{\omega} \partial^2 u_3^0(\underline{\tau} - m) \leq H_q^0(\underline{\tau}) - H_q^0(m),$$

ce qui est la définition de (10.4). \square

Le pseudo-potentiel $H_q^0(\underline{\tau})$ peut s'écrire

$$H_q^0(\underline{\tau}) = \frac{\lambda}{q} \int_{\omega} |g_m(\underline{\tau})|^q,$$

où g_m est la fonction de jauge du convexe $C_m = \left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/p} \tilde{C}_0$.

La relation (10.4) peut donc s'interpréter comme une loi de comportement de Norton Hoff associée au convexe C_m .

Remarque 10.1 : On peut, toujours sous les mêmes hypothèses sur \tilde{C}_0 et sur les forces appliquées, construire une solution $(Q^0 \sigma^0, u^0)$ de (6.6)-(6.7) à partir d'une solution (m, u_3^0) de (10.3)-(10.4). En effet, il suffit de poser $u^0 = (0, 0, u_3^0)$ et $\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{p+1}{2} |x_3|^{p-2} x_3 m_{\alpha\beta}$ et de procéder de façon analogue au paragraphe 8. Nous connaissons donc la dépendance en x_3 pour une solution σ^0 comme cela est le cas en élasticité où $\sigma_{\alpha\beta}^0$ est linéaire en x_3 . Moyennant un résultat de régularité sur m , nous pouvons bien sûr calculer les composantes $\sigma_{\alpha 3}^0$ et σ_{33}^0 par les formules (6.8)-(6.9).



11. UN RÉSULTAT DE CONVERGENCE DE $(u^\varepsilon, Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon)$ VERS $(u^0, Q^0 \sigma^0)$

On rappelle que l'on fait l'hypothèse (4.8) et on note :

$$\Phi_q(\tau) = \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} |g(x^0, \tau(x))|^q dx$$

le pseudo-potentiel associé à $C(x^0)$ et défini sur S . On a la relation suivante :

$$\forall \tau \in S, \quad F_q^\varepsilon(\tau) = \Phi_q(Q^\varepsilon \tau)$$

et on rappelle que

$$Q^\varepsilon \tau(x) = (\tau_{\alpha\beta}(x), \varepsilon \tau_{\alpha 3}(x), \varepsilon^2 \tau_{33}(x)).$$

On supposera que Φ_q vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\Phi_q : S \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .

(ii) Pour tout $R > 0$, il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que :

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S, \quad \|\sigma_1\| < R, \|\sigma_2\| < R \\ C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_S^\alpha \leq \langle \partial\Phi_q(\sigma_1) - \partial\Phi_q(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2 \rangle.$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 11.1 : *On suppose que les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées ainsi que les hypothèses du théorème 3.1 avec R ne dépendant pas de ε . Alors le problème (6.6)-(6.7) admet une solution unique $(Q^0 \sigma^0, u^0)$ dans l'espace $S_{KL} \times V_{KL}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (4.12)-(4.13) admet une solution $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ dans l'espace $S \times V$. De plus lorsque ε tend vers zéro nous avons $Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon$ qui tend vers $Q^0 \sigma^0$ dans S et u^ε qui tend vers u^0 dans V .*

Démonstration : Posons $L(v) = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_1} h_\alpha v_\alpha + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i$.

L'hypothèse (i) entraîne que F_q^ε est de classe C^1 sur S . Si $(\sigma_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon)$ et $(\sigma_2^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ éléments de $S \times V$ vérifient (4.12)-(4.13) on a

$$\partial F_q^\varepsilon(\sigma_\mu^\varepsilon) = Q^{1/\varepsilon} \gamma(u_\mu^\varepsilon) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \sigma_\mu^\varepsilon \gamma(u_\nu^\varepsilon) = L(u_\nu^\varepsilon), \quad \text{pour } \nu \text{ et } \mu = 1 \text{ et } 2.$$

L'hypothèse (ii) entraîne alors que $\sigma_1^\varepsilon = \sigma_2^\varepsilon$ et donc que $u_1^\varepsilon = u_2^\varepsilon$.

On démontrerait de la même façon l'unicité de la solution $(Q^0 \sigma^0, u^0)$ au problème (6.6)-(6.7) dans l'espace $S_{KL} \times V_{KL}$.

Nous décomposons la démonstration de la convergence en trois étapes.

1^{er} Étape : convergence faible d'une sous-suite.

On sait que u^ε réalise sur V le minimum de l'énergie

$$J^\varepsilon(v) = \frac{\lambda^{1-p}}{p} \int_{\Omega} |\pi^\varepsilon(x^0, \gamma(v))|^p - L(v)$$

où $\pi^\varepsilon(x^0, \cdot) : S_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'appui du convexe $C^\varepsilon(x_0)$. On a ainsi

$$J^\varepsilon(v) = \frac{\lambda^{1-p}}{p} \int_{\Omega} |\pi(x^0, Q^{1/\varepsilon} \gamma(v))|^p - L(v)$$

où $\pi(x^0, \cdot)$ est la fonction d'appui du convexe $C(x^0)$. En prenant un élément v dans l'espace V_{KL} , $C = J^\varepsilon(v)$ ne dépend pas de ε et nous avons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq C.$$

Or l'hypothèse (H_1) implique que

$$\forall x^0 \in \omega, \quad \forall d \in S_3, \quad \pi(x^0, d) \geq r |d|,$$

et donc que

$$r |Q^{1/\varepsilon} \gamma(u^\varepsilon)|_D^p - L(u^\varepsilon) \leq C.$$

Avec l'inégalité de Korn sur $W^{1,p}(\Omega)$ et pour ε assez petit on obtient :

$$|Q^{1/\varepsilon} \gamma(u^\varepsilon)|_D^p \leq C, \tag{11.1}$$

et donc que

$$\|u^\varepsilon\|_V^p \leq C.$$

En écrivant l'équation (4.13) sous la forme

$$\forall \tau \in S, \quad \langle \gamma(u^\varepsilon), \tau - \sigma^\varepsilon \rangle \leq \Phi_q(Q^\varepsilon \tau) - \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon) \tag{11.2}$$

et en prenant $\tau = 0$ et $v = u^\varepsilon$ dans (4.12) on a

$$\Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon) \leq C \|u^\varepsilon\|_V.$$

De plus l'hypothèse $C(x^0) \subset B(0, R)$ (théorème 3.1) implique :

$$\forall \tau \in S_3 \quad g(x^0, \tau) \leq \frac{1}{R} |\tau|$$

et donc que

$$C \|u^\varepsilon\|_V \geq |Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon|_S^p.$$

Par suite, pour ε assez petit, on obtient

$$|Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon|_S \leq C.$$

Les espaces V et S étant réflexifs, on en déduit qu'il existe des sous-suites, encore notées u^ε et $Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon$, et un élément $(\bar{\sigma}, \bar{u}) \in S \times V$ tels que u^ε tend vers \bar{u} dans V faiblement et $Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon$ tend vers $\bar{\sigma}$ dans S faiblement.

2^e *Étape* : passage à la limite faible dans les équations.

Tout d'abord le passage à la limite faible dans (11.1) montre que $\gamma_{i3}(\bar{u}) = 0$ c'est-à-dire $\bar{u} \in V_{KL}$. De plus, en multipliant (4.12) par ε^2 on obtient par passage à la limite :

$$\forall v \in V_3, \quad \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{33} \partial_3 v_3 = 0,$$

ce qui montre que $\bar{\sigma}_{33} = 0$. Enfin en multipliant (4.12) par ε on montre de même que $\bar{\sigma}_{\alpha 3} = 0$. On peut donc dire que $Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon$ tend vers $Q^0 \bar{\sigma}$ dans S faiblement.

En restreignant (4.12) à $v \in V_{KL}$ et en passant à la limite faible on obtient :

$$\forall v \in V_{KL}, \quad \langle \bar{\sigma}, \gamma(v) \rangle = L(v). \quad (11.3)$$

En prenant $v = u^\varepsilon$ dans (4.12) et en remplaçant dans (11.2), il vient

$$\forall \tau \in S, \quad \langle \gamma(u^\varepsilon), \tau \rangle - L(u^\varepsilon) \leq \Phi_q(Q^\varepsilon \tau) - \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon),$$

et par passage à la limite faible :

$$\forall \tau \in S, \quad \langle \gamma(\bar{u}), \tau \rangle - L(\bar{u}) \leq \Phi_q(Q^0 \tau) - \lim \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon).$$

En prenant $v = \bar{u}$ dans (11.3) et comme Φ_q est faiblement semi-continue inférieurement on obtient :

$$\forall \tau \in S, \quad \langle \gamma(\bar{u}), \tau - \bar{\sigma} \rangle \leq \Phi_q(Q^0 \tau) - \Phi_q(Q^0 \bar{\sigma}).$$

Le couple $(Q^0 \bar{\sigma}, \bar{u}) \in S_{KL} \times V_{KL}$ est donc solution du problème (6.6)-(6.7) qui admet une solution unique. Donc

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u^0, \\ Q^0 \bar{\sigma} &= Q^0 \sigma^0. \end{aligned}$$

3^e Étape : convergence forte.

D'après (i) et (4.13) nous pouvons écrire :

$$\forall \tau \in S, \quad \langle \gamma(u^\varepsilon), \tau \rangle = \langle \partial \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon), Q^\varepsilon \tau \rangle \quad (11.4)$$

et avec (6.7)

$$\forall \tau \in S, \quad \langle \gamma(u^0), \tau \rangle = \langle \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0), Q^0 \tau \rangle. \quad (11.5)$$

D'après (ii) et puisque $|Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon|_S$ est bornée il existe une constante $C > 0$ telle que $C |Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon - Q^0 \sigma^0|_S^2 \leq \langle \partial \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon) - \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0), Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon - Q^0 \sigma^0 \rangle$.

En utilisant (11.4), (11.5), (4.12) et (6.6), on obtient

$$\begin{aligned} C |Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon - Q^0 \sigma^0|_S^2 &\leq \langle \gamma(u^\varepsilon), \sigma^\varepsilon \rangle + \langle \gamma(u^0), \sigma^0 \rangle - \langle \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0), Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon \rangle - \\ &\quad - \langle \partial \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon), Q^0 \sigma^0 \rangle \leq L(u^\varepsilon) + L(u^0) - \langle \gamma(u^\varepsilon), Q^0 \sigma^0 \rangle \\ &\quad - \langle \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0), Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon \rangle. \end{aligned}$$

Quand ε tend vers zéro on obtient :

$$C \lim | Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon - Q^0 \sigma^0 |_S^q \leq L(u^0) + L(u^0) - L(u^0) - L(u^0),$$

d'où l'on en déduit que $Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon$ tend vers $Q^0 \sigma^0$ dans S .

Pour la convergence des vitesses, on écrit tout d'abord, d'après l'inégalité de Korn :

$$C \| v \|_V \leq | \gamma(v) |_D \leq \sup_{\tau \in S - \{0\}} \frac{ \langle \gamma(v), \tau \rangle }{ | \tau |_S } \tag{11.6}$$

(pour la dernière inégalité prendre par exemple $\tau = | \gamma(v) |^{p-2} \gamma(v)$).

Par différence entre (11.4) et (11.5) on obtient :

$$\begin{aligned} \forall \tau \in S, \quad \langle \gamma(u^\varepsilon - u^0), \tau \rangle &= \langle \partial \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon) - \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0), Q^\varepsilon \tau \rangle - \\ &\quad - \langle \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0), (Q^\varepsilon - Q^0) \tau \rangle \leq \\ &\leq | \partial \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon) - \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0) |_D | Q^\varepsilon \tau |_S + C | (Q^\varepsilon - Q^0) \tau |_S. \end{aligned}$$

Pour ε assez petit, on en déduit,

$$\forall \tau \in S, \quad \langle \gamma(u^\varepsilon - u^0), \tau \rangle \leq | \partial \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon) - \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0) |_D | \tau |_S + C\varepsilon | \tau |_S.$$

Avec (11.6) on obtient :

$$| u^\varepsilon - u^0 |_V \leq | \partial \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon) - \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0) |_D + C\varepsilon.$$

Or d'après l'hypothèse (i) :

$$| \partial \Phi_q(Q^\varepsilon \sigma^\varepsilon) - \partial \Phi_q(Q^0 \sigma^0) |_D \rightarrow 0$$

et donc lorsque ε tend vers zéro, u^ε converge vers u^0 dans l'espace V .

Remarque 11.1 : Les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées dans le cas de l'exemple $C = \{ \tau \in S_3, | \tau | \leq 1 \}$ du paragraphe 7.

En effet, la propriété (i) est évidente puisque

$$\Phi_q(\tau) = \frac{1}{q} \int_{\Omega} | \tau |^q dx.$$

Pour démontrer (ii), on utilise le résultat suivant (démontré dans [10] pour $N = 2$ et facilement étendu à la dimension N).

— si $1 < p \leq 2, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^N$

$$(| x | + | y |)^{2-p} (| x |^{p-2} x - | y |^{p-2} y, x - y)_{\mathbb{R}^N} \geq \alpha | x - y |^2$$

— si $p \geq 2, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^N$

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y)_{\mathbb{R}^N} \geq \alpha |x - y|^p$$

où $|x| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{1/2}$.

12. RETOUR A L'OUVERT Ω^ε POUR LE TERME $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$

Nous avons montré à la section précédente que le terme $(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ approche le terme (u^0, σ^0) lorsque ε devient petit. Afin de rendre au couple (u^0, σ^0) sa signification physique, il convient de faire la transformation définie à la section 4.

A partir de (u^0, σ^0) solution du problème limite \mathcal{P}^0 nous définissons $(U^0, \Sigma^0) \in V^\varepsilon \times S^\varepsilon$ par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \Sigma_{\alpha\beta}^0(x^\varepsilon) = \sigma_{\alpha\beta}^0(x), \Sigma_{\alpha 3}^0(x^\varepsilon) = \varepsilon \sigma_{\alpha 3}^0(x), \Sigma_{33}^0(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 \sigma_{33}^0(x), \\ U_\alpha^0(x^\varepsilon) = u_\alpha^0(x), U_3^0(x^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} u_3^0(x), \end{cases}$$

où $x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3)$ pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

D'après la relation (6.1) nous avons :

$$\gamma_{i3}(U^0) = 0, \quad 1 \leq i \leq 3. \tag{12.1}$$

et donc

$$U^0 \in V_{KL}^\varepsilon \tag{12.2}$$

où l'espace V_{KL}^ε est défini comme l'espace V_{KL} , par :

$$V_{KL}^\varepsilon = \{ v = (v_\alpha - x_3^\varepsilon \partial_\alpha v_3, v_3); |x_3^\varepsilon| < \varepsilon, (v_\alpha) \in V_1^2 \text{ et } v_3 \in V_3 \}.$$

D'après le théorème 6.1, le couple (U^0, Σ^0) vérifie donc les relations :

$$\forall v \in V_{KL}^\varepsilon, \int_{\Omega^\varepsilon} \Sigma_{\alpha\beta}^0 \gamma_{\alpha\beta}(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} h_\alpha^\varepsilon v_\alpha + \int_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon} g_i^\varepsilon v_i. \tag{12.3}$$

$$\gamma(U^0) \in \partial \mathcal{F}_q^0(Q^0, \Sigma^0) \tag{12.4}$$

avec, pour $\tau = (\tau_{\alpha\beta}) \in (L^q(\Omega^\varepsilon))_s^4$,

$$\mathcal{F}_q^0(\tau) = \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega^\varepsilon} |g^0(x^\varepsilon, \tau(x^\varepsilon))|^q;$$

Les composantes Σ_{i3}^0 sont données par les formules :

$$\Sigma_{\alpha 3}^0 = - \int_{-\varepsilon}^{x_3^\varepsilon} (\partial_\beta \Sigma_{\alpha\beta}^0 + f_\alpha^\varepsilon) dt - g_\alpha^{\varepsilon-}, \tag{12.5}$$

$$\Sigma_{33}^0 = \int_{-\varepsilon}^{x_3^\varepsilon} (\partial_\alpha \Sigma_{\alpha 3}^0 + f_3^\varepsilon) dt - g_3^{\varepsilon-}. \tag{12.6}$$

* En ce qui concerne le modèle de membrane (voir section 9), les hypothèses sur les forces appliquées s'écrivent dans ω :

$$\int_{-\varepsilon}^\varepsilon f_3^\varepsilon dx_3^\varepsilon + g_3^{\varepsilon+} + g_3^{\varepsilon-} + \int_{-\varepsilon}^\varepsilon x_3^\varepsilon \partial_\alpha f_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon + \varepsilon \partial_\alpha (g_\alpha^{\varepsilon-} - g_\alpha^{\varepsilon+}) = 0.$$

Remarquons alors que d'après la proposition 9.1, on a $n_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \Sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3^\varepsilon$ et l'équation d'équilibre (9.2) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{v}_\alpha) \in V_t^2, \quad \varepsilon \int_\omega n_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta &= \\ &= \int_\omega \left\{ \int_{-\varepsilon}^\varepsilon f_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon + g_\alpha^{\varepsilon-} + g_\alpha^{\varepsilon+} \right\} v_\alpha + \int_{\gamma_1} \left\{ \int_{-\varepsilon}^\varepsilon h_\alpha \right\} v_\alpha. \end{aligned}$$

La loi de comportement (9.3) s'écrit :

$$\gamma(\underline{U}^0) \in \partial G_q^0(n).$$

* Enfin pour le modèle en flexion (voir section 10) les hypothèses sur les forces appliquées s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\varepsilon}^\varepsilon f_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon + g_\alpha^{\varepsilon-} + g_\alpha^{\varepsilon+} = 0, \text{ dans } \omega, \\ \int_{-\varepsilon}^\varepsilon h_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon = 0 \text{ sur } \gamma_1. \end{array} \right.$$

Remarquons que d'après la proposition 10 on a :

$$n_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \Sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3^\varepsilon \quad \text{et} \quad m_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\varepsilon}^\varepsilon x_3^\varepsilon \Sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3^\varepsilon$$

donc l'équation d'équilibre (10.3) s'écrit :

$$v_3 \in V_3, \quad \varepsilon^2 \int_{\omega} m \cdot \partial^2 v_3 = - \int_{\omega} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3^e f_{\alpha}^e dx_3^e + \varepsilon (g_{\alpha}^{e+} - g_{\alpha}^{e-}) \right\} \partial_{\alpha} v_3 + \\ + \int_{\omega} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3^e dx_3^e + g_3^{e+} + g_3^{e-} \right\} v_3 .$$

La loi de comportement (10.4) s'écrit :

$$\varepsilon \partial^2 U_3^0 \in \partial H_q^0(m) .$$

BIBLIOGRAPHIE

- 1] D BLANCHARD, *Justification de modeles de plaques correspondant à différentes conditions aux limites*, Thèse de 3^e cycle, Université P et M Curie, Paris (1981)
- 2] P G CIARLET, *A justification of the von Karman Equations*, Arch Rational Mech Anal 73 (1980) 349-389
- 3] P G CIARLET et P DESTUYNDER, *A justification of the two-dimensional linear plate model*, J de Mécanique 18 (1979), 315-344
- 4] P G CIARLET et P DESTUYNDER *A justification of a nonlinear model in plate theory*, Comput Methods Appl Mech Engrg 17 18 (1979), 227-258
- 5] P G CIARLET et S KESAVAN, *Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory*, Comput Methods Appl Mech Engrg 26 (1981), 145-172
- 6] P DESTUYNDER, *Sur une justification des modeles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse, Université P et M Curie, Paris (1980)
- 7] I EKELAND et R TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1974)
- 8] A FRIAA, *La loi de Norton Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité*, Thèse, Université P et M Curie, Paris (1979)
- 9] G GEYMONAT, P SUQUET, *Sur certains espaces fonctionnels rencontrés en mécanique* (à paraître)
- 10] GLOWINSKI-MARROCCO, *Sur l'approximation par élément fini d'ordre un, et la résolution par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaire*, Rapport de Recherche, n° 115 de l'IRIA, avril 1975
- 11] J L LIONS, *Perturbations singulieres dans les problèmes aux limites en contrôle optimal*, Lect Notes in Math 323 Springer Verlag, Berlin (1973)
- 12] B NAYROLLES, *Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites*, J de Mécanique 9, n° 3 (1970)
- 13] J C PAUMIER, *A justification of the Marguerre-von Kármán equations* (à paraître)