RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

A. BERMUDEZ
J. M. VIAÑO

Une justification des équations de la thermoélasticité des poutres à section variable par des méthodes asymptotiques

RAIRO. Analyse numérique, tome 18, nº 4 (1984), p. 347-376
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1984__18_4_347_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol 18, n° 4, 1984, p 347 à 376)

UNE JUSTIFICATION DES ÉQUATIONS DE LA THERMOÉLASTICITÉ DES POUTRES A SECTION VARIABLE PAR DES MÉTHODES ASYMPTOTIQUES (*)

par A. BERMUDEZ [1] et J. M. VIAÑO [1]

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé — *Dans cet article on obtient les équations classiques de la theorie linéaire des poutres à section variable, en appliquant la methode des développements asymptotiques a une formulation variationnelle mixte du modèle tridimensionnel de la thermoélasticité linéaire. Cette méthode, analogue à celle developpée par Ciarlet et Destuynder pour obtenir les équations des plaques, ne nécessite aucune hypothèse* a priori *sur la forme des inconnues (déplacements et contraintes), ni sur les forces appliquees. On fait aussi une étude de la convergence « quand la section de la poutre tend vers zéro », qui permet de justifier les modèles usuels.*

Abstract — *In this paper we obtain the classical equations of the linear beam theory by applying the asymptotic expansion method to a mixed variational formulation of the three-dimensional linear thermoelasticity model. This method, similar to that developed by Ciarlet and Destuynder to obtain plate and shell models, does not require any* a priori *assumption either on the form of the unknowns (displacements and stresses) or on the applied forces. Convergence « as the section of the beam goes to zero », is also studied, which gives a justification of the usual one-dimensional models.*

0. INTRODUCTION

Dans ce travail nous considérons des poutres de section variable et petite, plus précisément, des solides occupant un volume de la forme

$$\Omega^{\varepsilon} = \{ (X_1, X_2, X_3) : X_3 = x_3, X_\alpha = \varepsilon x_\alpha h_\alpha(x_3),\\ \alpha = 1, 2, (x_1, x_2) \in \omega, x_3 \in (0, L) \} \qquad (0.1)$$

où L est la longueur de la poutre, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de mesure 1 et h_α ($\alpha = 1, 2$), des fonctions de $(0, L)$ dans $\mathbb{R}^+$.

(*) Reçu en septembre 1983

[1] Departamento de Ecuaciones Funcionales. Facultad de Matemáticas. Universidad de Santiago de Compostela. Espagne

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis, 0399-0516/84/04/347/30/$ 5.00

La caractéristique essentielle de la poutre est que ε est très petit par rapport à L. Ceci permet d'approcher les équations de la thermoélasticité tridimensionnelle en Ω^{ε} par un modèle monodimensionnel.

Ainsi, il est bien connu que le déplacement dans la direction de l'axe X_{α} peut être approché par la solution d'une équation différentielle du quatrième ordre, posée sur $[0, L]$ — (voir par ex. Landau-Lifchitz [6] pour le cas purement élastique).

En général, pour obtenir cette équation il faut faire des hypothèses *a priori* sur les déplacements et le tenseur des contraintes. Une autre méthode consiste à considérer un développement asymptotique formel de la solution tridimensionnelle et ensuite caractériser les termes successifs. Ceci est fait dans Rigolot [9] en partant des équations aux dérivées partielles, mais on a encore besoin de certaines hypothèses *a priori*; en particulier la charge volumique doit être nulle. D'autre part, on rencontre des difficultés au niveau des conditions aux limites pour les termes du développement. Enfin, la méthode s'adapte mal à l'étude de la convergence.

Dans ce travail nous utilisons la méthode des développements asymptotiques *mais en partant d'une formulation variationnelle des équations de la thermoélasticité linéaire.* On suit les idées développées dans Ciarlet-Destuynder [2] pour obtenir les équations des plaques à section constante. La méthode a été utilisée pour les plaques à épaisseur variable dans Viaño [10]. On peut voir aussi Destuynder [4].

C'est ainsi que nous trouvons les équations classiques des poutres et les expressions des moments fléchissants et des efforts tranchants et, en plus, les hypothèses *a priori* dont on a besoin dans la méthode classique.

D'autre part, nous démontrons la convergence du modèle approché au modèle tridimensionnel quand la section de la poutre tend vers zéro. Pour ceci nous suivons la méthode développée dans Ciarlet-Kesavan [3] et Destuynder [4].

1. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

On a utilisé la convention des indices répétés. Les indices latins $i, j, k, p, \ldots$ décrivent l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, alors que les grecs $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \ldots$ parcourent toujours l'ensemble $\{1, 2\}$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Rappelons les normes usuelles dans les espaces $L^2(U)$ et $H^1(U)$:

$$| v |_{0,U} = \left[\int_U | v |^2 \, dx \right]^{1/2},$$

$$\| v \|_{1,U} = \left[| v |_{0,U}^2 + \sum_{i=1}^{n} | \partial_i v |_{0,U}^2 \right]^{1/2} .$$

Enfin, on utilisera les espaces de tenseurs symétriques suivants :

$$[L^2(U)]_S^4 = \{ \tau = (\tau_{\alpha\beta}) \in [L^2(U)]^4 : \tau_{12} = \tau_{21} \}, \qquad U \subset \mathbb{R}^2 ,$$

$$[L^2(U)]_S^9 = \{ \tau = (\tau_{ij}) \in [L^2(U)]^9 : \tau_{ij} = \tau_{ji} \}, \qquad U \subset \mathbb{R}^3 .$$

Nous rappelons ensuite quelques notions concernant le tenseur d'inertie (voir par ex. Landau-Lifchitz [6]).

On considère dans $\mathbb{R}^3$ un système d'axes X_i orthonormé direct, l'origine étant 0. Pour un solide occupant un volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec densité $\rho(X_1, X_2, X_3)$ au point (X_1, X_2, X_3), le tenseur d'inertie $\mathbb{I}$ est défini par :

$$\mathbb{I} = (I_{ij}) = \int_{\Omega} \rho(X_1, X_2, X_3) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} X_2^2 + X_3^2 & -X_1 X_2 & -X_1 X_3 \\ -X_2 X_1 & X_1^2 + X_3^2 & -X_2 X_3 \\ -X_3 X_1 & -X_3 X_2 & X_1^2 + X_2^2 \end{vmatrix} dX_1 \, dX_2 \, dX_3 .$$

Les composantes I_{ii} sont les moments d'inertie par rapport aux axes X_i. Les autres composantes sont appelées produits d'inertie. Un système orthonormé X_i est dit principal d'inertie pour Ω si le tenseur d'inertie correspondant est diagonal. $\mathbb{I}$ étant un tenseur symétrique on déduit que pour tout corps Ω il existe un système principal d'inertie orthonormé.

Nous revenons à la poutre considérée à l'Introduction, que nous allons supposer homogène, de densité constante, et isotrope. Nous supposons aussi que les axes de coordonnées X_i apparaissant dans la définition de Ω^ε sont principaux d'inertie pour la poutre. Un tel système peut être trouvé pour une poutre du type (0.1).

Puisqu'on a :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} X_1 X_2 \, dX_1 \, dX_2 \, dX_3 = \varepsilon^4 \left[\int_0^L h_1^2(x_3) \, h_2^2(x_3) \, dx_3 \right] \cdot \left[\int_{\omega} x_1 \, x_2 \, dx_1 \, dx_2 \right], \tag{1.1}$$

et

$$\int_{\Omega^\varepsilon} X_\alpha X_3 \, dX_1 \, dX_2 \, dX_3 = \varepsilon^3 \left[\int_0^L x_3 \, h_1(x_3) \, h_2(x_3) \, h_\alpha(x_3) \, dx_3 \right] \times$$

$$\times \left[\int_{\omega} x_\alpha \, dx_1 \, dx_2 \right], \tag{1.2}$$

et les fonctions h_α sont strictement positives, cette hypothèse équivaut à

$$\int_\omega x_1\, x_2\, dx_1\, dx_2 = 0\,, \qquad \int_\omega x_\alpha\, dx_1\, dx_2 = 0\,. \tag{1.3}$$

On va noter dans la suite par $\omega^\varepsilon(x_3)$ la section de la poutre à la distance x_3 de l'origine, c'est-à-dire :

$$\omega^\varepsilon(x_3) = \{\, (\varepsilon x_1\, h_1(x_3), \varepsilon x_2\, h_2(x_3)) : (x_1, x_2) \in \omega \,\}\,. \tag{1.4}$$

Alors, la première égalité de (1.3) montre que les axes x_α sont principaux d'inertie pour ω et donc les X_α sont aussi principaux d'inertie pour chaque section $\omega^\varepsilon(x_3)$ de la poutre. La seconde entraîne que l'axe X_3 passe par les centres de masse de chaque section.

On introduit la notation $I_\alpha^\varepsilon(x_3)$ pour le moment d'inertie de la section $\omega^\varepsilon(x_3)$ par rapport à l'axe x_β ($\beta \neq \alpha$), c'est-à-dire :

$$I_\alpha^\varepsilon(x_3) = \int_{\omega^\varepsilon(x_3)} x_\alpha^2\, dx_1\, dx_2\,, \tag{1.5}$$

et, enfin, on utilise les notations :

$$\gamma^\varepsilon(x_3) = \partial\omega^\varepsilon(x_3)\,, \qquad \Gamma_1^\varepsilon = \bigcup_{x_3 \in (0,L)} \gamma^\varepsilon(x_3) \times \{\, x_3 \,\}\,,$$

$$\Gamma_0^\varepsilon = \omega^\varepsilon(0) \times \{\, 0 \,\} \cup \omega^\varepsilon(L) \times \{\, L \,\}\,.$$

2. LE PROBLÈME DE THERMOÉLASTICITÉ TRIDIMENSIONNELLE SUR LA POUTRE Ω^ε

Il s'agit de trouver le vecteur de déplacements $u = (u_i)$ et le tenseur de contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ du corps tridimensionnel, occupant l'ensemble $\overline{\Omega}^\varepsilon$ en l'absence de forces extérieures et à une température uniforme de référence $T_0 > 0$. On va supposer la poutre encastrée aux extrémités, c'est-à-dire les déplacements nuls sur Γ_0^ε. D'autres conditions aux limites pourraient être envisagées.

On note par $f = (f_i)$ et $g = (g_i)$ les forces volumiques et surfaciques agissant sur la poutre. On suppose un champ de températures T donné et on définit $\theta = T - T_0$.

En notant par $n = (n_i)$ le vecteur unitaire normal à Γ_1^ε dirigé vers l'extérieur de Ω^ε, le problème à résoudre est le suivant (voir Duvaut-Lions [5]).

$$\left.\begin{aligned} - \partial_j \sigma_{ij} &= f_i \quad \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon, \\ \sigma_{ij} n_j &= g_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\varepsilon, \quad (1 \leqslant i \leqslant 3) \\ u_i &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

où σ_{ij} est donné par la loi de comportement thermoélastique linéaire suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{ij}(u) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \gamma_{kk}(u)\, \delta_{ij} - \frac{E\alpha_T}{(1-2\nu)} \theta\, \delta_{ij}, \tag{2.2}$$

avec

$$\gamma_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i). \tag{2.3}$$

Comme d'habitude E représente le module de Young, ν le coefficient de Poisson et α_T le coefficient de dilatation thermique.

Nous allons rappeler la formulation variationnelle mixte de Hellinger-Reissner pour le problème (2.1)-(2.3). On commence par introduire les espaces fonctionnels suivants :

$$\left.\begin{aligned} V^\varepsilon &= \{ v = (v_i) \in [H^1(\Omega^\varepsilon)]^3 : v_i = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon \} \\ \Sigma^\varepsilon &= [L^2(\Omega^\varepsilon)]_S^9 \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

munis des normes

$$\left.\begin{aligned} \| v \|_{1,\Omega^\varepsilon} &= \left[\sum_{i=1}^3 \| v_i \|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 \right]^{1/2}, \; v \in V^\varepsilon \\ | \tau |_{0,\Omega^\varepsilon} &= \left[\sum_{i,j=1}^3 | \tau_{ij} |_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \right]^{1/2}, \quad \tau \in \Sigma^\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

On considère aussi l'automorphisme dans l'espace des matrices 3×3 symétriques suivant :

$$Y_{ij} = (AX)_{ij} = \frac{1+\nu}{E} X_{ij} - \frac{\nu}{E} X_{pp}\, \delta_{ij}, \tag{2.6}$$

l'inverse étant donné par

$$X_{ij} = (A^{-1} Y)_{ij} = \frac{E}{1+\nu} Y_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} Y_{pp}\, \delta_{ij}. \tag{2.7}$$

On peut démontrer que le problème (2.1)-(2.3) équivaut, au sens faible, au suivant :

Trouver $(\sigma, u) \in \Sigma^{\varepsilon} \times V^{\varepsilon}$ vérifiant :

$$\forall \tau \in \Sigma^{\varepsilon} : \int_{\Omega^{\varepsilon}} (A\sigma)_{ij}\, \tau_{ij} - \int_{\Omega^{\varepsilon}} \gamma_{ij}(u)\, \tau_{ij} = -\, \alpha_T \int_{\Omega^{\varepsilon}} \theta \tau_{ij}\, \delta_{ij}, \tag{2.8}$$

$$\forall v \in V^{\varepsilon} : \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma_{ij}\, \gamma_{ij}(v) = \int_{\Omega^{\varepsilon}} f_i\, v_i + \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} g_i\, v_i\,. \tag{2.9}$$

En supposant

$$f_i \in L^2(\Omega^{\varepsilon}), \quad g_i \in L^2(\Gamma_1^{\varepsilon}), \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad \theta \in L^2(\Omega^{\varepsilon}) \tag{2.10}$$

on peut démontrer que le problème (2.8)-(2.9) admet une solution unique, comme application d'un résultat de Brezzi [1], sur les formulations mixtes. Ceci nécessite la vérification de l'inégalité suivante :

$$\sup_{\tau \in \Sigma^{\varepsilon}} \frac{- \int_{\Omega^{\varepsilon}} \gamma_{ij}(v)\, \tau_{ij}}{|\tau|_{0,\Omega^{\varepsilon}}} \geqslant b \, \| v \|_{1,\Omega^{\varepsilon}}, \quad b > 0\,, \tag{2.11}$$

qui peut être obtenue à l'aide de l'inégalité de Korn (cf. Duvaut-Lions [5]).

3 CHANGEMENT DE L'OUVERT DE RÉFÉRENCE

Il est évident que la dépendance de la solution (σ, u) de (2.8)-(2.9) vis-à-vis de ε, paramètre lié à la taille des sections de la poutre, est d'un caractère complexe. Pour étudier le comportement quand ε devient petit, nous utilisons une technique de changement de variable, analogue à celle employée dans Ciarlet-Destuynder [2] pour le cas de plaques, qui fait apparaître le paramètre ε dans les équations, tout en se ramenant à un domaine indépendant de ε.

On va poser

$$\Omega = \omega \times (0, L)\,, \tag{3.1}$$

$$\Gamma_0 = \omega \times \{0, L\}, \quad \gamma = \partial\omega, \quad \Gamma_1 = \gamma \times (0, L)\,. \tag{3.2}$$

Les moments d'inertie de ω seront notés par

$$I_\alpha = \int_{\omega} x_\alpha^2 \, dx_1\, dx_2\,. \tag{3.3}$$

On trouve alors la relation

$$I_\alpha^\varepsilon(x_3) = \varepsilon^4 h_1(x_3)\, h_2(x_3)\, h_\alpha^2(x_3)\, I_\alpha . \tag{3.4}$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ on définit l'application

$$H^\varepsilon : (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega} \to H^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = (\varepsilon x_1\, h_1(x_3), \varepsilon x_2\, h_2(x_3), x_3) \in \bar{\Omega}^\varepsilon \tag{3.5}$$

et pour une fonction quelconque $\phi : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \mathbb{R}$ on va noter $\phi^\varepsilon = \phi \circ H^\varepsilon$.

Dans toute la suite nous allons supposer que les fonctions h_α vérifient :

$$h_\alpha \in W^{2,\infty}(0, L) \quad \text{et} \quad h_\alpha(x_3) > p > 0\,, \quad x_3 \in [0, L]\,. \tag{3.6}$$

Le résultat ci-après, de vérification immédiate, sera fondamental dans la suite.

LEMME 3.1 : *Si ϕ est suffisamment régulière on a* :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \phi = \varepsilon^2 \int_\Omega h_1\, h_2\, \phi^\varepsilon\,, \quad \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \phi = \varepsilon \int_{\Gamma_1} h^*\, \phi^\varepsilon\,, \tag{3.7}$$

$$(\partial_\alpha \phi)^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\, h_\alpha^{-1}\, \partial_\alpha \phi^\varepsilon\,, \quad (\partial_3 \phi)^\varepsilon = \partial_3 \phi^\varepsilon - x_\alpha\, h_\alpha^{-1}\, h'_\alpha\, \partial_\alpha \phi^\varepsilon\,, \tag{3.8}$$

où

$$h^* = [n_1^2\, h_2^2 + n_2^2\, h_1^2 + \varepsilon^2 (n_1^2\, x_1^2\, h_2^2\, h_1'^2 + n_2^2\, x_2^2\, h_1^2\, h_2'^2 + \\ + 2\, n_1\, n_2\, x_1\, x_2\, h_1\, h_2\, h'_1\, h'_2)]^{1/2}\,. \tag{3.9}$$

On introduit les espaces fonctionnels :

$$\left.\begin{aligned} V &= \{\, v = (v_i) \in [H^1(\Omega)]^3 : v_i = 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma_0 \,\} \\ \Sigma &= [L^2(\Omega)]_S^9 \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

munis des normes naturelles respectives.

Les transformations définies ci-dessous seront utilisées dans la suite :

$$\left.\begin{aligned} &v \in V^\varepsilon \to \tilde{v}^\varepsilon = (\varepsilon v_1^\varepsilon, \varepsilon v_2^\varepsilon, v_3^\varepsilon) \in V\,, \\ &\tau \in \Sigma^\varepsilon \to \tilde{\tau}^\varepsilon = (\varepsilon^{-2}\, \tau_{\alpha\beta}^\varepsilon, \varepsilon^{-1}\, \tau_{3\beta}^\varepsilon, \tau_{33}^\varepsilon) \in \Sigma\,, \\ &f \in [L^2(\Omega^\varepsilon)]^3 \to \tilde{f}^\varepsilon = (\varepsilon^{-1} f_1^\varepsilon, \varepsilon^{-1} f_2^\varepsilon, f_3^\varepsilon) \in [L^2(\Omega)]^3\,, \\ &g \in [L^2(\Gamma_1^\varepsilon)]^3 \to \tilde{g}^\varepsilon = (\varepsilon^{-2}\, g_1^\varepsilon, \varepsilon^{-2}\, g_2^\varepsilon, \varepsilon^{-1}\, g_3^\varepsilon) \in [L^2(\Gamma_1)]^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Enfin, il sera commode de noter par A^0 l'application transformant les tenseurs d'ordre 2 de la façon suivante

$$Y_{\alpha\beta} = (A^0\, X)_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\, X_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\, X_{\mu\mu}\, \delta_{\alpha\beta} \tag{3.12}$$

dont l'inverse est défini par

$$X_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\, Y_{\alpha\beta} + \frac{E\nu}{1-\nu^2}\, Y_{\mu\mu}\, \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{3.13}$$

A l'aide du lemme 3.1 *on démontre avec des calculs simples le résultat suivant.*

THÉORÈME 3.1 : *Soit* $(\tilde\sigma^\varepsilon, \tilde u^\varepsilon) \in \Sigma \times V$ *l'élément construit à partir de la solution* (σ, u) *de* (2.8)-(2.9) *à l'aide des transformations* (3.11). *Alors* $(\tilde\sigma^\varepsilon, \tilde u^\varepsilon)$ *est la solution unique du problème :*

Trouver $(\tilde\sigma^\varepsilon, \tilde u^\varepsilon) \in \Sigma \times V$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\forall \tau \in \Sigma : a_0(\tilde\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^2\, a_2(\tilde\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^4\, a_4(\tilde\sigma^\varepsilon, \tau) + b(\tau, \tilde u^\varepsilon) = G_0^\varepsilon(\tau) + \varepsilon^2\, G_2^\varepsilon(\tau)\,, \\ &\forall v \in V : b(\tilde\sigma^\varepsilon, v) = F_0^\varepsilon(v)\,, \end{aligned} \tag{3.14}$$

où a_0, a_2, a_4, b, G_0^ε, G_2^ε, F_0^ε *sont définis par :*

$$\left.\begin{aligned} a_0(\sigma, \tau) &= \frac{1}{E}\int_\Omega h_1\, h_2\, \sigma_{33}\, \tau_{33}\,, \\ a_2(\sigma, \tau) &= \int_\Omega h_1\, h_2 \left[\frac{2(1+\nu)}{E}\, \sigma_{3\alpha}\, \tau_{3\alpha} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{33}\, \tau_{\mu\mu} + \sigma_{\mu\mu}\, \tau_{33})\right], \\ a_4(\sigma, \tau) &= \int_\Omega h_1\, h_2 (A^0\, \sigma)_{\alpha\beta}\, \tau_{\alpha\beta}\,, \\ b(\tau, v) &= -\int_\Omega h_1\, h_2 [(\tau_{3j} - x_\alpha\, h_\alpha^{-1}\, h'_\alpha\, \tau_{\alpha j})\, \partial_3 v_j + h_\alpha^{-1}\, \tau_{\alpha j}\, \partial_\alpha v_j]\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

$$\left.\begin{aligned} G_0^\varepsilon(\tau) &= -\,\alpha_T \int_\Omega h_1\, h_2\, \theta^\varepsilon\, \tau_{33}\,, \\ G_2(\tau) &= -\,\alpha_T \int_\Omega h_1\, h_2\, \theta^\varepsilon\, \tau_{\alpha\beta}\, \delta_{\alpha\beta}\,, \\ F_0^\varepsilon(v) &= -\int_\Omega h_1\, h_2\, \tilde f_i^\varepsilon\, v_i - \int_{\Gamma_1} h^*\, \tilde g_i^\varepsilon\, v_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Remarque 3.1 : Notons que la forme bilinéaire b peut s'écrire sous la forme plus compacte :

$$b(\tau, v) = -\int_\Omega h_1 h_2 \tau_{ij} \gamma_{ij}^*(v), \tag{3.17}$$

avec $\gamma_{ij}^*(v)$ défini comme suit :

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\beta}^*(v) &= \frac{1}{2}[h_\alpha^{-1} \partial_\alpha v_\beta + h_\beta^{-1} \partial_\beta v_\alpha], \\
\gamma_{\alpha 3}^*(v) = \gamma_{3\alpha}^*(v) &= \frac{1}{2}[h_\alpha^{-1} \partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha - x_\beta h_\beta^{-1} h'_\beta \partial_\beta v_\alpha], \\
\gamma_{33}^*(v) &= [\partial_3 v_3 - x_\alpha h_\alpha^{-1} h'_\alpha \partial_\alpha v_3].
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Nous finissons ce paragraphe avec un lemme qui sera utilisé plus tard.

LEMME 3.2 : *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\sup_{\tau \in \Sigma} \frac{|b(\tau, v)|}{|\tau|_{0,\Omega}} \geqslant c \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in V. \tag{3.19}$$

Démonstration : Pour $v \in V$ arbitraire soit τ^* l'élément de Σ défini par

$$\tau^* = A^{-1} \gamma^*(v).$$

Alors on a :

$$\frac{b(\tau^*, v)}{|\tau^*|_{0,\Omega}} = \frac{-\int_\Omega h_1 h_2 [A^{-1} \gamma^*(v)]_{ij} \gamma_{ij}^*(v)}{|A^{-1} \gamma^*(v)|_{0,\Omega}} \geqslant c_0 |\gamma^*(v)|_{0,\Omega}.$$

Or, l'application $v \in V \to |\gamma^*(v)|_{0,\Omega}$ définit une norme dans $H^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|v\|_{1,\Omega}$. En effet, soit

$$\Omega^1 = \{(x_1 h_1(x_3), x_2 h_2(x_3)) : (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\}$$

et pour $v \in H^1(\Omega)$ considérons l'élément $w \in H^1(\Omega^1)$ défini par

$$w(x_1 h_1(x_3), x_2 h_2(x_3), x_3) = v(x_1, x_2, x_3).$$

Alors un calcul très simple montre l'égalité :

$$\gamma_{ij}^*(v)(x_1, x_2, x_3) = \gamma_{ij}(w)(x_1 h_1(x_3), x_2 h_2(x_3), x_3) = [\gamma_{ij}(w)]^1 (x_1, x_2, x_3),$$

ce qui entraîne

$$|\gamma^*(v)|_{0,\Omega} = |[\gamma(w)]^1|_{0,\Omega} \geqslant c_1 |\gamma(w)|_{0,\Omega^1}.$$

D'autre part on a (voir par exemple Duvaut-Lions [5]) :

$$|\gamma(w)|_{0,\Omega^1} \geqslant c_2 \| w \|_{1,\Omega^1}, \quad \forall w \in H^1(\Omega^1).$$

Par conséquent

$$|\gamma^*(v)|_{0,\Omega} \geqslant c_1 c_2 \| w \|_{1,\Omega^1} \geqslant c \| v \|_{1,\Omega},$$

ce qui achève la démonstration.

4. UN DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $(\tilde{\sigma}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$

Nous suivons une technique standard pour les problèmes posés sous forme variationnelle avec un « petit paramètre » (cf. Lions [8]). Nous allons supposer que $(\tilde{\sigma}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$ peut s'écrire sous la forme :

$$(\tilde{\sigma}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon) = (\sigma^0, u^0) + \varepsilon^2(\sigma^2, u^2) + \varepsilon^4(\sigma^4, u^4) + \cdots \tag{4.1}$$

et essayer de caractériser le premier terme (σ^0, u^0).

En reportant l'expression (4.1) dans (3.14) et en identifiant les termes de la même puissance en ε, on trouve que les termes successifs (σ^{2p}, u^{2p}), $p \geqslant 0$, vérifient les équations suivantes pour $\tau \in \Sigma$ et $v \in V$, arbitraires :

$$\left.\begin{aligned} a_0(\sigma^0, \tau) + b(\tau, u^0) &= G_0^\varepsilon(\tau), \\ b(\sigma^0, v) &= F_0^\varepsilon(v), \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} a^0(\sigma^2, \tau) + b(\tau, u^2) &= G_2^\varepsilon(\tau) - a_2(\sigma^0, \tau), \\ b(\sigma^2, v) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0(\sigma^{2p}, \tau) + b(\tau, u^{2p}) &= - a_2(\sigma^{2p-2}, \tau) - a_4(\sigma^{2p-4}, \tau) \\ b(\sigma^{2p}, v) &= 0, \quad p \geqslant 2 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

La forme a_0 n'étant pas coercitive sur Σ on ne dispose pas *a priori* d'un résultat d'existence pour le problème (4.2). C'est pourquoi nous allons démontrer dans la suite, d'une façon directe, que (4.2) admet une infinité de solutions, mais que, malgré cela, les déplacements u^0 et la composante σ_{33}^0 des contraintes ainsi que les moments fléchissants $m_\alpha^0 = \int_\omega x_\alpha \sigma_{33}^0$ et les efforts tranchants $q_\alpha^0 = \int_\omega \sigma_{3\alpha}^0$ sont univoquement déterminés.

Avant d'énoncer d'une façon précise ce résultat nous allons récrire le problème (4.2) sous une forme différente. Soit W l'espace

$$W = \{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \} \tag{4.5}$$

de façon que $V = W^3$. Alors il est facile de démontrer que (4.2) équivaut à l'ensemble d'équations suivant :

$$\forall \tau_{33} \in L^2(\Omega) : \frac{1}{E} \int_\Omega h_1 h_2 \sigma_{33}^0 \tau_{33} - \int_\Omega h_1 h_2 \tau_{33} [\partial_3 u_3^0 - x_\alpha h_\alpha^{-1} h'_\varepsilon \partial_\alpha u_3^0] =$$

$$= - \alpha_T \int_\Omega h_1 h_2 \theta^\varepsilon \tau_{33} , \tag{4.6}$$

$$\forall (\tau_{3\alpha}) \in [L^2(\Omega)]^2 : \int_\Omega h_1 h_2 \tau_{3\alpha} [h_\alpha^{-1} \partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 - x_\beta h_\beta^{-1} h'_\beta \partial_\beta u_\alpha^0] = 0 , \tag{4.7}$$

$$\forall (\tau_{\alpha\beta}) \in [L^2(\Omega)]_S^4 : \int_\Omega h_1 h_2 \tau_{\alpha\beta} [h_\alpha^{-1} \partial_\alpha u_\beta^0 + h_\beta^{-1} \partial_\beta u_\alpha^0] = 0 , \tag{4.8}$$

$$\forall v_3 \in W : \int_\Omega h_1 h_2 [\sigma_{33}^0 (\partial_3 v_3 - x_\alpha h_\alpha^{-1} h'_\alpha \partial_\alpha v_3) + \sigma_{3\alpha}^0 h_\alpha^{-1} \partial_\alpha v_3] =$$

$$= \int_\Omega h_1 h_2 \tilde{f}_3^\varepsilon v_3 + \int_{\Gamma_1} h^* \tilde{g}_3^\varepsilon v_3 , \tag{4.9}$$

$$\forall (v_\beta) \in W^2 : \int_\Omega h_1 h_2 [\sigma_{\alpha\beta}^0 h_\alpha^{-1} \partial_\alpha v_\beta + \sigma_{3\beta}^0 (\partial_3 v_\beta - x_\alpha h_\alpha^{-1} h'_\alpha \partial_\alpha v_\beta)] =$$

$$= \int_\Omega h_1 h_2 \tilde{f}_\beta^\varepsilon v_\beta + \int_{\Gamma_1} h^* \tilde{g}_\beta^\varepsilon v_\beta . \tag{4.10}$$

THÉORÈME 4.1 : *On suppose que les forces et la température appliquées sur la poutre vérifient* (2.10) *et de plus* :

$$\partial_3 f_3 \in L^2(\Omega^\varepsilon),\ \partial_3 g_3 \in L^2(\Gamma_1^\varepsilon),\ \partial_3 \theta \in L^2(\Omega^\varepsilon),\ \partial_{33} \theta \in L^2(\Omega^\varepsilon) . \tag{4.11}$$

Alors, il existe au moins une solution $(\sigma^0, u^0) \in \Sigma \times V$ *du problème* (4.6)-(4.10).

En plus on a les caractérisations suivantes :

i) *Le déplacement* u_β^0 *ne dépend pas de* x_1 *ni de* x_2 *et il peut être identifié avec la solution (unique) du problème :*

$$\left.\begin{aligned}
&u_\beta^0 \in H_0^2(0, L), \\
&EI_\beta \int_0^L h_1\, h_2\, h_\beta^2\, \partial_{33} u_\beta^0\, \partial_{33} v^0 = -\, E\alpha_T \int_0^L h_1\, h_2\, h_\beta \left[\int_\omega x_\beta\, \theta^\varepsilon \right] \partial_{33} v^0 \,+ \\
&\qquad + \int_0^L \left[h_1\, h_2 \int_\omega \tilde{f}_\beta^\varepsilon + \int_\gamma h^* \tilde{g}_\beta^\varepsilon \right] v^0 - \int_0^L h_\beta \left[h_1\, h_2 \int_\omega x_\beta \tilde{f}_3^\varepsilon \right. \\
&\qquad \left. + \int_\gamma h^*\, x_\beta\, \tilde{g}_3^\varepsilon \right] \partial_3 v^0 , \quad \forall v^0 \in H_0^2(0, L).
\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

ii) *Le déplacement* u_3^0 *est donné par*

$$u_3^0 = \underline{u}_3^0 - x_\alpha\, h_\alpha\, \partial_3 u_\alpha^0 , \tag{4.13}$$

où $\underline{u}_3^0$ *est la solution (unique) du problème de thermoélasticité monodimensionnelle suivant :*

$$\begin{aligned}
&\underline{u}_3^0 \in H_0^1(0, L) \\
&E \int_0^L h_1\, h_2\, \partial_3 \underline{u}_3^0\, \partial_3 v^0 = E\alpha_T \int_0^L h_1\, h_2 \left[\int_\omega \theta^\varepsilon \right] \partial_3 v^0 + \int_0^L \left[h_1\, h_2 \int_\omega \tilde{f}_3^\varepsilon \,+ \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_\gamma h^* \tilde{g}_3^\varepsilon \right] v^0 , \quad \forall v^0 \in H_0^1(0, L).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

iii) *La composante* σ_{33}^0 *est obtenue en fonction des déplacements par*

$$\sigma_{33}^0 = E[\partial_3 \underline{u}_3^0 - x_\alpha\, h_\alpha\, \partial_{33} u_\alpha^0 - \alpha_T\, \theta^\varepsilon] . \tag{4.15}$$

iv) *Les moments fléchissants sont univoquement déterminés par*

$$m_\alpha^0 = -\, EI_\alpha\, h_\alpha\, \partial_{33} u_\alpha^0 - E\alpha_T \int_\omega x_\alpha\, \theta^\varepsilon \ (\textit{pas de sommation en } \alpha) . \tag{4.16}$$

v) *Les efforts tranchants sont déterminés de façon unique par*

$$\begin{aligned}
q_\alpha^0 = h_1^{-1}\, h_2^{-1} \Big\{ &-\partial_3 \left[Eh_1\, h_2\, h_\alpha^2\, I_\alpha\, \partial_{33} u_\alpha^0 + E\alpha_T\, h_1\, h_2\, h_\alpha \int_\omega x_\alpha\, \theta^\varepsilon \right] + \\
&+ h_1\, h_2\, h_\alpha \left[\int_\omega x_\alpha \tilde{f}_3^\varepsilon \right] + h_\alpha \left[\int_\gamma h^*\, x_\alpha\, \tilde{g}_3^\varepsilon \right] \Big\} .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Démonstration : Afin que l'exposé soit le plus clair possible nous allons décomposer la preuve en plusieurs étapes.

Étape 1 : $u_\alpha^0 \in H_0^2(0, L)$ et u_3^0 est de la forme (4.13).

De l'équation (4.8) on déduit

$$h_\alpha^{-1}\, \partial_\alpha u_\beta^0 + h_\beta^{-1}\, \partial_\beta u_\alpha^0 = 0 \quad \text{(pas de sommation)}, \tag{4.18}$$

d'où

$$\partial_1 u_1^0 = 0, \quad \partial_2 u_2^0 = 0, \quad h_1^{-1}\, \partial_1 u_2^0 + h_2^{-1}\, \partial_2 u_1^0 = 0, \tag{4.19}$$

ce qui montre que u_α^0 ne dépend pas de x_α. De plus, en dérivant par rapport à x_1 et x_2 on obtient :

$$\partial_{11} u_2^0 = 0, \quad \partial_{22} u_1^0 = 0.$$

D'ici on déduit l'existence de fonctions z_α^0, $z_\alpha^1 \in H_0^1(0, L)$ telles que

$$u_1^0 = z_1^0 + x_2\, z_1^1,$$
$$u_2^0 = z_2^0 + x_1\, z_2^1.$$

Mais, d'après (4.19), ceci entraîne $h_2\, z_2^1 = -\, h_1\, z_1^1$ et, par conséquent, u_1^0 et u_2^0 sont de la forme :

$$u_1^0 = z_1^0 + x_2\, h_2\, z, \quad u_2^0 = z_2^0 - x_1\, h_1\, z,$$

avec z, $z_\alpha^0 \in H_0^1(0, L)$.

En utilisant maintenant (4.7) on déduit

$$h_\alpha^{-1}\, \partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 - x_\beta\, h_\beta^{-1}\, h_\beta'\, \partial_\beta u_\alpha^0 = 0 \quad \text{(pas de sommation en } \alpha), \tag{4.20}$$

En dérivant cette égalité on tire facilement

$$\left.\begin{aligned} \partial_{11} u_3^0 &= \partial_{22} u_3^0 = 0, \\ \partial_{12} u_3^0 &= -\, h_1\, h_2\, \partial_3 z, \quad \partial_{21} u_3^0 = h_1\, h_2\, \partial_3 z. \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Par conséquent

$$\partial_{\alpha\beta} u_3^0 = 0, \tag{4.22}$$

et $\partial_3 z = 0$ ce qui entraîne $z = 0$ puisque $z \in H_0^1(0, L)$. D'autre part, d'après (4.22) il existe $z^\alpha \in H_0^1(0, L)$ et $\underline{u}_3^0 \in H_0^1(0, L)$ tels que

$$u_3^0 = \underline{u}_3^0 + x_\alpha\, z^\alpha.$$

En revenant à (4.20) on déduit

$$\partial_3 u_\alpha^0 = -h_\alpha^{-1} z^\alpha \in H_0^1(0, L).$$

Par conséquent $u_\alpha^0 \in H_0^2(0, L)$ et

$$u_3^0 = \underline{u}_3^0 - x_\alpha h_\alpha \partial_3 u_\alpha^0. \tag{4.23}$$

Étape 2 : Calcul de σ_{33}^0 et m_α^0.

De l'équation (4.6) on déduit

$$\sigma_{33}^0 = E[\partial_3 u_3^0 - x_\alpha h_\alpha^{-1} h'_\alpha \partial_\alpha u_3^0 - \alpha_T \theta^\varepsilon], \tag{4.24}$$

ce qui avec (4.23) donne (4.15).

Pour obtenir l'expression du moment fléchissant (4.16) il suffit d'utiliser (4.15), la définition de I_α (cf. (3.3)) ainsi que (1.3).

Étape 3 : Calcul de $\underline{u}_3^0$.

Prenons dans l'équation (4.9) $v_3 \in W$ tel que $v_3 = v_3^0 \in H_0^1(0, L)$. Puisque $\partial_\alpha v_3 = 0$ on a :

$$\forall v_3^0 \in H_0^1(0, L) : \int_0^L h_1 h_2 \left[\int_\omega \sigma_{33}^0\right] \partial_3 v_3^0 = \int_0^L \left[h_1 h_2 \int_\omega \tilde{f}_3^\varepsilon + \int_\gamma h^* \tilde{g}_3^\varepsilon\right] v_3^0. \tag{4.25}$$

En utilisant l'expression (4.15) pour σ_{33}^0 on obtient

$$\int_\omega \sigma_{33}^0 = E\, \partial_3 \underline{u}_3^0 - E\alpha_T \int_\omega \theta^\varepsilon$$

parce que mes $(\omega) = 1$ et $h_\alpha \partial_{33} u_\alpha^0$ ne dépend que de x_3. En remplaçant cette égalité dans (4.5) on obtient (4.14).

Étape 4 : Calcul de u_α^0.

On prend dans (4.9) $v_3 = x_\alpha h_\alpha \partial_3 v_\alpha^0$, $v_\alpha^0 \in H_0^2(0, L)$. Alors on a $\partial_\alpha v_3 = h_\alpha \partial_3 v_\alpha^0$ (pas de sommation), $\partial_3 v_3 = x_\alpha h'_\alpha \partial_3 v_\alpha^0 + x_\alpha h_\alpha \partial_{33} v_\alpha^0$ et on obtient :

$$\int_0^L h_1 h_2 h_\alpha m_\alpha^0 \partial_{33} v_\alpha^0 + \int_0^L h_1 h_2 \left[\int_\omega \sigma_{3\alpha}^0\right] \partial_3 v_\alpha^0 = \int_0^L h_\alpha \left[h_1 h_2 \int_\omega x_\alpha \tilde{f}_3^\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \int_\gamma h^* x_\alpha \tilde{g}_3^\varepsilon\right] \partial_3 v_\alpha^0, \quad \forall v_\alpha^0 \in H_0^2(0, L). \tag{4.26}$$

D'autre part, on considère (4.10) en prenant $v_\alpha = v_\alpha^0 \in H_0^2(0, L)$. On tire l'égalité :

$$\int_0^L h_1 h_2 \left[\int_\omega \sigma_{3\alpha}^0 \right] \partial_3 v_\alpha^0 = \int_0^L \left[h_1 h_2 \int_\omega \tilde{f}_\alpha^\varepsilon + \int_\gamma h^* \tilde{g}_\alpha^\varepsilon \right] v_\alpha^0 , \quad \forall v_\alpha^0 \in H_0^2(0, L) .$$

En remplaçant ceci dans (4.26) et en utilisant (4.16) on déduit finalement (4.12) pour chaque β.

Étape 5 : Calcul de $\sigma_{3\beta}^0$ et q_β^0.

Nous allons montrer qu'il existe une infinité de $(\sigma_{3\alpha}^0) \in [L^2(\Omega)]^2$ vérifiant (4.9). Tout d'abord notons que (4.9) peut s'écrire sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \int_\Omega h_1 h_2 h_\alpha^{-1} [\sigma_{3\alpha}^0 - x_\alpha h_\alpha' \sigma_{33}^0] \, \partial_\alpha v_3 &= \int_\Omega \partial_3 (h_1 h_2 \sigma_{33}^0) \, v_3 + \\ &+ \int_\Omega h_1 h_2 \tilde{f}_3^\varepsilon v_3 + \int_{\Gamma_1} h^* \tilde{g}_3^\varepsilon v_3 , \quad \forall v_3 \in W \end{aligned} \right\} \tag{4.27}$$

On a utilisé l'égalité suivante, déduite de (4.15) :

$$\left. \begin{aligned} \partial_3 (h_1 h_2 \sigma_{33}^0) = E[\partial_3 (h_1 h_2 \underline{u}_3^0) - x_\alpha \, \partial_3 (h_1 h_2 h_\alpha \partial_{33} u_\alpha^0) - \\ - \alpha_T \, \partial_3 (h_1 h_2 \theta^\varepsilon)] \end{aligned} \right\} \tag{4.28}$$

qui montre que $\partial_3 (h_1 h_2 \sigma_{33}^0) \in L^2(\Omega)$.

On considère maintenant le problème : trouver $\xi \in L^2(0, L; H^1(\omega))$ tel que

$$h_1 h_2 h_\alpha^{-1} \int_\omega \partial_\alpha \xi \, \partial_\alpha v_3 = \int_\omega \partial_3 (h_1 h_2 \sigma_{33}^0) \, v_3 + \int_\omega h_1 h_2 \tilde{f}_3^\varepsilon v_3 + \int_\gamma h^* \tilde{g}_3^\varepsilon v_3 ,$$
$$\forall v_3 \in H^1(\omega) , \quad \text{p.p. sur } (0, L) . \tag{4.29}$$

En intégrant (4.28), compte tenu de (1.3) et (4.14) on déduit

$$\int_\omega \partial_3 (h_1 h_2 \sigma_{33}^0) + \int_\omega h_1 h_2 \tilde{f}_3^\varepsilon + \int_\gamma h^* \tilde{g}_3^\varepsilon = 0 .$$

ce qui montre que (4.29) admet une solution.

En revenant à (4.27) il est clair que toute solution de ce problème est de la forme

$$\sigma_{3\alpha}^0 = x_\alpha h_\alpha' \sigma_{33}^0 + \partial_\alpha \xi + \chi_\alpha$$

avec $\chi_\alpha \in L^2(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega h_1\, h_2\, h_\alpha^{-1}\, \chi_\alpha\, \partial_\alpha v_3 = 0\,, \quad \forall v_3 \in W\,.$$

En particulier si $F \in L^2(0, L; H^1(\omega))$, avec $F(x_3)_{|\gamma}$ indépendant de x_α, p.p. $x_3 \in (0, L)$, alors $(\sigma_{3\alpha}^0)$ donné par

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{31}^0 &= x_1\, h_1'\, \sigma_{33}^0 + \partial_1 \xi + h_1\, \partial_2 F \\ \sigma_{32}^0 &= x_2\, h_2'\, \sigma_{33}^0 + \partial_2 \xi - h_2\, \partial_1 F \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

est une solution de (4.9).

Pour déterminer q_α^0 prenons dans (4.27) $v_3 = x_\alpha\, h_\alpha\, w_\alpha$ avec $w_\alpha \in H_0^1(0, L)$; on obtient

$$\int_0^L h_1\, h_2\, q_\alpha^0\, w_\alpha = \int_0^L h_1\, h_2\, h_\alpha'\, m_\alpha^0\, w_\alpha - \int_0^L h_1\, h_2\, m_\alpha^0\, \partial_3(h_\alpha\, w_\alpha) +$$
$$+ \int_0^L h_1\, h_2\, h_\alpha \left[\int_\omega x_\alpha \tilde{f}_3^\varepsilon \right] w_\alpha + \int_0^L h_\alpha \left[\int_\gamma h^*\, x_\alpha\, \tilde{g}_3^\varepsilon \right] w_\alpha\,.$$

D'ici, en utilisant (4.16), on tire (4.17).

Étape 6 : Existence de $\sigma_{\alpha\beta}^0$.

Nous allons montrer que (4.10) admet au moins une solution. Tout d'abord (4.10) s'écrit :

$$\int_\Omega h_1\, h_2\, h_\alpha^{-1} [\sigma_{\alpha\beta}^0 - x_\alpha\, h_\alpha'\, \sigma_{3\beta}^0]\, \partial_\alpha v_\beta = \int_\Omega \phi_\beta^*\, v_\beta + \int_{\Gamma_1} \psi_\beta^*\, v_\beta\,, \quad \forall v_\beta \in W\,, \tag{4.31}$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_\beta^* &= \partial_3(h_1\, h_2\, \sigma_{3\beta}^0) + h_1\, h_2 \tilde{f}_\beta^\varepsilon\,, \\ \psi_\beta^* &= h^*\, \tilde{g}_\beta^\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Notons que grâce aux hypothèses (4.11) on a $\phi_\beta^* \in L^2(\Omega)$ et $\psi_\beta^* \in L^2(\Gamma_1)$.

Pour montrer l'existence d'une solution pour (4.31) on pose le problème suivant : trouver $\eta = (\eta_\alpha) \in L^2(0, L; [H^1(\omega)]^2)$ tel que

$$\left.\begin{aligned} & h_1\, h_2\, h_\alpha^{-1} \int_\omega \gamma_{\alpha\beta}(\eta)\, \gamma_{\alpha\beta}(v) = \int_\omega \phi_\beta^*\, v_\beta + \int_\alpha \psi_\beta^*\, v_\beta, \\ & \qquad \forall v_\beta \in H^1(\omega)\,, \quad \text{p.p. sur } (0, L)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

Afin de prouver que η existe, on doit vérifier l'égalité (voir Duvaut-Lions [5]) :

$$\int_\omega \phi_\beta^* v_\beta + \int_\gamma \psi_\beta^* v_\beta = 0 , \quad \forall v = (v_\beta) \in [H^1(\omega)]^2 \quad \text{tel que} \quad \gamma_{\alpha\beta}(v) = 0 ,$$

ou, de façon équivalente :

$$\left.\begin{aligned} &\int_\omega \phi_\beta^* + \int_\gamma \psi_\beta^* = 0 \\ \text{et} \quad &\int_\omega (x_2 \phi_1^* - x_1 \phi_2^*) + \int_\gamma (x_2 \psi_1^* - x_1 \psi_2^*) = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (4.33)$$

La première égalité de (4.33) s'écrit encore

$$\partial_3(h_1 h_2 q_\alpha^0) + \int_\omega h_1 h_2 \tilde{f}_\beta^\varepsilon + \int_\gamma h^* \tilde{g}_\beta^\varepsilon = 0 .$$

Or, ceci peut être obtenu en utilisant successivement (4.17) et (4.12).

En ce qui concerne la seconde elle peut s'écrire sous la forme :

$$\int_\omega h_1 h_2 (x_2 \tilde{f}_1^\varepsilon - x_1 \tilde{f}_2^\varepsilon) + \int_\gamma h^* (x_2 \tilde{g}_1^\varepsilon - x_1 \tilde{g}_2^\varepsilon) + \\ + \partial_3 \left[h_1 h_2 \int_\omega (x_2 \sigma_{31}^0 - x_1 \sigma_{32}^0) \right] = 0 . \qquad (4.34)$$

En remplaçant (4.30) dans (4.34) et après quelques calculs utilisant le théorème de la divergence, on arrive à la condition

$$\int_\omega h_1 h_2 (x_2 \tilde{f}_1^\varepsilon - x_1 \tilde{f}_2^\varepsilon) + \int_\gamma h^* (x_2 \tilde{g}_1^\varepsilon - x_1 \tilde{g}_2^\varepsilon) + \partial_3 \left\{ h_1 h_2 \left[(h_1' - h_2') \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \int_\omega x_2 x_1 \sigma_{33}^0 + \int_\gamma \xi (x_2 n_1 - x_1 n_2) - (h_1 + h_2) \left(\int_\omega F - F_{|\gamma} \right) \right] \right\} = 0$$

qui peut être satisfaite en prenant F convenable dans (4.30).

En revenant à (4.31) il est évident qu'une solution est donnée par :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = x_\alpha h_\alpha' \sigma_{3\beta}^0 + \gamma_{\alpha\beta}(\eta) .$$

5. RETOUR A L'OUVERT Ω^ε

On peut supposer d'une façon heuristique que (σ^0, u^0) est une approximation de $(\tilde{\sigma}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$ quand ε tend vers zéro. En faisant la transformation inverse de (3.5) on obtient un couple $(\hat{\sigma}, \hat{u})$ défini dans Ω^ε qui peut être considéré comme approximation de (σ, u), solution de (2.8), (2.9). On a

$$\left.\begin{aligned} \hat{u} &= (\varepsilon^{-1} u_1^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1}, \varepsilon^{-1} u_2^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1}, u_3^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1}) \\ \hat{\sigma} &= (\varepsilon^2 \sigma_{\alpha\beta}^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1}, \varepsilon \sigma_{3\beta}^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1}, \sigma_{33}^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Du théorème 4.1 et du lemme 3.1 on tire facilement le résultat suivant.

THÉORÈME 5.1 : *L'approximation* $(\hat{\sigma}_{33}, \hat{u}_\alpha, \hat{u}_3)$ *de* $(\sigma_{33}, u_\alpha, u_3)$ *est déterminée univoquement comme suit.*

i) *Les fonctions* $\hat{u}_\beta$ *ne dépendent que de la variable* x_3 *et s'identifient aux solutions uniques des problèmes :*

Trouver $\hat{u}_\beta \in H_0^2(0, L)$ *tel que* $\forall v \in H_0^2(0, L)$:

$$E \int_0^L I_\beta^\varepsilon(x_3)\, \partial_{33}\hat{u}_\beta\, \partial_{33} v = -E\alpha_T \int_0^L \left[\int_{\omega^\varepsilon(x_3)} x_\beta\, \theta\right] \partial_{33} v + \int_0^L \left[\int_{\omega^\varepsilon(x_3)} f_\beta + \right.$$
$$\left. + \int_{\gamma^\varepsilon(x_3)} g_\beta\right] v - \int_0^L \left[\int_{\omega^\varepsilon(x_3)} x_\beta f_3 + \int_{\gamma^\varepsilon(x_3)} x_\beta\, g_3\right] \partial_3 v\,. \tag{5.2}$$

ii) *Le déplacement* $\hat{u}_3$ *est obtenu de la forme*

$$\hat{u}_3 = \underline{\hat{u}}_3 - x_\alpha\, \partial_3 \hat{u}_\alpha\,, \tag{5.3}$$

où $\underline{\hat{u}}_3$ *est la solution unique du problème de thermoélasticité monodimensionnelle suivant :*

Trouver $\underline{\hat{u}}_3 \in H_0^1(0, L)$ *tel que*

$$\left.\begin{aligned} E \int_0^L A(x_3)\, \partial_3 \underline{\hat{u}}_3\, \partial_3 v &= E\alpha_T \int_0^L \left[\int_{\omega^\varepsilon(x_3)} \theta\right] \partial_3 v + \\ &+ \int_0^L \left[\int_{\omega^\varepsilon(x_3)} f_3 + \int_{\gamma^\varepsilon(x_3)} g_3\right] v\,, \quad \forall v \in H_0^1(0, L)\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

où $A(x_3)$ *représente la mesure de la section* $\omega^3(x_3)$ *de la poutre.*

iii) *En fonction des déplacements déjà calculés,* $\hat{\sigma}_{33}$ *est donné par*

$$\hat{\sigma}_{33} = E[\partial_3 \underline{\hat{u}}_3 - x_\alpha \partial_{33}\hat{u}_\alpha - \alpha_T \theta] = E[\partial_3 \hat{u}_3 - \alpha_T \theta]. \tag{5.5}$$

iv) *De* (5.5) *on déduit l'expression suivante pour le moment fléchissant* $\hat{m}_\alpha = \int_{\omega^\varepsilon(x_3)} x_\alpha \hat{\sigma}_{33}$:

$$\hat{m}_\alpha = - EI_\beta^\varepsilon(x_3)\, \partial_{33}\hat{u}_\alpha - E\alpha_T \int_{\omega^\varepsilon(x_3)} x_\alpha \theta. \tag{5.6}$$

v) *Les efforts tranchants* $\hat{q}_\alpha = \int_{\omega^\varepsilon(x_3)} \hat{\sigma}_{3\alpha}$ *sont déterminés univoquement par*

$$\hat{q}_\alpha = - E\, \partial_3\left[I_\alpha^\varepsilon(x_3)\, \partial_{33}\hat{u}_\alpha + \alpha_T \int_{\omega^\varepsilon(x_3)} x_\alpha \theta \right] + \int_{\omega^\varepsilon(x_3)} x_\alpha f_3 + \int_{\gamma^\varepsilon(x_3)} x_\alpha g_3. \tag{5.7}$$

Il semble intéressant de donner l'interprétation en termes d'équations différentielles des problèmes (5.2) et (5.4). Pour (5.2) on a :

$$E \frac{d^2}{dx_3^2}\left(I_\beta^\varepsilon \frac{d^2 \hat{u}_\beta}{dx_3^2} \right) = - E\alpha_T\, \partial_{33}\left[\int_{\omega^\varepsilon(x_3)} x_\beta \theta \right] + \int_{\omega^\varepsilon(x_3)} f_\beta + \int_{\gamma^\varepsilon(x_3)} g_\beta +$$
$$+ \partial_3\left[\int_{\omega^\varepsilon(x_3)} x_\beta f_3 + \int_{\gamma^\varepsilon(x_3)} x_\beta g_3 \right], \quad \text{dans} \quad (0, L), \tag{5.8}$$
$$\hat{u}_\beta(0) = \hat{u}_\beta(L) = 0,$$
$$\hat{u}'_\beta(0) = \hat{u}'_\beta(L) = 0,$$

ce qui est *le modèle classique de flexion transversale de poutres suivant l'axe d'inertie* Ox_β.

D'autre part, le problème (5.4) équivaut au problème aux limites suivant

$$- E\, \partial_3\left(A(x_3) \frac{d\underline{\hat{u}}_3}{dx_3} \right) = - E\alpha_T\, \partial_3\left[\int_{\omega^\varepsilon(x_3)} \theta \right] + \int_{\omega^\varepsilon(x_3)} f_3 + \int_{\gamma^\varepsilon(x_3)} g_3,$$
$$\underline{\hat{u}}_3(0) = \underline{\hat{u}}_3(L) = 0, \tag{5.9}$$

donnant le *modèle classique de compression d'une poutre.*

6. ÉTUDE DE LA CONVERGENCE

Dans les paragraphes précédents nous avons obtenu, à l'aide de la méthode des développements asymptotiques, les équations classiques de flexion et compression thermoélastique de poutres. Cependant il faudrait justifier les calculs formels effectués; en particulier, on devrait préciser dans quel sens u^0 et σ^0 peuvent être considérés comme des approximations de $\tilde{u}^\varepsilon$ et $\tilde{\sigma}^\varepsilon$.

Dans ce paragraphe nous étudions le problème de la convergence de $\tilde{u}^\varepsilon$ et $\tilde{\sigma}^\varepsilon$ quand ε tend vers zéro, sous les hypothèses données ci-après. Pour ceci nous utilisons la même démarche que Ciarlet-Kesavan [3] pour un problème de valeurs propres dans la théorie des plaques.

Nous allons faire les hypothèses suivantes :

H_1) Le module de Young E, le coefficient de Poisson ν et le coefficient de dilatation thermique α_T sont indépendants du paramètre ε.

H_2) Les forces f et g et la température θ sur la poutre Ω^ε sont telles que l'on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{f}_i^\varepsilon = f_i^0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega), \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \tag{6.1}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h^* \tilde{g}_i^\varepsilon = g_i^0 \qquad \text{dans } L^2(\Gamma_1), \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \tag{6.2}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \theta^\varepsilon = \theta^0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{6.3}$$

L'hypothèse H_2) entraîne la convergence des suites F_0^ε, G_0^ε et G_2^ε, respectivement, aux éléments $F_0^0 \in V'$, $G_0^0 \in \Sigma'$ et $G_2^0 \in \Sigma'$ définis par :

$$F_0^0(v) = -\int_\Omega h_1\, h_2\, f_i^0\, v_i - \int_{\Gamma_1} g_i^0\, v_i\,, \quad v \in V, \tag{6.4}$$

$$G_0^0(\tau) = -\alpha_T \int_\Omega h_1\, h_2\, \theta^0\, \tau_{33}\,, \qquad \tau \in \Sigma, \tag{6.5}$$

$$G_2^0(\tau) = -\alpha_T \int_\Omega h_1\, h_2\, \theta^0\, \tau_{\alpha\beta}\, \delta_{\alpha\beta}\,, \qquad \tau \in \Sigma. \tag{6.6}$$

Le théorème qui suit donne des estimations *a priori* pour la suite $\{(\tilde{\sigma}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)\}$.

THÉORÈME 6.1 : *Pour $\varepsilon > 0$, soit $(\tilde{\sigma}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon) \in \Sigma \times V$ la solution unique du problème* (3.14). *Si les hypothèses* H_1) *et* H_2) *sont vérifiées alors il existe une cons-*

tante $C > 0$ indépendante de ε, *telle que*

$$| \tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{33} |_{0,\Omega} + \varepsilon | \tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{3\beta} |_{0,\Omega} + \varepsilon^2 | \tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{\alpha\beta} |_{0,\Omega} \leqslant C , \tag{6.7}$$

$$\| \tilde{u}^{\varepsilon} \|_{1,\Omega} \leqslant C , \tag{6.8}$$

pour ε *suffisamment petit.*

Démonstration : Prenons dans (3.14) $\tau = \tilde{\sigma}^{\varepsilon}$ et $v = \tilde{u}^{\varepsilon}$. On obtient :

$$a_0(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}, \tilde{\sigma}^{\varepsilon}) + \varepsilon^2 a_2(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}, \tilde{\sigma}^{\varepsilon}) + \varepsilon^4 a_4(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}, \tilde{\sigma}^{\varepsilon}) = G^{\varepsilon}_0(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}) + \varepsilon^2 G^{\varepsilon}_2(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}) - F^{\varepsilon}_0(\tilde{u}^{\varepsilon}) . \tag{6.9}$$

Soit σ^{ε} l'élément de Σ défini par

$$\sigma^{\varepsilon}_{33} = \tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{33} , \quad \sigma^{\varepsilon}_{3\beta} = \varepsilon \tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{3\beta} , \quad \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \varepsilon^2 \tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{\alpha\beta} .$$

Alors il est immédiat de vérifier l'égalité

$$a_0(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}, \tilde{\sigma}^{\varepsilon}) + \varepsilon^2 a_2(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}, \tilde{\sigma}^{\varepsilon}) + \varepsilon^4 a_4(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}, \tilde{\sigma}^{\varepsilon}) = \int_{\Omega} h_1 h_2 (A\sigma^{\varepsilon})_{ij} \sigma^{\varepsilon}_{ij}$$

avec A défini par (2.6). De la même façon on a :

$$G^{\varepsilon}_0(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}) + \varepsilon^2 G^{\varepsilon}_2(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}) = - \alpha_T \int_{\Omega} h_1 h_2 \theta^{\varepsilon} \sigma^{\varepsilon}_{ij} \delta_{ij} .$$

En utilisant l'inégalité

$$\int_{\Omega} h_1 h_2 (A\sigma^{\varepsilon})_{ij} (\sigma^{\varepsilon})_{ij} \geqslant c_0 | \sigma^{\varepsilon} |^2_{0,\Omega} ,$$

et grâce à l'hypothèse H_2) on déduit de (6.9)

$$| \sigma^{\varepsilon} |^2_{0,\Omega} \leqslant c_1 | \sigma^{\varepsilon} |_{0,\Omega} + c_2 \| \tilde{u}^{\varepsilon} \|_{1,\Omega} . \tag{6.10}$$

D'autre part, on a :

$$- b(\tau, \tilde{u}^{\varepsilon}) = - G^{\varepsilon}_0(\tau) - \varepsilon^2 G^{\varepsilon}_2(\tau) + a_0(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}, \tau) + \varepsilon^2 a_2(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}, \tau) + \varepsilon^4 a_4(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}, \tau) .$$

Par conséquent, pour ε suffisamment petit et tout $\tau \in \Sigma$ on déduit :

$$| b(\tau, \tilde{u}^{\varepsilon}) | \leqslant c_3 | \sigma^{\varepsilon} |_{0,\Omega} | \tau |_{0,\Omega} + c_4 | \tau |_{0,\Omega} .$$

D'ici, compte tenu de l'inégalité (3.19) on déduit l'estimation

$$\| \tilde{u}^{\varepsilon} \|_{1,\Omega} \leqslant c_5 \, | \sigma^{\varepsilon} |_{0,\Omega} + c_6 \,. \tag{6.11}$$

Enfin, ceci et (6.10) donnent (6.7) et (6.8).

Les estimations que nous venons d'obtenir nous permettent de passer à la limite quand ε tend vers zéro et justifier le modèle thermoélastique obtenu.

THÉORÈME 6.2 : *Sous les hypothèses* H_1) *et* H_2) *il existe au moins une sous-suite, encore notée* ($\tilde{\sigma}^{\varepsilon}$, $\tilde{u}^{\varepsilon}$), *telle que* :

$$\tilde{u}^{\varepsilon} \to \tilde{u}^0 \quad \textit{faiblement dans } V, \tag{6.12}$$

$$\tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{33} \to \tilde{\sigma}^0_{33} \; \textit{faiblement dans } L^2(\Omega)\,, \tag{6.13}$$

$$\varepsilon \tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{3\beta} \to \psi_{3\beta} \; \textit{faiblement dans } L^2(\Omega)\,, \tag{6.14}$$

$$\varepsilon^2 \, \tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \to \psi_{\alpha\beta} \; \textit{faiblement dans } L^2(\Omega)\,. \tag{6.15}$$

En plus on a :

i) *La fonction* $\tilde{u}^0_\beta$ *peut être identifiée à la solution* (*unique*) *du problème*

$\tilde{u}^0_\beta \in H^2_0(0, L)$ *et* $\forall v^0 \in H^2_0(0, L)$

$$EI_\beta \int_0^L h_1\, h_2\, h_\beta^2\, \partial_{33}\tilde{u}^0_\beta\, \partial_{33} v^0 = -\, E\alpha_T \int_0^L h_1\, h_2\, h_\beta \left[\int_\omega x_\beta\, \theta^0 \right] \partial_{33} v^0$$
$$+ \int_0^L \left[h_1\, h_2 \int_\omega f^0_\beta + \int_\gamma g^0_\beta \right] v^0 - \int_0^L h_\beta \left[h_1\, h_2 \int_\omega x_\beta\, f^0_3 \right.$$
$$\left. + \int_\gamma x_\beta\, g^0_3 \right] \partial_3 v^0 \,. \tag{6.16}$$

ii) *La fonction* $\tilde{u}^0_3$ *est donnée par*

$$\tilde{u}^0_3 = \underset{\sim}{u}^0_3 - x_\alpha\, h_\alpha\, \partial_3 \tilde{u}^0_\alpha \,, \tag{6.17}$$

où $\underset{\sim}{u}^0_3$ *est la seule solution du problème* :

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{u}^0_3 \in H^1_0(0, L) \quad \text{et} \quad \forall v^0_3 \in H^1_0(0, L) \\ &E \int_0^L h_1\, h_2\, \partial_3 \underset{\sim}{u}^0_3\, \partial_3 v^0_3 = E\alpha_T \int_0^L h_1\, h_2 \left[\int_\omega \theta^0 \right] \partial_3 v^0_3 \,+ \\ &\qquad + \int_0^L \left[h_1\, h_2 \int_\omega f^0_3 + \int_\gamma g^0_3 \right] v^0_3 \,. \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

iii) *La fonction* $\tilde{\sigma}^0_{33}$ *est donnée par*

$$\tilde{\sigma}^0_{33} = E[\partial_3 \underset{\sim}{u}^0_3 - x_\alpha h_\alpha \partial_{33} \tilde{u}^0_\alpha - \alpha_T \theta^0] + \nu \psi_{\mu\mu} . \tag{6.19}$$

iv) *Les fonctions* $\psi_{3\beta}$ *et* $\psi_{\alpha\beta}$ *vérifient* :

$$\left.\begin{aligned} \partial_\alpha \psi_{3\alpha} &= 0 , \quad \textit{dans } \Omega . \\ \psi_{3\alpha} n_\alpha &= 0 , \quad \textit{sur } \Gamma_1 . \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_\beta \psi_{\alpha\beta} &= 0 , \quad \textit{dans } \Omega . \\ \psi_{\alpha\beta} n_\beta &= 0 , \quad \textit{sur } \Gamma_1 . \end{aligned}\right\} \tag{6.21}$$

Démonstration : On considère plusieurs étapes.

Étape 1 : Des estimations obtenues dans le théorème précédent on déduit immédiatement (6.12)-(6.15). Nous allons démontrer que $\psi_{3\beta}$, $\psi_{\alpha\beta}$ vérifient (6.20)-(6.21). En effet, la seconde équation de (3.14) s'écrit :

$$\int_\Omega h_1 h_2 \tilde{\sigma}^\varepsilon_{ij} \gamma^*_{ij}(v) = \int_\Omega h_1 h_2 \tilde{f}^\varepsilon_i v_i + \int_{\Gamma_1} h^* \tilde{g}^\varepsilon_i v_i , \quad \forall v \in V . \tag{6.22}$$

En prenant $v_3 = 0$ en multipliant par ε^2 on tire

$$\varepsilon^2 \int_\Omega h_1 h_2 h_\alpha^{-1} \tilde{\sigma}^\varepsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta + 2 \varepsilon^2 \int_\Omega h_1 h_2 \tilde{\sigma}^\varepsilon_{3\alpha} \gamma^*_{3\alpha}(v) =$$
$$= \varepsilon^2 \int_\Omega h_1 h_2 \tilde{f}^\varepsilon_\beta v_\beta + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_1} h^* \tilde{g}^\varepsilon_\beta v_\beta , \quad \forall v_\beta \in W ,$$

d'où, par passage à la limite quand ε tend vers zéro,

$$\int_\Omega h_1 h_2 h_\alpha^{-1} \psi_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta = 0 , \quad \forall v_\beta \in W . \tag{6.23}$$

De façon analogue, si on prend dans (6.22) $v_\beta = 0$ et on multiplie par ε on déduit :

$$\varepsilon \int_\Omega h_1 h_2 h_\beta^{-1} \tilde{\sigma}^\varepsilon_{3\beta} \partial_\beta v_3 + \varepsilon \int_\Omega h_1 h_2 \tilde{\sigma}^\varepsilon_{33} \gamma^*_{33}(v) = \varepsilon \int_\Omega h_1 h_2 \tilde{f}^\varepsilon_3 v_3 + \varepsilon \times$$
$$\times \int_{\Gamma_1} h^* \tilde{g}^\varepsilon_3 v_3$$

et, en passant à la limite

$$\int_\Omega h_1\, h_2\, h_\beta^{-1}\, \psi_{3\beta}\, \partial_\beta v_3 = 0\,, \quad \forall v_3 \in W\,.$$

Étape 2 : Nous allons montrer (6.17) et (6.19). La première équation de (3.14) s'écrit :

$$\frac{1}{E}\int_\Omega h_1\, h_2\, \tilde{\sigma}_{33}^\varepsilon\, \tau_{33} + \frac{2(1+\nu)}{E}\varepsilon \int_\Omega h_1\, h_2\, \varepsilon \tilde{\sigma}_{3\beta}^\varepsilon\, \tau_{3\beta} - \frac{\nu}{E}\int_\Omega h_1\, h_2\, \varepsilon^2\, \tilde{\sigma}_{\mu\mu}^\varepsilon\, \tau_{33} -$$

$$- \frac{\nu}{E}\varepsilon^2 \int_\Omega h_1\, h_2\, \tilde{\sigma}_{33}^\varepsilon\, \tau_{\mu\mu} + \varepsilon^2 \int_\Omega h_1\, h_2\, \varepsilon^2 (A^0\, \tilde{\sigma}^\varepsilon)_{\alpha\beta}\, \tau_{\alpha\beta} -$$

$$- \int_\Omega h_1\, h_2\, \tau_{ij}\, \gamma_{ij}^*(\tilde{u}^\varepsilon) = -\alpha_T \int_\Omega h_1\, h_2\, \theta^\varepsilon\, \tau_{33} - \alpha_T\, \varepsilon^2 \int_\Omega h_1\, h_2\, \theta^\varepsilon\, \tau_{\alpha\beta}\, \delta_{\alpha\beta}\,.$$

En passant à la limite quand ε tend vers zéro, on obtient

$$\frac{1}{E}\int_\Omega h_1\, h_2\, \tilde{\sigma}_{33}^0\, \tau_{33} - \frac{\nu}{E}\int_\Omega h_1\, h_2\, \psi_{\mu\mu}\, \tau_{33} - \int_\Omega h_1\, h_2\, \tau_{ij}\, \gamma_{ij}^*(\tilde{u}^0) =$$

$$= -\alpha_T \int_\Omega h_1\, h_2\, \theta^0\, \tau_{33}\,, \quad \forall \tau \in \Sigma\,. \tag{6.24}$$

En prenant successivement $\tau_{\alpha j} = 0$, $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{33} = 0$ et $\tau_{j3} = 0$ dans (6.24) on déduit que $(\tilde{\sigma}_{33}^0, \tilde{u}^0) \in L^2(\Omega) \times V$ vérifie les équations suivantes :

$$\frac{1}{E}\int_\Omega h_1\, h_2\, \tilde{\sigma}_{33}^0 - \int_\Omega h_1\, h_2\, \tau_{33}[\partial_3 \tilde{u}_3^0 - x_\alpha\, h_\alpha^{-1}\, h_\alpha'\, \partial_\alpha \tilde{u}_3^0] =$$

$$= -\alpha_T \int_\Omega h_1\, h_2\, \theta^0\, \tau_{33} + \frac{\nu}{E}\int_\Omega h_1\, h_2\, \psi_{\mu\mu}\, \tau_{33}\,, \quad \forall \tau_{33} \in L^2(\Omega) \tag{6.25}$$

$$\int_\Omega h_1\, h_2\, \tau_{3\alpha}[h_\alpha^{-1}\, \partial_\alpha \tilde{u}_3^0 - x_\beta\, h_\beta^{-1}\, h_\beta'\, \partial_\beta \tilde{u}_\alpha^0] = 0\,, \quad \forall (\tau_{3\alpha}) \in [L^2(\Omega)]^2\,, \tag{6.26}$$

$$\int_\Omega h_1\, h_2\, \tau_{\alpha\beta}[h_\alpha^{-1}\, \partial_\alpha \tilde{u}_\beta^0 + h_\beta^{-1}\, \partial_\beta \tilde{u}_\alpha^0] = 0\,, \quad \forall (\tau_{\alpha\beta}) \in [L^2(\Omega)]_S^4\,. \tag{6.27}$$

Or, les équations (6.25)-(6.27) sont les mêmes que (4.6)-(4.8) sauf le second membre de (6.25). Par conséquent une répétition des arguments utilisés dans les étapes 1 et 2 de la démonstration du théorème 4.1 montre la validité de (6.17) et (6.19) — pour des fonctions $\underset{\sim}{u}_3^0 \in H_0^1(0, L)$ et $\tilde{u}_\beta^0 \in H_0^2(0, L)$.

Étape 3 : Soit $\tilde{n}_{33}^0$ l'élément de $L^2(0, L)$ défini par

$$\tilde{n}_{33}^0 = \int_\omega \tilde{\sigma}_{33}^0 .$$

Si on prend dans (6.23) $v_\alpha = h_1^{-1} h_2^{-1} h_\beta x_\beta v^0$ avec $v^0 \in H_0^1(0, L)$ on trouve

$$\int_\omega \psi_{\mu\mu} = 0 .$$

D'ici, en utilisant (6.19) et grâce à (1.3) on déduit

$$\tilde{n}_{33}^0 = E\left[\partial_3 \underset{\sim}{u}_3^0 - \alpha_T \int_\omega \theta^0\right]. \tag{6.28}$$

Prenons maintenant dans (6.22) des éléments de la forme $v = (0, 0, v_3^0)$ avec $v_3^0 \in H_0^2(0, L)$; on trouve

$$\int_\Omega h_1\, h_2\, \tilde{\sigma}_{33}^\varepsilon\, \partial_3 v_3^0 = \int_\Omega h_1\, h_2\, \tilde{f}_3^\varepsilon\, v_3^0 + \int_{\Gamma_1} h^*\, \tilde{g}_3^\varepsilon\, v_3^0 ,$$

d'où en passant à la limite

$$\int_\Omega h_1\, h_2\, \tilde{\sigma}_{33}^0 . \partial_3 v_3^0 = \int_\Omega h_1\, h_2\, f_3^0\, v_3^0 + \int_{\Gamma_1} g_3^0\, v_3^0 ,$$

et encore,

$$\int_0^L h_1\, h_2\, \tilde{n}_{33}^0\, \partial_3 v_3^0 = \int_0^L \left[h_1\, h_2 \int_\omega f_3^0 + \int_\gamma g_3^0\right] v_3^0 . \tag{6.29}$$

En remplaçant (6.28) dans (6.29) on déduit (6.18).

Étape 4 : On va montrer (6.16). Soit $\tilde{m}_\beta^0 \in L^2(0, L)$ l'élément défini par

$$\tilde{m}_\beta^0 = \int_\omega x_\beta\, \tilde{\sigma}_{33}^0 .$$

Alors en utilisant l'expression (6.19) déjà obtenue pour $\tilde{\sigma}_{33}^0$ et compte tenu de

(3.3) et (1.3) on déduit

$$\tilde{m}_\beta^0 = - EI_\beta\, h_\beta\, \partial_{33}\tilde{u}_\beta^0 - \mathrm{E}\alpha_T \int_\omega x_\beta\, \theta^0 + \nu \int_\omega x_\beta\, \psi_{\mu\mu}\,. \tag{6.30}$$

D'autre part, prenons dans (6.23) successivement : $v_1 = \frac{1}{2} h_2^{-1}\, x_1^2\, v^0$, $v_2 = 0$ et $v_1 = 0$, $v_2 = \frac{1}{2} h_1^{-1}\, x_2^2\, v^0$, avec $v^0 \in H_0^1(0, L)$. On obtient

$$\int_\omega x_1\, \psi_{11} = \int_\omega x_2\, \psi_{22} = 0\,.$$

Ensuite, en prenant dans la même équation successivement : $v_1 = h_2^{-1}\, x_1\, x_2\, v^0$, $v_2 = - \frac{1}{2} h_1\, h_2^{-1}\, x_1^2\, v^0$ et $v_1 = - \frac{1}{2} h_2\, h_1^{-1}\, x_2^2\, v^0$, $v^2 = h_1^{-1}\, x_1\, x_2\, v^0$ on déduit

$$\int_\omega x_1\, \psi_{22} = \int_\omega x_2\, \psi_{11} = 0\,.$$

Par conséquent (6.30) devient

$$\tilde{m}_\beta^0 = - EI_\beta\, h_\beta\, \partial_{33}\tilde{u}_\beta^0 - E\alpha_T \int_\omega x_\beta\, \theta^0\,. \tag{6.31}$$

Considérons maintenant dans l'équation (6.22) des éléments de V de la forme $v = (v_1^0, v_2^0, - x_\beta\, h_\beta\, \partial_3 v_\beta^0)$ avec $v_\beta^0 \in H_0^2(0, L)$. Alors on a $\gamma_{\alpha\beta}^*(v) = \gamma_{3\alpha}^*(v) = 0$, $\gamma_{33}^*(v) = - x_\beta\, h_\beta\, \partial_{33} v_\beta^0$, et par conséquent on obtient :

$$\begin{aligned} - \int_\Omega h_1\, h_2\, h_\beta\, x_\beta\, \tilde{\sigma}_{33}^\varepsilon\, \partial_{33} v_\beta^0 &= \int_\Omega h_1\, h_2\, \tilde{f}_\beta^\varepsilon\, v_\beta^0 + \int_{\Gamma_1} h^*\, \tilde{g}_\beta^\varepsilon\, v_\beta^0 - \\ &\quad - \int_\Omega h_1\, h_2\, h_\beta\, x_\beta\, \tilde{f}_3^\varepsilon\, \partial_3 v_\beta^0 - \int_{\Gamma_1} h^*\, h_\beta\, x_\beta\, \tilde{g}_3^\varepsilon\, \partial_3 v_\beta^0\,. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ on trouve pour chaque β :

$$\begin{aligned} - \int_0^L h_1\, h_2\, h_\beta\, \tilde{m}_\beta^0\, \partial_{33} v^0 &= \int_0^L \left[h_1\, h_2 \int_\omega f_\beta^0 + \int_{\Gamma_1} g_\beta^0 \right] v^0 - \\ &\quad - \int_0^L \left[h_1\, h_2\, h_\beta \int_\omega x_\beta\, \tilde{f}_3^\varepsilon + h_\beta \int_{\Gamma_1} x_\beta\, \tilde{g}_3^\varepsilon \right] \partial_3 v^0\,, \quad \forall v^0 \in H_0^2(0, L)\,. \end{aligned} \tag{6.32}$$

En remplaçant dans (6.32) l'expression (6.31) obtenue pour $\tilde{m}_\beta^0$ on déduit finalement (6.16).

COROLLAIRE 6.1 : *Soient $\tilde{m}_\beta^\varepsilon$ et $\tilde{q}_\beta^\varepsilon$ définis par*

$$\tilde{m}_\beta^\varepsilon = \int_\omega x_\beta \, \tilde{\sigma}_{33}^\varepsilon \, ; \quad \tilde{q}_\beta^\varepsilon = \int_\omega \tilde{\sigma}_{3\beta}^\varepsilon$$

alors, pour les sous-suites correspondant à celles du théorème précédent, on a

$$\tilde{m}_\beta^\varepsilon \rightarrow \tilde{m}_\beta^0 \quad \textit{faiblement dans } L^2(0, L)\,, \tag{6.33}$$

$$\tilde{q}_\beta^\varepsilon \rightarrow \tilde{q}_\beta^0 \quad \textit{faiblement dans } L^2(0, L) \tag{6.34}$$

avec $\tilde{m}_\beta^0$ donné par (6.31) *et*

$$\tilde{q}_\beta^0 = - h_1^{-1} h_2^{-1} E\left[\partial_3\left(h_1 h_2 h_\beta^2 I_\beta \partial_{33} \tilde{u}_\beta^0 + \alpha_T h_1 h_2 h_\beta \int_\omega x_\beta \theta^0\right) + \right.$$
$$\left. + h_1 h_2 h_\beta \int_\omega x_\beta f_3^0 + h_\beta \int_\gamma x_\beta g_3^0\right]. \tag{6.35}$$

Démonstration : La convergence de $\tilde{m}_\beta^\varepsilon$ est une conséquence immédiate de (6.13). Pour démontrer (6.34) on prend dans (6.22) $v_\beta = 0$ et $v_3 = x_\beta h_\beta v_\beta^0$ avec $v_\beta^0 \in H_0^1(0, L)$; on obtient

$$\int_0^L h_1 h_2 \left[\int_\omega \tilde{\sigma}_{3\beta}^\varepsilon\right] v_\beta^0 + \int_0^L h_1 h_2 h_\beta \left[\int_\omega x_\beta \tilde{\sigma}_{33}^\varepsilon\right] \partial_3 v_\beta^0 = \int_0^L h_1 h_2 h_\beta \times$$
$$\times \left[\int_\omega x_\beta \tilde{f}_3^\varepsilon\right] v_\beta^0 + \int_0^L h_\beta \left[\int_\gamma h^* x_\beta \tilde{g}_3^\varepsilon\right] v_\beta^0 .$$

Par passage à la limite on déduit :

$$\tilde{q}_\beta^\varepsilon \rightarrow h_1^{-1} h_2^{-1} \partial_3[h_1 h_2 h_\beta \tilde{m}_\beta^0] + h_\beta \int_\omega x_\beta f_3^0 + h_1^{-1} h_2^{-1} h_\beta \int_\gamma x_\beta g_3^0$$

et d'ici découle (6.34) compte tenu de (6.31).

Remarque 6.1 : Puisque les éléments $\tilde{u}^0$, $\tilde{m}_\alpha^0$ et $\tilde{q}_\alpha^0$ sont univoquement déterminés, on peut conclure que les convergences (6.12), (6.33) et (6.34) sont valables pour les familles tout entières et non pas seulement pour des sous-suites.

Grâce au caractère linéaire du problème (3.14) on déduit immédiatement le résultat qui suit.

COROLLAIRE 6.2 : *Sous les hypothèses* H_1) *et* H'_2) *suivante :*

H'_2) *Les forces* f_i *et* g_i *et la température* θ *sur la poutre* Ω^ε *sont telles qu'il existe* $r \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^r\, \tilde{f}_i^\varepsilon = f_i^0 && \textit{dans } L^2(\Omega)\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ &\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^r\, h^*\, \tilde{g}_i^\varepsilon = g_i^0 && \textit{dans } L^2(\Gamma_1)\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ &\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^r\, \theta^\varepsilon = \theta^0 && \textit{dans } L^2(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon^r\, \tilde{u}^\varepsilon &\to \tilde{u}^0 && \textit{faiblement dans } V, \\ \varepsilon^r\, m_\beta^\varepsilon &\to \tilde{m}_\beta^0 && \textit{faiblement dans } L^2(0, L)\,, \\ \varepsilon^r\, \tilde{q}_\beta^\varepsilon &\to \tilde{q}_\beta^0 && \textit{faiblement dans } L^2(0, L)\,, \end{aligned} \tag{6.37}$$

avec $\tilde{u}^0$, $\tilde{m}_\beta^0$ *et* $\tilde{q}_\beta^0$ *définis dans le théorème* 6.2 *et le corollaire* 6.1.

Un cas particulier dans lequel H'_2) est vérifié, et où par conséquent le corollaire précédent peut être appliqué, apparaît quand les suites intervenant dans (6.36) sont constantes. Or, étant donné la définition de $\tilde{f}^\varepsilon$ et $\tilde{g}^\varepsilon$, ceci signifie que les forces et la température agissant sur la poutre sont de la forme

$$\begin{aligned} f_\alpha &= \varepsilon^{1-r} f_\alpha^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1}\,, \quad f_3 = \varepsilon^{-r} f_3^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1} \\ g_\alpha &= \varepsilon^{2-r} \frac{1}{h^*} g_\alpha^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1}\,,\ g_3 = \varepsilon^{1-r} \frac{1}{h^*} g_3^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1} \\ \theta &= \varepsilon^{-r}\, \theta^0 \circ [H^\varepsilon]^{-1} \end{aligned} \tag{6.38}$$

pour certaines fonctions f^0, g^0, θ^0 données, indépendantes de ε.

Dans ce cas, en comparant les énoncés des théorèmes 5.1 et 6.2 on déduit immédiatement la relation

$$\begin{aligned} \varepsilon^r\, u^0 &= \tilde{u}_0 \\ \varepsilon^r\, m_\alpha^0 &= \tilde{m}_\alpha^0 \\ \varepsilon^r\, q_\alpha^0 &= \tilde{q}_\alpha^0 \end{aligned} \tag{6.39}$$

et le corollaire 6.2 nous assure les convergences

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1+r}\, u_\beta^\varepsilon &\to \tilde{u}_\beta^0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible} \\ \varepsilon^r\, u_3^\varepsilon &\to \tilde{u}_3^0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible} \\ \varepsilon^r\, m_\beta^\varepsilon &\to \tilde{m}_\beta^0 \text{ dans } L^2(0, L) \text{ faible} \\ \varepsilon^{r-1}\, q_\beta^\varepsilon &\to \tilde{q}_\beta^0 \text{ dans } L^2(0, L) \text{ faible} \end{aligned} \tag{6.40}$$

avec $$m_\beta^\varepsilon = \int_\omega x_\beta\, \sigma_{33}^\varepsilon \quad \text{et} \quad q_\beta^\varepsilon = \int_\omega \sigma_{3\beta}^\varepsilon .$$

Exemple : On considère une famille de poutres Ω^ε de densité ρ et de module de Young E soumise à leur poids et à une charge surfacique de la forme $\frac{\varepsilon k}{h^*}$, $k \in L^2(\Gamma_1)$. On a donc

$$f_1 = \rho\,, \quad f_2 = f_3 = 0\,, \quad g_1 = \frac{\varepsilon k}{h^*}, \quad g_2 = g_3 = 0\,, \quad \theta = 0\,,$$

ce qui rentre dans le cadre (6.38) avec $r = 1$. Par conséquent $\varepsilon^2\, u_1^\varepsilon$ converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers la solution du problème

$$\begin{aligned} &EI_1 \frac{d^2}{dx_3^2}\left[h_1^3\, h_2 \frac{d^2}{dx_3^2} \tilde{u}_1^0 \right] = \rho h_1\, h_2 + \int_\gamma k \text{ dans } (0, L)\,, \\ &\tilde{u}_1^0(0) = \tilde{u}_1^0(L) = 0\,, \quad \frac{d\tilde{u}_1^0}{dx_3}(0) = \frac{d\tilde{u}_1^0}{dx_3}(L) = 0\,, \end{aligned} \tag{6.41}$$

ce qui justifie d'approcher u_1 par $\hat{u}_1 = \varepsilon^{-2}\, \tilde{u}_1^0$ solution du problème :

$$\begin{aligned} &E \frac{d^2}{dx_3^2}\left[I_1^\varepsilon(x_3) \frac{d^2}{dx_3^2} \hat{u}_1 \right] = \rho \operatorname{mes} \omega^\varepsilon(x_3) + \varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon(x_3)} k/h^* \\ &\hat{u}_1(0) = \hat{u}_1(L) = 0\,, \quad \frac{d\hat{u}_1}{dx_3}(0) = \frac{d\hat{u}_1}{dx_3}(L) = 0\,. \end{aligned} \tag{6.42}$$

On voit que (6.42) coïncide avec (5.8) pour les données considérées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising form Lagrangian multipliers.* Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle. Sér. Rouge. Anal. Numérique R-2 (1974) 129-151.

[2] P. CIARLET, P. DESTUYNDER, *A justification of the two-dimensional linear plate model.* J. Mécanique. Vol. 18 (1979), 315-344.

[3] P. CIARLET, S. KESAVAN, *Two-dimensional approximation of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory.* Comp. Meth. App. Mech. Eng. Vol. 26 (1981) 145-172.

[4] P. DESTUYNDER, *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques.* Thèse Univ. Pierre & Marie Curie (1980).

[5] G. DUVAUT, J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, Paris (1973).

[6] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Théorie de l'Elasticité.* Mir. Moscou (1967).

[7] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Mécanique.* Mir. Moscou (1981).

[8] J. L. LIONS, *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal.* Lecture Notes in Mathematics. Vol. 323. Springer-Verlag (1973).

[9] A. RIGOLOT, *Sur une théorie asymptotique des poutres.* J. Mécanique. Vol. 11, n° 4 (1972), 673-703.

[10] J. M. VIAÑO, *Thèse de Troisième Cycle.* Université Pierre & Marie Curie (à paraître).