RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

ALEXANDRE BARUGOLA

Quelques propriétés des lignes critiques d'une récurrence du second ordre à inverse non unique. Détermination d'une zone absorbante

RAIRO. Analyse numérique, tome 18, nº 2 (1984), p. 137-151

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1984__18_2_137_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 18, n° 2, 1984, p. 137 à 151)

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES CRITIQUES D'UNE RÉCURRENCE DU SECOND ORDRE A INVERSE NON UNIQUE. DÉTERMINATION D'UNE ZONE ABSORBANTE (*)

par Alexandre BARUGOLA [1]

Communiqué par F. ROBERT

Résumé. — *On détermine quelques propriétés des « lignes critiques » pour une récurrence, ou transformation ponctuelle T, du second ordre et à inverse non unique. La notion de ligne critique permet d'obtenir une " zone absorbante " à l'intérieur de laquelle la solution évolue.*

Abstract. — *For a two-dimentional endomorphism T having a vanishing Jacobian, somes properties of " critical lines " are determinated. An " absorptive area " reached by a solution of T is obtained by means of the concept of critical lines.*

1. INTRODUCTION

On considère la récurrence, ou transformation ponctuelle T, du second ordre et à inverse non unique, satisfaisant aux hypothèses $H1$:

$$x_1 = f(x, y, \lambda) \quad , \quad y_1 = g(x, y, \lambda) , \tag{1}$$

$H1$: *f et g sont des fonctions uniformes, continues par rapport aux variables réelles x, y et au paramètre réel λ, et au moins une fois continûment différentiables par rapport à leurs arguments; T est un endomorphisme à jacobien s'annulant au moins sur une courbe du plan (x, y).*

Pour des systèmes (1), des comportements dynamiques complexes connus sous le nom de « chaos », « attracteurs étranges », « zones chaotiques », ..., ont été mis en évidence dans un nombre croissant de travaux [2, 5, 13]. Pour l'étude de ces phénomènes Gumowski et Mira [9, 11] ont montré l'importance de la notion de ligne critique qui a été la première fois introduite dans [14]

(*) Reçu en septembre 1982.
(1) Département d'Automatique et de Dynamique Non Linéaire, Université de Provence, rue H. Poincaré, 13397 Marseille Cedex 13.

comme extension de la notion de point critique due à Julia [12] et Fatou [6] dans le cas à une dimension avec variable complexe. L'association d'arcs de certaines lignes critiques définit une « zone absorbante » pour la suite engendrée par T à partir d'un point pris dans le domaine d'influence de cette zone [10]. Sous certaines hypothèses ces auteurs ont établi quelques propriétés des lignes critiques et ont donné une méthode de construction de zones absorbantes valable dans certains cas ; cette méthode a été précisée dans [1].

L'objet de cet article est d'une part de déterminer quelques propriétés fondamentales liées à la transformation T^m, m entier positif, dont certaines sont une généralisation de celles établies en [9] et d'autre part de décrire une méthode qui permet d'obtenir les zones absorbantes dans des cas plus généraux. Les propriétés mentionnées sont établies à partir d'une représentation du plan (x, y) sous forme de plans superposés ou feuillets [16].

2. LIGNES CRITIQUES

2.1. Ligne critique de la transformation T

Si l'on recherche les antécédents réels d'un point M de coordonnées (x_1, y_1), la résolution de (1) par rapport aux inconnues x et y conduit en général à un nombre de solutions réelles qui dépend du choix du point M dans le plan de phase (x, y) ; chaque solution représentant un antécédent de rang un du point M. Le plan (x, y) peut être décomposé en zones où le nombre d'antécédents de rang un est constant ; les limites de ces zones correspondent à la « ligne critique » de la transformation T.

DÉFINITION et PROPRIÉTÉS [7, 14, 15] : *La ligne critique de la transformation T, notée (LC), est le lieu des points qui admettent au moins deux antécédents réels de rang un confondus.*

(LC) est la conséquente par T de la courbe, notée (LC_{-1}), obtenue en annulant le jacobien des seconds membres de (1).

(LC) délimite dans le plan (x, y) des régions où le nombre d'antécédents réels de rang un est constant.

2.2. Ligne critique de la transformation T^m

PROPOSITION : *La ligne critique de T^m est composée de la ligne critique (LC) de T et de ses $m - 1$ conséquentes successives par application de T. Elle divise le plan (x, y) en zones pour lesquelles le nombre d'antécédents de rang m est constant.*

En effet, l'application répétée m fois de la transformation T à partir d'un point M du plan (x, y) définit la transformation ponctuelle T^m :

$$x_m = f_m(x, y), \qquad y_m = g_m(x, y). \tag{2}$$

La ligne critique de (2) est, d'après le paragraphe 2.1, la conséquence par T^m de la courbe obtenue en annulant le jacobien, noté $J(T^m)$, des seconds membres de (2) :

$$J(T^m) = \text{dét}\,(F_{m-1}.F_{m-2}. \dots .F_1.F_0) = J_{m-1}.J_{m-2}. \dots .J_1.J_0, \tag{3}$$

où F_i est la matrice aux dérivées partielles de (1) calculée au point (x_i, y_i) et $J_i = \text{dét}\, F_i$, avec $i = 0, 1, \dots, m - 1$.

Posons $J_i = l_{-1}(x_i, y_i) \overset{\text{déf}}{=} l_{-1-i}(x, y)$. Par hypothèse J_0, jacobien des seconds membres de (1) s'annule sur la courbe, notée (LC_{-1}), d'équation $l_{-1}(x, y) = 0$. L'antécédente de rang i, de (LC_{-1}) est la courbe, notée (LC_{-1-i}) d'équation $l_{-1-i}(x, y) = 0$. Avec ces notations et d'après (3), on en déduit que les coordonnées x, y d'un point M situé sur l'une quelconque des courbes (LC_{-1-i}) annulent $J(T^m)$. Si nous notons (LC_{-1-i+m}) la conséquente par T^m de (LC_{-1-i}), la ligne critique de T^m est formée des courbes (LC_{-1-i+m}). En posant $(LC_0) = (LC)$ il en résulte la première partie de la proposition ; la deuxième partie se déduit du paragraphe 2.1.

2.3. Remarque sur les notations choisies

ν étant un entier, (LC_ν) représente :

— pour $\nu = 0$, la ligne critique (LC) de T,

— pour $\nu > 0$, la conséquente de rang ν de (LC),

— pour $\nu < 0$, l'antécédente de rang ν de (LC) telle que tout point $M \in (LC_\nu)$ vérifie $J(T^{-\nu}) = 0$.

3. NOTION DE FEUILLETS DU PLAN DE PHASE [11, 16, 17]

Pour la recherche des antécédents de rang un de tout point M pris dans l'une quelconque des régions limitées par la ligne critique de (1), le plan (x, y) peut être considéré comme la superposition d'autant de feuillets qu'il y a d'antécédents de rang un ; ces feuillets étant reliés entre eux par des « lignes de pliage » qui correspondent dans le plan (x, y) à la ligne critique de T.

La structure des antécédents d'un ensemble de points et en particulier leurs positions relatives sont obtenues, après avoir repéré cet ensemble sur les divers feuillets, en « dépliant » ces feuillets sur un plan : la structure obtenue correspond qualitativement à celle qui découle, dans le plan (x, y) d'une recherche des antécédents de l'ensemble de points par la récurrence inverse (4) déduite de (1) :

$$x = r(x_1, y_1), \qquad y = s(x_1, y_1). \tag{4}$$

Sur le plan déplié, les lignes de pliage deviennent les antécédentes de rang un de la ligne critique.

Ces résultats établis pour une transformation T se généralisent pour une transformation T^m, en remplaçant la recherche des antécédents de rang un par celle des antécédents de rang m.

Pour la suite les hypothèses $H2$ sont effectuées :

$H2$: — à la traversée d'une ligne critique, sauf peut-être en des points isolés de cette ligne, les antécédents réels de rang un disparaissent ou apparaissent par groupes de deux, ce qui implique que le long de cette ligne critique les feuillets se rejoignent deux à deux ;

— il est possible, en suivant certains feuillets, de passer de façon continue d'un point quelconque d'un feuillet à un autre point quelconque d'un autre feuillet.

4. DÉTERMINATION DES ANTÉCÉDENTS DE RANG m

La représentation qui vient d'être définie permet de déterminer les antécédents des lignes critiques et de leurs voisinages sous les hypothèses $H1$ et $H2$.

Soit une portion de (LC_i), ligne critique de T^m, séparant une zone à q antécédents de rang m d'une zone à p antécédents de rang m, où $0 \leqslant i \leqslant m-1$, $p - q = 2h$, $h = 1, 2, \ldots, q = 0, 1, \ldots$.

4.1. Antécédente d'une portion de ligne critique

L'antécédente de rang m de la portion de (LC_i) est composée de h portions de courbes distinctes de multiplicité deux, notées $(LC_{i-m})_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, h$, dont l'union représente la courbe (LC_{i-m}) définie au paragraphe 2.2, et de q portions de courbes distinctes notées $(LC_{i-m})^\beta$, $\beta = 1, 2, \ldots, q$; si $q = 0$, il n'y a pas de telles courbes. Réciproquement la conséquente de rang m de l'une quelconques des $h + q$ portions de courbes $(LC_{i-m})_\alpha$ et $(LC_{i-m})^\beta$ est la portion de (LC_i) considérée initialement.

De même un point M de (LC_i) a pour antécédents de rang m, h points distincts notés $(M_{-m})_\alpha$ situés respectivement sur les courbes $(LC_{i-m})_\alpha$ et q points distincts notés $(M_{-m})^\beta$ situés respectivement sur les courbes $(LC_{i-m})^\beta$. Réciproquement le conséquent de rang m de l'un quelconque des $h + q$ points $(M_{-m})_\alpha$ et $(M_{-m})^\beta$ est le point M.

4.2. Antécédent d'un voisinage de (LC_i)

Avec les hypothèses $H1$ et $H2$, la proposition fondamentale PF est établie.

PF : La transformation T^m opère d'une part un pliage des voisinages de $(LC_{i-m})_\alpha$ selon (LC_i) du côté où le nombre d'antécédents de rang m est le plus grand et d'autre part une concentration des voisinages des courbes $(LC_{i-m})^\beta$ (resp. $(LC_{i-m})_\alpha$) de part et d'autre (resp. d'un côté) de (LC_i).

La démonstration de cette proposition est effectuée par généralisation à partir des deux cas usuels.

1) *Cas* $q = 0$, $p = 2$, $m = 1$. Considérons de part et d'autre de (LC) un voisinage défini par les domaines A et B sur la figure 1 ; la recherche de leurs antécédents respectifs de rang un conduit à :

— B n'a pas d'antécédent,
— A a deux antécédents, notés $(A_{-1})_1^1$ et $(A_{-1})_1^2$ situés de part et d'autre de $(LC_{-1})_1 = (LC_{-1})$ dans le plan (x, y).

2) *Cas* $q = 1, p = 3, m = 1$. Dans ce cas (*fig.* 2) la recherche des antécédents de rang un des voisinages A et B conduit à :

— A a trois antécédents $(A_{-1})_1^1$ et $(A_{-1})_1^2$ situés de part et d'autre de $(LC_{-1})_1 = (LC_{-1})$ et $(A_{-1})^1$ situé d'un côté de $(LC_{-1})^1$,
— B a un antécédent $(B_{-1})^1$ situé de l'autre côté de $(LC_{-1})^1$.

3) *Cas général.* Pour $m = 1$, la généralisation s'obtient à partir du premier cas ou du second cas et en ajoutant le nombre de feuillets nécessaires soit par groupes de deux soit isolément. Pour m quelconque on remplace (LC) par (LC_i), (LC_{-1}) par $(LC_{i-m})_\alpha$ et $(LC_{-1})^\beta$ par $(LC_{i-m})^\beta$; de plus les voisinages A et B sont choisis de telle manière qu'ils ne contiennent pas de ligne critique de rang inférieur ou égal à $m - 1$.

La recherche des antécédents de rang m des voisinages A et B conduit à :

— chaque portion de $(LC_{i-m})^\beta$ a de part et d'autre un antécédent de A, $(A_{-m})^\beta$, et un antécédent de B, $(B_{-m})^\beta$;
— chaque portion de $(LC_{i-m})_\alpha$ a de chaque côté un antécédent de A, $(A_{-m})_\alpha^1$ et $(A_{-m})_\alpha^2$ (*fig.* 3).

Réciproquement les transformés par T^m de l'une quelconque des q portions de courbes $(LC_{i-m})^\beta$ et de ses voisinages $(A_{-m})^\beta$ et $(B_{-m})^\beta$ sont la portion de (LC_i) et ses voisinages A et B ; alors que les transformés par T^m de l'une quelconque des h portions de courbes $(LC_{i-m})_\alpha$ et de ses voisinages $(A_{-m})_\alpha^1$ et $(A_{-m})_\alpha^2$ sont la portion de (LC_i) et son voisinage A.

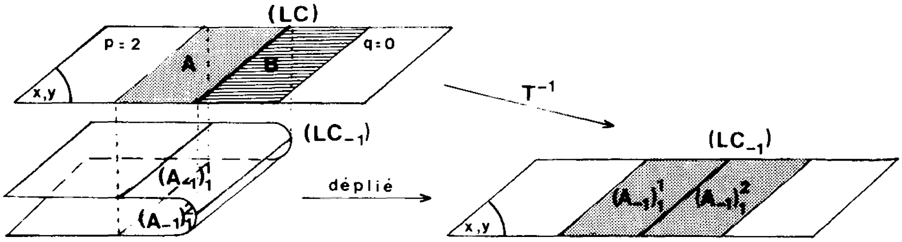

Figure 1.

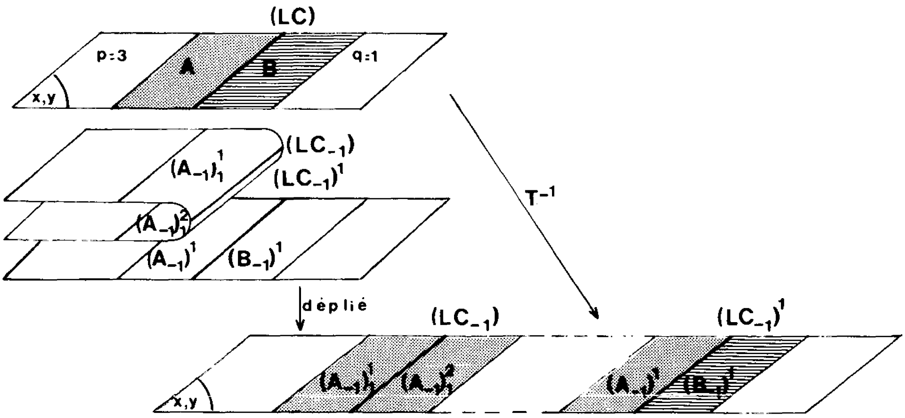

Figure 2.

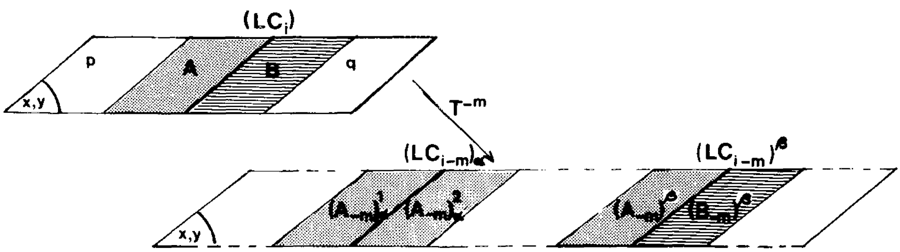

Figure 3.

4.3. Transformation du contact entre deux courbes

La proposition PF conduit à deux propriétés relatives à la transformation des contacts entre deux courbes.

$P1$: *Lorsqu'une courbe traverse (resp. ne traverse pas) en un point de contact* $(M_{-m})^{\beta}$ *une courbe du type* $(LC_{i-m})^{\beta}$, *sa transformée par* T^m *traverse (resp. ne traverse pas) la courbe* (LC_i) *au point* M.

$P2$: *Lorsqu'une courbe traverse ou ne traverse pas en un point de contact* $(M_{-m})_{\alpha}$ *une courbe du type* $(LC_{i-m})_{\alpha}$ *sa transformée par* T^m *ne traverse pas la courbe* (LC_i) *au point* M *et est située dans le voisinage de* M *du côté de* (LC_i) *où le nombre d'antécédents de rang m est le plus grand.*

En effet si une courbe $(\mathscr{L})$ a un contact en un point M avec (LC_i), les résultats du paragraphe 4.2 permettent de déterminer le comportement des antécédentes de rang m de $(\mathscr{L})$ au voisinage des points $(M_{-m})_{\alpha}$ et $(M_{-m})^{\beta}$. Réciproquement, si une courbe $(\mathscr{L}_{-m})$ correspondant à l'une quelconque des antécédents de rang m de $(\mathscr{L})$ a un contact avec une courbe $(LC_{i-m})_{\alpha}$ (resp. $(LC_{i-m})^{\beta}$) en un point $(M_{-m})_{\alpha}$ (resp. $(M_{-m})^{\beta}$), on détermine des comportements différents de $(\mathscr{L})$ au voisinage de M selon que T^m opère un pliage (propriété $P2$) ou non (propriété $P1$).

4.4. Remarque

Pour certaines valeurs de m le nombre d'antécédents de rang m peut être le même de part et d'autre de la portion de (LC_i) $(p = q)$; une analyse semblable à celle effectuée précédemment conduit à des propriétés $P1$ et $P2$ légèrement modifiées.

4.5. Exemple

Considérons une transformation T possédant une ligne critique composée de deux branches (LC) et (LC') séparant des zones à un et trois antécédents de rang un (*fig.* 4*a*). La figure 4*b* représente la décomposition du plan sous forme de feuillets qui permet d'obtenir les antécédents de rang un des lignes critiques et de leurs voisinages (*fig.* 4*c*).

Soit une courbe $(\mathscr{L}_{-1})$ coupant respectivement les courbes $(LC_{-1})^1$, (LC'_{-1}), (LC_{-1}) et $(LC'_{-1})^1$ aux points P_{-1}, Q_{-1}, R_{-1} et S_{-1} ; d'après les propriétés $P1$ et $P2$ la courbe $(\mathscr{L}) = T((\mathscr{L}_{-1}))$ a le comportement donné à la figure 4*d* :

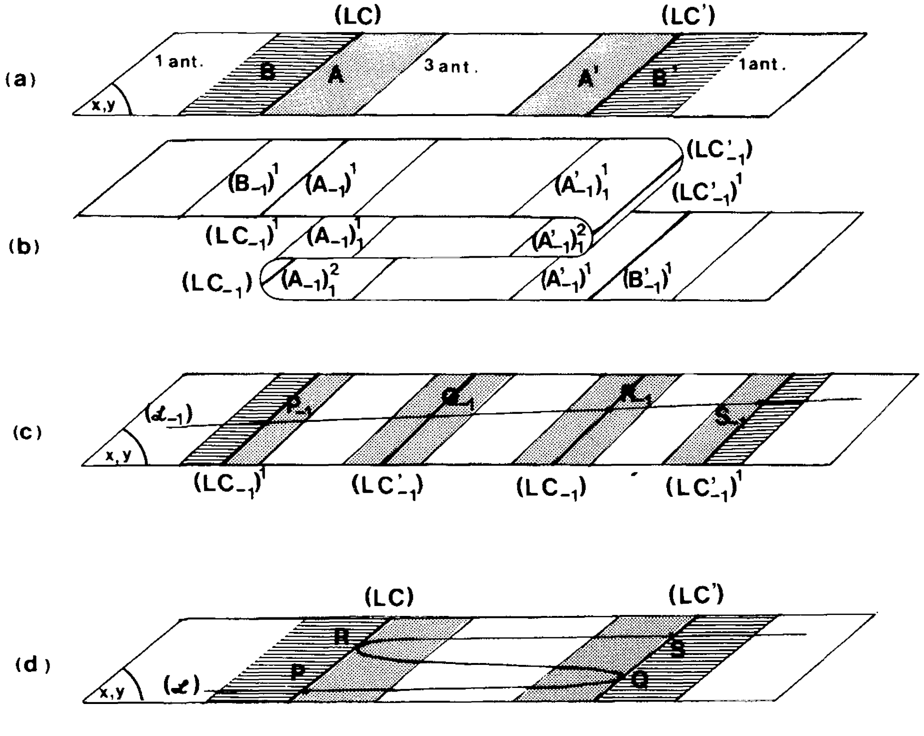

Figure 4.

en P et S, $(\mathscr{L})$ traverse respectivement (LC) et (LC'), alors qu'en Q et R, $(\mathscr{L})$ est tangente respectivement à (LC') et (LC) du côté de ces courbes où le nombre d'antécédents de rang un est trois.

5. DÉTERMINATION DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRAJECTOIRES ET DES LIGNES CRITIQUES

Sous les hypothèses $H1$ et $H2$ les propositions suivantes sont établies.

P3 : Toute trajectoire qui traverse (LC_{i-m}) *en un point* a_0, *est tangente à* (LC_i) *en* $a_m = T^m(a_0)$ *et est située au moins dans le voisinage de* a_m *du côté de* (LC_i) *où le nombre d'antécédents de rang m est le plus grand.*

$P3$ est l'application directe de $P2$ à une trajectoire.

P4 : Le conséquent de rang un d'un point d'intersection de (LC_{-1}) *et* (LC_j), $j = 0, 1, \ldots$, *est un point de tangence entre* (LC) *et* (LC_{j+1}) ; (LC_{j+1}) *étant situé* *au moins dans le voisinage du point de contact du côté de* (LC) *où le nombre d'antécédents de rang un est le plus grand.*

$P4$ est l'application de $P2$ à une ligne critique (LC_j) pour $m = 1$.

$P5$: *La suite des conséquents de rang* ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, *d'un point d'intersection de* (LC_{-1}) *et* (LC_j), $j = 0, 1, \ldots$, *est une suite de points de tangence entre* $(LC_{\nu-1})$ *et* $(LC_{\nu+j})$; $(LC_{\nu+j})$ *étant situé au moins dans le voisinage du point de contact du côté de* $(LC_{\nu-1})$ *où le nombre d'antécédents de rang* ν *est le plus grand.*

Le transformé par T du voisinage du point de contact entre (LC) et (LC_1) conduit à soit (LC_2) est tangent à (LC_1), soit (LC_2) traverse (LC_1) ; ce second cas est impossible car en considérant (LC_1) comme ligne critique de T^2, on a $(LC) = T^{-2}(LC_2)$ qui ne coupe pas (LC_{-1}) ce qui est contraire à l'hypothèse ; la démonstration est continuée de proche en proche.

$P6$: *S'il existe une zone du plan à zéro antécédent de rang* m, *une ligne critique* (LC_j), $j > m - 1$, *ou une portion de celle-ci ne peut être située dans cette zone ; d'où* (LC_j) *est entièrement située dans les zones du plan où le nombre d'antécédents de rang* m *n'est pas zéro.*

Lorsque $q = 0$, il n'existe pas de courbes du type $(LC_{i-m})^{\beta}$, on en déduit que si (LC_i) et (LC_j) ont un point de contact, (LC_j) est tangente à (LC_i) en ce point et est située du côté de (LC_i) où le nombre d'antécédents de rang m est p.

Remarques

— Pour certaines transformations (1), ou pour des valeurs discrètes de λ, les points de tangence mentionnés dans $P3$, $P4$ et $P5$ peuvent devenir des points de contact plus complexes (*cf.* un exemple p. 363 de [11]).

— $P4$ et $P5$ sont données pour une transformation T pour simplifier leurs énoncés ; pour une transformation T^m des propositions semblables peuvent être établies.

— $P4$ et $P5$ précisent et généralisent l'énoncé des propriétés établies en [9, 11] par une méthode différente dans le cas $q = 0$, $p = 2$.

6. PROPRIÉTÉS ET DÉTERMINATION D'UNE ZONE ABSORBANTE

Soient (d') et (D) deux domaines du plan (x, y), $(d') \subset (D)$, (f') et (F) leurs frontières respectives, $(f') \subset (d')$. Lorsque λ est choisi dans un certain ensemble de valeurs, (d') est une zone absorbante [10], limitée par une courbe fermée, formée d'arcs de lignes critiques, et correspondant au comportement dynamique suivant : le point M_n, conséquent par T^n, $n = 1, 2, \ldots, N, N + 1, \ldots$, de tout point $M_0 \in (D)$ pénètre dans (d') après un nombre fini N d'itérations et n'en sort plus ; pour $n > N$, ou bien M_n tend vers un ensemble limite attractif, ou bien M_n évolue de façon apparemment erratique dans (d'). Dans le second cas (d') contient soit un cycle attractif d'ordre supérieur au nombre d'itérations observées, soit un attracteur plus complexe (solution chaotique bornée) dont il n'est pas possible actuellement de préciser la nature ; la solution chaotique bornée occupe un domaine (d), $(d) \subseteq (d')$ appelé zone chaotique, limité par une frontière (f). (D) est le domaine d'attraction ou d'influence de la solution contenue dans (d') ou dans (d), sa frontière (F) est invariante par T et T^{-1} [8]. (D) est supposé connexe.

6.1. Propriétés

P7 : Si T admet une zone absorbante (d') et s'il existe une zone du plan à zéro antécédent de rang un, les régions du plan à zéro antécédent de tout rang sont extérieures à (d').

Cette propriété est obtenue en remarquant que si une zone à zéro antécédent de rang ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, appartenait à une zone absorbante (d'), elle ne pourrait pas être atteinte par les itérés de points appartenant au domaine complémentaire de (d') dans (D) du fait de la non-existence de courbes du type $(LC_{i-m})^{\beta}$.

P8 : Si T admet une zone absorbante (d'), alors T^K, $K = 2, 3, \ldots$, admet une zone absorbante $(d')_K$ telle que $(d')_K \subseteq (d')$.

En effet si T admet une zone absorbante (d'), en considérant T^K, on en déduit d'une part que le conséquent par $T^{K\nu}$ de tout point $M_0 \in (D)$ pénètre dans (d') et n'en sort plus pour l'entier ν égal ou immédiatement supérieur à N/K et d'autre part que les trajectoires obtenues par application de T^K occupent une zone $(d')_K$ au plus égale à (d').

6.2. Détermination d'une zone absorbante

La détermination d'une zone absorbante a été effectuée dans des cas où la ligne critique (LC) sépare le plan (x, y) en deux régions à zéro et deux antécédents de rang un et lorsque (LC_{-1}) et (LC) ont un point de contact [1, 9, 11] : la frontière (f') qui est formée d'arcs de lignes critiques tangents entre eux est obtenue par itérations successives jusqu'à un certain rang d'un arc de (LC) appartenant à (f'). Cette méthode ne permet de résoudre que les cas pour lesquels on vérifie la propriété $P7$. Ci-après sont développées les considérations qui ont conduit à une méthode plus générale d'obtention d'une zone absorbante invariante par T et telle que sa frontière (f') n'est pas invariante par T.

La frontière (f') de (d'), étant composée d'arcs de lignes critiques, n'est pas invariante par T.

Soit (d'_{-m}) le domaine formé par l'union des antécédents de rang m de (d'), par définition de (d') et de (D) si m tend vers l'infini, (d'_{-m}) tend vers (D) : (F) apparaît comme une courbe obtenue par l'accumulation des antécédentes de rang infini de certaines lignes critiques et pour un rang m donné (d'_{-m}) constitue un domaine d'influence pour (d') car tout point de (d'_{-m}) a son conséquent par T^m dans (d'). Si $(d') \subset (d'_{-m})$, (d'_{-m}) peut constituer également une zone absorbante qui est limitée par des antécédentes de rang m de portions de lignes critiques d'une puissance entière de T ; ces antécédentes étant des lignes critiques et (ou) des courbes définies au paragraphe 4. La zone absorbante intéressante, c'est-à-dire celle occupant un domaine minimal peut être obtenue en complétant la définition de (d') par la propriété d'invariance de (d') par T.

Pour un domaine Λ quelconque intérieur à (D) il existe un entier positif m tel que $\Lambda \subset (d'_{-m})$ d'où $T^m(\Lambda) \subseteq (d')$, l'égalité étant obtenue si Λ est un antécédent de rang m de (d'). S'il existe un entier positif N, $N \geqslant m$, tel que $T^N(\Lambda) = T^{N+1}(\Lambda)$ ou bien $T^N(\Lambda) = (d')$ ou bien $T^N(\Lambda)$ est une zone absorbante inclue dans (d').

De part la nature de la frontière d'une zone absorbante, le domaine Λ à itérer peut être choisi limité par une frontière composée de lignes critiques de T^k et de courbes $J(T^k) = 0$. Pratiquement k est le plus petit entier positif qui permette de définir un domaine Λ. Les transformations successives de Λ par T permettent de déterminer lorsqu'elle existe une zone absorbante $T^N(\Lambda)$. Lorsqu'il existe une zone chaotique (d) qui ne remplit pas (d'), l'obtention de (d) peut s'effectuer en utilisant la propriété $P8$ et en cherchant un domaine invariant non plus par T mais par T^K, $K = 2, 3$; ... ; l'étude de la transition ordre-chaos permet dans certains cas de déterminer K.

6.3. Exemple

L'illustration de certains résultats présentés peut être effectuée à partir de la récurrence

$$x_1 = 3{,}9\, x(1 - x - y)\,, \quad y_1 = \lambda xy\,, \quad x > 0, y > 0, \lambda > 0\,. \tag{5}$$

Lorsque λ varie, la transition ordre-chaos s'effectue par bifurcations successives d'un type semblable à celui décrit pour d'autres exemples dans [3, 5]. Pour $3{,}2 < \lambda < 4$, la solution de (5) évolue de façon erratique dans un domaine (d') dont le domaine d'influence est la région : $x > 0$, $y > 0$, $1 - x - y > 0$. L'équation de (LC_{-1}) est $x = 0{,}5$. (LC) sépare deux régions à deux et zéro antécédents de rang un.

La construction de la zone absorbante est effectuée pour $\lambda = 3{,}6$ valeur pour laquelle la zone chaotique (d) remplit la zone absorbante (d'). Il est nécessaire de tracer jusqu'à $k = 3$ les lignes critiques de T^k et les courbes $J(T^k) = 0$ pour définir un domaine Λ à itérer. Le domaine choisi est hachuré sur la figure 5*a*. Les figures 5*b*, 5*c*, 5*d* et 6*a* représentent respectivement les domaines $T^N(\Lambda)$ pour $N = 1, 2, 3$ et 4 ; pour $N = 5$ on a $T^5(\Lambda) = T^4(\Lambda)$ qui constitue la zone absorbante cherchée. A la figure 6*b* est représenté l'enregistrement numérique de la solution chaotique contenue dans (d). Si l'on choisit comme domaine initial à itérer le domaine (Λ') représenté à la figure 6*c* une itération supplémentaire est nécessaire pour obtenir (d) car $T(\Lambda') = \Lambda$ (*fig.* 6*d*).

La frontière (f) de (d) est différentiable en chacun de ses points car (f) est formée d'arcs de lignes critiques tangents entre eux aux points b_1 et a_i, $i = 1$ à 5 : où b_1 est le conséquent de rang un de b_0 point d'intersection de (LC_4) et de (LC_{-1}) et a_i est le conséquent de rang i de a_0 point d'intersection de (LC) et de (LC_{-1}). (f) n'est pas invariante par T puisque par exemple a_6 conséquent de a_5 point de (f) est dans (d).

6.4. Remarques

La méthode d'obtention d'une zone absorbante qui a été décrite permet en particulier de résoudre les cas complexes mentionnés en [1, 11].

Des exemples de détermination de zones absorbantes dans des cas où les hypothèses $H1$ ne sont pas toujours vérifiées sont étudiés en [3, 4].

7. CONCLUSION

L'étude de la transformation par T^m des contacts entre deux courbes caractéristiques a permis de déterminer des propriétés utiles pour la construction de la frontière d'une zone absorbante ou d'une zone chaotique ; cette frontière est en général différentiable en chacun de ses points, elle ne l'est pas dans certains cas en des points isolés [1]. L'obtention d'une zone absorbante invariante par T ou par T^K permet de montrer que la solution contenue dans cette zone est bornée.

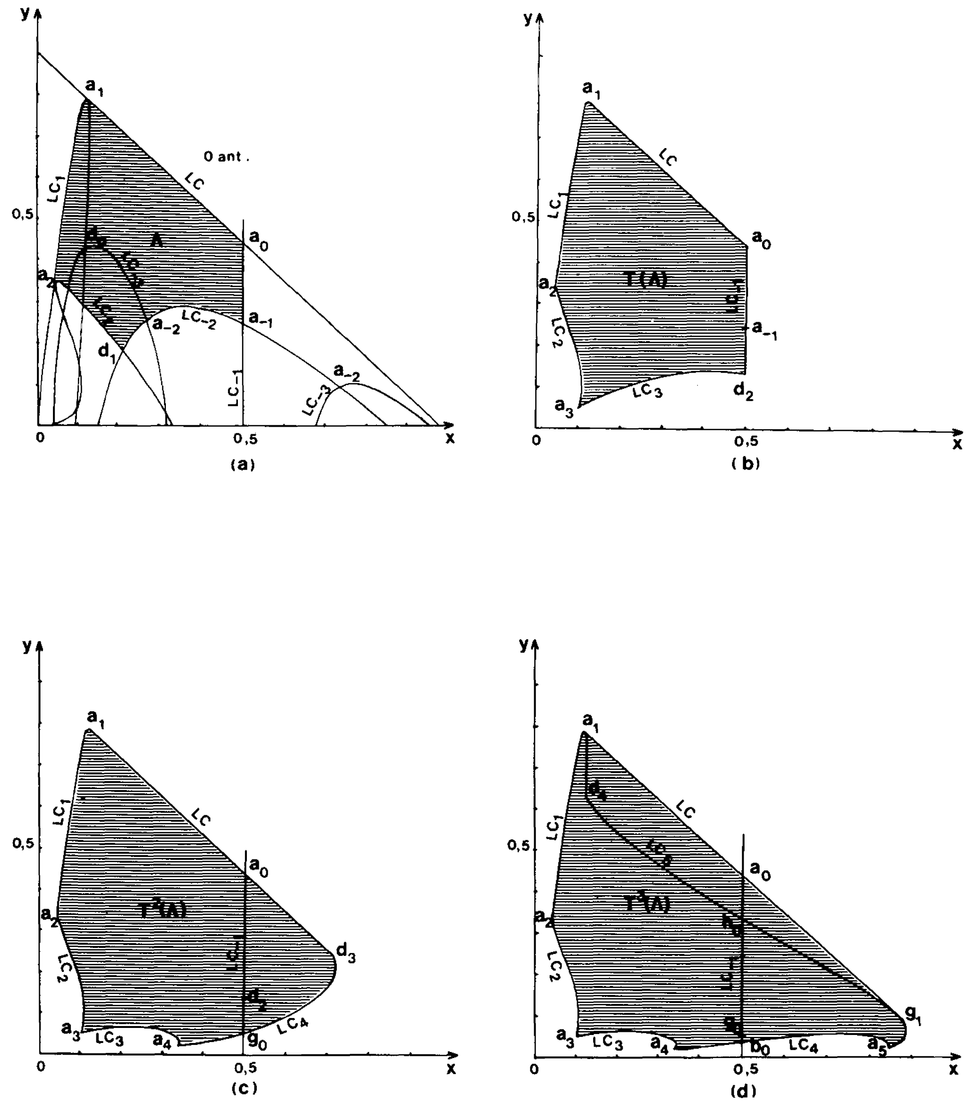

Figure 5.

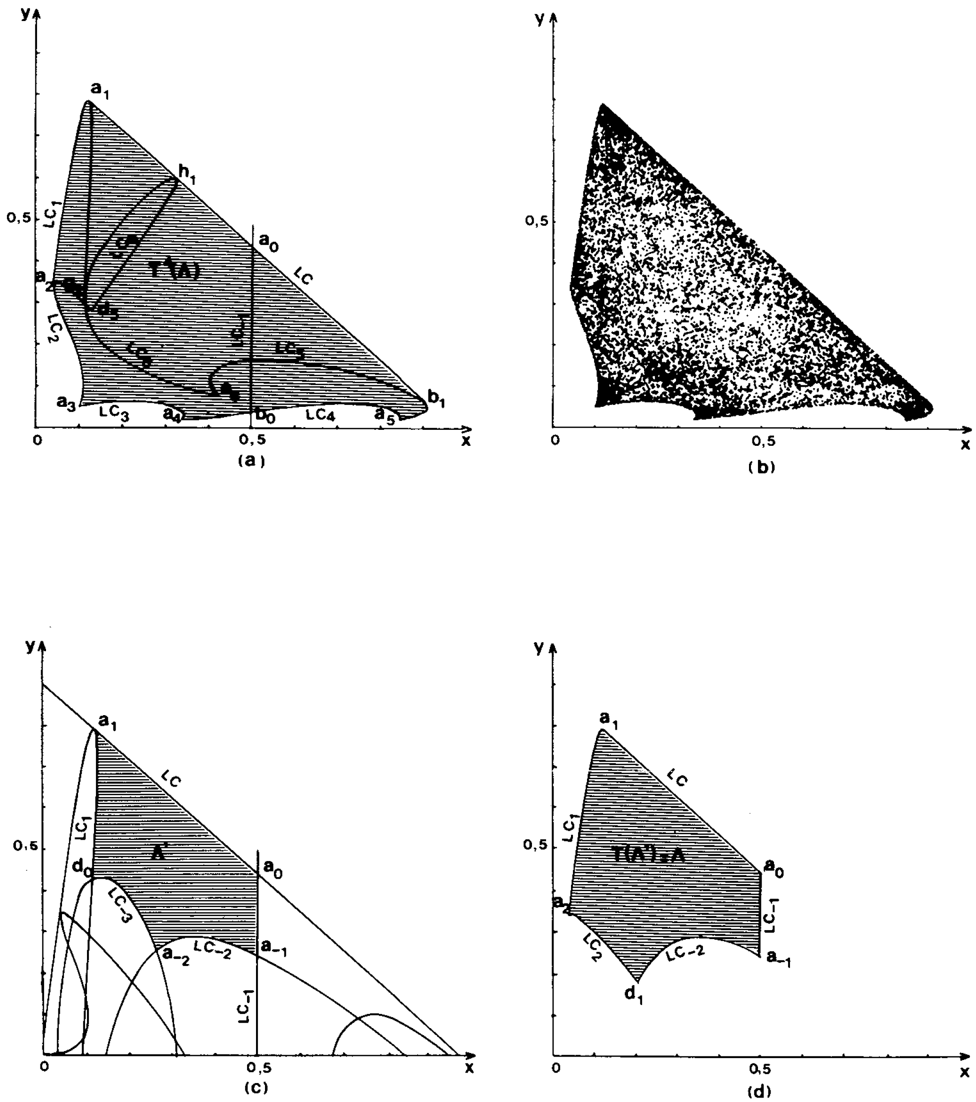
y
a1
h1
0,5
LC1
a0
T4(A)
LC
a2
d5
LC2
LC-1
LC5
a3
LC3
a4
b0
LC4
a5
b1
0
0,5
x
(a)
y
0,5
0
0,5
x
(b)
y
a1
LC
0,5
LC1
A'
d0
a0
LC-3
a-2
LC-2
a-1
LC-1
0
0,5
x
(c)
y
a1
LC
0,5
LC1
T(A')=A
a0
a2
LC-1
LC2
LC-2
a-1
d1
0
0,5
x
(d)

Figure 6.

BIBLIOGRAPHIE (*)

[1] A. BARUGOLA, *Détermination de la frontière d'une zone absorbante relative à une récurrence du deuxième ordre, à inverse non unique,* C.R. Acad. Sc., Paris, Série B, t. 290, pp. 257-260, 1980.

[2] J. BERNUSSOU, LIU HSU, C. MIRA, *Quelques exemples de solutions stochastiques bornées dans les récurrences autonomes du second ordre,* Colloques Internationaux du C.N.R.S., n° 229, Transformations ponctuelles et leurs applications, Toulouse, pp. 195-220, 1973.

[3] J. C. CATHALA, *Sur la dynamique complexe et la détermination d'une zone absorbante pour un système à données échantillonnées décrit par une récurrence du second ordre,* R.A.I.R.O. Automatique, V. 16, n° 2, p. 175, 1982.

[4] J. C. CATHALA, *Absorptive area and chaotic area in two-dimensional endomorphisms,* Non Linear Analysis, V. 7, n° 2, p. 147, 1983.

[5] R. CLERC, C. HARTMAN, C. MIRA, *Transition " order to chaos " in a predatorprey model in the form of a recurrence,* Actes du Congrès « Informatica 77 », Bled, Ref. 3-116, pp. 1-4, 1977.

[6] P. FATOU, *Sur les équations fonctionnelles,* Bull. Soc. Math. France, 47, pp. 161-271, 1919 ; 48, pp. 33-94 et pp. 208-314, 1920.

[7] A. GIRAUD, *Applications des récurrences à l'étude de certains systèmes de commande,* Thèse de Docteur-ingénieur, Toulouse, 1969.

[8] I. GUMOWSKI, C. MIRA, *Sur un algorithme de détermination du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles,* C.R. Acad. Sc., Paris, Groupe 2, t. 260, pp. 6524-6527, 1965.

[9] I. GUMOWSKI, C. MIRA, *Solutions « chaotiques » bornées d'une récurrence ou transformation ponctuelle du deuxième ordre, à inverse non unique,* C.R. Acad. Sc., Paris, Série A, t. 285, pp. 477-480, 1977.

[10] I. GUMOWSKI, C. MIRA, *Bifurcation déstabilisant une solution chaotique d'un endomorphisme du deuxième ordre,* C.R. Acad. Sc., Paris, Série A, t. 286, pp. 427-430, 1978.

[11] I. GUMOWSKI, C. MIRA, *Dynamique chaotique, transformations ponctuelles et transition ordre-désordre,* Cépadues Editions, Toulouse, 1980.

[12] G. JULIA, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles,* J. Math. Pures et Appl., (8), pp. 47-245, 1918.

[13] R. M. MAY, *Biological populations obeying difference equations : stable points, stable cycles, and chaos,* J. Theor. Biol., 51, pp. 511-524, 1975.

[14] C. MIRA, *Détermination pratique du domaine de stabilité d'un point d'équilibre d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles,* C.R.Acad., Sc., Paris, Groupe 2, t. 261, pp. 5314-5317, 1965.

[15] C. MIRA, *Étude de la frontière de stabilité d'un point double d'une récurrence non linéaire du* 2e *ordre,* International Pulse Symposium, Budapest, D 43-7/11, pp. 1-28, 9-11 avril 1968.

[16] C. MIRA, F. ROUBELLAT, *Cas où le domaine de stabilité d'un ensemble limite attractif d'une récurrence du deuxième ordre n'est pas simplement connexe,* C.R. Acad. Sc., Paris, Série A, t. 268, pp. 1657-1660, 1969.

[17] F. ROUBELLAT, *Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires et applications aux systèmes à données échantillonnées,* Thèse de Doctorat ès Sciences, Toulouse, 1969.

(*) On trouvera une bibliographie complémentaire dans [11].