RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

D. CAILLERIE

Étude de la conduction stationnaire dans un domaine comportant une répartition périodique d'inclusions minces de grande conductivité

RAIRO. Analyse numérique, tome 17, nº 2 (1983), p. 137-159
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1983__17_2_137_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 17, n° 2, 1983, p. 137 à 159)

ÉTUDE DE LA CONDUCTION STATIONNAIRE DANS UN DOMAINE COMPORTANT UNE RÉPARTITION PÉRIODIQUE D'INCLUSIONS MINCES DE GRANDE CONDUCTIVITÉ (*)

par D. CAILLERIE [1]

Communiqué par E. SANCHEZ-PALENCIA

Résumé. — *Nous étudions un problème de conduction thermique stationnaire dans un corps comportant une distribution* εY*-périodique d'inclusions minces d'épaisseur* $e\varepsilon$. *Les limites* ($e \to 0$ *puis* $\varepsilon \to 0$), ($\varepsilon \to 0$ *puis* $e \to 0$) *et enfin* (e *et* $\varepsilon \to 0$ *simultanément*) *conduisent au même résultat, ceci montre que l'ordre de grandeur relatif des deux petits paramètres est sans influence sur le comportement final.*

Abstract. — *We study the stationnary heat equation in a domain which comprises a* εY*-periodic distribution of thin inclusions of thichness* $e\varepsilon$. *The limits* ($e \to 0$ *then* $\varepsilon \to 0$), ($\varepsilon \to 0$ *then* $e \to 0$) *and lastly* ($e \to 0$ *and* $\varepsilon \to 0$ *together*) *give the same result; this shows that the relative order of magnitude between the two small parameters is without any influence upon the limit-behaviour.*

1. INTRODUCTION

L'objet de cet article est l'étude d'un problème de conduction thermique stationnaire dans un corps comportant une distribution εY périodique (ε est un petit paramètre et Y un parallélépipède fixe de $\mathbb{R}^3$) d'inclusions minces d'épaisseur $e\varepsilon$ de grande conductivité (de l'ordre de $1/e$), e est un second petit paramètre. C'est un problème de perturbation à deux petits paramètres, cependant, contrairement aux résultats obtenus pour d'autres études de problèmes à deux paramètres ([3], [4] et [5] par exemple) le rapport entre e et ε n'intervient pas dans le comportement final. L'étude de la convergence de la température $u^{e\varepsilon}$ quand e et ε tendent vers zéro l'un après l'autre ou simul-

(*) Reçu en mai 1982.
[1] Laboratoire de Mécanique Théorique, Université Pierre-et-Marie-Curie, Tour 66, 4, place Jussieu, 75230, Paris Cedex 05.

tanément montre que le problème de conduction dont est solution la limite de $u^{e\varepsilon}$ est le même dans les trois cas. Les inclusions qui, à la limite, sont infiniment minces interviennent par l'intermédiaire des coefficients de conductivité.

Le problème est défini de façon précise au paragraphe 2 ; le théorème 2.1, donnant le résultat de ce travail, y est également énoncé. Le paragraphe 3 contient les estimations a priori nécessaires à la démonstration du théorème 2.1 faite aux paragraphes 4, 5 et 6 pour les passages à la limite ($e \to 0$ puis $\varepsilon \to 0$) ($\varepsilon \to 0$ puis $e \to 0$) et (e et $\varepsilon \to 0$ simultanément). Les études des passages à la limite successifs (§§ 4 et 5) font appel à des résultats établis par d'autres auteurs et à des méthodes utilisées auparavant, elles ne posent pas de difficultés. Le cas le plus intéressant est celui des passages à la limite simultanés (§ 6), la démonstration bien qu'inspirée de celle de L. Tartar pour l'homogénéisation, nécessite le développement de méthodes particulières pour étudier la limite de termes définis dans les inclusions.

On utilise la convention des indices répétés, de plus, dans toute expression de relation, si les indices ne sont pas précisés, ils sont supposés prendre toutes les valeurs possibles, les lettres latines désignant les indices 1, 2 et 3 et les lettres grecques les indices 1 et 2.

La notation (h_{ij}) désigne la matrice de coefficients h_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$.

2. DESCRIPTION DU PROBLÈME

2.1. Définition de la matrice de conductivité

On considère un problème de conduction thermique dans un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ régulière, La température est nulle sur une partie Γ_1 de $\partial\Omega$ de mesure non nulle, le flux de chaleur étant nul sur le reste de la frontière, enfin f, appartenant à $L^2(\Omega)$, représente l'apport de chaleur par unité de volume. Les coefficients de conductivité $a_{ij}^{e\varepsilon}(x)$ ($x \in \Omega$; e, ε petits paramètres) sont périodiques de période εY (Y est le parallélépipède

$$[0, Y_1[\times]0, Y_2[\times]- Y_3/2, Y_3/2[$$

de $\mathbb{R}^3$) et sont tels que :

$$a_{ij}^{e\varepsilon}(x) = a_{ij}^{e}(x/\varepsilon) \tag{2.1}$$

où les $a_{ij}^e(y)$ ($y \in \mathbb{R}^3$) sont des fonctions Y périodiques définies de la façon suivante :

Soient T, S, I^e, Y^e les ensembles :

$$T =]0, Y_1[\times]0, Y_2[$$

S un sous-domaine de T de frontière ∂S assez régulière (voir remarque 2.1, ii))

$$I^e = \{ y \in Y \mid (y_1, y_2) \in S, \quad |y_3| < e \}$$
$$Y^e = Y - \bar{I}^e.$$

Soient $c_{ij}(y)$ ($y \in \mathbb{R}^3$) des fonctions bornées Y-périodiques et b_{ij} des coefficients constants vérifiant les relations de coercivité :

$\exists m > 0$ tel que : $\forall (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$

$$m t_i t_i \leqslant c_{ij}(y) t_i t_j \quad \text{p.p. en } y \in Y \tag{2.2}$$
$$m t_i t_i \leqslant b_{ij} t_i t_j. \tag{2.3}$$

Alors la matrice $a^e(y) = (a^e_{ij}(y))$ est définie par :

$$\left.\begin{aligned} a^e_{ij}(y) &= c_{ij}(y) \quad \text{dans} \quad Y^e \\ a^e_{ij}(y) &= \frac{1}{e} b_{ij} \quad \text{dans} \quad I^e. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Dans la terminologie des milieux composites, Ω est constitué d'une matrice de coefficients de conductivité $c_{ij}(x/\varepsilon)$ εY-périodique et d'une répartition εY-périodiques d'inclusions minces (d'épaisseur $2\, e\varepsilon$) de grande conductivité (de l'ordre de $1/e$).

Remarque 2.1 :

i) Moyennant des modifications évidentes, les résultats de ce travail sont valables pour des conditions aux limites différentes de celles énoncées au début de ce paragraphe.

ii) S ne doit pas être quelconque, il est supposé être tel que la réunion des différents S dans le prolongement par périodicité à $\mathbb{R}^2$ des rectangles T ait une frontière régulière. Les situations envisagées sont de types suivants :

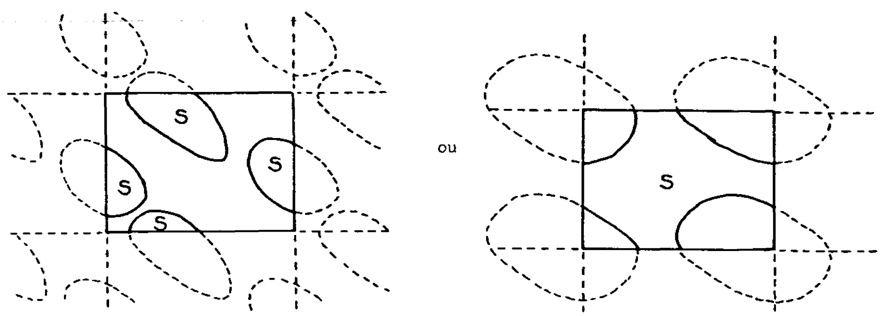

Figure 1*a*. **Figure 1*b*.**

2.2. Formulations du problème

Dans ce travail interviennent plusieurs problèmes de conduction stationnaire qui ne diffèrent que par les matrices de conductivité, il est donc pratique de définir un problème type de conduction nommé $\mathscr{C}(h)$ correspondant à la matrice générale $h = (h_{ij})$.

DÉFINITION 2.1 : *Soit $h = (h_{ij})$ une matrice définie et bornée sur Ω, la formulation classique du problème $\mathscr{C}(h)$ est :*

Trouver une fonction w (champ de température) et un vecteur $\sigma = (\sigma_i)$ (flux de chaleur) définis sur Ω et vérifiant les équations :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{i,i} + f &= 0 \\ \sigma_i &= h_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \end{aligned}\right\} \text{ dans } \Omega$$

$$w = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

$$\sigma_i n_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \quad (n \text{ normale extérieure à } \Omega \text{ sur } \partial\Omega)\,.$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

Trouver $u \in V(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_1} = 0 \}$ muni de la norme de $H^1(\Omega)$ tel que :

$$\forall v \in V(\Omega) \quad \int_\Omega h_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f v \, dx\,. \tag{2.5}$$

En utilisant des méthodes classiques en théorie des problèmes elliptiques [20], il est facile de démontrer le lemme suivant :

LEMME 2.1 : *Les formulations variationnelle et classique du problème $\mathscr{C}(h)$ sont équivalentes et si h satisfait la condition de coercivité.*

$\exists m > 0$ tel que :

$$\forall (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \quad m t_i t_i \leqslant h_{ij}(x)\, t_i t_j \quad \text{p.p. en } x \in \Omega$$

alors le problème $\mathscr{C}(h)$ admet une solution unique.

Nous considérons alors le problème $\mathscr{C}(a^{e\varepsilon})$ où $a^{e\varepsilon} = (a_{ij}^{e\varepsilon})$. D'après les hypothèses de coercivité (2.2) et (2.3) et le lemme 2.1, le problème $\mathscr{C}(a^{e\varepsilon})$ admet une solution unique nommée $u^{e\varepsilon}$.

2.3. Résultats

Le but de ce travail est d'étudier les limites de $u^{e\varepsilon}$ quand e et ε tendent vers zéro, séparément ou simultanément et de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1 : *Quand e et ε tendent vers zéro, séparément ($e \to 0$ puis $\varepsilon \to 0$ ou $\varepsilon \to 0$ puis $e \to 0$) ou simultanément, $u^{e\varepsilon}$ converge dans $V(\Omega)$ faible vers l'unique solution u du problème $\mathscr{C}(p)$ où les coefficients p_{ij} sont définis de la façon suivante :*

$$p_{ij} = \frac{1}{|Y|}\left[\int_Y \left(c_{ij} - c_{lj}\frac{\partial \chi^i}{\partial y_l}\right) dy + \int_S \left(d_{kj} - d_{\alpha j}\frac{\partial \chi^i|_s}{\partial y_\alpha}\right) dy_1\, dy_2\right] \tag{2.6}$$

où

$$d_{ij} = 2\left(b_{ij} - \frac{b_{i3}\, b_{3j}}{b_{33}}\right) \qquad (d_{3\alpha} = d_{\alpha 3} = d_{33} = 0) \tag{2.7}$$

et où χ^k est l'unique solution du problème local :

Trouver χ^k appartenant à $W(Y, S) = \left\{ \psi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \text{ périodiques de période } Y \mid \psi|_S \in H^1(S) \text{ et } \int_Y \psi\, dy = 0 \right\}$ telle que :

$$\forall \psi \in W(Y, S) \quad \int_Y c_{ij}\frac{\partial \chi^k}{\partial y_i}\frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy + \int_S d_{\alpha\beta}\frac{\partial \chi^k|_S}{\partial y_\alpha}\frac{\partial \psi|_S}{\partial y_\beta} dy_1\, dy_2 =$$

$$= \int_Y c_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy + \int_S d_{k\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} dy_1\, dy_2\,. \tag{2.8}$$

Remarque 2.2 :

(i) La convergence de $u^{e\varepsilon}$ vers u quand e et ε tendent vers zéro séparément (par exemple pour la limite $e \to 0$ puis $\varepsilon \to 0$) s'entend en ce sens que $u^{e\varepsilon}$ converge vers $u^{*\varepsilon}$ quand e tend vers zéro ε étant fixe et que $u^{*\varepsilon}$ converge vers u quand e tend vers 0.

ii) Dans la démonstration du théorème 2.1 dans le cas de limite ($e \to 0$ puis $\varepsilon \to 0$) il est supposé que la frontière $\partial\Omega$ ne rencontre pas les inclusions, ce qui impose que S est du type de la figure 1a. Pour ce cas l'énoncé du théorème doit être complété par une restriction sur la forme de S.

2.4. Notations

Les cellules homothétiques de Y dans le rapport ε qui constituent le domaine Ω sont appelées c_n^ε et numérotées de 1 à N^ε ; certaines peuvent être incomplètes.

t_n^ε $(n = 1 \dots N^\varepsilon)$ désignent les homothétiques de T.
$o_n^\varepsilon = (o_{n1}^\varepsilon, o_{n2}^\varepsilon, o_{n3}^\varepsilon)$ est l'homologue dans c_n^ε de l'origine 0 de Y.
$i_n^{e\varepsilon}$ est dans c_n^ε l'inclusion homothétique de I^e.
s_n^ε est la section de cette inclusion par les plans $x_3 = o_{n3}^\varepsilon$.

Soient enfin les ensembles :

$$\mathfrak{J}^{e\varepsilon} = \bigcup_{n=1\dots N_\varepsilon} i_n^{e\varepsilon}$$
$$\Omega^{e\varepsilon} = \Omega \setminus \mathfrak{J}^{e\varepsilon}$$
$$\mathcal{S}^\varepsilon = \bigcup_{n=1\dots N_\varepsilon} s_n^\varepsilon$$
$$\mathcal{C}^\varepsilon = \bigcup_{n=1\dots N_\varepsilon} t_n^\varepsilon$$

C désigne des constantes indépendantes de e et ε,
$\mathcal{P}$ opérateur de prolongement voir (4.7).

3. ESTIMATIONS A PRIORI

Les estimations a priori nécessaires à la démonstration du théorème 2.1 sont obtenues de façon classique en prenant, dans la formulation du problème $\mathscr{C}(a^{e\varepsilon})$, v égale à $u^{e\varepsilon}$

$$\int_{\Omega^e} c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_i} dx + \frac{1}{e} \int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f u^{e\varepsilon} dx .$$

D'après les relations de coercivité (2.2) et (2.3) ceci donne :

$$\int_{\Omega^{e\varepsilon}} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_i} dx + \frac{1}{e} \int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_i} dx \leqslant C \| u^{e\varepsilon} \|_{V(\Omega)} . \tag{3.1}$$

Comme les fonctions de $V(\Omega)$ sont nulles sur une portion de mesure non nulle de la frontière $\partial\Omega$, la norme d'une fonction dans $V(\Omega)$ est équivalente à la somme des normes dans $L^2(\Omega)$ de ses dérivées, et $u^{e\varepsilon}$ vérifie l'inégalité :

$$\| u^{e\varepsilon} \|_{V(\Omega)} \leqslant C . \tag{3.2}$$

De (3.1) découle aussi :

$$\left\| \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathfrak{I}^{e^\varepsilon})} \leqslant C(e)^{1/2} . \tag{3.3}$$

Remarque 3.1 : Dans les trois cas de limites étudiées ($e \to 0$ puis $\varepsilon \to 0$; $\varepsilon \to 0$ puis $e \to 0$ et e et $\varepsilon \to 0$ simultanément), comme $V(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est possible d'extraire de $u^{e\varepsilon}$ des sous-suites qui convergent faiblement dans $V(\Omega)$ faible. Dans chacun des cas, l'unicité de la limite qui sera établie dans la suite montre, qu'en fait, toute la suite $u^{e\varepsilon}$ converge. ■

On appelle :

$u^{*\varepsilon}$ la limite de $u^{e\varepsilon}$ quand e tend vers zéro ε étant fixe,
u^{e*} la limite de $u^{e\varepsilon}$ quand ε tend vers zéro e étant fixe,
u^* la limite de $u^{e\varepsilon}$ quand e et ε tendent vers zéro.

4. ÉTUDE DES LIMITES SUCCESSIVES $e \to 0$ PUIS $\varepsilon \to 0$

La première limite est une généralisation facile d'un résultat établi par H. Pham et E. Sanchez [5], la démonstration du lemme 4.1 qui utilise également des résultats de [3] n'est pas détaillée ici, seul un schéma en est donné.

Pour pouvoir utiliser de façon rigoureuse les résultats de densité démontrés par H. Pham et E. Sanchez, p. 301 et 302, on suppose que la frontière $\partial\Omega$ de Ω ne rencontre aucune des inclusions i_n^e $(n = 1 \dots N)$ (voir remarque 2.2, ii)).

LEMME 4.1 : *Quand e tend vers 0, $u^{e\varepsilon}$ converge dans $V(\Omega)$ faible vers $u^{*\varepsilon}$ qui est l'unique solution du problème suivant :*

Trouver $u^{*\varepsilon}$ appartenant à $V(\Omega, \mathcal{S}^\varepsilon) = \{ v \in V(\Omega) \mid v|_{\mathcal{S}^\varepsilon} \in H^1(\mathcal{S}^\varepsilon) \}$ telle que : $\forall v \in V(\Omega, \mathcal{S}^\varepsilon)$

$$\int_\Omega c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^{*\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \varepsilon \int_{\mathcal{S}^\varepsilon} d_{\alpha\beta} \frac{\partial u^{*\varepsilon}|_{\mathcal{S}^\varepsilon}}{\partial x_\beta} \frac{\partial v|_{\mathcal{S}^\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx_1\, dx_2 = \int_\Omega fv\, dx \tag{4.1}$$

où

$$c_{ij}^\varepsilon(x) = c_{ij}(x/\varepsilon)$$

et où

$$d_{\alpha\beta} = 2\left(b_{\alpha\beta} - \frac{b_{\alpha 3}\, b_{3\beta}}{b_{33}} \right) \quad \text{[voir (2.7)]}.$$

Schéma de la démonstration du lemme 4.1 :

i) Il a été établi au paragraphe 3 (remarque 3.1) que, quand e tend vers zéro, il existe une sous-suite de $u^{e\varepsilon}$ (notée $u^{e\varepsilon}$) qui converge dans $V(\Omega)$ faible vers une limite nommée $u^{*\varepsilon}$.

ii) Soit $\bar{u}^{e\varepsilon}$ la fonction définie sur $\mathcal{S}^{\varepsilon}$ valant sur chacun des s_n^{ε} ($n = 1 \dots N^{\varepsilon}$) :

$$\bar{u}^{e\varepsilon} = \frac{1}{2\,e\varepsilon}\int_{o_{n3}^{\varepsilon}-e\varepsilon}^{o_{n3}^{\varepsilon}+e\varepsilon} u^{e\varepsilon}\,dx_3 \quad \text{dans} \quad s_n^{\varepsilon} \tag{4.2}$$

où o_n^{ε} a été défini dans le paragraphe de notations 2.4. Il est facile de démontrer que $\bar{u}^{e\varepsilon}$ appartient à $H^1(\mathcal{S}^{\varepsilon})$ et que la suite $\bar{u}^{e\varepsilon}$ (plus exactement une sous-suite) converge dans $H^1(\mathcal{S}^{\varepsilon})$ vers $u^{*\varepsilon}\,|_{\mathcal{S}^{\varepsilon}}$ quand e tend vers zéro.

Ceci établit une partie du lemme 4.1 :

$$u^{*\varepsilon} \in V(\Omega, \mathcal{S}^{\varepsilon})\,.$$

iii) Soit $q^{e\varepsilon}$ le flux de composantes :

$$q_i^{e\varepsilon} = a_{ij}^{e\varepsilon}\,\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j} \tag{4.3}$$

et soit $Q^{e\varepsilon}$ le vecteur de $[L^2(\mathcal{C}^{\varepsilon})]^3$ défini sur chacun des t_n ($n = 1, 2, \dots, N^{\varepsilon}$) par :

$$\left.\begin{aligned} Q_i^{e\varepsilon} &= \int_{o_{n3}-e\varepsilon}^{o_{n3}+e\varepsilon} q_i^{e\varepsilon}\,dx_3 && \text{dans } \mathrm{s}_n^{\varepsilon} \\ Q_i^{e\varepsilon} &= 0 && \text{dans } \mathrm{t}_n^{\varepsilon} - \mathrm{s}_n^{\varepsilon} \end{aligned}\right\}\quad n = 1, \dots, N^{\varepsilon} \tag{4.4}$$

$Q_3^{e\varepsilon}$ converge vers 0 dans $L^2(\mathcal{C}^{\varepsilon})$ faible quand e tend vers zéro, pour plus de détails concernant la démonstration de ce résultat voir [3].

iv) Soit v une fonction de $V(\Omega, \mathcal{S}^{\varepsilon})$ indépendante de x_3 dans un voisinage de $\mathcal{S}^{\varepsilon}$. On prend comme fonction-test dans la formulation (2.5) pour $h = a^{e\varepsilon}$ une telle fonction v et il vient en remplaçant $\dfrac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_3}$ par $\dfrac{1}{b_{33}}\left(e q_3^{e\varepsilon} - b_{3\beta}\,\dfrac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_\beta}\right)$ (conséquence de la définition de $q_3^{e\varepsilon}$ (4.3)) :

$$\int_{\Omega^{e\varepsilon}} c_{ij}^{\varepsilon}\,\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_{\mathcal{S}^{\varepsilon}}\left(\varepsilon\, d_{\alpha\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^{e\varepsilon}}{\partial x_\beta} + \frac{b_{\alpha 3}}{b_{33}}\,Q_3^{e\varepsilon}\right)\frac{\partial v\,|_{\mathcal{S}^{\varepsilon}}}{\partial x_\alpha}\,dx_1\,dx_2 = \int_{\Omega} fv\,dx\,.$$

Ce qui donne en passant à la limite $e \to 0$:

$$\int_\Omega c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^{*\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \varepsilon \int_{\mathcal{S}^\varepsilon} d_{\alpha\beta} \frac{\partial u^{*\varepsilon}|_{\mathcal{S}^\varepsilon}}{\partial x_\beta} \frac{\partial v|_{\mathcal{S}^\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx_1 \, dx_2 = \int_\Omega fu \, dx$$

Pour déduire le lemme 4.1, il suffit alors d'utiliser le lemme 3.6 de [30] d'après lequel les fonctions v utilisées précédemment forment un ensemble dense dans $V(\Omega, \mathcal{S}^\varepsilon)$ puis de montrer que la forme bilinéaire apparaissant dans (4.1) est coercive sur $V(\Omega, \mathcal{S}^\varepsilon)$ pour cela il suffit de montrer que la matrice 2×2 $d = (d_{\alpha\beta})$ satisfait la relation :

$$\forall w = (w_1, w_2) \quad m w_\alpha w_\alpha \leqslant d_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta . \tag{4.5}$$

Ceci est fait dans [4]. ■

La seconde limite étudiée ($\varepsilon \to 0$) est une homogénéisation, elle est très proche de celle étudiée par M. Artola et G. Duvaut [1] pour des plaques renforcées par des barres. Dans cette limite $u^{*\varepsilon}$ converge vers u définie au théorème 2.1. La démonstration de ce résultat est inspirée de la méthode de L. Tartar dont un exposé peut être trouvé dans [2] et [6], elle est juste esquissée ici.

i) $u^{*\varepsilon}$ satisfait les inégalités suivantes :

$$\| u^{*\varepsilon} \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u^{*\varepsilon}|_{\mathcal{S}^\varepsilon}}{\partial x_\alpha} \right\|_{L^2(\mathcal{S}^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-1/2} .$$

Ceci découle de (4.1) en prenant $v = u^{*\varepsilon}$ et en utilisant les relations de coercivité satisfaites par (c_{ij}) (2.3) et $(d_{\alpha\beta})$ (4.5).

ii) Soit $W^{k\varepsilon}(x)$ la fonction définie dans Ω par :

$W^{k\varepsilon}(x) = x_k - \varepsilon\chi^k(x/\varepsilon)$ où χ^k est défini au théorème 2.1 par (2.8).

$W^{k\varepsilon}$ satisfait les équations :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial W^{k\varepsilon}}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega - \mathcal{S}^\varepsilon$$

$$\left[c_{i3} \frac{\partial W^{k\varepsilon}}{\partial x_i}\right] = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(d_{\alpha\beta} \frac{\partial W^{k\varepsilon}|_{\mathcal{S}^\varepsilon}}{\partial x_\alpha}\right) \quad \text{sur} \quad \mathcal{S}^\varepsilon$$

où $[v]$ désigne le saut de v à travers la surface $\mathcal{S}^\varepsilon$

$d_{\alpha\beta} \dfrac{\partial W^{k\varepsilon}|_{\mathcal{S}}}{\partial x_\alpha} \nu_\beta = 0$ sur $\partial\mathcal{S}^\varepsilon$ où (ν) est la normale extérieure à $\mathcal{S}^\varepsilon$ le long de $\partial\mathcal{S}^\varepsilon$.

iii) L'étape suivante consiste à établir de façon classique la relation suivante pour tout φ de $\mathscr{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sigma_i^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} W^{k\varepsilon}\, dx + \varepsilon \int_{\mathscr{S}^\varepsilon} \tau_\alpha^\varepsilon \frac{\partial \varphi\,|_{\mathscr{S}^\varepsilon}}{\partial x_\alpha} W^{k\varepsilon}\,|_{\mathscr{S}^\varepsilon}\, dx_1\, dx_2 -$$

$$- \int_\Omega c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial W^{k\varepsilon}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} u^{*\varepsilon}\, dx - \varepsilon \int_{\mathscr{S}^\varepsilon} d_{\alpha\beta} \frac{\partial W^{k\varepsilon}\,|_{\mathscr{S}^\varepsilon}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi\,|_{\mathscr{S}^\varepsilon}}{\partial x_\beta} u^{*\varepsilon}\,|_{\mathscr{S}^\varepsilon}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_\Omega f \varphi W^{k\varepsilon}\, dx \quad (4.6)$$

où

$$\sigma_i^\varepsilon = c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^{*\varepsilon}}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \tau_\alpha^\varepsilon = d_{\alpha\beta} \frac{\partial u^{*\varepsilon}\,|_{\mathscr{S}^\varepsilon}}{\partial x_\beta}.$$

iv) Pour terminer la démonstration il faut passer à la limite $\varepsilon \to 0$ dans la relation précédente, la seule difficulté vient de la présence d'intégrales sur $\mathscr{S}^\varepsilon$, pour la lever on introduit un opérateur de prolongement $\mathscr{P}$ qui à v de $L^2(\mathscr{C}^\varepsilon)$ associe $\mathscr{P}(v)$ de $L^2(\Omega)$ définie par :

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{P}(v) \text{ est indépendante de } x_3 \text{ dans } c_n^\varepsilon \\ \mathscr{P}(v) \text{ est égale à } v \text{ sur } t_n^\varepsilon\,. \end{array}\right. \quad n = 1, 2, \ldots, N^\varepsilon$$

La fonction $\mathscr{P}(v)$ satisfait les inégalités du lemme 4.2 dont les démonstrations, immédiates, ne sont pas données ici :

LEMME 4.2 : *Pour tout v de $L^2(\mathscr{C}^\varepsilon)$, on a :*

$$\| \mathscr{P}(v) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{1/2} \| v \|_{L^2(\mathscr{C}^\varepsilon)}\,.$$

Et si w appartient à $H^1(\Omega)$ alors :

$$\| w - \mathscr{P}(w\,|_{\mathscr{C}^\varepsilon}) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon \left\| \frac{\partial w}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\left[\int_\varepsilon [w - \mathscr{P}(w\,|_{\mathscr{C}^\varepsilon})]^2\, dx \right]^{1/2} \leqslant C e \varepsilon \left[\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} \left(\frac{\partial w}{\partial x_3} \right)^2 dx \right]^{1/2}.$$

v) La relation (4.6) où τ_α^ε et $\dfrac{\partial W^{k\varepsilon}}{\partial x_\alpha}$ sont prolongés par 0 sur $\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{S}^\varepsilon$ s'écrit :

$$\int_\Omega \sigma_i^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} W^{k\varepsilon}\, dx + \frac{1}{Y_3}\int_\Omega \mathcal{P}(\tau_\alpha^\varepsilon)\, \mathcal{P}\left(\frac{\partial \varphi\,|_{\mathcal{T}^\varepsilon}}{\partial x_\alpha} W^{k\varepsilon}\,|_{\mathcal{T}^\varepsilon}\right) dx -$$

$$- \int_\Omega c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial W^{k\varepsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} u^{*\varepsilon}\, dx - \frac{1}{Y_3}\int_\Omega \mathcal{P}\left(d_{\alpha\beta}\frac{\partial W^{k\varepsilon}\,|_{\mathcal{T}^\varepsilon}}{\partial x_\alpha}\right)\mathcal{P}\left(\frac{\partial \varphi\,|_{\mathcal{T}^\varepsilon}}{\partial x_\beta} u^{*\varepsilon}\,|_{\mathcal{T}^\varepsilon}\right) dx =$$

$$= \int_\Omega f\varphi W^{k\varepsilon}\, dx\,.$$

Le passage à la limite dans cette relation, en utilisant le lemme 4.2, donne :

$$\int_\Omega \Sigma_i^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_k\, dx = \int_\Omega \left[\frac{1}{|Y|}\int_Y \left(c_{kj} - c_{ij}\frac{\partial \chi^k}{\partial y_i}\right) dy + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|Y|}\int_S \left(d_{kj} - d_{\alpha j}\frac{\partial \chi_S^k}{\partial y_\alpha}\right) dy_1\, dy_2\right] u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega f\varphi x_k\, dx$$

où u^* est la limite faible de $u^{*\varepsilon}$ dans $H^1(\Omega)$
et
où Σ_i^* est la limite faible dans $L^2(\Omega)$ de $\sigma_i^\varepsilon + \mathcal{P}(\tau_\alpha^\varepsilon)\,\delta_{\alpha i}$, (Σ_i^*) vérifie $\Sigma_{i,i}^* + f = 0$.

On obtient donc la relation de comportement

$$\Sigma_i^* = p_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_j} \quad \text{les } p_{ij} \text{ étant définis par (2.6)}.$$

La coercivité de la matrice (p_{ij}) se démontre de façon classique et u^* est l'unique solution du problème $\mathscr{C}(p)$, cette fonction est donc égale à u définie au théorème 2.1.

Ceci termine la démonstration du théorème 2.1 dans le cas des limites successives ($e \to 0$ puis $\varepsilon \to 0$).

5. ÉTUDE DES LIMITES SUCCESSIVES $\varepsilon \to 0$ PUIS $e \to 0$

Les résultats de la limite $\varepsilon \to 0$ sont une application directe des travaux d'homogénéisation de [2] et [6], ils sont donnés ici sans démonstration.

PROPOSITION 5.1 : *Quand ε tend vers zéro, e restant fixe, $u^{e\varepsilon}$ converge dans $V(\Omega)$ faible vers u^{e*} qui est l'unique solution du problème $\mathscr{C}(p^e)$.*

$p^e = (p^e_{ij})$ est définie de la façon suivante :

Soit χ^{ke} l'unique solution du problème :

Trouver χ^{ke} appartenant à $W(Y) = \{ \psi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ périodiques de période Y et telles que

$$\left. \int_Y \psi \, dy = 0 \right\}$$

telle que :

$$\int_Y a^e_{ij} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy = \int_Y a^e_{kj} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy \quad \forall \psi \in W(Y) \tag{5.1}$$

alors p est donnée par :

$$p^e_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(a^e_{ij} - a^e_{kj} \frac{\partial \chi^{ie}}{\partial y_k} \right) dy . \tag{5.2}$$

D'après (3.1), il est évident que u^{e*} vérifie :

$$\| u^{e*} \|_{V(\Omega)} \leqslant C .$$

Donc quand e tend vers zéro, il est possible d'extraire une sous-suite de la suite u^{e*} qui converge dans $V(\Omega)$ faible. Comme les p^e_{ij} ne dépendent pas de x, pour montrer que la limite de u^{e*} est u (définie au théorème 2.1) il suffit de montrer que p^e_{ij} converge vers p_{ij} quand e tend vers zéro. Pour cela il faut d'abord étudier le comportement de χ^{ke} quand $e \to 0$ et démontrer le lemme 5.1 :

LEMME 5.1 : *Quand e tend vers zéro, χ^{ke} définie par* (5.1) *converge dans $W(Y)$ faible vers χ^k définie par* (2.8).

Démonstration : En utilisant (2.4), (5.1) où ψ est pris égal à χ^{ke}, devient :

$$\int_{Y^e} c_{ij} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} dy + \frac{1}{e} \int_{I^e} b_{ij} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} dy = \int_{Y^e} c_{kj} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} + \frac{1}{e} \int_{I^e} b_{kj} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} dy .$$

Ici et dans les expressions suivantes, il n'y a pas de sommation sur l'indice k. Dans les intégrales sur I^e on effectue le changement de variables :

$$z_\alpha = y_\alpha \qquad z_3 = \frac{y_3}{e}$$

I^e devient I et $\tilde{\chi}^{ke}$ est la fonction définie sur I par :

$$\tilde{\chi}^{ke}(z) = \chi^{ke}(z_1, z_2, ez_3) .$$

Le changement de variables donne :

$$\int_{Y^e} c_{ij} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} dy + \int_I \left[b_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_\beta} + b_{\alpha 3} \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_\alpha} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_3} \right) + \right.$$

$$\left. + b_{3\alpha} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_3} \right) \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_\alpha} + b_{33} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_3} \right) \left(\frac{1}{e} \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_3} \right) \right] dz =$$

$$= \int_{Y^e} c_{kj} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} dy + \int_I \left[b_{k\alpha} \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_\alpha} + b_{k3} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_3} \right) \right] dz .$$

En raison de la coercivité de b et de (1.2) et (1.3), il vient :

$$\sum_{j=1,2,3} \left\| \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} \right\|^2_{L^2(Y^e)} + \sum_{\alpha=1,2} \left\| \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_\alpha} \right\|^2_{L^2(I)} + \frac{1}{e^2} \left\| \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(I)} \leqslant$$

$$\leqslant C \left[\sum_{j=1,2,3} \left\| \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial y_j} \right\|_{L^2(Y^e)} + \sum_{\alpha=1,2} \left\| \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_\alpha} \right\|_{L^2(I)} + \frac{1}{e} \left\| \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_3} \right\|_{L^2(I)} \right]$$

d'où

$$\sum_{j=1,2,3} \left\| \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} \right\|_{L^2(Y^e)} + \sum_{\alpha=1,2} \left\| \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_\alpha} \right\|_{L^2(I)} + \frac{1}{e} \left\| \frac{\partial \tilde{\chi}^{ke}}{\partial z_3} \right\|_{L^2(I)} \leqslant C .$$

Et en revenant aux variables y sur I^e, cette expression devient :

$$\sum_{j=1,2,3} \left\| \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} \right\|_{L^2(Y^e)} + \frac{1}{e^{1/2}} \sum_{j=1,2,3} \left\| \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} \right\|_{L^2(Y^e)} \leqslant C \tag{5.3}$$

ce qui entraîne :

$$\| \chi^{ke} \|_{W(Y)} \leqslant C . \tag{5.4}$$

Soit maintenant :

$$\varphi^{ke} = \frac{1}{e} b_{i3} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i} \text{ dans } I^e , \text{ et } \overline{\varphi}^{ke} = \int_{-e}^{e} \varphi^{ke} \, dy_3 \text{ dans } S$$

$$\overline{\varphi}^{ke} = 0 \qquad \text{dans } T - S . \tag{5.5}$$

De façon évidente $\overline{\varphi}^{ke}$ appartient à $L^2(S)$ et il découle facilement de (5.3) que $\overline{\varphi}^{ke}$ vérifie :

$$\| \overline{\varphi}^{ke} \|_{L^2(S)} \leqslant C \tag{5.6}$$

$W(Y)$ et $L^2(S)$ sont des espaces de Hilbert et tout sous-ensemble borné de ces espaces est faiblement précompact donc, d'après (5.4) et (5.6) il est possible d'extraire des suites (χ^{ke}) et $(\overline{\varphi}^{ke})$ des sous-suites qui convergent faiblement dans $W(Y)$ et dans $L^2(S)$ vers χ^{k*} et $\overline{\varphi}^{k*}$.

Soit enfin

$$\overline{\chi}^{ke} = \frac{1}{2e} \int_{-e}^{e} \chi^{ke} \, dy_3 \quad \text{définie dans } S\,. \tag{5.7}$$

Il n'est pas difficile de montrer en utilisant les méthodes développées par Pham et Sanchez dans [5] que $\overline{\chi}^{ke}$ appartient à $H^1(S)$ et qu'il est possible d'extraire de $\overline{\chi}^{ke}$ une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(S)$ vers $\chi^{k*}|_S$ qui appartient donc à $H^1(S)$.

De tout ceci découle le lemme suivant :

LEMME 5.2 : *Quand e tend vers zéro, il est possible d'extraire de* (χ^{ke}), $(\overline{\varphi}^{ke})$ *et* $(\overline{\chi}^{ke})$ *des sous-suites qui convergent dans* $W(Y)$, $L^2(S)$ *et* $H^1(S)$ *faible vers les fonctions* χ^{ke}, $\overline{\varphi}^{k*}$ *et* $\overline{\chi}^{k*}|_S$.

De plus χ^{k*} *appartient à* $W(Y, S)$.

La suite de la démonstration est consacrée à l'identification de χ^{k*} qui nécessite celle de φ^{k*} et pour cela il faut utiliser le lemme 5.3 dont la démonstration analogue à celle faite par Pham et Sanchez [5], p. 301-302 n'est pas exposée ici.

LEMME 5.3 :

i) *Toute fonction ψ de $W(Y)$ dont la trace sur S est nulle peut être approchée dans la topologie de $W(Y)$ par une suite de fonctions ψ_m nulles dans des voisinages (dépendants de m) de S.*

ii) *Toute fonction ψ de $W(Y, S)$ peut être approchée dans la topologie de $W(Y, S)$ par une suite de fonctions ψ_m indépendante de y_3 dans des voisinages (dépendants de m) de S.*

Soit ψ une fonction de $W(Y)$ telle que $\psi|_S = 0$ et (ψ_m) une suite de fonctions nulles dans des voisinages de S telle que $\psi_m \xrightarrow[m \to \infty]{} \psi$ dans $W(Y)$ fort (voir Lemme 5.3). En prenant ψ_m (m fixé) comme fonction test dans (5.1), il vient, pour e assez petit :

$$\int_{Y^e} c_{ij} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i} \frac{\partial \psi_m}{\partial y_j} \, dy = \int_Y c_{kj} \frac{\partial \psi_m}{\partial y_j} \, dy\,.$$

Ce qui donne après passage aux limites successives $e \to 0$ et $m \to \infty$

$$\int_Y c_{ij} \frac{\partial \chi^{k*}}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy = \int_Y c_{kj} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy \quad \forall \psi \in W(Y) \quad \text{tel que} \quad \psi|_S = 0 . \tag{5.8}$$

Soit θ une fonction de $\mathscr{D}(S)$ prolongée sur Y en une fonction indépendante de y_3. On construit une fonction ψ de $W(Y)$ telle que $\psi = y_3 \theta$ dans un voisinage de S, ceci est compatible avec la périodicité de ψ, en prenant cette fonction comme fonction test dans (5.1) cette relation s'écrit, pour e assez petit :

$$\int_{Y^e} c_{ij} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i} \frac{\partial \theta}{\partial y_j} dy + \frac{1}{e} \int_{I^e} y_3 \, b_{j\alpha} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_j} \frac{\partial \theta}{\partial y_\alpha} dy + \frac{1}{e} \int_{I^e} \varphi^{ke} \, \theta \, dy =$$

$$= \int_{Y^e} c_{ki} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy + \frac{1}{e} \int_{I^e} y_3 \, b_{k\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial y_\alpha} dy + \frac{1}{e} \int_{I^e} b_{k3} \, \theta \, dy .$$

θ est indépendant de y_3, donc en passant à la limite en utilisant (5.3), il vient :

$$\int_Y c_{ij} \frac{\partial \chi^{k*}}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy + \int_S \overline{\varphi}^{k*} \, \theta \, dy_1 \, dy_2 = \int_Y c_{ki} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy + 2 \int_S b_{k3} \, \theta \, dy_1 \, dy_2$$

ψ est nulle sur S donc d'après (5.8) on a :

$$\int_S \overline{\varphi}^{k*} \, \theta \, dy_1 \, dy_2 = 2 \int_S b_{k3} \, \theta \, dy_1 \, dy_2 \quad \forall \theta \in \mathscr{D}(S)$$

et par conséquent :

$$\overline{\varphi}^{k*} = 2 \, b_{k3} . \tag{5.9}$$

Soit ψ une fonction de $W(Y)$ indépendante de y_3 dans un voisinage de S et donc dans tous les I^e pour e assez petit. Pour une telle fonction test, (5.1) s'écrit :

$$\int_{Y^e} c_{ij} \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} + \int_S d_{\alpha\beta} \frac{\partial \overline{\chi}^{ke}}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} dy_1 \, dy_2 + \int_S \frac{b_{3\beta}}{b_{33}} \varphi^{ke} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} dy_1 \, dy_2 =$$

$$= \int_{Y^e} c_{ki} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy + 2 \int_S b_{k\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} dy$$

où $\dfrac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_3}$ a été remplacé par $\dfrac{1}{b_{33}} \left(e\varphi^{ke} - b_{\alpha 3} \dfrac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_\alpha} \right)$ et où $d_{\alpha\beta}$ est défini par (2.7).

En utilisant le lemme 5.2 et (5.9) le passage à la limite donne :

$$\int_Y c_{ij} \frac{\partial \chi^{k*}}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy + \int_S d_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{\chi}^{k*}|_S}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi|_S}{\partial y_\beta} dy_1 \, dy_2 =$$

$$= \int_Y c_{ki} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy + \int_S 2\left(b_{k\beta} - \frac{b_{3\beta} b_{k3}}{b_{33}}\right) \frac{\partial \psi|_S}{\partial y_\beta} dy_1 \, dy_2 \,.$$

D'après le lemme 5.3 cette relation est vraie pour toute fonction de $W(Y, S)$ et χ^{k*} est égale à χ^k définie au théorème 2.1 comme étant l'unique solution du problème variationnel précédent.

Pour terminer la démonstration du théorème 2.1 dans le cas de limites successives $\varepsilon \to 0$ puis $e \to 0$, il ne reste plus qu'à démontrer que p_{ij}^e converge vers p_{ij}.

p_{ij}^e est défini par (5.2) et p_{ij} par (2.6) au théorème 2.1.

D'après (2.4), (5.2) s'écrit :

$$p_{ij}^e = \frac{1}{|Y|}\left[\int_{Y^e} \left(c_{ij} - c_{kj} \frac{\partial \chi^{ie}}{\partial y_k}\right) dy + \frac{1}{e} \int_{I^e} \left(b_{ij} - b_{kj} \frac{\partial \chi^{ie}}{\partial y_k}\right) dy\right].$$

En remplaçant $\dfrac{\partial \chi^{ie}}{\partial y_3}$ par $\dfrac{1}{b_{33}}\left(e\varphi^{ie} - b_{\alpha 3} \dfrac{\partial \chi^{ie}}{\partial y_\alpha}\right)$ et remarquant que b est une matrice constante, il vient :

$$p_{ij}^e = \frac{1}{|Y|}\left[\int_{Y^e} \left(c_{ij} - c_{kj} \frac{\partial \chi^{ie}}{\partial y_k}\right) dy + \int_S \left(b_{ij} - d_{\alpha j} \frac{\partial \bar{\chi}^{ie}}{\partial y_\alpha} - \frac{b_{3j}}{b_{33}} \bar{\varphi}^{ie}\right) dy_1 \, dy_2\right].$$

En passant à la limite en utilisant (5.3) le lemme 5.2 et (5.9) on obtient :

$$\lim_{e \to 0} p_{ij}^e = \frac{1}{|Y|}\left[\int_Y \left(c_{ij} - c_{kj} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_k}\right) dy + \int_S \left(d_{ij} - d_{\alpha j} \frac{\partial \chi^i|_S}{\partial y_\alpha}\right) dy_1 \, dy_2\right] = p_{ij} \,.$$

6. ÉTUDE DE LA LIMITE (e ET $\varepsilon \to 0$)

Dans ce paragraphe, le théorème 2.1 est démontré dans le cas où e et ε tendent simultanément vers 0. On peut supposer par exemple que e dépend de ε et que $e(\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε ; la notation en e et ε est conservée. La démonstration utilise la méthode de L. Tartar (déjà citée) adaptée à ce cas particulier où les fonctions locales χ^{ke} dépendent par l'intermédiaire de e du paramètre d'homogénéisation ε.

Au paragraphe 3, il a été établi que $u^{e\varepsilon}$ reste borné dans $V(\Omega)$ et qu'il existe une sous-suite qui converge dans $V(\Omega)$ faible quand e et ε tendent vers 0. La limite est notée u^*.

Il reste à montrer que la limite de $u^{e\varepsilon}$ est solution du problème $\mathscr{C}(p)$. Nous commençons par démontrer le lemme suivant :

LEMME 6.1 : *Quand e et ε tendent vers 0 simultanément, il existe une sous-suite de $q_i^{e\varepsilon}$ (défini par (4.3)) qui converge dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ vers q_i^* ($i = 1, 2, 3$) ces limites étant telles que $q_{i,i}^* + f = 0$.*

Démonstration : D'après (4.3) et (2.4), $q_i^{e\varepsilon}$ est tel que :

$$\forall v \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \int_\Omega q_i^{e\varepsilon}\, v\, dx = \int_{\Omega^{e\varepsilon}} c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\, v\, dx + \frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\, v\, dx\,. \quad (6.1)$$

Il est facile de montrer en utilisant (3.3) pour $i = 1, 2, 3$, qu'il est possible d'extraire de $q_i^{e\varepsilon 1}$ défini dans Ω tout entier et égal à $c_{ij}^\varepsilon \dfrac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}$ une sous-suite qui converge (quand e et $\varepsilon \to 0$) vers q_i^{*1} dans $L^2(\Omega)$ faible et que

$$\int_{\Omega^{e\varepsilon}} c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\, v\, dx \quad \text{converge vers} \quad \int_\Omega q_i^{*1}\, v\, dx$$

pour tout v de $L^2(\Omega)$ et donc pour tout v de $\mathscr{D}(\Omega)$.

Le dernier terme de (6.1) se décompose en :

$$\frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\, v\, dx = \frac{1}{e}\left[\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\left(v - \mathscr{P}(v\,|_{\mathscr{C}_\varepsilon})\right) dx + {} \right.$$
$$\left. + \int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\mathscr{P}(v\,|_{\mathscr{C}_\varepsilon})\, dx\right] \quad (6.2)$$

où $\mathscr{P}$ est l'opérateur défini par (4.7).

Le premier terme du second membre de (6.2) vérifie, d'après (3.3) et le lemme 4.2, l'inégalité :

$$\left|\frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\left(v - \mathscr{P}(v\,|_{\mathscr{C}_\varepsilon})\right) dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{e}\left[\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}}\left(b_{ij}\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\right)^2 dx \int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}}\left(v - \mathscr{P}(v\,|_{\mathscr{C}_\varepsilon})\right)^2 dx\right]^{1/2}$$
$$\leqslant \frac{1}{e}\, c e^{1/2}\, e\varepsilon\left[\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2 dx\right]^{1/2}.$$

Ce terme tend donc vers zéro quand e et ε tendent vers zéro. Le deuxième terme du second membre de (6.2) est, d'après 4.4, égal à :

$$\frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\mathscr{P}(v\,|_{\mathcal{C}_\varepsilon})\,dx = \int_{\mathcal{C}^\varepsilon} Q_i^{e\varepsilon}\,v\,|\,dx = \frac{1}{\varepsilon Y_3}\int_\Omega \mathscr{P}(Q_i^{e\varepsilon})\,\mathscr{P}(v\,|_{\mathcal{C}^\varepsilon})\,dx\,.$$

Il est facile de montrer à l'aide de (4.4), (3.3) et du lemme 4.2 que $\frac{1}{\varepsilon Y_3}\mathscr{P}(Q_i^{e\varepsilon})$ reste borné dans $L^2(\Omega)$ quand e et ε tendent vers zéro. Il est donc possible d'extraire de cette suite une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$ faible vers q_i^{*2}. De plus d'après le lemme 4.2, il est évident que $\mathscr{P}(v\,|_{\mathcal{C}^\varepsilon})$ converge dans $L^2(\Omega)$ fort vers v. En conclusion pour tout v de $\mathscr{D}(\Omega)$ on a :

$$\frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j}\mathscr{P}(v\,|_{\mathcal{C}^\varepsilon})\,dx \xrightarrow[e,\varepsilon\to 0]{} \int_\Omega q_i^{*2}\,v\,dx$$

et en reportant dans (6.1)

$$\forall v\in\mathscr{D}(\Omega)\quad \int_\Omega q_i^{e\varepsilon}\,v\,dx \xrightarrow[e,\varepsilon\to 0]{} \int_\Omega q_i^{*1}\,v\,dx + \int_\Omega q_i^{*2}\,v\,dx$$

soit

$$q^{e\varepsilon}_{i_{e,\varepsilon\to 0}} \to q_i^{*1} + q_i^{*2} = q_i^* \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega)\,.$$

Pour terminer les démonstrations du lemme 6.1 il suffit de voir que d'après (2.5) pour $h = a^{e\varepsilon}$ et (4.3) $q_i^{e\varepsilon}$ satisfait :

$$\forall v\in\mathscr{D}(\Omega)\quad \int_\Omega q_i^{e\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega fv\,dx$$

et ensuite de passer à la limite (e et $\varepsilon \to 0$) dans cette expression. ■

Il ne reste plus qu'à établir la relation liant q_i^* et u^*.

Soit X^{ke} la fonction de $H^1(\Omega)$ définie par :

$$X^{ke\varepsilon}(x) = x_k - \varepsilon\chi^{ke}(x/\varepsilon) \quad \text{où } \chi^{ke} \text{ est définie en (5.1).} \tag{6.3}$$

D'après (5.1), $X^{ke}(x)$ vérifie l'équation $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^\varepsilon\frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i}\right) = 0$ dans Ω au sens des distributions (il y a en effet des conditions de saut aux frontières communes de $\mathfrak{J}^{e\varepsilon}$ et $\Omega^{e\varepsilon}$).

De (2.5) pour $h = a^{e\varepsilon}$ où v est pris égal à $\psi X^{ke\varepsilon}$, ψ appartenant à $\mathscr{D}(\Omega)$, et de l'équation satisfaite par X^{ke} il vient :

$$\int_\Omega q_i^{e\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} X^{ke\varepsilon}\, dx - \int_\Omega a_{ij}^{e\varepsilon} \frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i} u^{e\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\, dx = \int_\Omega f\psi X^{ke\varepsilon}\, dx .$$

Soient A_1, A_2, et A_3 les trois termes de la relation (6.4).

i) Etude de A_1

D'après (6.3), A_1 vaut :

$$A_1 = \int_\Omega q_i^{e\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\left(x_k - \varepsilon\chi^{ke}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx = \int_\Omega q_i^{e\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} x_k\, dx - \varepsilon \int_\Omega q_i^{e\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \chi^{ke}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx.$$

La seconde intégrale de A_1 tend vers zéro, en effet, en raison de (4.3) cette intégrale s'écrit :

$$\varepsilon \int_\Omega q_i^{e\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \chi^{ke}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx =$$

$$= \varepsilon \int_{\Omega^{e\varepsilon}} c_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \chi^{ke}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx + \varepsilon \int_{\Omega^{e\varepsilon}} \frac{1}{e} b_{ij} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \chi^{ke}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx .$$

Il est facile de voir que le premier terme du second membre de cette égalité tend vers zéro avec ε, le second terme est, en raison de (3.3) majoré par :

$$\left| \varepsilon \int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} \frac{1}{e} b_{ij} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \chi^{ke}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon(1/e)^{1/2} \left\| \chi^{ke}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathfrak{J}^{e\varepsilon})} \leqslant C\varepsilon(1/e)^{1/2} \| \chi^{ke}(y) \|_{L^2(I^e)} .$$

Or $\| \chi^{ke}(y) \|_{L^2(I^e)}$ est majorée par $C(e)^{1/2}$ ceci s'établit facilement en introduisant la trace de χ^{ke} sur S prolongée à I^e en une fonction indépendante de y_3.

Donc l'une des deux intégrales de A_1 tend vers zéro avec ε, en conséquence d'après le lemme 6.1, la limite de A_1 est donnée par :

$$A_1 \xrightarrow[e,\varepsilon\to 0]{} \int_\Omega q_i^* \frac{\partial \psi}{\partial x_i} x_k \, dx .$$

ii) Etude de A_2

A_2 peut s'écrire de la façon suivante :

$$A_2 = \int_\Omega c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i} u^{e\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx - $$
$$- \int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} u^{e\varepsilon} dx + \frac{1}{e} \int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij} \frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i} u^{e\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \quad (6.6)$$

or

$$c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i} = \left(c_{kj}^\varepsilon - c_{ij}^e \frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i} \right) \Bigg|_{y = x/\varepsilon} .$$

Cette expression est donc périodique de période εY sa limite quand ε tend vers zéro se déduit du lemme suivant dont la démonstration, facile, n'est pas donnée ici.

LEMME 6.2 : *Soit ψ^ε une suite de fonctions de $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ périodiques de période Y qui converge vers ψ^* dans $L^2(Y)$ faible, alors la suite de fonctions définies sur Ω par $\Psi^\varepsilon(x) = \psi^\varepsilon(x/\varepsilon)$ converge dans $L^2(\Omega)$ faible vers $\frac{1}{|Y|} \int_Y \psi^*(y)\, dy$.*

En appliquant ce lemme à $c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i}$ en utilisant le fait que $u^{e\varepsilon}$ converge dans $L^2(\Omega)$ fort vers sa limite u^*, il vient :

$$\int_\Omega c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i} u^{e\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \xrightarrow[e,\varepsilon\to 0]{} \times$$
$$\times \int_\Omega \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y \left(c_{kj} - c_{ij} \frac{\partial \chi^k}{\partial y_i} \right) dy \right] u^* \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx . \quad (6.7)$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz et aux majorations (5.3) et (3.3), il est facile de montrer que :

$$\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} c_{ij}^\varepsilon \frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} u^{e\varepsilon} dx \xrightarrow[e,\varepsilon\to 0]{} 0 . \quad (6.8)$$

La limite du dernier terme de (6.6) s'étudie avec les méthodes utilisées dans la démonstration du lemme 6.1

$$\frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}u^{e\varepsilon}dx =$$

$$+\frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \psi}{\partial x_j}u^{e\varepsilon} - \mathscr{P}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}u^{e\varepsilon}\right)\Big|_{\mathfrak{T}^\varepsilon}\right]\right]dx +$$

$$+\frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i}\mathscr{P}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}u^{e\varepsilon}\right)\Big|_{\mathfrak{T}^\varepsilon}\right)\bigg]dx\,. \qquad (6.9)$$

D'après le lemme 4.2 et l'inégalité (5.3), on a :

$$\frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i}\left[\frac{\partial \psi}{\partial x_j}u^{e\varepsilon} - \mathscr{P}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}u^{e\varepsilon}\right)\Big|_{\mathfrak{T}^\varepsilon}\right]\right]dx <$$

$$< C\left(\frac{1}{e}\right)^{1/2} e\varepsilon\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_3}u^{e\varepsilon}\right\|_{L^2(\mathfrak{J}^{e\varepsilon})}.$$

Or comme $u^{e\varepsilon}$ reste borné dans $V(\Omega)$ (voir (3.2)) ce terme tend vers zéro avec e et ε.

Le dernier terme du second membre de (6.9) se transforme de la façon suivante :

$$\frac{1}{e}\int_{\mathfrak{J}^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i}\mathscr{P}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}u^{e\varepsilon}\right)\Big|_{\mathfrak{T}^\varepsilon}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{Y_3}\int_\Omega [\mathscr{P}_T(g_j^{ke})]\,\big|_{y=x/\varepsilon}\,\mathscr{P}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}u^{e\varepsilon}\right)\Big|_{\mathfrak{T}^\varepsilon}\right]dx$$

où $g_j^{ke}(y)$ est une fonction de $L^2(T)$ définie par :

$$g_j^{ke}(y) = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e}\left(b_{kj} - b_{ij}\frac{\partial \chi^{ke}}{\partial y_i}\right)dy_3 \quad \text{dans } S$$

$$g_j^{ke}(y) = 0 \qquad\qquad \text{dans } T - S$$

et où $\mathscr{P}_T$ est l'opérateur qui prolonge une fonction définie sur T en une fonction définie dans Y indépendante de y_3.

D'après le lemme 4.2 et en raison de la convergence forte de $u^{e\varepsilon}$ dans $L^2(\Omega)$ vers u^* la fonction $\mathscr{P}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}u^{e\varepsilon}\right)\Big|_{\mathfrak{T}^\varepsilon}\right]$ converge fortement vers $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}u^*$ dans $L^2(\Omega)$.

L'étude de la limite de $[\mathcal{P}_T(g_j^{ke})]_{y=x/\varepsilon}$ utilise le lemme 6.2 et le lemme suivant dont la démonstration, immédiate, n'est pas donnée ici.

LEMME 6.3 : *Soit ψ^ε une suite de fonction de $L^2(T)$ convergeant vers ψ^* dans $L^2(T)$ faible quand ε tend vers zéro alors $\mathcal{P}_T(\psi^\varepsilon)$ converge vers $\mathcal{P}_T(\psi^*)$ dans $L^2(Y)$ faible.*

Il suffit donc d'étudier la limite de g_j^{ke} dans $L^2(T)$ ce qui se ramène à l'étude de la limite de g_j^{ke} dans $L^2(S)$ car g_j^{ke} est nulle sur $T - S$

$$g_j^{ke} = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e}\left(b_{kj} - b_{ij}\frac{\partial\chi^{ke}}{\partial y_i}\right)dy_3 \quad \text{dans} \quad S\,.$$

Ce qui en raison de (5.5) devient :

$$g_j^{ke} = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e}\left[b_{kj} - \left(b_{\alpha j} - \frac{b_{\alpha 3}\,b_{3j}}{b_{33}}\right)\frac{\partial\chi^{ke}}{\partial y_\alpha} - \frac{b_{3j}}{b_{33}}\,e\varphi^{ke}\right]dy$$

$$= 2\,b_{kj} - \frac{b_{3j}}{b_{33}}\,\overline{\varphi}^{ke} - d_{\alpha j}\frac{\partial\overline{\chi}^{ke}}{\partial y_\alpha}\,.$$

D'après le lemme 5.2 et (5.9), la limite de g_j^{ke} est :

$$g_j^{ke} \underset{e\to 0}{\to} \begin{cases} d_{kj} - d_{\alpha j}\dfrac{\partial\chi^k|_S}{\partial y_\alpha} & \text{dans } S \\ 0 & \text{dans } T - S\,. \end{cases}$$

Donc en faisant tendre e et ε vers zéro dans (6.9), il vient :

$$\lim_{e,\varepsilon\to 0}\frac{1}{e}\int_{3^{e\varepsilon}} b_{ij}\frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,u^{e\varepsilon}\,dx$$

$$= \frac{1}{Y_3}\int_\Omega\left[\frac{1}{|Y|}\int_Y \mathcal{P}_T\left(d_{kj} - d_{\alpha j}\frac{\partial\chi^k|_S}{\partial y_\alpha}\right)dy\right]\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,u^*\,dx$$

$$= \int_\Omega\left[\frac{1}{|Y|}\int_S\left(d_{kj} - d_{\alpha j}\frac{\partial\chi^k|_S}{\partial y_\alpha}\right)dy_1\,dy_2\right]\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,u^*\,dx\,. \quad (6.10)$$

D'après les résultats (6.7), (6.8) et (6.10), la limite A_2 est :

$$A_2 = \int_\Omega a_{ij}^{e\varepsilon}\frac{\partial X^{ke\varepsilon}}{\partial x_i}\,u^{e\varepsilon}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j} \xrightarrow[\varepsilon,e\to 0]{} \int_\Omega\left[\frac{1}{|Y|}\int_Y\left(c_{kj} - c_{ij}\frac{\partial\chi^k}{\partial y_i}\right)dy\,+\right.$$

$$\left.+\,\frac{1}{|Y|}\int_S\left(d_{kj} - d_{\alpha j}\frac{\partial\chi^k|_S}{\partial y_\alpha}\right)dy_1\,dy_2\right]\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,u^*\,dx = \int_\Omega p_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,u^*\,dx\,. \quad (6.11)$$

iii) Étude de A_3

Il eşt évident que $X^{ke\varepsilon}$ converge dans $L^2(\Omega)$ fort vers x_k et donc que A_3 converge vers $\int_\Omega f\psi x_k\,dx$ quand e et ε tendent vers zéro.

Les études de A_1, A_2, A_3 permettent de passer à la limite (e, $\varepsilon \to 0$) dans l'expression (6.4), en regroupant les résultats (6.5), (6.11) et celui concernant A_3, il vient :

$$\int_\Omega q_i^* \frac{\partial\psi}{\partial x_i} x_k\,dx - \int_\Omega p_{kj} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} u^*\,dx = \int_\Omega f\psi x_k\,dx\,.$$

Comme q_i^* satisfait l'équation $q_{i,i}^* + f = 0$ (Lemme 6.1) de l'expression précédente il vient :

$$q_i^* = p_{ij} \frac{\partial u^*}{\partial x_j}. \tag{6.12}$$

On en déduit donc que u^* est l'unique solution du problème $\mathscr{C}(p)$, ceci termine la démonstration du théorème 2.1 dans le cas où e et ε tendent simultanément vers zéro.

REFERENCES

[1] M. Artola et G. Duvaut, C.R.A.S. Paris, série A, t. 286 (1978), pp. 659-662.

[2] A. Bensoussan, J. L. Lions et G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures,* Amsterdam, North-Holland, 1978.

[3] D. Caillerie, Math. Meth. in the Appl. Sci., 2 (1980), pp. 251-270.

[4] D. Caillerie, RAIRO Analyse numèrique, Vol. 15, nº 4 (1981).

[5] H. Pham huy et E. Sanchez-Palencia, J. of Math. Anal. and Appl., Vol. 47, nº 2 (1974), pp. 284-309.

[6] E. Sanchez-Palencia, *Non Homogeneous Media and Vibration Theory,* Lectures Notes in Physics nº 127, Berlin, Springer-Verlag (1980).