RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

A. BERMÚDEZ
J. M. VIAÑO

Étude de deux schémas numériques pour les équations de la thermoélasticité

RAIRO. Analyse numérique, tome 17, nº 2 (1983), p. 121-136
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1983__17_2_121_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 17, n° 2, 1983, p. 121 à 136)

ÉTUDE DE DEUX SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR LES ÉQUATIONS DE LA THERMOÉLASTICITÉ (*)

par A. BERMÚDEZ et J. M. VIAÑO (1)

Communiqué par G. DUVAUT

Résumé. — *Dans cet article nous étudions deux schémas semidiscrétisés en temps pour les équations de la thermoélasticité linéaire et nous obtenons des estimations de l'erreur. Pour la résolution de ces problèmes semidiscrétisés à chaque pas de temps, nous proposons une méthode itérative. A chaque itération un problème d'élasticité et un autre de thermique doivent être résolus.*

Abstract. — *In this paper, we study two semidiscrete schemes for approximating the equations of linear thermoelasticity, and we obtain error estimates. For solving the semidiscrete problems at each time step, we propose an iterative method. At each iteration, one must solve an elasticity problem and a thermal problem.*

1. LES ÉQUATIONS DE LA THERMOÉLASTICITÉ

On considère un milieu continu occupant un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), borné, de frontière Γ « régulière ». Si $u = (u_i)_{i=1}^3$ est le champ des déplacements et θ le champ des différences de température par rapport à une température moyenne constante ν_0, on a les équations (*cf.* Duvaut-Lions (7), Carlson (4), Viaño [9]) :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} [\sigma_{ij}(u, \theta)] + f_i \tag{1.1}$$

$$\rho_0 C \frac{\partial \theta}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right] + \nu_0 \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\, \varepsilon_{ij}\!\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = Q \tag{1.2}$$

(*) Reçu en février 1982.

(1) Departamento de Ecuaciones Funcionales, Facultad de Matemáticas, Universidad de Santiago, Espagne.

et la loi de comportement thermoélastique

$$\sigma_{ij}(u, \theta) = \sum_{h,k=1}^{n} a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u) - m_{ij}\, \theta \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n \quad (1.3)$$

où

$$\varepsilon_{kh}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right) \quad : \quad 1 \leqslant k, h \leqslant n\,. \quad (1.4)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, on suppose le corps fixé sur une partie Γ_U de Γ et une force surfacique F agissant sur $\Gamma_F = \Gamma - \Gamma_U$. D'autre part, on considère la température donnée sur un sous-ensemble Γ_θ de Γ, que l'on va prendre constante et égale à zéro, et sur la partie $\Gamma_G = \Gamma - \Gamma_\theta$ un flux de chaleur G. C'est-à-dire, on a

$$u_i = 0\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,, \quad \text{sur } \Gamma_U \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, n_j = F_i\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,, \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (1.6)$$

$$\theta = 0, \quad \text{sur } \Gamma_\theta \quad (1.7)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = G\,, \quad \text{sur } \Gamma_G\,. \quad (1.8)$$

On complète le système avec les conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)\,, \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x)\,, \quad x \in \Omega\,. \quad (1.9)$$

2. FORMULATION VARIATIONNELLE

On introduit les formes bilinéaires

$$a(u, v) = \sum_{i,j,h,k=1}^{n} \int_\Omega a_{ijkh}\, \varepsilon_{ij}(u)\, \varepsilon_{kh}(v)\, dx, \; u, v \in [H^1(\Omega)]^n\,, \quad (2.1)$$

$$b(\phi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{k_{ij}}{\nu_0} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx\,, \quad \phi, \psi \in H^1(\Omega)\,, \quad (2.2)$$

$$m(\phi, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega m_{ij}\, \varepsilon_{ij}(v)\, \phi\, dx\,, \quad \phi \in L^2(\Omega), v \in [H^1(\Omega)]^n\,, \quad (2.3)$$

et aussi les produits scalaires :

$$(u, v)_1 = \int_\Omega \rho_0 \, u.v \, dx \qquad u, v \in [L^2(\Omega)]^n \tag{2.4}$$

$$(\phi, \psi)_2 = \int_\Omega \frac{\rho_0 C}{\nu_0} \phi\psi \, dx \quad \phi, \psi \in L^2(\Omega) . \tag{2.5}$$

On obtient, alors, par les méthodes classiques la formulation variationnelle du problème (1.1)-(1.9) :

Trouver u et θ tels que

$$\left.\begin{array}{l} (u''(t), v)_1 + a(u(t), v) - m(\theta(t), v) = (L_1(t), v)_1 , \quad \forall v \in V_1 \\ (\theta'(t), \phi)_2 + b(\theta(t), \phi) + m(\phi, u'(t)) = (L_2(t), \phi)_2 , \quad \forall \phi \in V_2 \\ u(0) = u_0 , \quad u'(0) = v_0 , \quad \theta(0) = \theta_0 \end{array}\right| \tag{2.6}$$

où

$$V_1 = \{ v \in [H^1(\Omega)]^n ; \quad v_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_U , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \} , \tag{2.7}$$

$$V_2 = \{ \phi \in H^1(\Omega) : \quad \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\theta \} \tag{2.8}$$

et $L_1(t)$, $L_2(t)$ étant les formes linéaires sur V_1, V_2 définies par :

$$(L_1(t), v)_1 = \int_\Omega f(t).v \, dx + \int_{\Gamma_F} F(t).v \, d\Gamma , \quad v \in V_1 \tag{2.9}$$

$$(L_2(t), \phi)_2 = \frac{1}{\nu_0}\left[\int_\Omega Q(t) \, \phi \, dx - \int_{\Gamma_G} G(t) \, \phi \, d\Gamma\right], \quad \phi \in V_2 . \tag{2.10}$$

Le problème (2.6) est un cas particulier du problème abstrait étudié au paragraphe suivant.

3. UN SYSTÈME D'ÉVOLUTION COUPLÉ

Soient H_i, V_i $(i = 1, 2)$ des espaces de Hilbert réels avec $V_i \subset H_i$, les inclusions étant denses et continues. On désigne par $| \, . \, |_i$, et $\| \quad \|_i$ les normes dans H_i et V_i, respectivement.

Soit $a : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$, bilinéaire continue et coercive :

$$a(v, v) \geqslant \alpha_1 \| v \|_1^2 , \quad \forall v \in V_1 \tag{3.1}$$

$b : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$, bilinéaire continue et telle que :

$$b(\phi, \phi) + \lambda | \phi |_2^2 \geqslant \alpha_2 \| \phi \|_2^2 , \quad \forall \phi \in V_2 , \quad \lambda > 0 , \quad \alpha_2 > 0 \tag{3.2}$$

$$m : H_2 \times V_1 \to \mathbb{R} , \quad \text{bilinéaire continue} . \tag{3.3}$$

$$L_1 \in L_2(0, T ; V_1') \quad \text{avec} \quad L_1', L_1'' \in L^2(0, T ; V_1') \tag{3.4}$$

$$L_2 \in L^2(0, T ; V_2') \quad \text{avec} \quad L_2', L_2'' \in L^2(0, T ; V_2') \tag{3.5}$$

$$\theta_0 \in V_2 , \quad u_0, v_0 \in V_1 . \tag{3.6}$$

Il existe $T_0 \in L^2(\Omega)$ tel que

$$b(\theta_0, \phi) - (L_2(0), \phi)_2 = (T_0, \phi)_2 , \quad \forall \phi \in V_2 \tag{3.7}$$

il existe $z_0 \in [L^2(\Omega)]^n$ tel que

$$a(u_0, v) - m(\theta_0, v) - (L_1(0), v)_1 = (z_0, v)_1, \quad \forall v \in V_1 . \tag{3.8}$$

On peut, alors, démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1 : *Sous les hypothèses* (3.1)-(3.8) *il existe un couple et un seul* (u, θ) *vérifiant*

$$\left.\begin{array}{ll} (u''(t), v)_1 + a(u(t), v) - m(\theta(t), v) = (L_1(t), v)_1 , & \forall v \in V_1 \\ (\theta'(t), \phi)_2 + b(\theta(t), \phi) + m(\phi, u'(t)) = (L_2(t), \phi)_2 , & \forall \phi \in V_2 \\ u(0) = u_0 , \quad u'(0) = v_0 , \quad \theta(0) = \theta_0 & \end{array}\right| \tag{3.9}$$

avec

$$u, u' \in L^\infty(0, T ; V_1) , \quad u'' \in L^\infty(0, T ; H_1) \tag{3.10}$$

$$\theta, \theta' \in L^\infty(0, T ; H_2) \cap L^2(0, T ; V_2) . \tag{3.11}$$

4. LE PREMIER SCHÉMA

On fait les hypothèses du théorème 3.1. Pour N entier positif et $k = \Delta t = T/N$, on considère le problème :

Trouver : $(u_k^0, u_k^1, \ldots, u_k^N) \in V_1^{N+1}$ et $(\theta_k^0, \theta_k^1, \ldots, \theta_k^N) \in V_2^{N+1}$ vérifiant :

$$u_k^0 = u_0 , \quad \theta_k^0 = \theta_0$$

$$\left(\frac{u_k^{n+1} - 2\, u_k^n + u_k^{n-1}}{k^2}, v\right)_1 + a(u_k^{n+1}, v) - m(\theta_k^{n+1}, v) =$$
$$= (L_1^{n+1}, v)_1 , \quad \forall v \in V_1 \tag{4.1}$$

$$\left(\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{k}, \phi\right)_2 + b(\theta_k^{n+1}, \phi) + m\left(\phi, \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{k}\right) =$$
$$= (L_2^{n+1}, \phi)_2 , \quad \forall \phi \in V_2 \quad (n = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{4.2}$$

où $L_i^n = L_i(nk), (i = 1, 2), (n = 0, 1, \ldots, N)$ et u_k^1, θ_k^1 sont donnés par :

$$u_k^1 = u_0 + k v_0 \tag{4.3}$$

$$\left(\frac{\theta_k^1 - \theta_0}{k}, \phi\right)_2 + b(\theta_k^1, \phi) = (L_2^1, \phi)_2 - m(\phi, v_0), \quad \forall \phi \in V_2 . \tag{4.4}$$

L'existence et l'unicité de $(u_k^{n+1}, \theta_k^{n+1})$, pour chaque n sont démontrées au paragraphe 8. On s'intéresse ici à la convergence et à l'estimation de l'erreur.

THÉORÈME 4.1 : *Sous les hypothèses* (3.1)-(3.8) *on a le résultat de stabilité suivant* :

$$\| u_k^n \|_1 \leqslant K_1 \quad (\textit{indépendant de } n \textit{ et } k), \tag{4.5}$$

$$\left| \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{k} \right|_1 \leqslant K_2 \quad (\textit{indépendant de } n \textit{ et } k) \tag{4.6}$$

$$| \theta_k^n |_2 \leqslant K_3 \quad (\textit{indépendant de } n \textit{ et } k) \tag{4.7}$$

$$k \sum_{n=0}^{N} \| \theta_k^n \|_2^2 \leqslant K_4 \quad (\textit{indépendant de } k) . \tag{4.8}$$

Démonstration : En prenant $v = \dfrac{u_k^{n+1} - u_k^n}{k}$ dans (4.1), $\phi = \theta_k^{n+1}$ dans (4.2) et en sommant les expressions obtenues on déduit l'égalité de l'énergie discrète :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\left|\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{k}\right|_1^2 - \left|\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{k}\right|_1^2 + \left|\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{k} - \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{k}\right|_1^2\right] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[a(u_k^{n+1}, u_k^{n+1}) - a(u_k^n, u_k^n) + a(u_k^{n+1} - u_k^n, u_k^{n+1} - u_k^n)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[| \theta_k^{n+1} |_2^2 - | \theta_k^n |_2^2 + | \theta_k^{n+1} - \theta_k^n |_2^2\right] + k b(\theta_k^{n+1}, \theta_k^{n+1}) \\ &\quad = (L_1^{n+1}, u_k^{n+1} - u_k^n)_1 + k(L_2^{n+1}, \theta_k^{n+1})_2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

pour $n = 1, \dots, N - 1$.

En sommant (4.9) de $n = 1$ à $n = r$, pour r compris entre 1 et $N - 1$ on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left|\frac{u_k^{r+1} - u_k^r}{k}\right|_1^2 + \frac{1}{2} a(u_k^{r+1}, u_k^{r+1}) + \frac{1}{2} | \theta_k^{r+1} |_2^2 + k \sum_{n=1}^{r} b(\theta_k^{n+1}, \theta_k^{n+1}) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{u_k^1 - u_k^0}{k}\right|_1^2 + \frac{1}{2} a(u_k^1, u_k^1) + \frac{1}{2} | \theta_k^1 |_2^2 + \sum_{n=1}^{r} (L_1^{n+1}, u_k^{n+1} - u_k^n)_1 \\ &\quad + k \sum_{n=1}^{r} (L_2^{n+1}, \theta_k^{n+1})_2 . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Avec (4.10), en utilisant la coercivité de a et l'hypothèse (3.2) on déduit facilement

$$\frac{1}{2}\left|\frac{u_k^{r+1}-u_k^r}{k}\right|_1^2 + C_1 \| u_k^{r+1} \|_1^2 + \frac{1}{2} | \theta_k^{r+1} |_2^2 + \alpha_2 k \sum_{n=1}^{r} \| \theta_k^{n+1} \|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_2(\| u_0 \|_1^2 + \| v_0 \|_1^2 + | \theta_0 |_2^2 + \| L_1^2 \|_{1*}^2 + \| L_1^{r+1} \|_{1*}^2)$$
$$+ \mu k \sum_{n=1}^{r} | \theta_k^{n+1} |_2^2 + k \sum_{n=1}^{r-1} \left\| \frac{L_1^{n+1}-L_1^{n+2}}{k} \right\|_{1*}^2 + k \sum_{n=1}^{r-1} \| u_k^{n+1} \|_1^2$$
$$+ C_3 k \sum_{n=1}^{r} \| L_2^{n+1} \|_{2*}^2 + \frac{\alpha_2 k}{2} \sum_{n=1}^{r} \| \theta_k^{n+1} \|_2^2 . \tag{4.11}$$

Avec les hypothèses faites sur L_1, L_2 et en utilisant l'inégalité de Gronwall discrète on tire, pour k suffisamment petit (plus précisément pour $k < \dfrac{1}{2\mu} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$), les estimations (4.6)-(4.8).

5. ESTIMATIONS DE L'ERREUR POUR LE PREMIER SCHÉMA

Dans ce paragraphe, nous obtenons des estimations de l'erreur pour le schéma (4.1)-(4.2), en supposant une plus forte régularité de la solution.

THÉORÈME 5.1 : *Sous les hypothèses* (3.1)-(3.8), *en supposant que*

$$u'' \in L^2(0, T; V_1), \quad u''' \in L^2(0, T; V_1') \tag{5.1}$$

$$\theta'' \in L^2(0, T; V_2') \tag{5.2}$$

on a :

$$\| u^n - u_k^n \|_1 = 0(k) \quad (n = 0, \dots, N) \tag{5.3}$$

$$\left| \dot{u}^{n+1} - \frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{k} \right|_1 = 0(k) \quad (n = 0, \dots, N-1) \tag{5.4}$$

$$| \theta^n - \theta_k^n |_2 = 0(k) \quad (n = 0, \dots, N) \tag{5.5}$$

$$\left[k \sum_{n=0}^{N} \| \theta^n - \theta_k^n \|_1^2 \right]^{1/2} = 0(k) . \tag{5.6}$$

Démonstration : Soit (u, θ) la solution du problème continu. On note $u^n = u(nk)$, $\theta^n = \theta(nk)$. A partir des équations (3.9), on obtient

$$(\ddot{u}^{n+1}, v)_1 + a(u^{n+1}, v) - m(\theta^{n+1}, v) = (L_1^{n+1}, v)_1 , \quad \forall v \in V_1 \tag{5.7}$$

$$(\theta^{n+1}, \phi)_2 + b(\theta^{n+1}, \phi) + m(\phi, \dot{u}^{n+1}) = (L_2^{n+1}, \phi)_2 , \quad \forall \phi \in V_2$$
$$(n = 0, 1, \dots, N-1) . \tag{5.8}$$

A l'aide de développements de Taylor, grâce aux hypothèses de régularité, on peut écrire les équations (5.7), (5.8) de la façon suivante :

$$\left(\frac{u^{n+1} - 2\,u^n + u^{n+1}}{k^2}, v\right)_1 + a(u^{n+1}, v) - m(\theta^{n+1}, v) = \\ = (L_1^{n+1}, v)_1 - (\alpha_{n+1}, v)_1 \quad (5.9)$$

$$\left(\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{k}, \phi\right)_2 + b(\theta^{n+1}, \phi) + m\left(\phi, \frac{u^{n+1} - u^n}{k}\right) = \\ = (L_2^{n+1}, \phi)_2 - (\gamma_{n+1}, \phi)_2 - m(\phi, \delta_{n+1}) \quad (5.10)$$

où :

$$\| \alpha_n \|_{1*} \leqslant Ck \| u''' \|_{L^2(0,T;V_1')} \quad (5.11)$$

$$\| \gamma_n \|_{2*} \leqslant Ck \| \theta'' \|_{L^2(0,T;V_2')} \quad (5.12)$$

$$\| \delta_n \|_1 \leqslant Ck \| u'' \|_{L^2(0,T;V_1)} \quad (n = 1, \ldots, N)\,. \quad (5.13)$$

Soient $\xi_k^n = u^n - u_k^n$, $\eta_k^n = \theta^n - \theta_k^n$, $n = 0, 1, \ldots, N$. On soustrait (4.1) de (5.9) et (4.2) de (5.10). Ensuite, on prend $v = (\xi_k^{n+1} - \xi_k^n)/k$, $\phi = \eta_k^{n+1}$ et on fait l'addition des égalités obtenues. Il vient, après quelques calculs analogues à ceux de la démonstration du théorème 4.1 :

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\xi_k^{r+1} - \xi_k^r}{k}\right|_1^2 + \frac{1}{2}a(\xi_k^{r+1}, \xi_k^{r+1}) + \frac{1}{2}|\eta_k^{r+1}|_2^2 + k\sum_{n=1}^{r} b(\eta_k^{n+1}, \eta_k^{n+1}) = \\ = \frac{1}{2}|\xi_k^1/k|_1^2 + \frac{1}{2}a(\xi_k^1, \xi_k^1) + \frac{1}{2}|\eta_k^1|_2^2 - \sum_{n=1}^{r}(\alpha_{n+1}, \xi_k^{n+1} - \xi_k^n)_1 \\ - k\sum_{n=1}^{r}\left[(\gamma_{n+1}, \eta_k^{n+1})_2 + m(\eta_k^{n+1}, \delta_{n+1})\right] \quad (r = 1, \ldots, N-1) \quad (5.14)$$

et ensuite

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\xi_k^{r+1} - \xi_k^r}{k}\right|_1^2 + C_1 \| \xi_k^{r+1} \|_1^2 + \frac{1}{2}|\eta_k^{r+1}|_2^2 + \alpha_2 k \sum_{n=1}^{r} \| \eta_k^{n+1} \|_2^2 \leqslant \\ \leqslant C_2[|\xi_k^1/k|_1^2 + \| \xi_k^1 \|_1^2 + |\eta_k^1|_2^2 + \| \alpha_{r+1} \|_{1*}^2 + \| \alpha_2 \|_{1*}^2] \\ + k\sum_{n=1}^{r-1}\left\|\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}}{k}\right\|_{1*}^2 + k\sum_{n=1}^{r} \| \xi_k^{n+1} \|_1^2 \\ + C_3 k \sum_{n=1}^{r}\left[\| \gamma_{n+1} \|_{2*}^2 + \| \delta_{n+1} \|_1^2\right] \\ + \frac{\alpha_2 k}{2}\sum_{n=1}^{r} \| \eta_k^{n+1} \|_2^2 + \mu k \sum_{n=1}^{r} |\eta_k^{n+1}|_2^2\,. \quad (5.15)$$

D'ici, compte tenu des choix de u_k^1 et θ_k^1 et de (5.11)-(5.13), on obtient les estimations (5.3)-(5.6), pour k suffisamment petit, à l'aide de l'inégalité de Gronwall.

6. LE SECOND SCHÉMA

Dans ce paragraphe, nous introduisons un autre schéma semidiscrétisé en temps, plus coûteux que celui du paragraphe 4, mais d'un ordre de précision plus élevé :

Trouver $(u_k^0, u_k^1, \dots, u_k^N) \in V_1^{N+1}$, $(\theta_k^0, \theta_k^1, \dots, \theta_k^N) \in V_2^{N+1}$, vérifiant $u_k^0 = u_0$, $\theta_k^0 = \theta_0$, u_k^1, θ_k^1 donnés ;

$$\left(\frac{u_k^{n+1} - 2\, u_k^n + u_k^{n-1}}{k^2}, v\right)_1 + a(\lambda u_k^{n+1} + (1 - 2\,\lambda)\, u_k^n + \lambda u_k^{n-1}, v) -$$

$$- m(\lambda \theta_k^{n+1} + (1 - 2\,\lambda)\, \theta_k^n + \lambda \theta_k^{n-1}, v)$$
$$= (\lambda L_1^{n+1} + (1 - 2\,\lambda)\, L_1^n + \lambda L_1^{n-1}, v)_1\,, \quad \forall v \in V_1\,. \tag{6.1}$$

$$\left(\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^{n-1}}{2\,k}, \phi\right)_2 + b(\lambda \theta_k^{n+1} + (1 - 2\,\lambda)\, \theta_k^n + \lambda \theta_k^{n-1}, \phi) +$$

$$+ m\left(\phi, \frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\,k}\right) = (\lambda L_2^{n+1} + (1 - 2\,\lambda)\, L_2^n + \lambda L_2^{n-1}, \phi)_2\,,$$
$$\forall \phi \in V_2 \quad (n = 1, 2, \dots, N - 1)\,. \tag{6.2}$$

L'existence et l'unicité de $(u_k^{n+1}, \theta_k^{n+1})$, pour chaque n, est montré de la même façon que pour le schéma (4.1)-(4.2) au paragraphe 4.

THÉORÈME 6.1 : *Sous les hypothèses* (3.1)-(3.8), *si* u_k^1 *et* θ_k^1 *sont donnés vérifiant :*

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{u_k^1 - u_0}{k} & \textit{est borné dans } H_1 \textit{ lorsque } k \to 0 \\ u_k^1 & \textit{est borné dans } V_1 \textit{ lorsque } k \to 0 \\ \theta_k^1 & \textit{est borné dans } H_2 \textit{ lorsque } k \to 0 \end{array}\right| \tag{6.3}$$

et $\lambda \geqslant 1/4$, *on a :*

$$\| u_k^n \|_1 \leqslant K_1 \quad (\textit{indépendant de } n \textit{ et } k) \tag{6.4}$$

$$\left| \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{k} \right|_1 \leqslant K_2 \quad (\textit{indépendant de } n \textit{ et } k) \tag{6.5}$$

$$|\theta_k^n|_2 \leqslant K_3 \quad (\textit{indépendant de } n \textit{ et } k) \tag{6.6}$$

$$k \sum_{n=0}^{N} \|\theta_k^n\|_2^2 \leqslant K_4 \quad (\textit{indépendant de } k)\,. \tag{6.7}$$

Démonstration : Si on prend $v = \dfrac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2k}$ dans (6.1) et

$$\phi = z_k^n = \lambda\theta_k^{n+1} + (1 - 2\lambda)\,\theta_k^n + \lambda\theta_k^{n-1}$$

dans (6.2) et on fait l'addition des deux égalités obtenues on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left|\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{k}\right|_1^2 - \left|\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{k}\right|_1^2\right] + \frac{1}{2}\left[a\left(\frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2}, \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2}\right) - \right. \\
&\quad \left. - a\left(\frac{u_k^n + u_k^{n-1}}{2}, \frac{u_k^n + u_k^{n-1}}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\left[a(u_k^{n+1} - u_k^n, u_k^{n+1} - u_k^n)\right. \\
&\quad \left. - a(u_k^n - u_k^{n-1}, u_k^n - u_k^{n-1})\right] + \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\theta_k^{n+1} + \theta_k^n}{2}\right|_2^2 - \left|\frac{\theta_k^n + \theta_k^{n-1}}{2}\right|_2^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\left[|\theta_k^{n+1} - \theta_k^n|_2^2 - |\theta_k^n - \theta_k^{n-1}|^2\right] + k b(z_k^n, z_k^n) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(L_1^{n+1} + (1 - 2\lambda)\,L_1^n + \lambda L_1^{n-1}, u_k^{n+1} - u_k^{n-1}\right)_1 \\
&\quad + k\left(\lambda L_2^{n+1} + (1 - 2\lambda)\,L_2^n + \lambda L_2^{n-1}, z_k^n\right)_2 \quad (n = 1, 2, \dots, N - 1)\,.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

En sommant (6.8) de $n = 1$ à $n = r$, $(1 \leqslant r \leqslant N - 1)$, on déduit :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\frac{u_k^{r+1} - u_k^r}{k}\right|_1^2 + \frac{1}{2}a\left(\frac{u_k^{r+1} + u_k^r}{2}, \frac{u_k^{r+1} + u_k^r}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)a(u_k^{r+1} - u_k^r, u_k^{r+1} - u_k^r) + \frac{1}{2}\left|\frac{\theta_k^{r+1} + \theta_k^r}{2}\right|_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)|\theta_k^{r+1} - \theta_k^r|_2^2 - k\sum_{n=1}^{r} b(z_k^n, z_k^n) \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r}\left(\lambda L_1^{n+1} + (1 - 2\lambda)\,L_1^n + \lambda L_1^{n-1}, u_k^{n+1} - u_k^{n-1}\right)_1 \\
&\quad + k\sum_{n=1}^{r}\left(\lambda L_2^{n+1} + (1 - 2\lambda)\,L_2^n + \lambda L_2^{n-1}, z_k^n\right)_2 \\
&\quad + C\left[\left|\frac{u_k^1 - u_0}{k}\right|_1^2 + \|u_0\|_1^2 + \|u_k^1\|_1^2 + |\theta_0|_2^2 + |\theta_k^1|_2^2\right].
\end{aligned} \tag{6.9}$$

D'autre part, on obtient facilement l'égalité :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r}(p^n, u_k^{n+1} - u_k^{n-1})_1 = \left(p^r, \frac{u_k^{r+1} + u_k^r}{2}\right)_1 - \left(p^1, \frac{u_k^1 + u_k^0}{2}\right)_1 + \\ + k\sum_{n=2}^{r}\left(\frac{p^{n-1} - p^n}{k}, \frac{u_k^n + u_k^{n-1}}{2}\right)_1 \quad (6.10)$$

où

$$p^n = \lambda L_1^{n+1} + (1 - 2\lambda) L_1^{n+1} + \lambda L_1^{n-1} \quad (n = 1, 2, ..., N-1). \quad (6.11)$$

Soit

$$q^n = \lambda L_2^{n+1} + (1 - 2\lambda) L_2^n + \lambda L_2^{n-1} \quad (n = 1, 2, ..., N-1). \quad (6.12)$$

Avec (6.10), en utilisant la coercivité de a et (6.1) on tire de (6.9), pour $\lambda \geqslant 1/4$:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{u_k^{r+1} - u_k^r}{k}\right|_1^2 + C_1\left\|\frac{u_k^{r+1} + u_k^r}{2}\right\|_1^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{\theta_k^{r+1} + \theta_k^r}{2}\right|_2^2 + \\ + k\sum_{n=1}^{r} b(z_k^n, z_k^n) \leqslant C_2\, k\sum_{n=2}^{r}\left\|\frac{p^{n-1} - p^n}{k}\right\|_{1*}^2 + C_3\, k\sum_{n=2}^{r}\left\|\frac{u_k^n + u_k^{n-1}}{2}\right\|_1^2 \\ + k\sum_{n=1}^{r}(q^n, z_k^n)_2 + C_4[\| p^r \|_{1*}^2 + \| p^1 \|_{1*}^2] + C_5. \quad (6.13)$$

De (6.13), grâce à l'hypothèse (3.2), on déduit :

$$\frac{1}{2}\left|\frac{u_k^{r+1} - u_k^r}{k}\right|_1^2 + C_1\left\|\frac{u_k^{r+1} + u_k^r}{2}\right\|_1^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{\theta_k^{r+1} + \theta_k^r}{2}\right|_2^2 + \\ + \frac{\alpha_2 k}{2}\sum_{n=1}^{r}\| z_k^n \|_2^2 \leqslant C_2\, k\sum_{n=2}^{r}\left\|\frac{p^{n-1} - p^n}{k}\right\|_{1*}^2 \\ + C_3\, k\sum_{n=2}^{r}\left\|\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{2}\right\|_1^2 + C_6\, k\sum_{n=1}^{r}\| q^n \|_{2*}^2 \\ + \mu k\sum_{n=1}^{r}| z_k^n |_2^2 + C_4[\| p^r \|_{1*}^2 + \| p^1 \|_{1*}^2] + C_5. \quad (6.14)$$

Finalement, avec les hypothèses faites sur L_1, L_2, en utilisant l'inégalité de Gronwall discrète on déduit, pour k suffisamment petit, les estimations (6.4)-(6.7).

7. ESTIMATION DE L'ERREUR POUR LE SECOND SCHÉMA

De la même façon que dans le cas précédent, pour l'obtention des estimations sur l'erreur du schéma (6.1)-(6.2) nous avons besoin de certaine régularité sur la solution (u, θ).

THÉORÈME 7.1. — *Sous les hypothèses* (3.1)-(3.8) *en supposant en plus que*

$$u''' \in L^2(0, T; V_1), \quad u^{iv} \in L^2(0, T; V_1') \tag{7.1}$$

$$\theta''' \in L^2(0, T; V_2') \tag{7.2}$$

et si u_k^1, θ_k^1 *sont choisis tels que :*

$$\left| \frac{u^1 - u_k^1}{k} \right|_1 \leqslant C_1 k^2, \; \| u^1 - u_k^1 \|_1 \leqslant C_2 k^2 \tag{7.3}$$

$$| \theta^1 - \theta_k^1 |_2 \leqslant C_3 k^2 \tag{7.4}$$

alors on a les estimations suivantes (*pour* $\lambda \geqslant 1/4$) :

$$\| u^n - u_k^n \|_1 = 0(k^2), \quad (n = 0, 1, ..., N) \tag{7.5}$$

$$\left| \dot{u}^{n+1} - \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{k} \right|_1 = 0(k^2), \quad (n = 0, 1, ..., N-1) \tag{7.6}$$

$$| \theta^n - \theta_k^n |_2 = 0(k^2), \quad (n = 0, 1, ..., N) \tag{7.7}$$

$$\left[k \sum_{n=0}^{N} \| \theta^n - \theta_k^n \|_2^2 \right]^{1/2} = 0(k^2). \tag{7.8}$$

Démonstration. — En écrivant le problème (3.9) aux instants $(n+1)k$, nk, $(n-1)k$ on a pour la solution exacte :

$$\begin{aligned}(\lambda \ddot{u}^{n+1} + (1 - 2\lambda) \ddot{u}^n + \lambda \ddot{u}^{n-1}, v)_1 + a(\lambda u^{n+1} + (1 - 2\lambda) u^n + \lambda u^{n-1}, v) - \\ - m(\lambda \theta^{n+1} + (1 - 2\lambda) \theta^n + \lambda \theta^{n-1}, v) = \\ = (\lambda L_1^{n+1} + (1 - 2\lambda) L_1^n + \lambda L_1^{n-1}, v)_1, \quad \forall v \in V_1 \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}(\lambda \dot{\theta}^{n+1} + (1 - 2\lambda) \dot{\theta}^n + \lambda \dot{\theta}^{n-1}, \phi)_2 + b(\lambda \theta^{n+1} + (1 - 2\lambda) \theta^n + \lambda \theta^{n-1}, \phi) + \\ + m(\phi, \lambda \dot{u}^{n+1} + (1 - 2\lambda) \dot{u}^n + \lambda \dot{u}^{n-1}) = \\ = (\lambda L_2^{n+1} + (1 - 2\lambda) L_2^n + \lambda L_2^{n-1}, \phi)_2, \quad \forall \phi \in V_2. \end{aligned} \tag{7.10}$$

La formule de Taylor nous permet d'écrire (7.9)-(7.10) sous la forme :

$$\left(\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{k^2}, v\right)_1 + a(\lambda u^{n+1} + (1 - 2\lambda) u^n + \lambda u^{n-1}, v) - - m(\lambda\theta^{n+1} + (1 - 2\lambda)\theta^n + \lambda\theta^{n-1}, v) = (\lambda L_1^{n+1} + (1 - 2\lambda) L_1^n + \lambda L_1^{n-1}, v)_1 - (\tau_n v)_1 . \tag{7.11}$$

$$\left(\frac{\theta^{n+1} - \theta^{n-1}}{2k}, \phi_2\right) + b(\lambda\theta^{n+1} + (1 - 2\lambda)\theta^n + \lambda\theta^{n-1}, \phi) + + m\left(\phi, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2k}\right) = (\lambda L_2^{n+1} + (1 - 2\lambda) L_2^n + + \lambda L_2^{n-1}, \phi)_2 - (S_n, \phi)_2 - m(\phi, W_n) \tag{7.12}$$

où

$$\| \tau_n \|_{1*} \leqslant Ck^2 \| u^{iv} \|_{L^2(0,T;V_1')} \tag{7.13}$$

$$\| S_n \|_{2*} \leqslant Ck^2 \| \theta''' \|_{L^2(0,T;V_2')} \tag{7.14}$$

$$\| W_n \|_1 \leqslant Ck^2 \| u''' \|_{L^2(0,T;V_1)} . \tag{7.15}$$

Avec les notations déjà introduites, en soustrayant (6.1) de (7.11) et (6.2) de (7.12), et en prenant

$$v = \frac{\xi_k^{n+1} - \xi_k^{n-1}}{2k}, \ \phi = \chi_k^n = \lambda\eta_k^{n+1} + (1 - 2\lambda)\eta_k^n + \lambda\eta_k^{n-1},$$

on obtient, après quelques calculs :

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\xi_r^{r+1} - \xi_k^r}{k}\right|_1^2 + \frac{1}{2} a\left(\frac{\xi_k^{r+1} + \xi_k^r}{2}, \frac{\xi_k^{r+1} + \xi_k^r}{2}\right) + + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) a(\xi_k^{r+1} - \xi_k^r, \xi_k^{r+1} - \xi_k^r) + \frac{1}{2}\left|\frac{\eta_k^{r+1} + \eta_k^r}{2}\right|_2^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) | \eta_k^{r+1} - \eta_k^r |^2 + k \sum_{n=1}^{r} b(\chi_k^n, \chi_k^n) = \frac{1}{2}\left|\frac{\xi_k^1}{k}\right|_1^2 + \frac{1}{2} a\left(\frac{\xi_k^1}{2}, \frac{\xi_k^1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) a(\xi_k^1, \xi_k^1) + \frac{1}{2}\left|\frac{\eta_k^1}{2}\right|_2^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) | \eta_k^1 |_2^2 - \sum_{n=1}^{r}\left(\tau_n, \frac{\xi_k^{n+1} - \xi_k^{n-1}}{2}\right)_1 - k \sum_{n=1}^{r} [(S_n, \chi_k^n) + m(\chi_k^n, W_n)] \quad (r = 1, 2, ..., N - 1) . \tag{7.16}$$

En utilisant une égalité analogue à (6.10) pour transformer les termes où apparaît τ_n et d'après les hypothèses (7.3)-(7.4) on déduit :

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\xi_k^{r+1}-\xi_k^r}{k}\right|_1^2 + C_1 \| \xi_k^{r+1} + \xi_k^r \|_1^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{\eta_k^{r+1}+\eta_k^r}{2}\right|_2^2 + $$
$$+ \frac{\alpha_2 k}{2} \sum_{n=1}^{r} \| \chi_k^n \|_2^2 \leqslant C_2 k^2 + C_3 [\| \tau_r \|_{1*}^2 + \| \tau_1 \|_{1*}^2]$$
$$+ C_4 k \sum_{n=2}^{r} \left\| \frac{\tau_{n-1}-\tau_n}{k} \right\|_{1*}^2 + C_5 k \sum_{n=2}^{r} \| \xi_k^n + \xi_k^{n-1} \|_1^2$$
$$+ C_6 k \sum_{n=1}^{r} [\| S_n \|_{2*}^2 + \| W_n \|_1^2] + \mu k \sum_{n=1}^{r} | \chi_k^n |_2^2 . \qquad (7.17)$$

Finalement, compte tenu de (7.12)-(7.14) et à l'aide de l'inégalité de Gronwall discrète on obtient de (7.16) les estimations (7.5)-(7.8) pour k suffisamment petit.

Remarque 7.1 : Nous proposons une méthode pour déterminer u_k^1, θ_k^1 vérifiant (7.3)-(7.4).

Tout d'abord on a pour la solution exacte (u, θ)

$$(u^1, v)_1 = (u_0, v)_1 + k(v_0, v)_1 + \frac{k^2}{2}[- a(u_0, v) + m(\theta_0, v) + (L_1^0, v)_1] +$$
$$+ 0(k^3), \quad \forall v \in V_1 . \quad (7.18)$$

Par conséquent en prenant u_k^1 tel que

$$(u_k^1, v)_1 = (u_0, v)_1 + k(v_0, v)_1 + \frac{k^2}{2}[- a(u_0, v) + m(\theta_0, v) + (L_1^0, u)_1] ,$$
$$\forall v \in V_1 \quad (7.19)$$

on a bien (7.3).

D'autre part soit θ_k^1 la solution du problème :

$$\left(\frac{\theta_k^1 - \theta_0}{k}, \phi\right)_2 + b\left(\frac{1}{2}\theta_k^1 + \frac{1}{2}\theta_0, \phi\right) +$$
$$+ m\left(\phi, \frac{u_k^1 - u_0}{k}\right) = \left(\frac{1}{2}L_2^1 + \frac{1}{2}L_2^0, \phi\right)_2 , \quad \forall \phi \in V_2 . \quad (7.20)$$

Il n'est pas difficile de démontrer que

$$| \theta^1 - \theta_k^1 |_2 = 0(k^2)$$

c'est-à-dire qu'on a (7.4).

D'autres choix de u_k^1 et θ_k^1 peuvent être obtenus comme dans Dupont-Fairweather-Johnson [6] et Dupont [5].

8. RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DISCRÉTISÉS

Dans ce paragraphe nous proposons une méthode itérative pour la résolution des problèmes discrétisés (4.1)-(4.2) et (6.1)-(6.2).

Dans les deux cas, en mettant au second membre les éléments connus des etapes précédentes, on doit résoudre un système de la forme :

$$\begin{aligned} \beta_1 u + \gamma_1 Au - M\theta &= R_1 \\ \beta_2 \theta + \gamma_2 B\theta + M^* u &= R_2 \end{aligned} \tag{8.1}$$

où $R_1 \in V'_1, R_2 \in V'_2$ et A, B, M sont donnés par :

$$(Au, v)_1 = a(u, v), \quad \forall u, v \in V_1. \tag{8.2}$$

$$(B\phi, \psi)_2 = b(\phi, \psi), \quad \forall \phi, \psi \in V_2. \tag{8.3}$$

$$(M\phi, v)_1 = m(\phi, v), \quad \forall \phi \in H_2, v \in V_1. \tag{8.4}$$

Le problème (8.1) a une solution unique. En effet, $(u, \theta) \in V_1 \times V_2$ est le seul point selle du lagrangien

$$\mathscr{L}(v, \phi) = \frac{\beta_1}{2} | v |_1^2 + \frac{\gamma_1}{2} a(v, v) - m(\phi, v) - \frac{\beta_2}{2} | \phi |_2^2 - \\ - \frac{\gamma_2}{2} b(\phi, \phi) - (R_1, v)_1 + (R_2, \phi)_2 \tag{8.5}$$

(*cf.* p. ex. Ekeland-Temam [8], prop. VI, 1.6 et 2.2).

Ce fait est aussi intéressant du point de vue numérique car il nous permet d'utiliser des algorithmes du type Uzawa qui résolvent séparément les deux équations (8.1).

Nous donnons ici un algorithme, possédant cette dernière propriété, qui a été introduit dans un cadre plus général dans Bermúdez-Moreno [1].

Soit j la fonctionnelle convexe et différentiable dans V_2 :

$$j(\phi) = \frac{\beta_2}{2} | \phi |_2^2 + \frac{\gamma_2}{2} b(\phi, \phi) - (R_2, \phi)_2. \tag{8.6}$$

Alors, la deuxième équation dans (8.1) s'écrit :

$$- M^* u = j'(\theta). \tag{8.7}$$

Soit J_ρ, pour $\rho > 0$, l'opérateur dans V_2 défini par :

$$J_\rho(\phi) = \arg\min_{x \in V_2} \left[j(x) + \frac{1}{2\rho} \| x - \phi \|_2^2 \right] \tag{8.8}$$

(J_ρ est la résolvante de l'opérateur maximal monotone j'), (*cf.* p. ex. Brezis [3]). Dans Bermúdez-Moreno [1], on montre le résultat suivant :

$$x = j'(\phi) \text{ si et seulement si } \phi = J_\rho(\phi + \rho J \Lambda_{V_2}^{-1} x) \tag{8.9}$$

où Λ_{V_2} est l'isomorphisme canonique de V_2 dans V'_2.

D'après (8.9), l'égalité (8.7) équivaut à

$$\theta = J_\rho(\theta - \rho \Lambda_{V_2}^{-1} M^* u) \tag{8.10}$$

de telle façon que le problème (8.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 u + \gamma_1 Au - M\theta &= R_1 \\ \theta &= J_\rho(\theta - \rho \Lambda_{V_2}^{-1} M^* u) . \end{aligned} \right| \tag{8.11}$$

Cette formulation amène à considérer l'algorithme suivant : on part de θ^1 quelconque et à l'étape r-ième, connaissant θ^r, on détermine u^r et θ^{r+1} comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 u^r + \gamma_1 Au^r - M\theta^r &= R_1 \\ \tilde{\theta}^{r+1} &= J_\rho(\theta^r - \rho \Lambda_{V_2}^{-1} M^* u^r) \\ \theta^{r+1} &= \varepsilon \tilde{\theta}^{r+1} + (1 - \varepsilon)\, \theta^r . \end{aligned} \right| \tag{8.12}$$

Remarquons que, compte tenu de la définition (8.8), $\tilde{\theta}^{r+1}$ est la solution du problème

$$\left(\frac{1}{\rho} + \beta_2\right) \tilde{\theta}^{r+1} + \gamma_2 B \tilde{\theta}^{r+1} = \frac{1}{\rho} \theta^r - M^* u^r + R_2 . \tag{8.13}$$

THÉORÈME 8.1 : *Si* $\rho < \dfrac{2\,\alpha_1 \gamma_1}{\| M^* \|^2}$ *et* $\varepsilon \in (0, 1)$ *on a :*

$$\{ u^r \} \to u \textit{ lorsque } r \to \infty \textit{ dans } V_1 \textit{ fort}$$

$$\{ \theta^r \} \to \theta \textit{ lorsque } r \to \infty \textit{ dans } V_2 \textit{ faible} .$$

(u, θ) *étant la solution de* (8.1).

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.1 et du corollaire 3.1 de Bermúdez-Moreno [1] pour $\omega = 0$.

COROLLAIRE 8.1 : *Supposons qu'il existe une constante* $k > 0$ *telle que*

$$\| Mz \|_{1*} \geqslant k \mid z \mid_2 , \quad \forall z \in H_2 ,$$

alors la suite $\{ \tilde{\theta}^r \}$ *converge fortement dans* V_2.

Démonstration : Il suffit d'utiliser la première équation de (8.12) et la convergence forte de la suite $\{ u^r \}$. On en déduit $\{ \theta^r \} \to \theta$ dans H_2 fort, ce qui avec (8.13) donne le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BERMUDEZ, C. MORENO, *Duality methods for solving variational inequalities,* Computer and Mathematics with applications, 7 (1981), pp. 43-81.

[2] A. BERMUDEZ, C. MORENO, *Application of pursuit method to optimal control problems,* (à paraître).

[3] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* North-Holland, 1973.

[4] D. E. CARLSON, *Linear thermoelasticity.* Encyclopaedia of physics. Vol. VI/a2, Springer-Verlag, 1972.

[5] T. DUPONT, *L^2-Estimates for Galerkin methods for second order hyperbolic equations,* SIAM, J. Num. Anal., Vol. 10 (1973), pp. 880-889.

[6] T. DUPONT, G. FAIRWEATHER, J. PETER JOHNSON, *Three-level Galerkin methods for parabolic equations,* SIAM, J. Num. Anal., Vol. 11 (1974), pp. 392-410.

[7] G. DUVAUT, J. L. LIONS, *Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique,* Arch. Rat. Mech. Anal., 46 (1972), pp. 241-279.

[8] I. EKELAND, R. TEMAN, *Analyse convexe et problèmes variationnels,* Dunod Paris, 1974.

[9] J. M. VIAÑO, *Un problème de thermoélasticité à solutions périodiques,* Rapport de Recherche n° 91, I.N.R.I.A. Rocquencourt, septembre 1981.