RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

ZAHER MAHJOUB

Réduction de la résolution d'un problème de réseau maillé (B) : sur la convergence locale de certaines méthodes

RAIRO. Analyse numérique, tome 17, nº 1 (1983), p. 67-92

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1983__17_1_67_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 17, n° 1, 1983, p. 67 à 92)

RÉDUCTION DE LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE RÉSEAU MAILLÉ (B') : SUR LA CONVERGENCE LOCALE DE CERTAINES MÉTHODES (*)

par Zaher MAHJOUB [1]

Communiqué par F. ROBERT

Résumé. — *Suite au premier papier* [17] *nous étudions ici certaines méthodes de résolution du même problème de réseau maillé de conduites de distribution d'eau potable. Des critères de convergence locale utilisant des notions de théorie des graphes seront explicités et illustrés par des exemples numériques.*

Abstract. — *Following the first paper* [17] *we study here some methods for the resolution of the same problem of water distribution looped network. Criteria of local convergence — based on graph theory notions — will be formalized and illustrated by numerical examples.*

I. INTRODUCTION. RAPPELS

Nous avons vu dans le précédent papier [17] comment le système non linéaire fournissant la répartition des débits dans les conduites d'un réseau maillé de distribution d'eau potable pouvait être, grâce à des considérations de théorie des graphes, nettement simplifié.

Le nouveau système réduit a été résolu par la méthode de Newton. Nous allons étudier ici certaines méthodes particulières de résolution dont celle dite de Hardy Cross (1936) encore largement utilisée par les hydrauliciens.

Nous nous plaçons toujours dans le contexte de l'étude de l'écoulement en régime permanent dans un réseau (connexe) ayant un réservoir unique. Nous reprenons également les mêmes définitions et notations qu'en [17].

1. Problème

Le réseau maillé $\mathscr{R}$ est constitué de n nœuds et t tronçons. On définit à partir de $\mathscr{R} : m = t - n + 1$ cycles élémentaires indépendants (mailles), m étant le nombre cyclomatique [3].

(*) Reçu en décembre 1981.

(1) ENSEEIHT-IMFT, 2, rue Camichel, 31071 Toulouse Cedex, France (ce travail a été effectué au Centre de Calcul de l'ENIT, B.P. 37, Belvédère, Tunis, Tunisie).

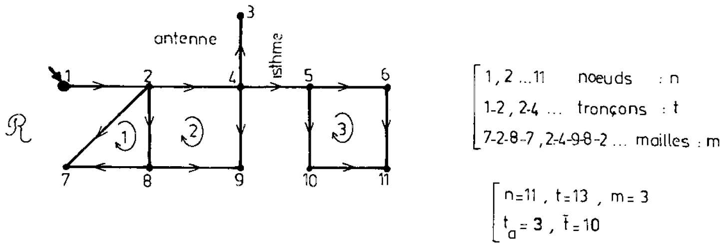

Figure 1. — Schéma d'un réseau maillé.

En prenant comme inconnues les débits q_j et pertes de charge ξ_j (charge amont-charge aval) par tronçon, on se ramène au système :

$$(S) \text{ ordre } 2\,t \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{t} e_j^i\, q_j = b_i & i = 1, \dots, n-1 \\ \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j^i\, \xi_j = 0 & i = 1, \dots, m \\ \xi_j - h(q_j) = 0 & j = 1, \dots, t \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{lois de continuité de} \\ \text{Kirchhoff} \\ e_j^i, \varepsilon_j^i = +1, -1, 0 \end{array} \right\}$$

- b_i : débit au nœud
- la relation entre ξ et q s'écrit

$$h(q) = aq\,|\,q\,|^{\lambda} \tag{1}$$

où a constante de la conduite et $\lambda > 0$ ($= 1$ ici), on convient — sans perte de généralité — de ne pas indicer h.

(ξ_j et les cotes des nœuds amont et aval étant connues on en déduit les pressions aux noeuds.)

(S) se réduit à

$$(S_1) \text{ ordre } t \left\{ \begin{array}{l} \sum_j e_j^i\, q_j = b_i \\ \sum_j \varepsilon_j^i\, h(q_j) = 0\,. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AQ = B \\ DH(Q) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Xi = H(Q)$$

- A matrice $n-1$, t. D matrice m, t
- $Q, B, \Xi \in \mathbb{R}^t$:
- $H : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^t : H(Q) = (h(q_1), \dots, h(q_t))^T$.

2. Transformation. Résolution

On effectue le changement de variable (bijectif)

$$Q = Q^0 + D^T X \qquad X \in \mathbb{R}^m \tag{2}$$

avec

$$AQ^0 = B \,. \tag{3}$$

On ramène alors (S_1) à $(\bar{S})$.

$(\bar{S})$ $F(X) = 0$ s'écrivant

$$f_i(X) = \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j^i \, h\left(q_j^0 + \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_j^l x_l\right) = 0 \quad i = 1, \dots, m \tag{4}$$

$$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \,.$$

On résout $(\bar{S})$ par la méthode de Newton. D'où l'algorithme

$$\left.\begin{array}{l} X^0 \text{ donné (nul)} \\ X^{r+1} = X^r - [C^r]^{-1} F(X^r) \quad \text{avec} \quad C^r = F'(X^r) \quad r = 0, 1\dots \end{array}\right\} \tag{5}$$

qui se ramène à la résolution du système linéaire

$$C^r Z^r = P^r \tag{6}$$

où

$$Z^r = X^{r+1} - X^r \,; \tag{6.1}$$

$$P^r = - F(X^r) \,. \tag{6.2}$$

On supposera l'*existence* et l'*unicité* de la solution Q^* de (S_1) (resp. X^* de $(\bar{S})$). On partira de plus d'un Q^0 « assez proche » de Q^*.

3. Notations

En reprenant les définitions vues en [17] :

- $\mathcal{M}_i$ $i = 1, \dots, m$ mailles de $\mathcal{R}$
- $\mathcal{D} = \{ \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m \}$ description de $\mathcal{R}$
- τ_k $k = 1, \dots, t$ tronçons de $\mathcal{R}$
- $M_i = \{ k \in (1, \dots, t) / \tau_k \in \mathcal{M}_i \} \quad i = 1, \dots, m$
- $M_{ij} = M_i \cap M_j \quad i \neq j$
- $\mathcal{S}_k = \{ i \in (1, \dots, m) / k \in M_i \}$
- $\delta_k = \mathrm{Card}(\mathcal{S}_k)$: degré de τ_k
- $\theta_i = \mathrm{Card}(M_i) \quad i = 1, \dots, m$
- $\theta = \sum_{i=1}^{m} \theta_i$: taille de $\mathcal{D}$.

Nous aurons alors en posant

$$q_k^r = q_k^0 + \sum_{l \in \mathscr{S}_k} \varepsilon_k^l x_l^r \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{ij}^r &= \varepsilon_{ij} \sum_{k \in M_{ij}} h'(q_k^r) \quad i \neq j \quad (\varepsilon_{ij} = \pm 1) \\ c_{ii}^r &= \sum_{k \in M_i} h'(q_k^r) \qquad i, j = 1, \dots, m \\ p_i^r &= - \sum_{k \in M_i} h(q_k^r) \qquad r = 1, 2 \dots \end{aligned}\right\} . \tag{8}$$

C^r étant symétrique, grâce à (1) on montre que $c_{ii}^r > 0$ $\forall i, r$; (4) devient :

$$f_i(X) = \sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i h\left(q_k^0 + \sum_{l \in \mathscr{S}_k} \varepsilon_k^l x_1\right) \quad (i = 1, \dots, m) .$$

II. MÉTHODE DE HARDY-CROSS

C'est une méthode itérative mise au point en 1936 par H. Cross (Univ. of Illinois, Urbana, USA) [5].

Servant à l'origine pour résoudre des problèmes de résistance des systèmes réticulés hyperstatiques, elle fut étendue aux réseaux maillés en Hydraulique. Se prêtant bien au calcul manuel, elle continue d'être assez largement utilisée après l'avènement des ordinateurs.

Nous traiterons ici la méthode dite des mailles (par opposition à celle des nœuds où les inconnues sont non pas les débits dans les tronçons mais les charges aux noeuds. Le système est alors d'ordre n).

Connaissant les débits aux nœuds, on se propose donc de déterminer les débits dans tous les tronçons du réseau $\mathscr{R}$.

1. Méthode standard (parallèle) HCAS

a) Choisissons dans $\mathscr{R}$ une distribution initiale d'équilibre pour les débits Q^0 (i.e. vérifiant les continuités aux nœuds : $AQ^0 = B$) « proche » de la solution.

b) Isolons une maille $\mathscr{M}_i$ de $\mathscr{R}$.

L'équilibre des pertes de charge étant a priori non vérifié on aura

$$\sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i \xi_k^0 = \sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i h(q_k^0) \neq 0 .$$

Afin d'avoir l'équilibre convenons de corriger les débits dans les tronçons de $\mathscr{M}_i$ de la même quantité $d_i^1 q$ supposée assez faible (affectée du coefficient ε_k^i pour le débit q_k^0 afin de garder la continuité aux nœuds de $\mathscr{M}_i$) d'où :

$$\sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i \, h(q_k^0 + \varepsilon_k^i \, d_i^1 q) = 0 .$$

En développant en série de Taylor (au voisinage de q_k^0) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 on obtient

$$d_i^1 q = - \sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i \, h(q_k^0) \Big/ \sum_{k \in M_i} h'(q_k^0) \, , \quad (\varepsilon_k^i . \varepsilon_k^i = 1) \, .$$

On répète ce processus pour toutes les mailles du réseau, ce qui fournit $d_i^1 q, \ldots, d_m^1 q$.

c) On met à jour les débits dans les tronçons de $\mathscr{R}$ en reprenant les mailles une à une, d'où la nouvelle répartition Q^1.

d) On revient à *a*) avec Q^1 et ainsi de suite tant qu'un critère d'arrêt fixé a priori n'a pas été vérifié.

On aura donc à la fin de l'étape r :

$$d_i^r q = - \sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i \, h(q_k^{r-1}) \Big/ \sum_{k \in M_i} h'(q_k^{r-1}) \quad r = 1, \ldots \tag{9}$$

$$q_k^r = q_k^{r-1} + \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_k^l \, d_l^r q = q_k^0 + \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_k^l \, d_l^j q = q_k^0 + \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_k^l \left(\sum_{j=1}^{r} d_l^j q \right) . \tag{10}$$

Rappelons que ces calculs ne concernent pas les tronçons antennes (i.e. n'appartenant à aucune maille) pour lesquels le débit initial est la solution.

2. Méthode série HCGS

Dans le calcul précédent nous avons convenu de ne modifier les débits qu'une fois toutes les corrections $d_i^r q$ déterminées. On peut faire la mise à jour dynamique en effectuant les changements de débits dans la maille $\mathscr{M}_i$ dès que le $d_i^r q$ associé est connu. Les formules (9) et (10) deviennent alors :

$$d_i^r q = - \sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i \, h(q_k^{r-1,i-1}) \Big/ \sum_{k \in M_i} h'(q_k^{r-1,i-1}) : i = 1, \ldots, m \, , \quad r = 1 \ldots \tag{11}$$

où

$$q_k^{r-1,i-1} = q_k^{r-1,i-2} + \varepsilon_k^{i-1} \, d_{i-1}^r \, q = q_k^{r-1} + \sum_{l=1}^{i-1} \varepsilon_k^l \, d_l^r q \quad (i = 2, \ldots, m) \tag{12}$$

et

$$q_k^{r-1,0} = q_k^{r-1}, \qquad q_k^{r-1,n_i} = q_k^r .$$

Pour q_k^r nous aurons la même expression (10) (mais $d_i^r q$ est donné par (11) et non (9)).

On peut schématiser les deux variantes HCAS et HCGS comme suit

HCAS	HCGS
0. Q^0 de départ ($AQ^0 = B$) ; $r = 1$	0. Q^0 de départ ($AQ^0 = B$) ; $r = 1$
1. pour $i = 1, \dots, m$ calcul de $d_i^r q$ avec (9)	1. pour $i = 1, \dots, m$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ calcul de } d_i^r q \text{ avec (11)} \\ \bullet \text{ corrections des débits dans } \mathcal{M}_i \\ \quad \text{avec (12).} \end{array} \right.$
2. Pour $i = 1, \dots, m$ correction des débits dans $\mathcal{M}_i$ $q_k^r = q_k^{r-1} + \varepsilon_k^i \, d_i^r q \quad k \in M_i$	2. Test d'arrêt : oui aller à 3 $\text{non} \left\{ \begin{array}{l} r = r + 1 \\ \text{aller à } 1 \end{array} \right.$
3. Test d'arrêt : oui aller à (4) $\text{non} \left\{ \begin{array}{l} r = r + 1 , \\ \text{aller à } 1 \end{array} \right.$	3. Fin
4. Fin.	

Remarque : Il est clair que HCAS fait des approximations successives alors que HCGS fait du Gauss-Seidel. On peut alors s'attendre à ce que HCGS converge en moins d'itérations, cependant il faut noter que celle-ci effectue plus de calcul en une itération. En effet désignons par η_1, η_1' et η_2, η_2' les nombres d'évaluations de $h(q_k)$ et $h'(q_k)$ pour HCAS et HCGS par itération. Nous aurons d'après les schémas précédents :

$$\left. \begin{array}{l} \eta_1 = \eta_1' = \bar{t} \quad \text{(nombre de tronçons non antennes)} \\ \eta_2 = \eta_2' = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m = \theta \quad \text{(d'après (12))} \end{array} \right\} . \tag{13}$$

Or θ est en général supérieur à $\bar{t}$ constante du réseau, θ étant la taille de la description $\mathcal{D}$ de $\mathcal{R}$ qui n'est pas unique (*cf.* [17]).

D'où le problème déjà noté en [17] du choix d'une description (i.e. base de cycles) de taille minimale afin d'améliorer l'efficacité de HCGS en diminuant les évaluations de $h(q_k)$ et $h'(q_k)$.

3. Autre formulation de la méthode de H. Cross

Soit $X^r \in \mathbb{R}^m$ $(r = 0, 1, \ldots)$

où
$$\left.\begin{aligned} x_l^0 &= 0 \\ x_l^{r+1} &= \sum_{j=1}^{r+1} d_l^j q \qquad l = 1, \ldots, m \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

d'où

$$q_k^{r+1} = q_k^0 + \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_k^l \, x_l^{r+1} \qquad k = 1, \ldots, t, \quad r = 0 \ldots . \tag{15}$$

* Pour HCAS nous aurons alors (d'après (9), (10) et (15))

$$x_i^{r+1} = x_i^r - \left(\sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i \, h(q_k^r)\right) \Big/ \sum_{k \in M_i} h'(q_k^r) \quad i = 1, \ldots, m, \quad r = 0, \ldots . \tag{16.1}$$

* Pour HCGS :

$$x_i^{r+1} = x_i^r - \left(\sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i \, h(q_k^{r,i-1})\right) \Big/ \sum_{k \in M_i} h'(q_k^{r,i-1})$$

or

$$\begin{aligned} q_k^{r,i-1} &= q_k^r + \sum_{l=1}^{i-1} \varepsilon_k^l \, d_l^{r+1} q = q_k^0 + \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_k^l \, x_l^r + \sum_{l=1}^{i-1} \varepsilon_k^l (x_l^{r+1} - x_l^r) \\ &= q_k^0 + \sum_{i=1}^{i-1} \varepsilon_k^l \, x_l^{r+1} + \sum_{l=i}^{m} \varepsilon_k^l \, x_l^r \quad \text{(d'après (14))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i^{r+1} = x_i^r - &\left(\sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i \, h\left(q_k^0 + \sum_{l=1}^{i-1} \varepsilon_k^l \, x_l^{r+1} + \sum_{l=i}^{m} \varepsilon_k^l \, x_l^r\right)\right) \Big/ \\ &\Big/ \sum_{k \in M_i} h'\left(q_k^0 + \sum_{l=1}^{i-1} \varepsilon_k^l \, x_l^{r+1} + \sum_{l=i}^{m} \varepsilon_k^l \, x_l^r\right). \end{aligned} \tag{16.2}$$

En utilisant l'expression (4) on obtient aisément

$$\text{HCAS} : x_i^{r+1} = x_i^r - f_i(X^r) \Big/ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(X^r) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \text{HCGS} : x_i^{r+1} &= \\ &= x_i^r - f_i(x_1^{r+1}, \ldots, x_{i-1}^{r+1}, x_i^r, \ldots, x_m^r) \Big/ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^{r+1}, \ldots, x_{i-1}^{r+1}, x_i^r, \ldots, x_m^r) \end{aligned} \tag{18}$$

avec $\qquad x_i^0 = 0 \quad i = 1, \ldots, m \quad r = 0, 1 \ldots .$

III. ÉTUDE GÉNÉRALE DU SYSTÈME ($\bar{S}$)

Nous envisageons ici certaines méthodes de résolution classiques ([18], [22]) appliquées à ($\bar{S}$). Nous employons les notations de [22].

1. Éclatement du système

1.1. *Méthode non linéaire de Jacobi(-Newton)* : JN

Soit l'algorithme

$$\begin{cases} f_1(x_1^{r+1}, x_2^r, \ldots, x_m^r) = 0 & X^0 \text{ donné (nul)} \\ f_i(x_1^r, \ldots, x_{i-1}^r, x_i^{r+1}, x_{i+1}^r, \ldots, x_m^r) = 0 & r = 0, 1\ldots \\ f_m(x_1^r, \ldots, x_{m-1}^r, x_m^{r+1}) = 0 & \end{cases} \tag{19}$$

La résolution de ces m équations (en parallèle) définit la méthode non linéaire de Jacobi.

* Pour résoudre l'équation (à 1 inconnue x_i^{r+1})

$$f_i(x_1^r, \ldots, x_{i-1}^r, x_i^{r+1}, x_{i+1}^r, \ldots, x_m^r) = 0$$

on utilise la méthode de Newton :

y_i^0 donné $\qquad k = 0, 1\ldots$

$$y_i^{k+1} = y_i^k - f_i(x_1^r, \ldots, x_{i-1}^r, y_i^k, x_{i+1}^r, \ldots, x_m^r) \Big/ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^r, \ldots, x_{i-1}^r, y_i^k, x_{i+1}^r, \ldots, x_m^r)$$

La limite de la suite y_i^k (supposée convergente) sera la valeur cherchée x_i^{r+1} mais en général on la tronque à un certain rang $l(x_i^{r+1} = y_i^l)$ ce qui définit la méthode non linéaire de Jacobi-Newton à l pas : JNL

* Jacobi-Newton à 1 pas : JN1

Soit $l = 1$ et $y_i^0 = x_i^r$ d'où

$$x_i^{r+1} = x_i^r - f_i(X^r) \Big/ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(X^r) \quad r = 0, 1\ldots \tag{20}$$

avec

$$x_i^0 = 0 \qquad i = 1, \ldots, m\ldots.$$

ce qui correspond à la méthode de H. Cross standard HCAS (*cf.* (17)).

1.2. *Méthode non linéaire de Gauss-Seidel(-Newton)* : GSN

Soit l'algorithme

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1^{r+1}, x_2^r, \dots, x_m^r) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1^{r+1}, \dots, x_i^{r+1}, x_{i+1}^r, \dots, x_m^r) = 0 \quad r = 0, 1\dots \quad X^0 \text{ donné (nul)} \\ \vdots \\ f_m(x_1^{r+1}, \dots, x_m^{r+1}) = 0 \end{array}\right\} . \tag{21}$$

La résolution de ces m équations (en série) définit la méthode non linéaire de Gauss-Seidel.

* Pour résoudre l'équation (à 1 inconnue x_i^{r+1})

$$f_i(x_1^{r+1}, \dots, x_{i-1}^{r+1}, x_i^{r+1}, x_{i+1}^r, \dots, x_m^r) = 0$$

on utilise Newton :

$$\left\{\begin{array}{l} y_i^0 \text{ donné} \\ y_i^{k+1} = y_i^k - f_i(x_1^{r+1}, \dots, x_{i-1}^{r+1}, y_i^k, x_{i+1}^r, \dots, x_m^r) \Big/ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^{r+1}, \dots, x_{i-1}^{r+1}, y_i^k, x_{i+1}^r, \dots, x_m^r) \quad k = 0, \dots . \end{array}\right.$$

La limite de y_i^k (supposée convergente) sera la valeur x_i^{r+1}, en tronquant à y_i^l ($x_i^{r+1} = y_i^l$) on aura Gauss-Seidel-Newton à l pas : GSNL.

* G-S Newton à 1 pas : GSN1

$$l = 1 \quad \text{et} \quad y_i^0 = x_i^r$$

d'où

$$x_i^{r+1} = x_i^r - f_i(x_1^{r+1}, \dots, x_{i-1}^{r+1}, x_i^r, \dots, x_m^r) \Big/ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^{r+1}, \dots, x_{i-1}^{r+1}, x_i^r, \dots, x_m^r) \quad r = 0, 1\dots \tag{22}$$

avec

$$x_i^0 = 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

ce qui correspond à la méthode H. Cross série HCGS (*cf.* (18)).

2. Système non éclaté

Nous avons vu en I.2 que la méthode de Newton appliquée à $(\bar{S})$ revient à résoudre (voir (6), (6.1), (6.2)) :

$$C^r Z^r = P^r \quad r = 0, 1 \dots \quad (C^r = F'(X^r)).$$

Nous allons envisager des méthodes indirectes pour ce système.

2.1. *Méthode de Jacobi*

Soit

$$C^r = D^r - L^r - U^r \qquad \begin{bmatrix} \ddots & & -U^r \\ & D^r & \\ -L^r & & \ddots \end{bmatrix}$$

d'où $D^r Z^r = (L^r + U^r) Z^r + P^r$.

En supposant D^r inversible (ce qui est le cas car $c_{ii}^r > 0 \; \forall i, r$).

On définit l'algorithme de (Newton)-Jacobi : NJ

$$\begin{cases} Y^0 \text{ donné} \\ Y^{k+1} = J^r Y^k + \bar{P}^r \end{cases} \quad k = 0, 1 \dots \quad \text{où} \quad Y^k \in \mathbb{R}^m ;$$

- $J^r = [D^r]^{-1} (L^r + U^r)$ matrice de Jacobi associée à C^r
- $\bar{P}^r = [D^r]^{-1} P^r$.

La limite de Y^k (supposée convergente) sera la valeur de Z^r. En la tronquant au rang $l (Z^r = Y^l)$ on aura la méthode de Newton-Jacobi à l pas NJL.

* Newton-Jacobi à 1 pas : NJ1

$$l = 1 \quad \text{et} \quad Y^0 = 0 \quad \text{d'où} \quad Y^1 = Z^r = (D^r)^{-1} P^r$$

soit

$$D^r Z^r = P^r \tag{23}$$

et

$$z_i^r = - f_i(X^r) \Big/ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(X^r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i^{r+1} = x_i^r - f_i(X^r) \Big/ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(X^r) & i = 1, \dots, m \\ x_i^0 = 0 & r = 0, 1 \dots \end{cases}$$

ce qui équivaut à la méthode HCAS ($\equiv$ JN1).

Notons que cette méthode consiste à remplacer (6) par un système diagonal (on néglige L^r et U^r dans C^r) d'où la simplification.

2.2. *Méthode de Gauss-Seidel*

On obtient l'algorithme de (Newton) GS : NGS par

$$\begin{cases} Y^0 \text{ donné} \\ Y^{k+1} = \mathscr{L}^r Y^k + \tilde{P}^r \end{cases} \quad k = 0, 1\ldots \quad \text{où} \quad Y^k \in \mathbb{R}^m ;$$

- $\mathscr{L}^r = [D^r - L^r]^{-1} U^r$ matrice de Gauss-Seidel associée à C^r
- $\tilde{P}^r = [D^r - L^r]^{-1} P^r$; ($D^r - L^r$ est inversible car D^r l'est).

On prend $Z^r = \lim Y^k$ quand $k \to \infty$.

En s'arrêtant au rang $l (Z^r = Y^l)$ on a la méthode de Newton-Gauss-Seidel à l pas : NGSL.

* Newton GS à 1 pas : NGS1

$$l = 1, \quad Y^0 = 0 \quad \text{d'où} \quad Y^1 = Z^r = \tilde{P}^r$$

soit

$$(D^r - L^r) Z^r = P^r \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{et} && z_i^r = -\left[f_i(X^r) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^r).z_j^r\right)\right] \Big/ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(X^r) \\ &\text{avec} && z_1^r = - f_1(X^r) \Big/ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X^r) \quad i = 1, \ldots, m \quad r = 0, 1\ldots \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Cette méthode consiste à remplacer (6) par un système triangulaire (on néglige U^r dans C^r).

Il est à noter que NGS1 est différente de GSN1. On peut montrer que la première est une sorte d'« approximation » de la seconde (dans (22) on développe en série de Taylor — au voisinage de X^r — les expressions de f_i et $\partial f_i / \partial x_j$ qu'on arrête respectivement aux rangs 1 et 0) qui se justifie d'autant mieux que X^r est proche de X^* : (22) s'écrit :

$$x_i^{r+1} - x_i^r = z_i^r = -\underbrace{\left[f_i(X^r) + \sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^r).z_j^r\right] + \underbrace{u_1(Z^r)}\right] \Big/ \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(X^r) + \underbrace{u_2(Z^r)}\right].}_{}$$

restes à négliger pour avoir (25)

Pour récapituler :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{HCAS} \equiv \text{JN1} \equiv \text{NJ1} \\ \bullet\ \text{HCGS} \equiv \text{GSN1} \\ \bullet\ \text{NGS1} \equiv \text{« Approximation » de GSN1}\end{array}\right\} \tag{26}$$

IV. ÉTUDE DE LA CONVERGENCE LOCALE

1. Introduction

L'étude de la convergence locale de la méthode de H. Cross standard HCAS n'a été étudiée à ma connaissance que par C. Cao [4]. La démonstration qu'il donne est assez longue car il n'a pas établi le lien fondamental entre HCAS et NJ1 (ou JN1). Grâce à (26) la question se simplifie. En effet la convergence locale des méthodes JN, GSN, NJ et NGS et leurs dérivées à 1 pas a été déjà plus ou moins étudiée en particulier dans [18].

* Notations : $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $X \in \mathbb{R}^m$.

Pour résoudre le système $F(X) = 0$ on définit l'algorithme

$$X^{r+1} = \Phi(X^r) \quad r = 0, 1\dots\ (X^0 \text{ donné})\,; \quad \Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \tag{27}$$

(le problème de point fixe $X = \Phi(X)$ est équivalent à $F(X) = 0$).

On suppose que ce problème admet une solution unique X^*.

* Théorème d'Ostrowsky ([18], [22]).

Avec les hypothèses précédentes on suppose que Φ est différentiable en X^*, $\Phi'(X^*)$ étant la jacobienne de Φ en X^*, alors si

$$\rho(\Phi'(X^*)) < 1 \quad (\text{i.e. : } \Phi \text{ contractante en } X^*)$$

il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de X^* (dans $\mathbb{R}^m$) tel que

$$\forall X^0 \in \mathscr{V}, \quad X^r \in \mathscr{V}(r = 1, \dots) \quad \text{et} \quad X^r \xrightarrow[r \to \infty]{} X^*.$$

Nous allons donc appliquer ce théorème. Pour cela on a

- $(\bar{S})$ admet une solution unique X^* (*cf.* I.2)
- Q^0 (resp. X^0) est pris « assez proche » de Q^* (resp. X^*)
- $h(q) = aq \mid q \mid$ et $f_i(X) = \sum_k \varepsilon_k^i\, h\left(q_k^0 + \sum_l \varepsilon_k^l\, x_l\right)$

h est continue, dérivable, f_i l'est aussi et $\partial f_i/\partial x_j$ ainsi que $\partial^2 f_i/\partial x_j\, \partial x_k$ sont définies, ceci implique facilement que la fonction Φ utilisée pour résoudre $(\bar{S})$ par les différentes méthodes citées est différentiable. On se ramène donc à l'étude de $\rho(\Phi'(X^*))$.

2. Convergence locale

2.1. *Newton-Jacobi à* 1 *pas* NJ1 ($\equiv$ JN1 et HCAS)

On a

$$X^{r+1} = X^r + Z^r = X^r - [D^r]^{-1} F(X^r)$$

d'où

$$\Phi(X) = X - D^{-1} F(X) \qquad (D^{-1} \text{ dépend de } X). \tag{28}$$

D'où directement

$$\Phi'(X^*) = I - (D^*)^{-1} F'(X^*)$$

comme $F'(X^*) = C^* = I - (D^*)^{-1} J^*$ alors

$$\Phi'(X^*) = J^* \quad (\text{matrice de Jacobi associée à } C^*) \tag{29}$$

d'où la condition de convergence locale de NJ1, JN1 et HCAS :

$$\rho(J^*) < 1. \tag{30}$$

Remarque : On peut montrer [18] que pour

- JN et NJ : $\Phi'(X^*) = J^*$
- JNL et NJL = $\Phi'(X^*) = (J^*)^l$

donc (30) entraîne la convergence de toutes ces méthodes.

2.2. *Newton-Gauss Seidel à* 1 *pas* NGS1

On a

$$X^{r+1} = X^r - (D^r - L^r)^{-1} F(X^r)$$

d'où

$$\Phi(X) = X - (D - L)^{-1} F(X) \quad (D, L \text{ dépendent de } X) \tag{31}$$

ce qui entraîne

$$\Phi'(X^*) = I - (D^* - L^*)^{-1} F'(X^*)$$

soit

$$\Phi'(X^*) = \mathscr{L}^* \quad (\text{matrice de G. Seidel pour } C^*) \tag{32}$$

d'où la condition de convergence locale de NGS1 :

$$\rho(\mathscr{L}^*) < 1. \tag{33}$$

Comme en 2.1 on peut montrer [18] que pour

- NGS : $\Phi'(X^*) = \mathscr{L}^*$
- NGSL : $\Phi'(X^*) = (\mathscr{L}^*)^l$

de ce fait (33) entraîne la convergence de toutes ces méthodes.

2.3. *Gauss-Seidel Newton à* 1 *pas* : GSN1 (HCGS)

Soit

$$\Phi(X) = [\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X)]^T \quad \text{où} \quad \varphi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, m.$$

On a alors :

$$x_i^{r+1} = \varphi_i(X^r) \qquad i = 1, \dots, m, \quad r = 0 \dots .$$

Pour $i = 1$:

$$\varphi_1(X) = x_1 - f_1(X) \Big/ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X).$$

Posons

$$g_i(X) = f_i(X) \Big/ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(X) \quad \forall i \Rightarrow$$

$$\varphi_i(X) = x_i - g_i(\varphi_1(X), \dots, \varphi_{i-1}(X), x_i, \dots, x_m) : i \geqslant 2 \Rightarrow$$

$$i \geqslant 2 \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(X) = -\dfrac{\partial g_1}{\partial x_j}(X) : j \geqslant 2, \quad \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(X) = 1 - \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(X) \\ \bullet \ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(X) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \left[\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k}(\varphi_1(X), \dots, \varphi_{i-1}(X), x_i, \dots, x_m) \cdot \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(X) \right] + \end{array} \right.$$

$$+ \left[\begin{array}{l} \bullet \ 1 - V \quad \text{si} \quad i = j \\ \bullet \ - V \quad \text{si} \quad j > i \quad \text{avec} \quad V = \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\varphi_1(X), \dots, \varphi_{i-1}(X), x_i, \dots, x_m). \end{array} \right.$$

Comme $\varphi_i(X^*) = x_i^*$, un calcul simple conduit à l'équation :

$$\Phi'(X^*) = J_1^* \, \Phi'(X^*) + J_2^*$$

où J_1^* et J_2^* sont précisément la triangulaire inférieure et la triangulaire supérieure de la matrice de Jacobi J^* associée à C^*.

Comme

$$\mathscr{L}^* = (I - J_1^*)^{-1} J_2^* \quad ([21], [22])$$

alors

$$\Phi'(X^*) = \mathscr{L}^*$$

d'où la même condition de convergence locale (33) vue pour NGS1.

On a aussi [18] pour

- GSN : $\Phi'(X^*) = \mathscr{L}^*$
- GSNL : $\Phi'(X^*) = (\mathscr{L}^*)^l$.

* Récapitulation : avec les hypothèses de IV.1 on a :

(*a*) $\rho(J^*) < 1 \Rightarrow$ NJ1, JN1, HCAS convergent localement,

(*b*) $\rho(\mathscr{L}^*) < 1 \Rightarrow$ NGS1, GSN1, HCGS convergent localement.

Remarquons que si J^* est non négative (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) d'après le théorème de Stein-Rosenberg [18], [21].

3. Étude de C^r et $\mathscr{D}$

Nous allons poser des conditions sur la matrice C^r et de là sur la description $\mathscr{D}$ du réseau afin d'avoir (*a*) et (*b*). Soit

$$\| J^r \|_\infty = \max_i \sigma_i^r = \sigma^r \quad \text{où} \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$\sigma_i^r = \frac{1}{|c_{ii}^r|} \sum_{j \neq i} |c_{ij}^r| \quad (c_{ii}^r > 0).$$

Posons $\alpha_k^r = | h'(q_k^r) |$ d'où (d'après (8))

$$\sigma_i^r = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left(\sum_{k \in M_{ij}} \alpha_k^r \right) \Big/ \sum_{k \in M_i} \alpha_k^r .$$

On montre que :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \sum_{k \in M_{ij}} \alpha_k^r = \sum_{k \in M_i} (\delta_k - 1) \alpha_k^r = \sum_{k \in M_i} \delta_k \alpha_k^r - \sum_{k \in M_i} \alpha_k^r$$

d'où

$$\sigma_i^r = -1 + \sum_{k \in M_i} \delta_k \alpha_k^r \Big/ \sum_{k \in M_i} \alpha_k^r .$$

Afin de généraliser notre étude regardons l'expression ($\forall r$)

$$\sigma_i = -1 + \sum_{k \in M_i} \delta_k \alpha_k \Big/ \sum_{k \in M_i} \alpha_k \tag{34}$$

où $\alpha_k = | h'(q_k) |$.

(*a*) Si nous avons $\forall k \in M_i \; \delta_k = 1$ alors $\sigma_i = 0$.

Ceci correspond au cas simple où la maille $\mathscr{M}_i$ est isolée du reste du réseau (i.e. M_{ij} est vide $\forall j \neq i$, ceci arrive en particulier lorsque $\mathscr{R}$ possède un « isthme » : *fig.* 1, $\mathscr{M}_3$) elle sera alors traitée à part et le système $(\bar{S})$ sera donc de taille $m - 1$.

L'équation relative à $\mathcal{M}_i$ sera

$$f_i(X) = \psi_i(x_i) = \sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i \, h(q_k^0 + \varepsilon_k^i \, x_i) = 0 \quad \psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Dans le cas où $\mathcal{R}$ comporte des sous-ensembles de mailles *globalement isolés* les uns des autres c'est-à-dire *n'ayant pas de tronçons communs entre eux*, le système $(\bar{S})$ (resp. $\mathcal{R}$) peut être *décomposé* en autant de sous-systèmes (resp. sous-réseaux) *indépendants* à traiter séparément.

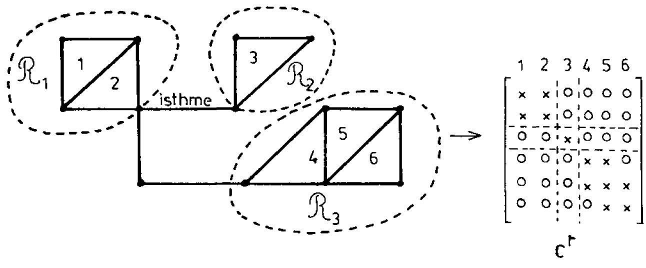

Figure 2. — Décomposition d'un réseau :

- $\mathcal{R}_1 : F_1(x_1, x_2) = 0 \qquad F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
- $\mathcal{R}_2 : F_2(x_3) = 0 \qquad F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\mathcal{M}_3)$
- $\mathcal{R}_3 : F_3(x_4, x_5, x_6) = 0 \qquad F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (\mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5, \mathcal{M}_6)$.

Nous supposerons sans perte de généralité que cette propriété a été déjà *éliminée* dans $\mathcal{R}$ qui sera donc *indécomposable.*

(*b*) Irréductibilité de C : $\left(c_{ij} = \varepsilon_{ij} \sum_{k \in M_{ij}} h'(q_k) \right)$.

La matrice $C = F'(X)$ est symétrique. Pour qu'elle soit irréductible il suffit de montrer que le graphe G_C associé est connexe :

- G_C possède m nœuds, l'arc (ij) existe lorsque $c_{ij} \neq 0$ (i.e. M_{ij} non vide : les mailles $\mathcal{M}_i$ et $\mathcal{M}_j$ sont adjacentes).

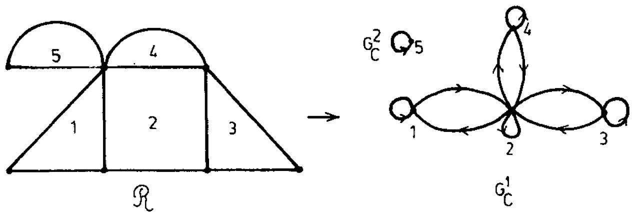

Figure 3. — Graphe d'irréductibilité.

• Supposons G_C formé de s composantes connexes $G_C^1, \ldots, G_C^s$. Les nœuds d'un G_C^i donné — qu'*aucun chemin ne relie* à ceux d'un $G_C^j(j \neq i)$ — correspondent à un sous-ensemble de mailles *globalement isolé* des autres, ce qui est absurde car d'après l'hypothèse précédente $\mathscr{R}$ ne possède plus cette propriété.

De ce fait G_C est connexe, C est donc irréductible.

(c) Diagonale dominance de C :

* Soit la propriété

$$(\mathscr{P}_1) : \delta_k \leqslant 2 \quad \forall k = 1, \ldots, t$$

ce qui veut dire qu'aucun tronçon de $\mathscr{R}$ n'appartient à plus de 2 mailles.

Dans ce cas on a facilement

$$\forall i \quad \bigcup_{j \neq i} M_{ij} \subseteq M_i$$

et

$$\cancel{\sum_{k \in M_i} \delta_k \alpha_k \Big/ \sum_{k \in M_i} \alpha_k \leqslant 2 \Rightarrow \sigma_i \leqslant 1 \quad \text{d'où} \quad \sigma \leqslant 1}$$

C est donc à diagonale dominante : $| c_{ii} | \geqslant \sum_{j \neq i} | c_{ij} |$ $\left(\text{car } | c_{ii} | = \sum_{k \in M_i} \alpha_k \text{ et } | c_{ij} | = \sum_{k \in M_{ij}} \alpha_k\right)$

* Ajoutons $(\mathscr{P}_2)$: $\nexists\, M_i/(\forall k \in M_i\ \delta_k = 2)$ ceci $\forall i$ c'est-à-dire qu'il n'existe aucune maille de $\mathscr{D}$ ayant la totalité de ses tronçons en commun avec d'autres mailles. D'où

$$\forall i \bigcup_{j \neq i} M_{ij} \subset M_i \quad \text{et} \quad \sigma_i < 1 \Rightarrow \sigma < 1$$

C sera alors à diagonale dominante stricte.

* Ajoutons à $(\mathscr{P}_1)$ la propriété moins restrictive $(\mathscr{P}_3)$

$$(\mathscr{P}_3)\ \exists - k_0 \in M_{i_0}/\delta_{k_0} = 1 \quad i_0 \in (1, \ldots, m)$$

autrement dit il existe au moins un tronçon (τ_{k_0}) appartenant à une et une seule maille $(\mathscr{M}_{i_0})$. Dans ce cas

$$\text{Pour } i = 1, \ldots, m \begin{cases} \bigcup_{j \neq i} M_{ij} \subseteq M_i & \forall i \neq i_0 \Rightarrow \sigma_i \leqslant 1 \\ \bigcup_{j \neq i_0} M_{ij} \subset M_{i_0} \Rightarrow \sigma_{i_0} < 1 & \text{et} \quad \sigma \leqslant 1 \end{cases}$$

C sera alors à diagonale dominante large avec inégalité stricte pour au moins une ligne.

Nous avons alors les résultats suivants [26] :

$*$ C sera à diagonale dominante stricte si $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont vérifiées (C est en outre irréductible).

$*$ C sera irréductible, à diagonale dominante avec inégalité stricte pour au moins une ligne si $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_3)$ sont vérifiées.

Alors dans ces deux cas on a ([18], [21]) :

- C non singulière (donc elle est symétrique définie positive puisque $c_{ii} > 0$).
- Jacobi et Gauss-Seidel convergent pour C i.e.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \rho(J) < 1 \\ \bullet\ \rho(\mathscr{L}) < 1\end{array} \text{(ceci } \forall X \in \mathbb{R}^m \text{ puisque } C \text{ dépend de } X)\right\}. \tag{35}$$

Conclusion : Si la description $\mathscr{D}$ du réseau $\mathscr{R}$ vérifie $((\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2))$ ou $((\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_3))$ alors on a (35) donc en particulier (30) et (33) donc les méthodes JN1, NJ1, HCAS (et JN, NJ, NJL, JNL) ainsi que GSN1, NGS1, HCGS (et GSN, NGS, GSNL, NGSL) convergent localement comme indiqué en IV. 1.

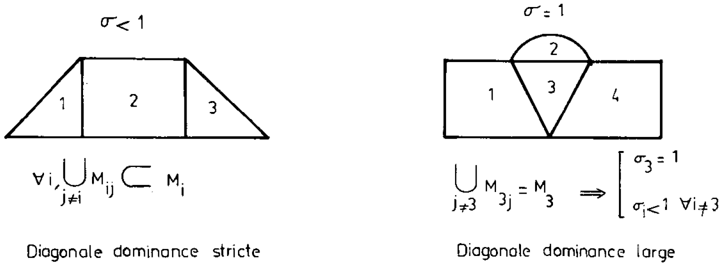

Figure 4. — Diagonale dominance.

4. Graphe planaire et graphe non planaire

Une propriété caractéristique des graphes planaires connue sous le nom de théorème de MacLane [23] s'énonce comme suit :

$\mathscr{R}$ planaire $\Leftrightarrow$ on peut extraire de $\mathscr{R}$ une base de cycles élémentaires telle que tout arc appartienne à 1 ou 2 cycles de base (*cf.* papier [17] pour cette notion).

Autrement dit il existe $\mathscr{D} = \{ \mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_m \}$ telle que

$$\forall k \in M_i \quad \delta_k \leqslant 2 \quad (\text{propriété } (\mathscr{P}_1)) .$$

De plus on a forcément (comme corollaire [3], [23]) :

$$\exists - k_0/\delta_{k_0} = 1 \qquad (\text{propriété } (\mathscr{P}_3)) .$$

De ce fait si $\mathcal{R}$ est planaire on peut toujours trouver une description $\mathcal{D}$ (que nous appellerons propre et qui n'est pas unique en général) pour laquelle $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_3)$ sont vraies donc les méthodes étudiées convergent localement comme on vient de le montrer.

Lorsque $\mathcal{R}$ n'est pas planaire δ_k est quelconque ($\delta_k > 2$ pour certains k) on ne peut alors rien dire.

Récapitulation : Après avoir formalisé la méthode de H. Cross et ses deux variantes nous avons ramené l'étude de la convergence des différents algorithmes dérivés à celle du réseau $\mathcal{R}$ et de sa description de base $\mathcal{D}$.

Pour un réseau donné on sait que si c est le nombre total de ses cycles élémentaires, on peut extraire C_c^m descriptions (qui ne sont pas forcément toutes de base). Lorsqu'il est planaire on doit choisir une description (qui existe) vérifiant le théorème de MacLane pour garantir la convergence locale des algorithmes cités.

Dans le cas où $\mathcal{R}$ n'est pas planaire on sait qu'une telle description n'existe pas, la ~~convergence ne peut alors être établie avec notre formalisme, on peut~~ tout au plus éviter si possible le choix d'une description donnant implicitement $\sigma > 1$.

V. EXPÉRIMENTATIONS NUMÉRIQUES

Nous avons repris les 4 réseaux étudiés en [17] à savoir : Testour bas (1), Testour haut (2), Medjez-El Bab (3) et la Chebba (4) et testé les 3 méthodes HCAS, HCGS et NGS1.

1. Réseau de Testour bas : $t = 9$, $n = 7$, $m = 3$, $\bar{t} = 8$

Nous avons étudié sur ce réseau qui est planaire l'influence du choix des mailles de $\mathcal{D}$ sur la convergence des algorithmes.

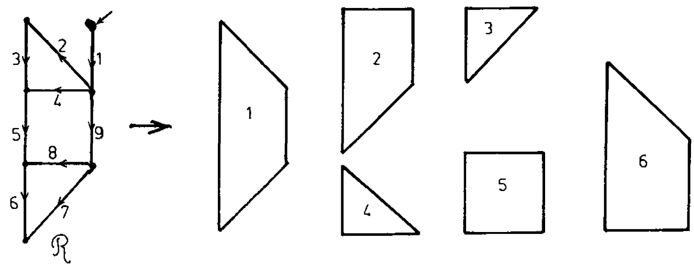

Figure 5. — Réseau de Testour bas. Mailles.

Ici $c = 6$ d'où $C_6^3 = 20$ descriptions possibles dont 16 seulement sont de base : les triplets (M_1, M_2, M_4), (M_1, M_3, M_6), (M_2, M_3, M_5) et (M_4, M_5, M_6) sont à rejeter car les vecteurs de base associés (selon le formalisme explicité dans [17]) sont liés.

TABLEAU 1

Configuration des 16 descriptions

(n_i : nombre de tronçons de degré i)

$\mathcal{D}$	Mailles	θ	n_3	n_2	n_1	σ	$\rho(J)$	
1	3-4-5	10	0	2	6	< 1	< 1	CV
2	1-2-3	14	2	2	4	?	?	
3	2-4-5	12	1	2	5	?	?	
4	3-5-6	12	1	2	5	?	?	
5	1-2-5	15	2	3	3	> 1	?	
6	1-2-6	16	2	4	2	> 1	?	
7	1-4-6	14	2	2	4	?	?	
8	1-5-6	15	2	3	3	> 1	?	
9	2-5-6	14	2	2	4	?	?	
10	2-3-4	11	0	3	4	< 1	< 1	CV
11	2-3-6	13	0	5	3	1	< 1	CV
12	1-3-4	12	0	4	4	< 1	< 1	CV
13	1-3-5	13	0	5	3	1	< 1	CV
14	1-4-5	13	0	5	3	1	< 1	CV
15	2-4-6	13	0	5	3	1	< 1	CV
16	3-4-6	11	0	3	5	< 1	< 1	CV

TABLEAU 2

Résultats numériques

($h(q) = aq \mid q \mid$, critère d'arrêt : $\mid h(q_k^{r+1}) - h(q_k^r) \mid \leqslant \varepsilon$ (fixé) $\forall k$)

$\mathscr{D}$	Méthode	Nbre Iter. ε_1	ε_2	ε_3	σ^0	$\rho(J^0)$	σ^*	$\rho(J^*)$
1	HCAS	6	7	9	0,748	0,531	0,479	0,420
	HCGS NGS1	4 5	6 7	8 8				
2	1	*DV*	*DV*	*DV*	1,480	1,116	1,309	1,269
	2 3	15 13	22 19	29 25				
3	1	14	19	24	0,590	0,485	0,889	0,795
	2 3	7 7	10 10	13 12				
4	1	24	34	44	1,410	0,996	1,110	0,981
	2 3	12 11	18 16	23 21				
5	1	*DV*	*DV*	*DV*	1,222	0,837	1,412	1,280
	2 3	12 11	21 18	30 26				
6	1	*DV*	*DV*	*DV*	1,125	1,015	1,385	1,295
	2 3	21 16	30 25	40 33				
7	1	19	27	35	1,725	1,357	1,190	0,938
	2 3	9 9	12 12	15 14				
8	1	*DV*	*DV*	*DV*	1,134	0,995	1,479	1,266
	2 3	14 11	21 18	28 24				
9	1	*DV*	*DV*	*DV*	1,253	0,809	1,521	1,246
	2 3	14 12	21 18	27 24				
10	1	9	14	18	0,778	0,606	0,655	0,590
	2 3	5 4	8 7	11 9				
11	1	22	39	56	1,0	0,781	1	0,866
	2 3	18 14	27 22	37 31				
12	1	12	18	23	0,857	0,803	0,655	0,625
	2 3	10 9	13 11	16 14				

TABLEAU 2 *(suite)*

Résultats numériques

$\mathscr{D}$	Méthode	Nbre Iter. ε_1	ε_2	ε_3	σ^0	$\rho(J^0)$	σ^*	$\rho(J^*)$
13	1	21	37	54	1	0,768	1	0,864
	2	18	27	37				
	3	15	23	32				
14	1	12	20	27	1	0,744	1	0,716
	2	9	13	18				
	3	9	13	17				
15	1	15	23	30	1	0,760	1	0,721
	2	11	15	20				
	3	10	14	18				
16	1	10	14	17	0,866	0,787	0,595	0,492
	2	7	9	12				
	3	7	9	11				

* $\sigma^0 = \| J^0 \|_\infty$, $\sigma^* = \| J^* \|_\infty$, lorsque HCAS diverge on donne σ^* et $\rho(J^*)$ à la solution atteinte par NGS1.

$* \begin{cases} 1 : \text{HCAS} \\ 2 : \text{HCGS} \\ 3 : \text{NGS1} \end{cases} \quad * \begin{cases} \varepsilon_1 = 10^{-3} \\ \varepsilon_2 = 10^{-4} \\ \varepsilon_3 = 10^{-5}. \end{cases}$

Remarques

- Pour les descriptions 1 et 10 à 16 où le théorème de MacLane est vérifié, les trois méthodes ont convergé comme prévu quoique avec des vitesses différentes.
- Pour les 8 autres cas douteux, NJ1 (HCAS, JN1) n'a convergé qu'en 3 occasions, alors que HCGS et NGS1 sont toujours convergentes.
- NGS1 a donné les meilleurs résultats.
- Le choix de $\mathscr{D}$ a une grande influence sur la vitesse de convergence qui peut être nettement améliorée (facteur 4 entre $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_4$ pour HCAS) par un choix judicieux. La description optimale correspond ici à la taille minimale ($\mathscr{D}_1 : \theta = 10$).

2. Réseaux de Testour haut et Medjez-El-Bab

Pour ces deux réseaux planaires deux descriptions propres ont été choisies.

* Caractéristiques :

Réseau	n	t	m	$\bar{t}$	θ
T.H.	12	16	5	15	19
M.B.	26	34	9	26	37

* Résultats numériques

		Nbre Iter.					
Réseau	Méthode	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	σ^0	$\rho(J^0)$	σ^*	$\rho(J^*)$
T.H.	HCAS	11	13	0,318	0,293	0,618	0,356
	HCGS	8	10				
	NGS1	8	10				
M.B.	HCAS	14	19	0,819	0,709	0,788	0,566
	HCGS	10	12				
	NGS1	9	11				

La hiérarchie NGS1, HCGS et HCAS est encore confirmée.

3. Réseau de la Chebba

C'est un réseau non planaire où

$$n = 36, \quad t = 52, \quad m = 17, \quad \bar{t} = 42.$$

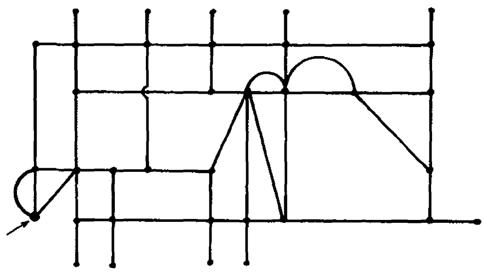

Figure 6. — Réseau de la Chebba.

Pour n'importe quelle description il y a toujours des tronçons de degré supérieur à 3. Donc on ne peut se fixer sur la valeur de σ. Ici les caractéristiques des tronçons (longueur, diamètre, matériau) peuvent directement influer sur la convergence.

Quatre descriptions ont été testées :

$\mathcal{D}$	n_3	n_4	σ	$\mathcal{D}$	n_3	n_4	σ
1	4	0	> 1	3	2	0	> 1
2	3	0	> 1	4	4	1	?

(cas indécidable)

(n_i : nombre de tronçons de degré i).

∗ Résultats numériques :

$\mathfrak{D}$	Méthode	Nbre Iter. $\varepsilon = 10^{-3}$	Nbre Iter. $\varepsilon = 10^{-4}$	σ^0	σ^*
1	HCAS	105	154	1,807	1,725
	HCGS	98	124		
	NGS1	59	84		
2	1	*DV*	*DV*	1,991	(1,938)
	2	141	189		
	3	73	117		
3	1	125	192	1,042	1,032
	2	121	156		
	3	67	102		
4	1	*DV*	*DV*	1,991	(1,904)
	2	51	71		
	3	28	36		

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ HCAS} \\ 2 \text{ HCGS} \\ 3 \text{ NGS1} \end{array} \right.$

σ^* en X^* atteint par NGS1 (description 2)

σ^* en X^* atteint par NGS1 (description 4)

On constate qu'il y a quand même convergence (assez lente) pour HCAS dans 2 cas. HCGS et NGS1 convergent toujours, cette dernière étant encore la meilleure. Le cas 4 indécidable a priori a fourni les meilleurs résultats pour ces deux méthodes.

* Sur HCAS et HCGS : Comme précisé auparavant le choix de $\mathscr{D}$ influe sur l'efficacité de HCGS par rapport à HCAS (du point de vue temps).

Pour le cas $\mathscr{D}_1$ nous avons ($\theta = 70$, alors que $\bar{t} = 42$) les temps (en s) d'exécution suivants (IBM 1130) :

	$\varepsilon = 10^{-3}$		$\varepsilon = 10^{-4}$		$\varepsilon = 10^{-5}$		
	N. iter.	temps	N. iter.	temps	N. iter.	temps	
HCAS	105	298	154	430	208	576	$\simeq$ 2,8/it.
HCGS	98	341	124	420	155	521	$\simeq$ 3,4/it.

Ceci confirme le handicap initial de HCGS. Ainsi, bien qu'elle exige moins d'itérations (pour ε fixé) elle est plus coûteuse en temps.

Ce « paradoxe » est d'autant plus accusé que le réseau est grand ($\theta \gg \bar{t}$) ; il faut nettement augmenter la précision des calculs pour que le gain en itérations par rapport à HCAS s'améliore au point de supprimer cela ($\varepsilon = 10^{-4}$ ici).

De ce fait le problème du choix d'une description adéquate est comme précisé en [17] aussi important que compliqué car cette description doit d'abord être (dans le cas planaire) de MacLane ensuite de taille minimale. Ces deux propriétés pouvant dans certains cas être incompatibles (le θ optimal peut conduire à un algorithme HCAS divergent).

Conclusion : Bien qu'assez utilisée vu la simplicité de sa mise en œuvre et son faible coût en mémoire la méthode de Hardy Cross posait certains problèmes de convergence.

Notre but a été de l'insérer dans un contexte plus général à savoir celui de dérivées de la méthode de Newton dont nous avons étudié la convergence dans certains cas particuliers.

Il faut préciser que le problème devient très complexe lorsque le réseau $\mathscr{R}$ comporte plusieurs réservoirs et des dispositifs particuliers (pompes etc...).

Nous nous proposons dans un prochain papier d'étudier l'optimisation du réseau où il s'agira, par exemple pour des débits et des pressions aux nœuds fixés, de déterminer les diamètres des conduites de façon à minimiser le coût total de $\mathscr{R}$.

RÉFÉRENCES

1. A. D'AURIAC, *A propos de l'unicité de la solution dans les problèmes de réseaux maillés*. La Houille Blanche, mai-juin 1947, pp. 209-211.

2. M. S. BAZARAA, J. J. JARVIS, *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons.
3. C. BERGE, *Graphes et Hypergraphes*. Dunod.
4. C. CAO, *Sulla convergenza del metodo di Cross*. VIII Convegno di Idraulica. Pisa-Apr. 1963. Com. D 8, 12 p.
5. H. CROSS, *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*. Bull. 286 Eng. Exp. St. Univ. of Illinois, Urbana, nov. 1936, 29 p.
6. Ch. DUBIN, *Le calcul des réseaux maillés, contribution à l'application pratique de la méthode Hardy Cross*. La Houille Blanche, mai-juin 1947, pp. 213-217.
7. Ch. DUBIN, *Le calcul des réseaux de distribution d'eau par la méthode Hardy Cross*. La Tech. S. et M., nov.-déc. 1948, pp. 129-134.
8. Ch. DUBIN, *Le calcul des réseaux par ordinateur électronique*. Rpt. IBM World Trade Europ. Educ. Centre-Blaricum, Hollande, 7 p.
9. H. K. KESAVAN, M. CHANDRASHEKAR, *Graph theoretic models for pipe network analysis*. Jr. Hydraulics Div., Feb. 1972, pp. 345-363.
10. J. KUNTZMANN, *Théorie des réseaux*. Graphes. Dunod.
11. P. F. LEMIEUX, *Efficient algorithm for distribution networks*. Jr. Hydraulics Div., Nov. 1972, pp. 1911-1920.
12. P. F. LEMIEUX, *New developments in water distribution system solution*. Canadian Hydr. Conf. Univ. of Alberta, Edmonton, May 1973, 10 p.
13. K. T. H. LIU, *The numerical analysis of water supply networks by digital computers*. Com. I.A.H.R. Sept. 1969, vol. 1, Subj. A, pp. A 5,1-A 5,8.
14. Z. MAHJOUB, *Étude et résolution de réseaux de distribution d'eau par la méthode de Hardy Cross*. Com. Col. Meth. Num. Sc. de l'Ing., Tunis, mai 1980.
15. Z. MAHJOUB, *Sur la méthode de Hardy Cross pour la résolution de problèmes de réseaux maillés*. Sem. A.N. Grenoble, janv. 1981, 36 p.
16. Z. MAHJOUB, *Autour de la résolution d'un problème de réseau maillé*. Com. Col. An. Num. Aussois, mai 1981.
17. Z. MAHJOUB, *Réduction de la résolution d'un problème de réseau maillé (A)*. R.A.I.R.O.-A.N., 16 (2), 1982, pp. 143-160.
18. J. M. ORTEGA, W. C. RHEINBOLDT, *Iterative solution for non linear equations in several variables*. Academic Press, 1970.
19. Y. OUELLET, *Théorie de base du balancement hydraulique d'un réseau d'aqueduc*. Com. Col. Balanc. Hyd. des rés. d'aqu. A.Q.T.E., oct. 1974, 123 p.
20. P. RENOUARD, *Réseaux maillés*. Tech. de l'Ing., sept. 1971, pp. A 740.1-A 740.5.
21. F. ROBERT, *Matrices non négatives et normes vectorielles*. Cours INP, Grenoble, 1974.
22. F. ROBERT, *Analyse numérique itérative*. Cours INP. Grenoble, 1975.
23. M. SAKAROVITCH, *Techniques mathématiques de la recherche opérationnelle*, II. El. de th. graphes. Cours USM, Grenoble, 1977.
24. M. M. SYSLO, *On characterizations of cycle graphs*. Com. Col. CNRS Pbs. Comb. et th. graphes, Orsay, juil. 1976, 4 p.
25. Cl. THIRRIOT, E. HADJ-TAIEB, Z. MAHJOUB, *Étude du projet optimal de distribution d'eau de la Chebba*. Rpt. ENIT-SONEDE, Tunis, nov. 1978.
26. R. S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, 1962.
27. Ch. F. VOYLES, H. R. WILKE, *Selection of circuit arrangements for distribution network analysis for the Hardy Cross method*. Jr. AWWA, March 1962, pp. 285-290.