RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

B. MERCIER
G. RAUGEL

Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par éléments finis en r, z et séries de Fourier en θ

RAIRO. Analyse numérique, tome 16, nº 4 (1982), p. 405-461
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1982__16_4_405_0>

R A I R O Analyse numerique/Numerical Analysis
(vol 16, n° 4, 1982, p 405 a 461)

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME AUX LIMITES DANS UN OUVERT AXISYMÉTRIQUE PAR ÉLÉMENTS FINIS EN r, z ET SÉRIES DE FOURIER EN θ (*)

par B MERCIER (1) et G RAUGEL (2)

Communique par P G CIARLET

Resume — *On montre que pour resoudre un probleme tridimensionnel a svmetrie axisymetrique, en coordonnees cylindriques r, z, on peut utiliser une methode d'elements finis standard, en supposant seulement que la famille de triangulations, destinee a trianguler la meridienne du domaine considere, est reguliere*

On generalise ensuite a des problemes ou seul l'ouvert est axisymetrique Pour representer la dependance eventuelle de la solution en θ, *l'angle azimutal, on utilise un developpement en serie de Fourier tronque a l'ordre N*

Abstract — *We study the approximation of three-dimensional problems with cylindrical symmetry in polar coordinates r, z We show that one can use standard finite elements, by assuming only that the family of triangulations used is regular*

We generalize to problems where only the domain has cylindrical symmetry To take into account the variation of the solution with respect to θ, *we use Fourier series truncated at the order N*

INTRODUCTION

Pour résoudre le problème de l'élasticité dans un ouvert axisymétrique, avec un second membre (la charge extérieure) quelconque (non nécessairement à symétrie cylindrique), une méthode bien connue des ingénieurs consiste à développer le second membre en séries de Fourier

Les modes de Fourier de la solution (le déplacement) sont alors calculables en résolvant autant de problèmes bidimensionnels (en général par la méthode des éléments finis)

(*) Reçu en octobre 1981

(1) Mathematiques Appliquees C E A, Centre d'Etudes de Limeil, B P 27, 94190 Villeneuve-st-Georges

(2) Laboratoire d'Analyse Numerique, Universite de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

Nous nous intéressons dans ce travail à un problème elliptique quelconque posé sur un ouvert axisymétrique, les coefficients de l'opérateur n'étant pas nécessairement constants (comme dans le cas du problème de l'élasticité). Un tel découplage mode par mode n'est bien entendu plus possible et la résolution du problème est plus coûteuse.

Mais on est ainsi en mesure de résoudre une classe plus vaste de problèmes : en effet beaucoup de problèmes posés sur des ouverts *quelconques* peuvent se ramener par changement de variables à des problèmes posés sur des ouverts cylindriques. Bien entendu, si les coefficients de l'opérateur sont constants pour le problème initial, ils ne le sont plus pour le problème posé dans l'ouvert cylindrique, d'où l'intérêt de cette étude.

Notre étude montre en particulier que pour résoudre des problèmes à symétrie cylindrique on peut utiliser des méthodes d'éléments finis (en r, z) *standard*, en supposant seulement que la famille de triangulations est régulière.

Ce résultat contraste avec ceux de travaux antérieurs (Bendali [3]) où des fonctions singulières sont prises en compte dans les fonctions de base des éléments finis, et les maillages font intervenir des éléments à côtés parallèles aux axes.

Le plan de ce travail est le suivant :

1. Le problème à résoudre en coordonnées cartésiennes.
2. Passage en coordonnées polaires.
3. Décomposition en séries de Fourier.
4. Rappel des propriétés de certains espaces de Sobolev avec poids.
5. Description de l'espace approché et du problème approché.
6. Propriétés de l'opérateur d'interpolation Π_h.
7. Rappel des résultats de Clément [6].
8. Construction de l'opérateur r_{hN}.
9. Estimation d'erreur pour la norme de $\tilde{H}$.
10. Généralisation au cas d'éléments finis de degré 2.

Notations :

Dans les §§ 1-2 on note les dérivées partielles avec un indice inférieur ; par exemple $u_{xy} \equiv \partial^2 u/\partial x \, \partial y$. A partir du § 3 on revient à la notation classique. En outre on dénotera pour $\beta = \{ \beta_1, \beta_2 \}$

$$D^\beta u \equiv \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial r^{\beta_1} \, \partial z^{\beta_2}} \quad \text{où} \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2 \,.$$

1 LE PROBLÈME A RESOUDRE EN COORDONNEES CARTESIENNES

Soit Ω un ouvert axisymétrique de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ On veut résoudre le problème variationnel

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \tag{1 1}$$

ou $V \equiv H_0^1(\Omega)$

- $a(u, v) \equiv \int_\Omega (u_x, u_y, u_z).\mathscr{A}.(v_x, v_y, v_z)^* \, dx\, dy\, dz$

- $\mathscr{A} \equiv \mathscr{A}(x, y, z)$ désigne une matrice 3×3 de coefficients telle qu'il existe $\alpha > 0$ avec

$$\operatorname{Re} \xi^*.\mathscr{A}(x, y, z).\xi \geqslant \alpha\xi^*.\xi, \forall\xi \in \mathbb{C}^3, \{ x, y, z \} \in \Omega, \tag{1 2}$$

(ou ξ^* designe la transposée du complexe conjugué du vecteur colonne ξ),

- $L(v) \equiv \int_\Omega fv^* \, dx\, dy\, dz$ (où v^* est le complexe conjugué de v)

L'hypothese (1 2) entraîne immédiatement que la forme sesquilinéaire a est V-elliptique

$$\operatorname{Re} a(v, v) \geqslant \alpha \| v \|_V^2, \forall v \in V, \tag{1 3}$$

où

$$\| v \|_V \equiv \left(\int_\Omega (| v_x |^2 + | v_y |^2 + | v_z |^2) \, dx\, dy\, dz \right)^{1/2}$$

est la norme de V

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, le problème (1 1) admet donc une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$

On supposera que f appartient a l'espace $L^2(\Omega)$, pour simplifier Dans la suite, on supposera souvent que la solution u considérée est dans l'espace $H^2(\Omega)$

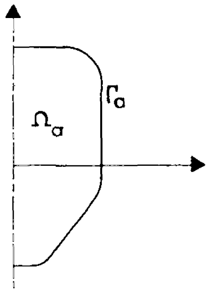
(Rappelons que si $f \in L^2(\Omega)$, la solution u de (1 1) est dans $H^2(\Omega) \cap V$, si les coefficients de $\mathscr{A}$ et l'ouvert Ω sont suffisamment réguliers (voir Grisvard [11], Nečas [12])

2. PASSAGE EN COORDONNÉES POLAIRES

Soit S_1 le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ paramétré par

$$\begin{aligned} T_1 =] - \pi, + \pi] &\to S_1 \\ \theta &\to e^{i\theta} \end{aligned}$$

Soit $\Omega_a \subset \mathbb{R}^2$ la méridienne de l'ouvert axisymétrique Ω



Soit $\tilde{\Omega} = \Omega_a \times T_1$.

A toute fonction u définie sur Ω on peut associer une fonction $\tilde{u}$ définie sur $\tilde{\Omega}$ par la formule

$$\tilde{u}(r, z, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

pour $r, z \in \Omega_a, \theta \in T_1$. (Si u est continue, $\tilde{u}$ est par conséquent continue et périodique de période 2π en θ.)

D'après la formule de changement de variables

$$\int_{\Omega} | u(x, y, z) |^2 \, dx \, dy \, dz = \int_{\tilde{\Omega}} | \tilde{u}(r, z, \theta) |^2 \, r \, dr \, dz \, d\theta$$

on voit que l'image de $L^2(\Omega)$ est l'espace

$$\tilde{H} = \{ \tilde{u} : r^{1/2} \, \tilde{u} \in L^2(\tilde{\Omega}) \}$$

muni de la norme

$$\| \tilde{u} \|_{\tilde{H}} = \left(\int_{\tilde{\Omega}} | \tilde{u}(r, z, \theta) |^2 \, r \, dr \, dz \, d\theta \right)^{1/2} . \tag{2.1}$$

D'autre part, on a, pour $r \neq 0$,

$$\begin{cases} u_x = \cos \theta \quad \tilde{u}_r - \sin \theta \left(\dfrac{1}{r} \tilde{u}_\theta \right) \\ u_y = \sin \theta \quad \tilde{u}_r + \cos \theta \left(\dfrac{1}{r} \tilde{u}_\theta \right) \end{cases}$$

de sorte que

$$\| u \|_V \equiv \left(\int_{\Omega} (| u_x |^2 + | u_y |^2 + | u_z |^2) dx \, dy \, dz \right)^{1/2}$$
$$= \left(\int_{\Omega} \left(| \tilde{u}_r |^2 + \left| \frac{1}{r} \tilde{u}_\theta \right|^2 + | \tilde{u}_z |^2 \right) r \, dr \, dz \, d\theta \right)^{1/2} ,$$

Comme

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} \equiv (\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| u \|^2_V)^{1/2} \tag{2.2}$$

on en déduit que l'image de $H^1(\Omega_0)$ (où Ω_0 désigne l'ouvert Ω privé de l'axe $r = 0$), est l'espace

$$\tilde{W} = \left\{ \tilde{u} \in \tilde{H} : \tilde{u}_r, \tilde{u}_z, \frac{1}{r} \tilde{u}_\theta \in \tilde{H} \right\} (^1) .$$

Comme l'axe $r = 0$ est de capacité nulle dans Ω, $\tilde{W}$ est aussi l'image de $H^1(\Omega)$. D'autre part l'image de V est l'espace

$$\tilde{V} = \{ \tilde{u} \in \tilde{W} : \tilde{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times T_1 \}$$

où Γ_a est la frontière de la méridienne Ω_a (axe $r = 0$ exclu).
On munit $\tilde{W}$ de la semi-norme

$$\| \tilde{u} \|_{\tilde{V}} \equiv \left(\int_{\tilde{\Omega}} \left(| \tilde{u}_r |^2 + \left| \frac{1}{r} \tilde{u}_\theta \right|^2 + | \tilde{u}_z |^2 \right) r \, dr \, dz \, d\theta \right)^{1/2} . \tag{2.3}$$

qui est une norme sur $\tilde{V}$.

Par passage en coordonnées cylindriques r, z, θ, le problème variationnel (1.1) est ainsi transformé en un autre problème variationnel : *trouver* $\tilde{u} \in \tilde{V}$ *tel que*

$$b(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{L}(\tilde{v}) \qquad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \tag{2.4}$$

où la forme sesquilinéaire b est donnée par

$$b(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\tilde{\Omega}} \left(\tilde{u}_r, \frac{1}{r} \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_z \right) . \mathscr{B} . \left(\tilde{v}_r, \frac{1}{r} \tilde{v}_\theta, \tilde{v}_z \right)^* r \, dr \, dz \, d\theta \tag{2.5}$$

avec

$$\mathscr{B} = R^* \mathscr{A} R$$

où R est la matrice orthogonale 3×3 :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & - \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(1) La dérivée par rapport à θ est prise au sens des distributions périodiques, et donc toute fonction de $\tilde{W}$ est périodique en θ, de période 2π

D'autre part on a :

$$\tilde{L}(\tilde{v}) \equiv \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f}\,\tilde{v}^*\, r\, dr\, dz\, d\theta\,.$$

On déduit immédiatement de (1.2) que

$$\operatorname{Re}\,(\eta^*.\mathscr{B}(r, z, \theta).\eta) \geqslant \alpha\eta^*.\eta\,, \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^3, \{ r, z, \theta \} \in \tilde{\Omega}\,,$$

et que la forme sesquilinéaire b est $\tilde{V}$-elliptique :

$$\operatorname{Re}\, b(\tilde{v}, \tilde{v}) \geqslant \alpha \,\| \tilde{v} \|_{\tilde{V}}^2\,, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}\,. \tag{2.6}$$

Les résultats suivants nous donnent en outre des caractérisations des images des espaces $H^2(\Omega)$ et $H^3(\Omega)$.

LEMME 2.1 : *On a la formule suivante*

$$\int_{\Omega} (| u_{xx} |^2 + | u_{yy} |^2 + | u_{zz} |^2 + 2 \,| u_{xy} |^2 + 2 \,| u_{yz} |^2 + 2 \,| u_{xz} |^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} \left(| \tilde{u}_{rr} |^2 + 2 \left| \frac{1}{r} \tilde{u}_{r\theta} - \frac{1}{r^2} \tilde{u}_\theta \right|^2 + \left| \frac{1}{r^2} \tilde{u}_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \tilde{u}_r \right|^2 + | \tilde{u}_{rz} |^2 + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{1}{r} \tilde{u}_{\theta z} \right|^2 + | \tilde{u}_{zz} |^2 \right) r\, dr\, dz\, d\theta$$

pour tout $u \in H^2(\Omega)$.

LEMME 2.2 : *Soient*

$$A \equiv \int_{\tilde{\Omega}} \left| \frac{3}{r^2} \tilde{u}_{r\theta} - \frac{2}{r^3} \tilde{u}_\theta + \frac{1}{r^3} \tilde{u}_{\theta\theta\theta} \right|^2 r\, dr\, dz\, d\theta$$

$$B \equiv \int_{\tilde{\Omega}} \left| \frac{1}{r} \tilde{u}_{rr\theta} + \frac{2}{r^3} \tilde{u}_\theta - \frac{2}{r^2} \tilde{u}_{r\theta} \right|^2 r\, dr\, dz\, d\theta$$

$$C \equiv \int_{\tilde{\Omega}} \left| - \frac{2}{r^3} \tilde{u}_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} \tilde{u}_{r\theta\theta} - \frac{1}{r^2} \tilde{u}_r + \frac{1}{r} \tilde{u}_{rr} \right|^2 r\, dr\, dz\, d\theta$$

alors on a

$$\int_{\Omega} (| u_{xxx} |^2 + 3 \,| u_{xxy} |^2 + 3 \,| u_{xyy} |^2 + | u_{yyy} |^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} | \tilde{u}_{rrr} |^2\, r\, dr\, dz\, d\theta + A + B + C\,.$$

En particulier, si $u \in H^3(\Omega)$, les trois quantités A, B et C sont finies. En outre, on a

$$\int_\Omega (|u_{xxz}|^2 + 2|u_{xyz}|^2 + |u_{yyz}|^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{\tilde\Omega} \left(|\tilde u_{rrz}|^2 + 2 \left| \frac{1}{r}\tilde u_{rz\theta} - \frac{1}{r^2}\tilde u_{z\theta} \right|^2 + \left| \frac{1}{r^2}\tilde u_{z\theta\theta} + \frac{1}{r}\tilde u_{rz} \right|^2 \right) r\, dr\, dz\, d\theta < +\infty$$

et

$$\int_\Omega (|u_{xzz}|^2 + |u_{yzz}|^2 + |u_{zzz}|^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{\tilde\Omega} \left(|\tilde u_{rzz}|^2 + \left| \frac{1}{r}\tilde u_{zz\theta} \right|^2 + |\tilde u_{zzz}|^2 \right) r\, dr\, dz\, d\theta < +\infty .$$

La vérification (technique) de ces résultats est laissée au lecteur. Les formules (2 1) à (2.3) et les deux lemmes 2.1 et 2.2 permettent en pratique de caractériser les images par l'application $u \to \tilde u$ des espaces $H^2(\Omega)$ et $H^3(\Omega)$.

Nous nous servirons de ces résultats au § 3 suivant pour majorer les normes des composantes de Fourier de $\tilde u$ lorsque u est dans $H^2(\Omega)$ ou dans $H^3(\Omega)$.

3. DÉCOMPOSITION EN SÉRIES DE FOURIER

Toute fonction $\tilde u \in \tilde H$ peut être décomposée partiellement en séries de Fourier de la façon suivante

$$\tilde u(r, z, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(r, z)\, e^{in\theta} \tag{3.1}$$

avec

$$u_n(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde u(r, z, \theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta .$$

Les fonctions u_n sont appelées *modes de Fourier* de $\tilde u$

Définissons l'espace

$$R \equiv \{ w : w = w(r, z),\ r^{1/2} w \in L^2(\Omega_a) \} \equiv L^2_{1/2}(\Omega_a)$$

muni de la norme

$$\| w \|_R \equiv \left(\int_{\Omega_a} | w(r, z) |^2\, r\, dr\, dz \right)^{1/2} .$$

On verifie immediatement que les fonctions $u_n \in R$ et que

$$\| \tilde{u} \|_H^2 \equiv 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \| u_n \|_R^2 < +\infty \tag{3 2}$$

De même on verifie que (voir (2 3)) si $\tilde{u} \in \tilde{W}$, alors

$$\| \tilde{u} \|_V^2 \equiv 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial r} u_n \right\|_R^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial z} u_n \right\|_R^2 + n^2 \left\| \frac{u_n}{r} \right\|_R^2 \right) < +\infty \tag{3 3}$$

et par consequent

$$u_n \in X_{1/2}^{1\,2}(\Omega_a) \equiv \{ w \in R \quad r^{1/2} D^\beta w \in L^2(\Omega_a) \mid \beta \mid = 1, r^{-1/2} w \in L^2(\Omega_a) \}$$

pour $n \neq 0$, et

$$u_0 \in W_{1/2}^{1\,2}(\Omega_a) \equiv \{ w \in R \quad r^{1/2} D^\beta w \in L^2(\Omega_a), \mid \beta \mid = 1 \}$$

Soient

$$\overset{\circ}{X}{}_{1/2}^{1\,2}(\Omega_a) \equiv \{ w \in X_{1/2}^{1\,2}(\Omega_a) \quad w = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}$$
$$\overset{\circ}{W}{}_{1/2}^{1\,2}(\Omega_a) \equiv \{ w \in W_{1/2}^{1\,2}(\Omega_a) \quad w = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}$$

Si $\tilde{u} \in \tilde{V}$, on a $\tilde{u} = 0$ sur $\Gamma_a \times T_1$, on en deduit que

$$u_n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a ,$$

de sorte que si $\tilde{u} \in \tilde{V}$, on a,

$$u_n \in X_{1/2}^{1\,2}(\Omega_a) , \quad \text{pour} \quad n \neq 0 ,$$
$$u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_{1/2}^{1\,2}(\Omega_a)$$

A l'aide du lemme 2 1, on peut alors caracteriser les modes de Fourier de $\tilde{u}$, lorsque $u \in H^2(\Omega)$

LEMME 3 1 *Soient* $u \in H^2(\Omega)$ *et* $\tilde{u}(r, z, \theta) \equiv u(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ Alors les *modes de Fourier* u_n *de* $\tilde{u}$ *verifient* (*en plus de* (3 3))

$$\sum_n \left(\left\| \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} \right\|_R^2 + \left\| \frac{\partial^2 u_n}{\partial r \, \partial z} \right\|_R^2 + \left\| \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right\|_R^2 \right) < +\infty \tag{3 4}$$

$$\sum_n n^2 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial z} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3 5}$$

$$\sum_n n^2 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_n \right\|_R^2 < +\infty \tag{3 6}$$

$$\sum_n \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} u_n \right\|_R^2 < +\infty \tag{3 7}$$

COROLLAIRE 3 1 *Si $u \in H^2(\Omega)$, alors on a*

$$\sum_{|n| \geqslant 2} n^2 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3 8)i}$$

$$\sum_{|n| \geqslant 2} n^4 \left\| \frac{u_n}{r^2} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3 8)ii}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^4 \left\| \frac{u_n}{r} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3 8)iii}$$

Preuve du corollaire 3 1 Pour $|n| \geqslant 2$ on vérifie que

$$n^2 \leqslant \frac{16}{9}\left(|n| - \frac{1}{|n|}\right)^2$$

On en déduit que

$$\sum_{|n| \geqslant 2} n^2 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 \leqslant \frac{16}{9} \sum_{|n| \geqslant 2} \left(|n| - \frac{1}{|n|}\right)^2 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 \tag{3 9}$$

Or

$$\left(|n| - \frac{1}{|n|}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} = |n| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{|n|}{r^2} u_n - \frac{1}{|n|}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} u_n\right)$$

entraîne

$$\left(|n| - \frac{1}{|n|}\right)^2 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 \leqslant 2 n^2 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_n \right\|_R^2 + \frac{2}{n^2} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} u_n \right\|_R^2$$

d'où (3 8)i) grâce à (3 9), (3 6) et (3 7)

D'autre part on a

$$\frac{n^2 - 1}{r^2} u_n = \left(\frac{n^2}{r^2} u_n - \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r}\right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_n\right)$$

d'ou

$$(n^2 - 1)^2 \left\| \frac{u_n}{r^2} \right\|_R^2 \leqslant 2 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} u_n \right\|_R^2 + 2 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_n \right\|_R^2$$

Comme pour $|n| \geqslant 2$

$$(n^2 - 1)^2 \geqslant \frac{1}{2} n^4$$

on en déduit avec (3 6), (3 7) que

$$\sum_{|n|\geq 2} n^4 \left\| \frac{u_n}{r} \right\|_R^2 \leqslant 2 \sum_{|n|\geq 2} (n^2-1)^2 \left\| \frac{u_n}{r^2} \right\|_R^2 < +\infty$$

d'où (3.8)ii).

Enfin (3 8)iii) découle immédiatement de (3 8)ii) et de (3 3). C.Q.F.D.

Enfin, à l'aide du lemme 2.2, on peut caractériser les modes de Fourier de $\tilde{u}$, lorsque $u \in H^3(\Omega)$.

LEMME 3.2 : *Soient $u \in H^3(\Omega)$ et $\tilde{u}(r, z, \theta) \equiv u(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.* Alors les *modes de Fourier u_n de $\tilde{u}$ vérifient (en plus de (3 3) à (3 7))*

$$\sum_n \left(\left\| \frac{\partial^3 u_n}{\partial r^3} \right\|_R^2 + \left\| \frac{\partial^3 u_n}{\partial r^2\,\partial z} \right\|_R^2 + \left\| \frac{\partial^3 u_n}{\partial r\,\partial z^2} \right\|_R^2 + \left\| \frac{\partial^3 u_n}{\partial z^3} \right\|_R^2 \right) < +\infty \tag{3.10}$$

$$\sum_n n^2 \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3.11}$$

$$\sum_n n^2 \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial z} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3.12}$$

$$\sum_n \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r\,\partial z} - \frac{n^2}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial z} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3.13}$$

$$\sum_n \left\| \frac{3}{r^2} n \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{1}{r^3}(n^3 + 2n)\, u_n \right\|_R^2 < +\infty \tag{3.14}$$

$$\sum_n n^2 \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{2}{r^3} u_n \right\|_R^2 < +\infty \tag{3 15}$$

$$\sum_n \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} - \frac{1+n^2}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{2n^2}{r^3} u_n \right\|_R^2 < +\infty \tag{3 16}$$

COROLLAIRE 3 2 . *Si $u \in H^3(\Omega)$, on a*

$$\sum_{|n|\geq 2} n^6 \left\| \frac{u_n}{r^2} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3 17)i}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6 \left\| \frac{u_n}{r} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3.17)ii}$$

$$\sum_{|n|\geq 3} n^4 \left\| \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3.18}$$

$$\sum_{|n|\geq 3} n^2 \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} \right\|_R^2 < +\infty\,. \tag{3.19}$$

Preuve du corollaire 3.2 : On a

$$\left\| (n^3 + 2n)\frac{u_n}{r^2} \right\|_R^2 \leqslant 2 \left\| (n^3 + 2n)\frac{u_n}{r^2} - \frac{3n}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 + 2 \left\| \frac{3n}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 .$$

Comme $n^6 \leqslant (n^3 + 2n)^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, on en déduit (3.17) grâce à (3.14) et à (3.8).

D'autre part, en posant

$$\begin{aligned} a_n &\equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{2}{r^3} u_n \\ b_n &\equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} - \frac{1 + n^2}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{2n^2}{r^3} u_n \\ c_n &\equiv \frac{3}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{n^2 + 2}{r^3} u_n \end{aligned} ,$$

on a

$$a_n - b_n - 2\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} c_n = \frac{1}{r^2}\left(-2 + (1 + n^2) - 6\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)\frac{\partial u_n}{\partial r} = \\ = \frac{n^2 - 1}{r^2}\frac{n^2 - 4}{n^2 + 2}\frac{\partial u_n}{\partial r}$$

comme, pour $|n| \geqslant 3$,

$$n^2 \leqslant \frac{3(n^2 - 1)(n^2 - 4)}{n^2 + 2} ,$$

on a

$$\sum_{|n| \geqslant 3} \left\| \frac{n^2}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 \leqslant \sum_{|n| \geqslant 3} \left\| 3a_n - 3b_n - 6\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} c_n \right\|_R^2 \leqslant \\ \leqslant C\left(\sum_{|n| \geqslant 3} \| a_n \|_R^2 + \sum_{|n| \geqslant 3} \| b_n \|_R^2 + \sum_{|n| \geqslant 3} \| c_n \|_R^2 \right) < +\infty$$

d'après (3.14) à (3.16), d'où (3.18).

Enfin, on a

$$|n| a_n - \frac{b_n}{|n|} = \left(|n| - \frac{1}{|n|}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \left(\frac{1 + n^2}{|n|} - 2|n|\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r}$$

d'où

$$\frac{n^2 - 1}{|n|}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} = |n| a_n - \frac{b_n}{|n|} + \frac{n^2 - 1}{|n|}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r} ;$$

comme, pour $|n| \geqslant 2$, on a

$$n^2 \leqslant \frac{16}{9}\left(\frac{n^2-1}{|n|}\right)^2 \quad ,$$

on en déduit

$$\sum_{|n|\geqslant 3} n^2 \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} \right\|_R^2 \leqslant C \sum_{|n|\geqslant 3} \left(n^2 \| a_n \|_R^2 + \frac{1}{n^2} \| b_n \|_R^2 + n^2 \left\| \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 \right) ,$$

d'après (3.15), (3.16) et (3.18) cette quantité est donc bornée si $u \in H^3(\Omega)$ d'où (3.19). C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3.3 : *Si $u \in H^3(\Omega)$, on a*

$$\sum_{|n|\geqslant 2} n^4 \left\| \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_n}{\partial z} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3.20}$$

$$\sum_{|n|\geqslant 2} n^2 \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r\,\partial z} \right\|_R^2 < +\infty \tag{3.21}$$

$$\sum_{|\beta|=1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4 \left\| \frac{1}{r} D^\beta u_n \right\|_R^2 < +\infty . \tag{3.22}$$

(La démonstration de ce résultat est analogue à celle du corollaire 3.1)

4. RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DE CERTAINS ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

Le point générique x de $\mathbb{R}^2$ sera noté : $x = (r, z)$ et le point générique de $\mathbb{R}$ sera noté simplement $x = r$.

On désigne par $\mathbb{R}^n_+$ l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ suivant : $\{ x \in \mathbb{R}^n : r > 0 \}$ pour $n = 1, 2$. ($\mathbb{R}^1_+$ sera souvent noté $\mathbb{R}_+$.)

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n_+$, de frontière $\partial\mathcal{O}$ lipschitzienne.

DÉFINITION 4.1 : *Soient $l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que* : $1 < p < +\infty$.

(i) *On désigne par $W^{l,p}_\alpha(\mathcal{O})$ l'espace*

$$W^{l,p}_\alpha(\mathcal{O}) = \{ u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}) : r^\alpha D^\beta u \in L^p(\mathcal{O}), 0 \leqslant |\beta| \leqslant l \}$$

muni de la norme

$$\| u \|_{W^{l,p}_\alpha(\mathcal{O})} \equiv \left(\sum_{|\beta|\leqslant l} \| r^\alpha D^\beta u \|^p_{L^p(\mathcal{O})} \right)^{1/p}$$

(ii) *On désigne par $X^{l,p}_\alpha(\mathcal{O})$ l'espace*

$$X^{l,p}_\alpha(\mathcal{O}) = \{ u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}) : r^{\alpha - l + |\beta|} D^\beta u \in L^p(\mathcal{O}), 0 \leqslant |\beta| \leqslant l \}$$

muni de la norme

$$\| u \|_{X_\alpha^{l,p}(\mathcal{O})} \equiv \left(\sum_{|\beta| \leqslant l} \| r^{\alpha - l + |\beta|} D^\beta u \|^p_{L^p(\mathcal{O})} \right)^{1/p} . \quad \blacksquare$$

• Les espaces $W_\alpha^{l,p}(\mathcal{O})$ et $X_\alpha^{l,p}(\mathcal{O})$ ainsi définis sont des espaces de Banach et, dans le cas $p = 2$, ce sont des espaces de Hilbert.

• Si $\mathcal{O}$ est un ouvert borné et si la distance de $\mathcal{O}$ à l'axe $r = 0$ est strictement positive les espaces $W_\alpha^{l,p}(\mathcal{O})$ et $X_\alpha^{l,p}(\mathcal{O})$ coïncident avec l'espace de Sobolev ordinaire $W^{l,p}(\mathcal{O})$.

En utilisant les inégalités de Hardy on démontre aisément les résultats d'inclusion suivants : (*cf.* [4], [8], [9]).

THÉORÈME 4.1 : *Pour $l \in \mathbb{N}^*$, $1 < p < +\infty$, on a les inclusions algébriques et topologiques :*

(i) *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \leqslant 0$ ou $l < \alpha + \frac{1}{p}$, alors*

$$W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W_{\alpha - j}^{l-j,p}(\mathbb{R}^n_+) \quad pour \quad j = 0, 1, \ldots, l .$$

(ii) *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $0 < \alpha + \frac{1}{p} \leqslant l$, alors*

$$W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W_{\alpha - j}^{l-j,p}(\mathbb{R}^n_+) \quad pour \quad j = 0, 1, \ldots, \left[\alpha + \frac{1}{p}\right]$$

où $\left[\alpha + \frac{1}{p}\right]$ désigne le plus grand entier positif ou nul strictement inférieur à $\alpha + \frac{1}{p}$.

Grâce à des démonstrations longues et essentiellement techniques, on obtient les résultats de densité suivants ([4], [9]) :

THÉORÈME 4.2 : *Soient $l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$, alors*

(i) *Si $l \geqslant 1$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ est dense dans $X_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}^n_+)$.*

(ii) *Si $l \geqslant 1$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ est dense dans $W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}^n_+)$ pour $\alpha + \frac{1}{p} \leqslant 0$ ou $l \leqslant \alpha + \frac{1}{p}$.*

(iii) *Si $\alpha + \frac{1}{p} > 0$, $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ est dense dans $W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}^n_+)$.*

On introduit maintenant un domaine borné Ω_a de $\mathbb{R}^n_+$ dont une partie de la frontière est sur l'axe $r = 0$. Plus précisément, si $n = 1, \Omega_a$ désignera un segment $]0, a[$ où $a > 0$; si $n = 2$, Ω_a désignera un domaine borné à frontière lipschitzienne tel que :

$$\Omega_a = \Omega_a^1 \cup \mathcal{O}$$

où Ω_a^1 est un trapèze dont une des bases est contenue dans l'axe $r = 0$, où la distance de $\mathcal{O}$ à l'axe $r = 0$ est strictement positive et où $\Omega_a^1 \cap \mathring{\mathcal{O}} = \emptyset$.

Soit $\Gamma_0 = \partial\Omega_a \cap \{ r = 0 \}$, $\Gamma_a = \partial\Omega_a \setminus \Gamma_0$.

Donc pour $n = 2$, Ω_a aura la forme suivante, par exemple :

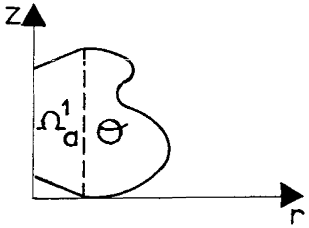


Figure 4.1.

DÉFINITION 4.2 : *Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que : $1 < p < +\infty$, on désigne par $\mathring{W}_\alpha^{1,p}(\Omega_a)$ et $\mathring{X}_\alpha^{1,p}(\Omega_a)$ les espaces :*

$$\mathring{W}_\alpha^{1,p}(\Omega_a) = \{ u \in W_\alpha^{1,p}(\Omega_a) : u|_{\Gamma_a} = 0 \}$$

et

$$\mathring{X}_\alpha^{1,p}(\Omega_a) = \{ u \in X_\alpha^{1,p}(\Omega_a) : u|_{\Gamma_a} = 0 \}. \quad \blacksquare$$

LEMME 4.1 : *Soit D une demi-droite de $\mathbb{R}_+^2$ ayant pour extrémité l'origine 0 ; soit θ la mesure de l'angle orienté formé par l'axe $z = 0$ et la demi-droite D $(-\pi < \theta < \pi)$. On désigne par C_θ (respectivement $C_{\theta\lambda}$) l'ouvert*

$$\{ (r, z) \in \mathbb{R}_+^2 : z < r.\mathrm{tg}\,\theta \}$$

(respectivement l'ouvert $\{ (r, z) \in \mathbb{R}_+^2 : z < r.\mathrm{tg}\,\theta + \lambda \}$).

Soit $l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$. On a alors les propriétés suivantes :

(i) *Si $u \in W_\alpha^{l,p}(C_\theta)$ (respectivement $X_\alpha^{l,p}(C_\theta)$), alors $u_\lambda \in W_\alpha^{l,p}(C_{\theta\lambda})$ (respectivement $X_\alpha^{l,p}(C_{\theta\lambda})$) où*

$$u_\lambda(r, z) = u(r, z - \lambda), \lambda > 0 .$$

En outre, quand λ tend vers 0, u_λ tend vers u dans $W_\alpha^{l,p}(C_\theta)$ (respectivement $X_\alpha^{l,p}(C_\theta)$).

(ii) *Si u appartient à $\mathcal{D}(\overline{C}_\theta)$ alors $P^l u$ appartient à $C^l(\overline{\mathbb{R}}_+^2)$ où P^l est l'opé-*

rateur de prolongement défini par

$$(P^l u)(r, z) = \begin{cases} u(r, z) & si \quad (r, z) \in C_\theta \\ \sum_{j=1}^{l+1} \lambda_j \, u(r, (j+1)(\operatorname{tg}\theta) \, r - jz) & sinon \end{cases} \tag{4.1}$$

et

$$\sum_{j=1}^{l+1} (-j)^k \lambda_j = 1 \quad pour \quad k = 0, 1, 2, \ldots, l .$$

En outre, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de l, p, α telle que

- $$\| P^l u \|_{W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}_+^2)} \leqslant C \| u \|_{W_\alpha^{l,p}(C_\theta)} \quad (^1)$$

et

- $$\| P^l u \|_{X_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}_+^2)} \leqslant C \| u \|_{X_\alpha^{l,p}(C_\theta)} . \quad (^1)$$

Démonstration :

- L'assertion (i) est presque évidente. Il suffit de remarquer que si $u \in L_\alpha^p(C_\theta)$, alors $r^{\alpha/p} u \in L^p(C_\theta)$ et, puisque $r^{\alpha/p} u_\lambda$ tend vers $r^{\alpha/p} u$ dans $L^p(C_\theta)$ quand $\lambda \to 0$, $u_\lambda \to u$ dans $L_\alpha^p(C_\theta)$ quand $\lambda \to 0$.

- On peut vérifier l'assertion (ii) par des calculs un peu longs, mais faciles. Remarquons que le prolongement $P^l u$ de u à $\mathbb{R}_+^2$ est le prolongement de Nikolskii défini, par exemple, par Adams ([4], p. 84) ou Nečas ([12], p. 75).

En utilisant des partitions de l'unité, on déduit du théorème 4.2 le

THÉORÈME 4.3 : *Soient $l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$, alors*

(i) *Si $l \geqslant 1$, l'ensemble des restrictions à Ω_a des fonctions de $\mathscr{D}(\mathbb{R}_+^n)$ est dense dans $X_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$.*

(ii) *Si $l \geqslant 1$, l'ensemble des restrictions à Ω_a des fonctions de $\mathscr{D}(\mathbb{R}_+^n)$ est dense dans $W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$ pour $\alpha + \frac{1}{p} \leqslant 0$ ou $l \leqslant \alpha + \frac{1}{p}$.*

(iii) *Si $\alpha + \frac{1}{p} > 0$, $\mathscr{D}(\overline{\Omega}_a)$ est dense dans $W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$.*

Démonstration : Démontrons, par exemple, l'assertion (iii). Dans ce but, nous montrerons que l'ensemble des restrictions à Ω_a des fonctions de $W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}_+^2)$,

(1) On conviendra que $\| u \|_{W_\alpha^{l,p}(C_\theta)} = +\infty$ (respectivement $\| u \|_{X_\alpha^{l,p}(C_\theta)} = +\infty$) si $u \notin W_\alpha^{l,p}(C_\theta)$ (respectivement $u \notin X_\alpha^{l,p}(C_\theta)$).

est dense dans $W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$. Ensuite il suffit d'appliquer le théorème 4 2 pour conclure. Nous ne traiterons que le cas $n = 2$.

Rappelons que $\Omega_a = \Omega_a^1 \cup \mathcal{O}$ et que

$$d = \begin{cases} \text{distance } (\mathcal{O}, \text{axe } r = 0) \text{ si } \mathcal{O} \neq \varnothing \\ \text{hauteur du trapèze } \Omega_a^1 \text{ si } \mathcal{O} = \varnothing \end{cases} \tag{4 2}$$

On introduit alors une fonction $\omega(r) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\omega(r) = \begin{cases} 1 \quad \text{pour} \quad |r| \leqslant \dfrac{d}{2} \\ 0 \quad \text{pour} \quad |r| \geqslant \dfrac{3\,d}{4} \end{cases} \tag{4.3}$$

Soit $u \in W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$, alors $u = \omega u + (1 - \omega)\, u$.

• La fonction $w = (1 - \omega)\, u$ est nulle pour $r \leqslant d/2$ et appartient donc à $W^{l,p}(\Omega_a)$. Puisque Ω_a est un ouvert à frontière lipschitzienne, on peut construire une suite de fonctions w_n de $W^{l,p}(\mathbb{R}_+^2)$ telles que w_n converge vers w dans $W^{l\,p}(\Omega_a)$ quand n tend vers l'infini et telles que les fonctions w_n soient nulles pour $r \leqslant d/4$ (voir Nečas [12], démonstration du théorème 3 1, p. 67). Les fonctions w_n appartiennent alors à $W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$ et la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers w dans $W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$.

• Il reste à construire une suite de fonctions de $W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}_+^2)$ convergeant vers $v = \omega u$ dans $W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$

Soient M_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$ les 4 sommets du trapèze Ω_a^1 et soient (r_i, z_i) les coordonnées du point M_i. On supposera que $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = r_4 \neq 0$ et $z_1 > z_2$ (*cf. fig.* 4.2).

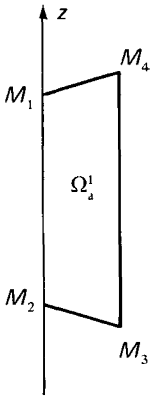


Figure 4.2.

Soit $(U_\iota)_{1 \leqslant \iota \leqslant 3}$ un recouvrement ouvert de Ω_a^1 tel que

$$U_3 \cap M_2M_3 = U_3 \cap M_1M_4 = U_1 \cap M_2M_3 = U_2 \cap M_1M_4 = \varnothing \quad (4.4)$$

et soit $(\omega_\iota)_{1 \leqslant \iota \leqslant 3}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{1 \leqslant \iota \leqslant 3}$. On pose alors

$$v_\iota = \varphi_\iota \, \varphi u. \quad (4.5)$$

Puisque v_3 est nulle pour $r \geqslant 3\,d/4$ et au voisinage des côtés M_1M_4 et M_2M_3 de Ω_a^1, on définit, pour $n \in \mathbb{N}$, v_{3n} comme le prolongement par 0 de v_3 à $\mathbb{R}_+^2$.

Alors v_{3n} appartient à $W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}_+^2)$.

Soit $v_{\iota n}$, $\iota = 1, 2$, le prolongement par 0 à $\mathbb{R}^2$ de la fonction $\tilde{v}_{\iota n}$, $i = 1, 2$, où

$$\tilde{v}_{1n}(r, z) = \varphi_1 \, \omega u(r, z - 1/n)$$

$$\tilde{v}_{2n}(r, z) = \varphi_2 \, \omega u(r, z + 1/n) .$$

Pour n assez grand ($n \geqslant n_0$), les fonctions $\tilde{v}_{\iota n}$ sont bien définies. A l'aide du lemme 4.1, on montre immédiatement que les fonctions $v_{\iota n}$ appartiennent à $W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}_+^2)$ pour $n \geqslant n_0$ et que $v_{\iota n}$ converge vers v_ι dans $W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$ quand n tend vers l'infini.

Finalement les fonctions $v_n = \sum_{\iota=1}^{3} v_{\iota n}$ appartiennent à $W_\alpha^{l,p}(\mathbb{R}_+^2)$ pour $n \geqslant n_0$ et v_n converge vers v dans $W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$ quand n tend vers l'infini. C.Q.F.D.

Enfin du théorème 4.1, on déduit le

THÉORÈME 4.4 : *Pour $l \in \mathbb{N}^*$, $1 < p < +\infty$, on a les inclusions algébriques et topologiques :*

(i) *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \leqslant 0$ ou $l < \alpha + \frac{1}{p}$, alors*

$$W_\alpha^{l,p}(\Omega_a) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{l-j,p}(\Omega_a) \quad pour \quad j = 0, 1, \ldots, l .$$

(ii) *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $0 < \alpha + \frac{1}{p} \leqslant l$, alors*

$$W_\alpha^{l,p}(\Omega_a) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{l-j,p}(\Omega_a) \quad pour \quad j = 0, 1, \ldots, \left[\alpha + \frac{1}{p}\right].$$

Démonstration : Démontrons, par exemple, l'assertion (i). Nous ne traiterons que le cas $n = 2$.

Soit u une fonction de $W_\alpha^{l,p}(\Omega_a)$, alors

$$u = \omega u + (1 - \omega)\, u \quad \text{où} \quad \omega \text{ est la fonction donnée par } (4.3) .$$

La fonction $w = (1 - \omega) u$ est nulle pour $r \leqslant d/2$, donc la fonction w appartient à l'espace $W^{l-j,p}_{\alpha-j}(\Omega_a)$ pour $j = 0, 1, \dots, l$ et il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C > 0$ telles que

$$\| (1 - \omega) u \|_{W^{l-j,p}_{\alpha-j}(\Omega_a)} \leqslant C_1 \| (1 - \omega) u \|_{W^{l,p}_{\alpha}(\Omega_a)} \leqslant C \| u \|_{W^{l,p}_{\alpha}(\Omega_a)} \quad (4\ 6)$$

Il reste à considérer le terme $v = \omega u$ Comme v est nulle pour $r \geqslant 3\,d/4$ il suffit de montrer que v appartient a $W^{l-j,p}_{\alpha-j}(\Omega_a^1)$ pour $j = 0, 1, \dots, l$ et à majorer la norme de v dans ces espaces Dans ce but, nous allons définir un prolongement $P^l\, v$ de v à $\mathbb{R}^2_+$ et appliquer ensuite le théoreme 4 1

Avec les notations utilisées dans la démonstration du theoreme 4 3, la fonction v s'écrit

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \text{ ou les fonctions } v_i \text{ sont donnees par (4 5)}$$

On note $P^l_3\, v_3$ le prolongement par 0 à $\mathbb{R}^2_+$ de la fonction v_3

Soit θ_1 (respectivement θ_2) la mesure de l'angle oriente formé par l'axe $z = 0$ et $\overrightarrow{M_1 M_4}$ (respectivement $\overrightarrow{M_2 M_3}$) On note alors $\tilde{v}_1$ (respectivement $\tilde{v}_2$) le prolongement par 0 à C_{θ_1} (respectivement $\mathbb{R}^2_+ \setminus C_{\theta_2}$) de la fonction v_1 (respectivement v_2) Finalement on pose

$$P^l_1\, v_1(r, z) = \begin{cases} \tilde{v}_1(r, z) & \text{si} \quad (r, z) \in C_{\theta_1} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{l+1} \lambda_j\, \tilde{v}_1(r, (j+1)\, r \operatorname{tg} \theta_1 - j(z - z_1) + z_1) & \text{sinon}, \end{cases}$$

et

$$P^l_2\, v_2(r, z) = \begin{cases} \tilde{v}_2(r, z), & \text{si} \quad (r, z) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus C_{\theta_2} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{l+1} \lambda_j\, \tilde{v}_2(r, (j+1)\, r \operatorname{tg} \theta_2 - j(z - z_2) + z_2) & \text{si} \quad (r, z) \in C_{\theta_2} \end{cases}$$

ou les λ_j, pour $1 \leqslant j \leqslant l + 1$, sont donnés par (4 1)

On peut alors définir le prolongement $P^l\, v$ de v à $\mathbb{R}^2_+$ par

$$P^l\, v = P^l_1\, v_1 + P^l_2\, v_2 + P^l_3\, v_3 \quad (4\ 7)$$

Grâce à l'assertion (ii) du lemme 4 1, il est clair que la fonction $P^l\, v$ appartient à $W^{l,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^2_+)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\| P^l\, v \|_{W^{l,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^2_+)} \leqslant C \| v \|_{W^{l,p}_{\alpha}(\Omega^1_a)} \quad (4\ 8)$$

Le théorème 4 1 nous dit alors que $P^l\, v$ appartient à $W^{l-j,p}_{\alpha-j}(\mathbb{R}^2_+)$ pour $0 \leqslant j \leqslant l$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\| P^l\, v \|_{W^{l-j,p}_{\alpha-j}(\mathbb{R}^2_+)} \leqslant C \| P^l\, v \|_{W^{l,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^2_+)} \quad (4\ 9)$$

Grace aux majorations (4 8), (4 9), on obtient finalement

$$\| v \|_{W^{l,p}_{\alpha,j}(\Omega^1_a)} \leqslant \| P^l v \|_{W^{l,p}_{\alpha,j}(\mathbb{R}^2_+)} \leqslant C \| v \|_{W^{l,p}_{\alpha}(\Omega^1_a)} \tag{4 10}$$

Les majorations (4 6) et (4 10) nous demontrent le theoreme C Q F D

Remarque 4 1 On deduit immediatement du theoreme 4 4 que

$$W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a) \hookrightarrow L^2_{-1/2+\varepsilon}(\Omega_a) \quad \text{pour tout nombre reel } \varepsilon > 0$$

En particulier, on a

$$W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a) \hookrightarrow H^1(\Omega_a) \qquad \blacksquare$$

Nous donnerons ci-dessous quelques autres proprietes des espaces de Sobolev avec poids qui nous seront directement utiles dans les paragraphes suivants

Soit $V(\Omega_a)$ l'ensemble des restrictions a Ω_a des fonctions de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n_+)$ On a alors la

PROPOSITION 4 1 *L'application* $u \mapsto \gamma u \equiv u(0, z)$ *de* $V(\Omega_a)$ *dans* $\mathscr{D}(\Gamma_0)$ *se prolonge par continuite en une application lineaire continue de* $X^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$ *dans* $L^2(\Gamma_0)$, *cette application est encore notee* γ *et verifie en outre,*

$$\forall u \in X^{1,2}_{1/2}(\Omega_a), \quad \gamma u = 0 \quad \textit{dans} \quad L^2(\Gamma_0)$$

Demonstration On ne fera la demonstration que dans le cas $n = 2$

Si $u \in V(\Omega_a)$, on a evidemment $(\gamma u)(z) \equiv u(0, z) = 0, \forall z$ Soit ω la fonction introduite en (4 3) Posons $v = \omega u$, le prolongement $P^1 v$ defini en (4 7) pour $l = 1$, appartient a $C^1(\mathbb{R}^2_+)$ et s'annule pour $r \geqslant 3d/4$, en outre, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\| P^1 v \|_{X^{1,2}_{1/2}(\mathbb{R}^2_+)} \leqslant C_1 \| v \|_{X^{1,2}_{1/2}(\Omega^1_a)} \tag{4 11}$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}
| (\gamma u)(z) |^2 &= | \omega(0, z) u(0, z) |^2 = | P^1 v(0, z) |^2 \\
&= -2 \int_0^{3d/4} (P^1 v)(r, z) \frac{\partial}{\partial r} (P^1 v(r, z)) \, dr \\
&\leqslant 2 \left(\int_0^{3d/4} (P^1 v)^2 \frac{1}{r} \, dr \right)^{1/2} \left(\int_0^{3d/4} r \left| \frac{\partial}{\partial r} P^1 v \right|^2 dr \right)^{1/2} \\
&\leqslant C \left(\int_0^{3d/4} (P^1 v)^2 \frac{1}{r} \, dr + \int_0^{3d/4} r \left| \frac{\partial}{\partial r} P^1 v \right|^2 dr \right)
\end{aligned}$$

d'ou, avec les notations introduites dans la demonstration du theorème 4 3,

$$\int_{z_2}^{z_1} |(\gamma u)(z)|^2 \, dz \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_{z_2}^{z_1}\int_0^{3d/4} (P^1 v)^2 \frac{1}{r}\, dr\, dz + \int_{z_2}^{z_1}\int_0^{3d/4} r\left|\frac{\partial P^1 v}{\partial r}\right|^2 dr\, dz\right)$$

A l'aide de (4 11), on en déduit

$$\| \gamma u \|_{L^2(\Gamma_0)} \leqslant C \| P^1 v \|_{X^{1,2}_{1/2}(\mathbb{R}^2_+)} \leqslant C \| u \|_{X^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)}$$

Puisque $V(\Omega_a)$ est dense dans $X^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$, on peut prolonger l'application γ, par continuité, de $X^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$ dans $L^2(\Gamma_0)$ De plus, puisque $\gamma u = 0$ dans $L^2(\Gamma_0)$ pour $u \in V(\Omega_a)$, il en est de même pour $u \in X^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$

PROPOSITION 4 2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que, $\forall u \in H^1_0(\Omega_a)$,*

$$\left(\int_{\Omega_a} \frac{u^2}{r^2}\, dr\, dz\right)^{1/2} \leqslant C\, | u |_{H^1(\Omega_a)} \tag{4 12}$$

Demonstration Soit $\psi \in \mathscr{D}(\Omega_a)$, alors, par une formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega_a} \frac{1}{r^2}\psi^2(r, z)\, dr\, dz = 2\int_{\Omega_a} \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\psi\, dr\, dz \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int_{\Omega_a}\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|^2 dr\, dz\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_a}\frac{\psi^2}{r^2}\, dr\, dz\right)^{1/2}$$

d'où

$$\int_{\Omega_a} \frac{1}{r^2}\psi^2(r, z)\, dr\, dz \leqslant 4\int_{\Omega_a}\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|^2 dr\, dz$$

et (4 12) s'ensuit par densite ∎

COROLLAIRE 4 1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega_a)$ verifiant $u|_{\Gamma_0} = 0$, on ait*

$$\left(\int_{\Omega_a} \frac{u^2}{r^2}\, dr\, dz\right)^{1/2} \leqslant C\, | u |_{H^1(\Omega_a)} \tag{4 13}$$

Démonstration Soit $u \in H^1(\Omega_a)$ telle que $u|_{\Gamma_0} = 0$ Soit $\omega(r)$ la fonction introduite en (4 3) On a alors $u = \omega u + (1 - \omega)u$ et

$$\| u \|^2_{L^2_{-1}(\Omega_a)} \leqslant C(\| \omega u \|^2_{L^2_{-1}(\Omega_a)} + \| u \|^2_{H^1(\Omega_a)}) \tag{4 14}$$

Majorons le terme $\| \omega u \|_{L^2_{-1}(\Omega_a)}$. Puisque ω est nulle pour $r \geqslant 3\,d/4$, il suffit de majorer $\| \omega u \|_{L^2_{-1}(\Omega_a^1)}$. Posons $v = \omega u$; le prolongement $P^1 v$, défini en (4 7) pour $l = 1$, appartient à $H^1(\mathbb{R}^2_+)$ et s'annule en dehors d'un rectangle $R_a =]0, a[\times]b, c[$ où $a \geqslant 3\,d/4$, $b < z_2 < z_1 < c$. La trace de $P^1 v$ sur l'axe $\{ r = 0 \}$ est, en outre, nulle et il existe une constante $C > 0$, indépendante de v, telle que

$$\| P^1 v \|_{H^1(R_a)} \leqslant C \| v \|_{H^1(\Omega_a^1)} . \tag{4 15}$$

Si on applique la proposition 4 2 à $P^1 v$ qui est bien dans $H_0^1(R_a)$, on obtient :

$$\| P^1 v \|_{L^2_{-1}(R_a)} \leqslant C \,| P^1 v |_{H^1(R_a)} . \tag{4.16}$$

Des majorations (4 15) et (4.16), on déduit

$$\| v \|_{L^2_{-1}(\Omega_a)} \leqslant \| P^1 v \|_{L^2_{-1}(R_a)} \leqslant C \| v \|_{H_1(\Omega_a)} . \tag{4.17}$$

Finalement, grâce à (4 14) et (4.17), on a :

$$\| u \|_{L^2_{-1}(\Omega_a)} \leqslant C_1 \| u \|_{H^1(\Omega_a)} \tag{4.18}$$

D'après l'inégalité de Poincaré (voir Nečas [12, p. 20]) applicable puisque u est nulle sur Γ_0, on déduit de (4.18)

$$\| u \|_{L^2_{-1}(\Omega_a)} \leqslant C_1 \| u \|_{H^1(\Omega_a)} \leqslant C \,| u |_{H^1(\Omega_a)} . \tag{4 19}$$

Maintenant on va donner un résultat de compacité. ■

THEORÈME 4.5 : *Soient $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 1$; l'injection de $W^{l,2}_{1/2}(\Omega_a)$ dans $W^{l-1,2}_{1/2}(\Omega_a)$ est compacte.*

Ce théorème est une conséquence directe du

LEMME 4 2 : *L'injection de $W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$ dans $L^2_{1/2}(\Omega_a)$ est compacte.*

Démonstration : On ne fera la démonstration que dans le cas $n = 2$.

On commence par montrer que si $u \in W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$, alors

$r^{(1/2)+\varepsilon} u \in H^1(\Omega_a)$ pour $\varepsilon > 0$ fixé.

En effet, $v = r^{(1/2)+\varepsilon} u \in L^2(\Omega_a)$ par définition (Ω_a est borné),

$$\frac{\partial v}{\partial z} = r^{(1/2)+\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z} \in L^2(\Omega_a)$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial r} = r^{(1/2)+\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) r^{(-1/2)+\varepsilon}\, u \text{ appartient a } L^2(\Omega_a)$$

grâce à l'assertion (ii) du théoreme 4 4 En outre, l'inclusion continue (ii) nous donne l'existence d'une constante $C_\varepsilon > 0$ ne dependant que de ε telle que

$$\forall u \in W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)\,, \quad \| r^{(1/2)+\varepsilon} u \|_{H^1(\Omega_a)} \leqslant C_\varepsilon \| u \|_{W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)} \tag{4 20}$$

Soit alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornee dans $W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$, la suite $r^{(1/2)+\varepsilon} u_n$ est bornée dans $H^1(\Omega_a)$ pour $\varepsilon > 0$, grâce au theorème de Rellich-Kondrachov, on peut en extraire une suite $(r^{(1/2)+\varepsilon} u_{n_i})$ qui converge fortement dans $L^4(\Omega_a)$, par exemple, vers un élément v Et la suite (u_{n_i}) converge fortement dans $L^4_{(1/2)+\varepsilon}(\Omega_a)$ vers $r^{(-1/2)-\varepsilon} v = u$ En outre, on a

$$\left(\int_{\Omega_a} r \mid u_{n_i} - r^{(-1/2)-\varepsilon} v \mid^2 dr\, dz\right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega_a} r^{-2\varepsilon} \mid r^{(1/2)+\varepsilon} u_{n_i} - v \mid^2 dr\, dz\right)^{1/2} \tag{4 21}$$

d'où, en utilisant l'inegalité de Holder,

$$\left(\int_{\Omega_a} r \mid u_{n_i} - r^{-1/2-\varepsilon} v \mid^2 dr\, dz\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{\Omega_a} \mid r^{1/2+\varepsilon} u_{n_i} - v \mid^4 dr\, dz\right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_a} r^{-4\varepsilon}\right)^{1/4} \tag{4 22}$$

Pour $\varepsilon < \frac{1}{4}$ il s'ensuit donc de (4 22), que la suite (u_{n_i}) converge fortement dans $L^2_{1/2}(\Omega_a)$ vers la fonction u, qui est dans $L^2_{1/2}(\Omega_a)$ d'apres une inegalité analogue à (4 22) □

Rappelons que $\mathbb{P}_k(\Omega_a)$ désigne l'espace des polynômes sur Ω_a de degré inférieur ou égal à k

On munira l'espace $W^{l,p}_\alpha(\Omega_a)$ de la semi-norme suivante

$$\mid u \mid_{W^{l,p}_\alpha(\Omega_a)} = \left(\sum_{|\beta|=l} \| r^\alpha D^\beta u \|^p_{L^p(\Omega_a)}\right)^{1/p} \quad \text{si} \quad u \in W^{l,p}_\alpha(\Omega_a) \tag{4 23}$$

THEOREME 4 6 *Soit $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 0$, alors la semi-norme $\mid \dot{u} \mid_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)}$ est une norme sur l'espace quotient $W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)/\mathbb{P}_l(\Omega_a)$ equivalente a la norme quotient*

Démonstration Soit $\dot{w}$ un élément de $W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)/\mathbb{P}_l(\Omega_a)$ et soit w un représentant de $\dot{w}$ dans $W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)$

On a

$$\| \dot{w} \|_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)/\mathbb{P}_l(\Omega_a)} = \inf_{p \in \mathbb{P}_l(\Omega_a)} \| w + p \|_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)} .$$

Évidemment, on a

$$| w |_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)} \leqslant C \| \dot{w} \|_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)/\mathbb{P}_l(\Omega_a)} .$$

On veut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\dot{w} \in W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)/\mathbb{P}_l(\Omega_a)$, on ait :

$$\| \dot{w} \|_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)/\mathbb{P}_l(\Omega_a)} \leqslant C | w |_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)} . \tag{4.24}$$

Soit $N = \dim \mathbb{P}_l(\Omega_a)$ et soit f_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, une base du dual de $\mathbb{P}_l(\Omega_a)$. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on montre qu'il existe des formes linéaires continues sur $W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)$, encore notées f_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, telles que, $\forall p \in \mathbb{P}_l(\Omega_a)$, on a : $f_i(p) = 0$, si et seulement si $p = 0$. On va montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall v \in W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a) , \quad \| v \|_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)} \leqslant C\left(| v |_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)} + \sum_{i=1}^{N} | f_i(v) | \right). \tag{4.25}$$

Supposons (4.25) démontré, alors on en déduit que si $\dot{w}$ est un élément quelconque de $W^{l+1/2}_{1/2}(\Omega_a)/\mathbb{P}_l(\Omega_a)$ et si on fixe son représentant w par les N conditions :

$$\forall i , \quad 1 \leqslant i \leqslant N , \quad f_i(w) = 0$$

on a, d'après (4.25),

$$\| \dot{w} \|_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)/\mathbb{P}_l(\Omega_a)} \leqslant \| w \|_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)} \leqslant C | w |_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)} .$$

On va démontrer (4.25) par l'absurde. Si (4.25) n'est pas vérifié, on peut trouver une suite $(u_n)_n \in W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)$ telle que :

$$\left.\begin{aligned} \| u_n \|_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)} &= 1 \\ | u_n |_{W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)} + \sum_{i=1}^{N} | f_i(u_n) | &\leqslant \frac{1}{n} . \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

La suite $(u_n)_n$ vérifie

$$\forall \beta, | \beta | = l + 1 , \quad \lim_{n \to \infty} D^{\beta} u_n = 0 \quad \text{dans} \quad L^2_{1/2}(\Omega_a) \text{ fort} . \tag{4.27}$$

La suite $(u_n)_n$ est bornée dans $W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)$, donc il existe une sous-suite (u_{n_l}) de $W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)$ qui converge faiblement vers u dans $W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)$. On a :

$$\forall\beta, |\beta| = l + 1, \quad \lim_{n_l \to \infty} D^\beta u_{n_l} = D^\beta u \quad \text{dans} \quad L^2_{1/2}(\Omega_a) \text{ faible}. \tag{4.28}$$

En utilisant (4.27), (4.28) et l'unicité de la limite faible, on en déduit

$$\forall\beta, |\beta| = l + 1, \quad D^\beta u = 0 \quad \text{dans} \quad L^2_{1/2}(\Omega_a)$$

i.e. $u \in \mathbb{P}_l(\Omega_a)$.

Puisque u_{n_l} converge faiblement dans $W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)$ vers u, d'après le théorème 4.5, la suite (u_{n_l}) converge fortement vers u dans $W^{l,2}_{1/2}(\Omega_a)$, donc

$$\lim_{n_l \to \infty} \| u - u_{n_l} \|_{W^{l,2}_{1/2}(\Omega_a)} = 0 . \tag{4.29}$$

De (4.26), on déduit que :

$$\| u \|_{W^{l,2}_{1/2}(\Omega_a)} = 1 . \tag{4.30}$$

De plus, la suite (u_{n_l}) converge fortement vers u dans $W^{l+1,2}_{1/2}(\Omega_a)$. De (4.26), on déduit que $f_i(u) = \lim_{n_l \to \infty} f_i(u_{n_l}) = 0$. Donc, puisque $u \in \mathbb{P}_l(\Omega_a)$, on conclut que $u = 0$, ce qui contredit (4.30).

COROLLAIRE 4.2 : *Soit $k = 2$ ou 3 et X un espace de Banach tel que $W^{k,2}_{1/2}(\Omega_a) \hookrightarrow X$.*

Soit Π un opérateur linéaire continu de $W^{k,2}_{1/2}(\Omega_a)$ dans X tel que

$$(I - \Pi)\, p = 0 , \quad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1}(\Omega_a)$$

alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout élément u de $W^{k,2}_{1/2}(\Omega_a)$,

$$| u - \Pi u |_X \leqslant C \, | u |_{W^{k,2}_{1/2}(\Omega_a)} . \qquad \square$$

Dans la suite, nous définirons l'interpolée de Lagrange d'une fonction u de $W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)$; c'est pourquoi nous utiliserons le résultat suivant :

THÉORÈME 4.7 : *Soit $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$, on a l'inclusion continue*

$$W^{l,2}_{1/2}(\Omega_a) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}_a) . \tag{4.31}$$

Démonstration :

- La remarque 4.1 nous dit qu'on a l'injection continue :

$$W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a) \hookrightarrow H^1(\Omega_a) . \tag{4.32}$$

Donc, si Ω_a est un ouvert de $\mathbb{R}$, on deduit l'injection (4 31) de (4 32) et de l'injection de Sobolev classique $H^1(\Omega_a) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}_a)$

• Si Ω_a est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'injection (4 32) ne suffit pas et il faut faire une demonstration en plusieurs etapes

1^re^ *etape* Si $u \in W^{1\,2}_{1/2}(\Omega_a)$, alors $r^{(1/2)+\varepsilon} u \in H^1(\Omega_a)$ pour $\varepsilon > 0$ et il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ ne dependant que de ε telle que

$$\forall u \in W^{1\,2}_{1/2}(\Omega_a)\,, \quad \| r^{(1/2)+\varepsilon} u \|_{H^1(\Omega_a)} \leqslant C_\varepsilon \| u \|_{W^{1\,2}_{1\,2}(\Omega_a)} \tag{4 33}$$

Puisque $r^{(1/2)+\varepsilon} u$ appartient a $H^1(\Omega_a)$ pour $\varepsilon > 0$, $r^{(1/2)+\varepsilon} u$ appartient a $L^q(\Omega_a)$, $1 \leqslant q < +\infty$ par injection de Sobolev et il existe alors une constante $C_{\varepsilon\, q} > 0$ ne dependant que de q et de ε, telle que

$$\forall u \in W^{1\,2}_{1/2}(\Omega_a), \| r^{(1/2)+\varepsilon} u \|_{L^q(\Omega_a)} \leqslant C_{\varepsilon\, q} \| u \|_{W^{1\,2}_{1\,2}(\Omega_a)} \tag{4 34}$$

2^e^ *etape* On va montrer que pour tout $p < 4$

$$W^{2\,2}_{1/2}(\Omega_a) \hookrightarrow W^{1\,p}_{1/p}(\Omega_a) \tag{4 35}$$

Pour cela, il suffit de montrer que

$$W^{1\,2}_{1/2}(\Omega_a) \hookrightarrow L^p_{1/p}(\Omega_a) \quad \text{pour tout } p\,, \quad 1 \leqslant p \leqslant 4 \tag{4 36}$$

Pour etablir (4 36), on remarque en premier lieu que si $p < 4$, il existe des scalaires s, s et α tels que

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = 1 \quad \text{et} \quad s > 1$$

$$\alpha s < 1$$

$$s(1 + \alpha) = ps\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$$

D'apres l'inegalite de Holder, on a

$$\left(\int_{\Omega_a} r\,|\,u\,|^p\,dr\,dz\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\Omega_a} r^{s(1+\alpha)}\,|\,u\,|^{ps}\,dr\,dz\right)^{1/ps} \left(\int_{\Omega_a} r^{-\alpha s}\,dr\,dz\right)^{1/ps} \tag{4 37}$$

Par consequent, si $u \in W^{1\,2}_{1/2}(\Omega_a)$, d'apres (4 34) (applique avec $q = ps$) le second membre de (4 37) est borne et $u \in L^p_{1/p}(\Omega_a)$ d'ou (4 36)

3^e^ *etape* Soit Ω l ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que Ω_a soit la meridienne de Ω

Soit $u(r,z)$ une fonction de $C^1(\overline{\Omega}_a)$, on pose alors

$$\tilde{u}(x, y, z) = u(r, z) = u(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \tag{4 38}$$

où (x, y, z) est un point quelconque de Ω. On montre aisément que les dérivées premières au sens des distributions et au sens ordinaire pour la fonction $\tilde{u}$ coïncident sur $\tilde{\Omega} \quad \{ (x, y, z) \in \tilde{\Omega} \, . \, x = y = 0 \}$ et qu'il existe une constante $C_p > 0$ ne dépendant que de p telle que :

$$\| \tilde{u} \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C_p \| u \|_{W^{1,p}_{1/p}(\Omega_a)} \tag{4.39}$$

$\left(\text{en effet, } \int_{\Omega} | \tilde{v} |^p \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega_a} | v |^p \, r \, dr \, dz \right)$.

Puisque $\mathscr{D}(\overline{\Omega}_a)$ est dense dans $W^{1,p}_{1/p}(\Omega_a)$, d'après le théorème 4.3, on déduit de (4 39) que si $u \in W^{1,p}_{1/p}(\Omega_a)$, alors $\tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ et il existe une constante $C_p > 0$ ne dépendant que de p telle que :

$$\| \tilde{u} \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C_p \| u \|_{W^{1,p}_{1/p}(\Omega_a)} \, . \tag{4.40}$$

4[e] *étape* : D'après les étapes 1, 2, 3, si $u \in W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)$, il existe $p_0 > 3$ tel que $\tilde{u}$ appartienne à $W^{1,p_0}(\Omega)$. Mais $W^{1,p_0}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour $0 \leqslant \alpha < 1 - \dfrac{3}{p_0}$ et il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que :

$$\| \tilde{u} \|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C_\alpha \| \tilde{u} \|_{W^{1,p_0}(\Omega)} \, . \tag{4.41}$$

Les majorations (4.34), (4.40), (4.41) et l'injection (4.35) nous donnent l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall u \in W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a) \, , \quad \| \tilde{u} \|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C \| u \|_{W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)} \, .$$

On en déduit l'injection (4.31). □

5. DESCRIPTION DE L'ESPACE APPROCHE ET DU PROBLÈME APPROCHE

Nous supposerons *pour simplifier* que le domaine tridimensionnel Ω a des faces inférieure et supérieure planes (l'axe de symétrie de Ω étant supposé vertical) et que Ω est convexe ([1]).

([1]) Si Ω a des faces inférieure ou supérieure non planes, on peut facilement adapter les démonstrations qui suivent En effet les seules difficultés qui se presentent sont d'ordre technique . il faudra utiliser des éléments finis courbes au voisinage de Γ_0

La méridienne Ω_a d'un tel domaine a donc par exemple l'allure donnée par la figure suivante

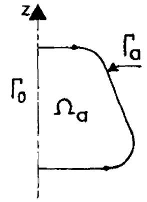


Figure 5.1.

(et vérifie en particulier les hypothèses faites sur Ω_a au § 4)

Soit h un nombre réel positif destiné à tendre vers zéro On lui associe une *triangulation* T_h vérifiant les conditions suivantes

a) les eléments de T_h sont des triangles de diamètre inférieur à h,

b) la réunion des triangles de T_h forme un polygone $\Omega_{ah} \subset \Omega_a$ dont la frontiere contient les côtés horizontaux de Ω_a et la partie Γ_0 de l'axe de symétrie située entre ces deux côtés,

c) les sommets frontières de Ω_{ah} sont situés sur la frontière $\Gamma_0 \cup \Gamma_a$ de Ω_a

Un exemple d'une telle triangulation T_h est donné sur la figure suivante

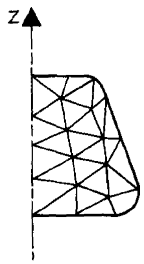


Figure 5.2.

A chaque $h > 0$, on associe donc une telle triangulation T_h. On suppose en outre que la famille $(T_h)_h$ de triangulations ainsi constituée est *régulière*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\sigma > 0$ *indépendante de h*, telle que

$$\forall h > 0 \,, \quad \forall K \in T_h \,, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leqslant \sigma \tag{5 1}$$

où h_K et ρ_K désignent respectivement le diamètre de K et le diamètre de la plus grande boule contenue dans K

Il existe alors une constante $\alpha_0 > 0$ indépendante de h telle que la mesure de tous les angles de T_h soit minorée par α_0

Autrement dit il n'y a pas de petits angles dans la triangulation T_h.

On introduit alors l'espace R_h des fonctions $w_h \in C^0(\overline{\Omega}_a)$ qui sont affines par morceaux sur les triangles de T_h et nulles sur Γ_{ah} (et prolongées par zéro dans $\Omega_a \setminus \Omega_{ah}$)

L'espace R_h est un espace d'éléments finis de degré 1 La dimension de l'espace R_h est égale au nombre $S(h)$ de sommets de T_h qui ne sont pas situés sur la frontière Γ_{ah}.

On vérifie immediatement que $R_h \subset \overset{\circ}{W}{}^{1/2}_{1\,2}(\Omega_a)$ Soit alors

$$R_h^0 = \{ w_h \in R_h \quad w_h = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}$$

On vérifie que

$$R_h^0 \subset \overset{\circ}{X}{}^{1\,2}_{1/2}(\Omega_a)$$

La dimension de R_h^0 est égale au nombre $S^0(h)$ de sommets interieurs de T_h

Soit alors

$$V_{hN} = \left\{ \tilde{u} \quad \tilde{u}(r, z, \theta) = \sum_{|n| \leqslant N} u_{nh}(r, z)\, e^{\iota n\theta}, \quad u_{nh} \in R_h^0, \quad n \neq 0 \text{ et } u_{0h} \in R_h \right\}$$

On vérifie que

$$V_{hN} \subset \tilde{V} \tag{5 2}$$

et que l'espace V_{hN} est de dimension égale a $S(h) + 2\,N \times S^0(h)$

Le probleme approché est alors défini par

$$\left. \begin{array}{c} \textit{Trouver } \tilde{u}_{hN} \in V_{hN} \textit{ tel que} \\ b(\tilde{u}_{hN}, \tilde{v}_{hN}) = \tilde{L}(\tilde{v}_{hN}), \quad \forall \tilde{v}_{hN} \in V_{hN} \end{array} \right\} \tag{5 3}$$

D'apres (5 2) et la $\tilde{V}$-ellipticité (2 6) de la forme sesquilinéaire b, on a le résultat classique suivant (voir Ciarlet [5], p 104)

THEORÈME 5 1 *Le problème approché* (5 3) *admet une solution* $\tilde{u}_{hN}$ *unique et il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_V \leqslant C \| \tilde{u} - \tilde{v}_{hN} \|_{\tilde{V}} \tag{5 4}$$

pour tout $\tilde{v}_{hN} \in V_{hN}$, *où* $\tilde{u}$ *est la solution du probleme* (2 4)

Pour estimer l'erreur $\| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_V$ entre la solution $\tilde{u}_{hN}$ du probleme approche (5 3) et la solution $\tilde{u}$ du probleme (2 4), il suffit donc de savoir construire une approximation convenable $r_{hN}\,\tilde{u}$ de $\tilde{u}$ C'est ce que l'on va faire dans le paragraphe suivant

Remarque 5.1 : Dans le cas bidimensionnel où Ω est le disque unité de $\mathbb{R}^2$, l'ouvert Ω_a coïncide avec l'intervalle]0, 1[. La variable z n'intervient plus du tout et les résultats des §§ 2 et 3 sont encore vrais.

La famille de triangulations T_h devient alors simplement une famille de subdivisions de l'intervalle]0, 1[telle que

$$0 = r_0(h) < r_1(h) < r_2(h) < \cdots < r_p(h) = 1$$

avec

$$h = \max_{0 \leqslant j \leqslant p-1} (r_{j+1}(h) - r_j(h)).$$

On demanderait alors qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{r_{j+1}(h)}{r_j(h)} \leqslant C.$$

Les résultats des paragraphes suivants sont encore vrais dans ce cas (il serait facile de les démontrer directement). □

6. PROPRIÉTÉS DE L'OPÉRATEUR D'INTERPOLATION Π_h

Soient $Z = \{ \varphi \in C^0(\overline{\Omega}_a) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}$ et $h > 0$ donné. Nous définissons un opérateur $\Pi_h : Z \to R_h$ de la façon suivante : si $\varphi \in Z$, $\Pi_h \varphi$ est la fonction de R_h qui coïncide avec φ en tous les sommets de T_h.

L'opérateur Π_h est appelé *opérateur d'interpolation de Lagrange.*

Soit $K \in T_h$ donné ; on rappelle que $\mathbb{P}_l(K)$ est l'ensemble des fonctions définies sur K qui sont des polynômes de degré $\leqslant l$. Soit Σ_K l'ensemble des nœuds de K tel que Σ_K soit $\mathbb{P}_l(K)$-unisolvant (voir Ciarlet [5]). Supposons que K soit un élément fini de Lagrange de degré l. On définit alors un *opérateur d'interpolation local*

$$\Pi_K : C^0(K) \to \mathbb{P}_l(K)$$

tel que

$$(\Pi_K \varphi)(Q_j) = \varphi(Q_j) \quad \text{pour tout} \quad Q_j \in \Sigma_K.$$

Si $l = 1$, Σ_K se compose des 3 sommets Q_j, $j = 1, 2, 3$ de K et si $l = 2$, Σ_K se compose, en outre, des 3 milieux des côtés (Q_j), $j = 4, 5, 6$ du triangle K.)

On remarque que, pour $l = 1$ on a

$$\Pi_h \varphi|_K = \Pi_K \varphi.$$

(Le cas $l = 2$ sera traité essentiellement au § 10.)

Nous allons établir quelques résultats préliminaires. Soit Q_0 un sommet de la triangulation T_h situé sur Γ_0. Soient $(K_i)_{1 \leqslant i \leqslant j_0}$ les triangles de T_h qui ont Q_0 pour sommet. La famille de triangulations T_h étant régulière il existe un nombre N_0 indépendant de h tel que $j_0 \leqslant N_0$.

On notera S_{Q_0} le polygone défini par

$$S_{Q_0} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant j_0} K_i .$$

On suppose que les triangles K_i et K_{i+1} sont adjacents pour $1 \leqslant i \leqslant j_0 - 1$ et on note $\Pi_{S_{Q_0}} \varphi$ la fonction continue définie sur S_{Q_0} dont la restriction à chaque K_i, $i = 1, \dots, j$ coïncide avec $\Pi_{K_i} \varphi$ où $\varphi \in C^0(S_{Q_0})$.

LEMME 6.1 : *On suppose que la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction u appartenant à $W^{k,2}_{1/2}(S_{Q_0})$ où $Q_0 \in \Gamma_0$ est un sommet de T_h, où $k = 2$ dans le cas d'éléments finis de degré 1 et où $k = 3$ dans le cas d'éléments finis de degré 2, on ait :*

$$| u - \Pi_{S_{Q_0}} u |_{W^{1,2}_{1/2}(S_{Q_0})} \leqslant C h^{k-1} | u |_{W^{k,2}_{1/2}(S_{Q_0})} \tag{6.1}$$

$$| u - \Pi_{S_{Q_0}} u |_{H^1(S_{Q_0})} \leqslant C h^{k-3/2} | u |_{W^{k,2}_{1/2}(S_{Q_0})} \tag{6.2}$$

et, si, en outre, u est nulle sur Γ_0,

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_{S_{Q_0}} u) \|_{L^2(S_{Q_0})} \leqslant C h^{k-1} | u |_{W^{k,2}_{1/2}(S_{Q_0})} \tag{6.3}$$

Démonstration : On place momentanément l'origine en Q_0 pour simplifier les notations de la démonstration. Trois cas distincts peuvent se présenter :

a) $Q_0 \in \Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0$ et $j_0 \geqslant 3$.

On peut définir un élément $\hat{S}$ de référence de la manière suivante :

$$\hat{S} = \{ (\hat{r}, \hat{z}) : 0 \leqslant \hat{r} \leqslant 1 , \quad -1 \leqslant \hat{z} \leqslant 1 \}$$

et

$$\hat{S} = \bigcup_{i=1}^{j_0} \hat{K}_i$$

où
$\hat{K}_1$ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, -1)$ et $(1, -1)$,
$\hat{K}_{j_0}$ est le triangle de sommets $(0, 1)$, $(0, 0)$ et $(1, 1)$,
$\hat{K}_i$ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, m_i)$, $(1, m_{i+1})$
où

$$m_i \equiv 2 \frac{i-2}{j_0 - 2} - 1 , \quad 2 \leqslant i \leqslant j_0 .$$

On posera dans la suite $\hat{Q}_0 = (0, 0)$, $\hat{Q}_1 = (0, -1)$, $\hat{Q}_{j_0+1} = (0, 1)$ et

$$Q_i = (1, m_i) \quad 2 \leqslant i \leqslant j_0 \quad (cf. \, fig. \, 6.1).$$

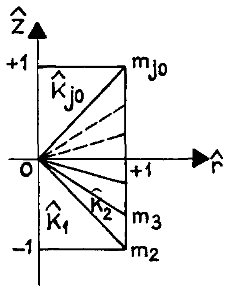


Figure 6.1.

Pour tout $i \in \{1, ..., j_0\}$ on note F_i l'unique application affine qui envoie le triangle $\hat{K}_i$ sur le triangle K_i et $F_{S_{Q_0}}$ l'application de $\hat{S}$ sur S_{Q_0} telle que $F_{S_{Q_0}}|_{\hat{K}_i} = F_i$.

b) $Q_0 \in \Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_0$ et $j_0 = 2$.

On choisit l'élément de référence $\hat{S}$ égal au triangle de sommets $(0, -1)$ $(1, 0)$ $(0, 1)$. Cet élément sera divisé en deux triangles $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$, $\hat{K}_1$ étant le triangle de sommets $(0, 0)$ $(0, -1)$ $(1, 0)$ et $\hat{K}_2$ son complémentaire (*cf. fig.* 6.2).

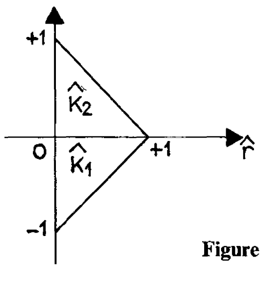


Figure 6.2.

c) $Q_0 \in \partial\Gamma_0$

Si $j_0 = 1$ la définition de $\hat{S}$ est évidente.

Si $j_0 \geqslant 2$, on définit $\hat{S}$ par

$$\hat{S} = \{ (\hat{r}, \hat{z}) : 0 \leqslant \hat{r} \leqslant 1 \,, \quad 0 \leqslant \hat{z} \leqslant 1 \}$$

et

$$\hat{S} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant j_0} \hat{K}_i \text{ où } \hat{K}_1 \text{ est le triangle de sommets } (0, 0), (1, 1), (0, 1)$$

et

$\hat{K}_i$, pour $2 \leqslant i \leqslant j_0$ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, m_i)$, $(1, m_{i+1})$

où

$$m_i = \frac{j_0 + 1 - i}{j_0 - 1}.$$

On posera pour la suite $\hat{Q}_0 = (0, 0)$, $\hat{Q}_1 = (0, 1)$ et $\hat{Q}_i = (1, m_i)$ pour $2 \leqslant i \leqslant j_0$ (*cf. fig.* 6.3).

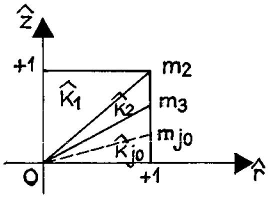


Figure 6.3.

On notera encore F_i l'application affine qui envoie le triangle $\hat{K}_i$ sur le triangle K_i et $F_{S_{Q_0}}$ l'application de $\hat{S}$ sur S_{Q_0} telle que

$$F_{S_{Q_0}}|_{\hat{K}_i} = F_i \,.$$

Dans la suite de la démonstration on ne distinguera plus les trois cas ci-dessus.

L'application $F_{S_{Q_0}} : \hat{Q} \to Q$ qui transforme $\hat{S}$ en S_{Q_0} est telle que si $\hat{Q} \in \hat{K}_j$ avec

$$\hat{Q} = X\hat{Q}_j + Y\hat{Q}_{j+1} \tag{6.4}$$

(puisque $\hat{Q} \in \hat{K}_j$, on a $0 \leqslant X \leqslant 1$, $0 \leqslant Y \leqslant 1$ et $X + Y \leqslant 1$), alors son image par $F_{S_{Q_0}}$ est donnée par

$$Q = XQ_j + YQ_{j+1} \,. \tag{6.5}$$

Soient $(\hat{r}, \hat{z})$ les coordonnées de $\hat{Q}$ et (r, z) celles de Q, on va montrer qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\frac{1}{C}\, d(S_{Q_0})\, \hat{r} \leqslant r \leqslant C d(S_{Q_0})\, \hat{r} \tag{6.6}$$

où $d(S_{Q_0})$ désigne le diamètre de S_{Q_0}.

En effet, la famille de triangulations $(T_h)_h$ étant régulière, il existe une constante C indépendante de h telle que si (r_j, z_j) sont les coordonnées de Q_j, on ait

$$\frac{1}{C}\, d(S_{Q_0}) \leqslant r_j \leqslant C d(S_{Q_0}) \tag{6.7}$$

pour tout $j \in \{ 2, ..., j_0 \}$.

D'après (6.4) et (6.5) on a en particulier

$$\hat{r} = X\hat{r}_j + Y\hat{r}_{j+1}$$
$$r = Xr_j + Yr_{j+1} .$$

Dans le cas où $2 \leqslant j \leqslant j_0 - 1$ (et $j_0 \geqslant 3$), on a $\hat{r}_j = \hat{r}_{j+1} = 1$ d'où

$$\hat{r} = X + Y .$$

D'après (6.7), on a d'autre part

$$r \leqslant (X + Y)\, Cd(S_{Q_0})$$

et

$$r \geqslant \frac{1}{C}(X + Y)\, d(S_{Q_0})$$

d'où (6.6).

Dans le cas où $j = 1$ (le cas $j = j_0$ se traiterait de façon analogue) on a $r_1 = \hat{r}_1 = 0$, de sorte que

$$r = r_2\, \hat{r}$$

d'où (6.6).

Soient alors w et $\hat{w}$ deux fonctions telles que

$$\hat{w}(\hat{Q}) = w(F_{S_{Q_0}}(\hat{Q})) .$$

On vérifie que $w \in W_\alpha^{l,p}(S_{Q_0})$ équivaut à $\hat{w} \in W_\alpha^{l,p}(\hat{S})$ et que d'autre part

$$\Pi_{\hat{K}_i} w = \widehat{\Pi_{K_i} w} , \quad 1 \leqslant i \leqslant j_0 .$$

On définit l'opérateur $\hat{\Pi}$ sur $\hat{S}$ par

$$\hat{\Pi}\hat{v} = \widehat{\Pi_{S_{Q_0}} v} .$$

Soit B_i la matrice de l'application $F_i : \hat{K}_i \to K_i$, on peut écrire en utilisant (6.6) et les formules de changement de variables

$$| u - \Pi_{S_{Q_0}} u |^2_{W^{1,2}_{1/2}(S_{Q_0})} =$$
$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j_0} \int_{K_i} r\left(\left| \frac{\partial}{\partial r}(u - \Pi_{S_{Q_0}} u) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial z}(u - \Pi_{S_{Q_0}} u) \right|^2 \right) dr\, dz \leqslant$$
$$\leqslant Cd(S_{Q_0}) \sup_{1 \leqslant i \leqslant j_0} (\| B_i^{-1} \|^2 \,|\det B_i|)\, | \hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u} |^2_{W^{1,2}_{1/2}(\hat{S})} .$$

Puisque la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière, (voir Ciarlet [5], p. 120), on obtient

$$| u - \Pi_{S_{Q_0}} u |^2_{W^{1,2}_{1/2}(S_{Q_0})} \leqslant C d(S_{Q_0}) | \hat{u} - \hat{\Pi} \hat{u} |^2_{W^{1,2}_{1/2}(\hat{S})} . \tag{6.8}$$

D'après le théorème 4.7, $W^{2,2}_{1/2}(\hat{S}) \hookrightarrow C^0(\hat{S})$. L'opérateur $\hat{\Pi}$ est donc bien défini sur $W^{2,2}_{1/2}(\hat{S})$ et, en particulier, $I - \hat{\Pi}$ est continu de $W^{k,2}_{1/2}(\hat{S})$ dans $W^{1,2}_{1/2}(\hat{S})$ pour $k = 2$ ou 3 :

$$| \hat{u} - \hat{\Pi} \hat{u} |_{W^{1,2}_{1/2}(\hat{S})} \leqslant C \| \hat{u} \|_{W^{k,2}_{1/2}(\hat{S})} \tag{6.9}$$

Comme, d'autre part,

$$(I - \hat{\Pi}) \hat{p} = 0 \qquad \forall \hat{p} \in \mathbb{P}_{k-1}(\hat{S})$$

on déduit du corollaire 4.2 que, dans (6.9), quitte à changer la constante C, on peut remplacer au second membre la norme $\| \hat{u} \|_{W^{k,2}_{1/2}(\hat{S})}$ par la semi-norme $| \hat{u} |_{W^{k,2}_{1/2}(\hat{S})}$.

Or, en utilisant une nouvelle fois (6.6), on obtient

$$| \hat{u} |^2_{W^{k,2}_{1/2}(\hat{S})} \leqslant C \sup_{1 \leqslant i \leqslant j_0} \left(\frac{\| B_i \|^{2k} | \det B_i |^{-1}}{d(S_{Q_0})} \right) | u |^2_{W^{k,2}_{1/2}(S_{Q_0})} \tag{6.10}$$

d'où, puisque la famille $(T_h)_h$ est régulière

$$| \hat{u} |^2_{W^{k,2}_{1/2}(\hat{S})} \leqslant C \frac{h^{2k-2}}{d(S_{Q_0})} | u |^2_{W^{k,2}_{1/2}(S_{Q_0})} . \tag{6.11}$$

Finalement à l'aide de (6.8), (6.9) et (6.11), on a démontré que

$$| u - \Pi_{S_{Q_0}} u |_{W^{1,2}_{1/2}(S_{Q_0})} \leqslant C h^{k-1} | u |_{W^{k,2}_{1/2}(S_{Q_0})}$$

c'est-à-dire (6.1).

De même, en appliquant le corollaire 4.2 (avec $X = H^1(\hat{S})$ ce qui est loisible d'après la remarque 4.1), on obtient :

$$| u - \Pi_{S_{Q_0}} u |^2_{H^1(S_{Q_0})} \leqslant C | \hat{u} - \hat{\Pi} \hat{u} |_{H^1(\hat{S})} \leqslant C | \hat{u} |^2_{W^{k,2}_{1/2}(\hat{S})} . \tag{6.12}$$

On en déduit (6.2) à l'aide de (6.10) en tenant compte du fait que la famille $(T_h)_h$ est régulière.

Enfin, si, en outre, u est nulle sur Γ_0, $u - \Pi_{S_{Q_0}} u$ l'est aussi et puisque $u - \Pi_{S_{Q_0}} u$ est dans l'espace $H^1(S_{Q_0})$, $u - \Pi_{S_{Q_0}} u$ est dans l'espace $L^2_{-1}(S_{Q_0})$ d'après le corollaire 4.1 ; il est alors légitime de considérer

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_{S_{Q_0}} u) \|_{L^2(S_{Q_0})} .$$

Grâce aux formules de changement de variables et à (6.6), on a encore :

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_{S_{Q_0}} u) \|^2_{L^2(S_{Q_0})} \leqslant$$
$$\leqslant Cd(S_{Q_0})^{-1} \sup_{1 \leqslant \iota \leqslant j_0} |\det B_\iota| \, \| \hat{r}^{-1/2}(\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u}) \|^2_{L^2(\hat{S})} . \quad (6.13)$$

Puisque $\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u}$ est nulle pour $\hat{r} = 0$ et que $\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u}$ est dans l'espace $H^1(\hat{S})$ on peut appliquer le corollaire 4.1 : il existe alors une constante $C > 0$ telle que

$$\| \hat{r}^{-1/2}(\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u}) \|_{L^2(\hat{S})} \leqslant C \, | \hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u} |_{H^1(\hat{S})} . \quad (6.14)$$

De (6.10), (6.12), (6.13) et (6.14), il s'ensuit :

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_{S_{Q_0}} u) \|^2_{L^2(S_{Q_0})} \leqslant$$
$$\leqslant Cd(S_{Q_0})^{-2} \left(\sup_{1 \leqslant \iota \leqslant j_0} |\det B_\iota| \right) \sup_{1 \leqslant \iota \leqslant j_0} \left(\| B_\iota \|^{2k} |\det B_\iota|^{-1} \right) | u |^2_{W^{k,2}_{1/2}(S_{Q_0})} .$$

On en déduit (6.3) en tenant compte du fait que la famille $(T_h)_h$ est régulière. C.Q.F.D.

LEMME 6.2 : *Si la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière, il existe une constante $C > 0$ telle que si $K \in T_h$, $K \cap \Gamma_0 = \varnothing$, et si $u \in W^{k,2}_{1/2}(K)$ (où $k - 1$ est égal au degré des éléments finis utilisés), on a :*

$$| u - \Pi_K u |_{W^{1,2}_{1/2}(K)} \leqslant Ch^{k-1} \, | u |_{W^{k,2}_{1/2}(K)}$$

où $k \geqslant 2$.

Démonstration : On a

$$| u - \Pi_K u |_{W^{1,2}_{1/2}(K)} \leqslant C \sup_K (\sqrt{r}) \, | u - \Pi_K u |_{H^1(K)} \quad (6.15)$$

et, d'après les résultats classiques de Ciarlet-Raviart [5],

$$| u - \Pi_K u |_{H^1(K)} \leqslant Ch_K^{k-1} \, | u |_{H^k(K)} . \quad (6.16)$$

D'autre part, on a

$$| u |_{H^k(K)} \leqslant \left(\inf_K \sqrt{r} \right)^{-1} | u |_{W^{k,2}_{1/2}(K)} . \quad (6.17)$$

Soit $r_0 = \inf_K r$; puisque la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière on peut démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de K telle que

$$r_0 \geqslant Ch_K ; \quad (6.18)$$

on en déduit que

$$\sup_K (\sqrt{r}) \left(\inf_K \sqrt{r}\right)^{-1} \leqslant (r_0 + h_K)^{1/2} r_0^{-1/2} \leqslant \left(1 + \frac{h_K}{Ch_K}\right) \leqslant C \quad (6\ 19)$$

où $C > 0$ est indépendante de h et de K

Finalement les inégalités (6 15) à (6 19) nous donnent le résultat desiré C Q F D

De façon analogue, on demontre le

LEMME 6 3 *Si la famille de triangulation $(T_h)_h$ est regulière, alors il existe une constante $C > 0$ telle que si $K \in T_h$, $K \cap \Gamma_0 = \varnothing$, et si $u \in W^{k,2}_{1/2}(K)$ (où $k - 1$ est egal au degre des eléments finis utilises), on ait*

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_K u) \|_{L^2(K)} \leqslant Ch^{k-1} | u |_{W^{k,2}_{1/2}(K)}$$

où $k \geqslant 2$

Demonstration En procedant comme ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \| r^{-1/2}(u - \Pi_K u) \|_{L^2(K)} &\leqslant C\left(\inf_K \sqrt{r}\right)^{-1} \| u - \Pi_K u \|_{L^2(K)} \\ &\leqslant C\left(\inf_K \sqrt{r}\right)^{-1} h_K^k | u |_{H^k(K)} \end{aligned}$$

d'ou

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_K u) \|_{L^2(K)} \leqslant C\left(\inf_K r\right)^{-1} h_K^k | u |_{W^{k,2}_{1/2}(K)} \quad (6\ 20)$$

Si $r_0 = \inf_K r$, on obtient, en utilisant (6 18) et (6 20),

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_K u) \|_{L^2(K)} \leqslant Ch_K^{k-1}\left(\frac{h_K}{Ch_K}\right) | u |_{W^{k,2}_{1/2}(K)}$$

d'où le résultat □

Nous rappelons maintenant un lemme démontré dans [7], qui nous permettra d'estimer des termes du type $\| \psi \|_{L^2(\Omega_a \setminus \Omega_{ah})}$ pour ψ appartenant a $W^{1,2}_\alpha(\Omega_a)$ Par souci de commodite pour le lecteur, nous en donnerons la démonstration

LEMME 6 4 *Si la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,2}_\alpha(\Omega_a)$, on ait*

$$\| u \|_{L^2(\Omega_a \setminus \Omega_{ah})} \leqslant Ch \| u \|_{W^{1,2}_\alpha(\Omega_a)} \quad (6\ 21)$$

Preuve

Puisque la partie courbe de la frontiere Γ_a se trouve a une distance $b > 0$ de l'axe $r = 0$, il suffit de montrer que, pour tout $u \in H^1(\Omega_a \setminus B_b)$, (ou $B_b = \{ (r, z) \in \Omega_a \quad 0 < r < b \}$, on a

$$\| u \|_{L^2(\Omega_a \setminus \Omega_{ah})} \leqslant Ch \| u \|_{H^1(\Omega_a \setminus B_b)} \tag{6 22}$$

et de remarquer que si v est dans l'espace $W^{1\,2}_{\alpha}(\Omega_a)$, alors v appartient a $H^1(\Omega_a \setminus B_b)$

Soit K un triangle de la triangulation T_h tel que $K \cap \Gamma_a = \{ Q_1, Q_2 \}$ et soit Θ l'ouvert borne de frontiere formee par le segment $Q_1 Q_2$ et par la portion de Γ_a d'extremites Q_1 et Q_2 (*cf fig* 6 4)

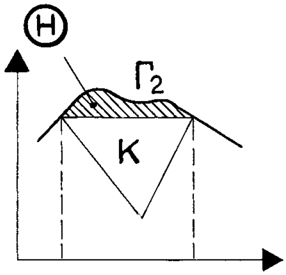


Figure 6.4.

Alors Θ est de la forme

$$\Theta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad a_1 < x < b_1 , \quad f_1(x) < y < f_2(x) \}$$

ou f_1 et f_2 appartiennent a $C^{0\,1}([a_1, b_1])$ et ou

$$0 < f_2(x) - f_1(x) \leqslant Ch_K^2$$

(ou $C > 0$ est une constante independante de h et de K)

Nous poserons $\Gamma_2 = \{ (x, f_2(x)) \quad x \in [a_1, b_1] \}$

Si u appartient a $C^1(\bar{\Theta})$, on a

$$u(x, y) = u(x, f_2(x)) - \int_y^{f_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y}(x, t)\, dt$$

d'ou

$$| u(x, v) |^2 \leqslant 2 \,| u(x, f_2(x)) |^2 + 2\left(\int_y^{f_2(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right| dt \right)^2$$

et, par Cauchy-Schwarz

$$| u(x, y) |^2 \leqslant 2 \,| u(x, f_2(x)) |^2 + 2\, Ch_K^2 \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial v}(x, t) \right|^2 dt \tag{6 23}$$

d'où, en intégrant en x

$$\int_a^b |u(x,y)|^2\,dx \leqslant 2\,\|u\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + 2\,Ch_K^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2_{L^2(\Theta)} \tag{6 24}$$

Par densité, (6 24) est encore vérifiée pour u appartenant à $H^1(\Theta)$ En intégrant (6 24) en y, on a .

$$|u|^2_{L^2(\Theta)} \leqslant 2\,Ch_K^2\,\|u\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + 2\,C^2\,h_K^4\,|u|^2_{H^1(\Theta)} \tag{6 25}$$

L'inégalité (6 22) s'obtient en écrivant que $\Omega_a \setminus \Omega_{ah}$ est (à un ensemble de mesure nulle près) une réunion disjointe d'ouverts du type Θ C.Q.F D.

PROPOSITION 6.1 : *Si la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a) \cap \mathring{W}^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$,*

$$|u - \Pi_h u|_{W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)} \leqslant Ch\,\|u\|_{W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)} \tag{6 26}$$

et telle que, pour tout $u \in W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a) \cap \mathring{X}^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$, on ait, en outre,

$$\|r^{-1/2}(u - \Pi_h u)\|_{L^2(\Omega_a)} \leqslant Ch\,\|u\|_{W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)}\,. \tag{6 27}$$

Démonstration . Remarquons que, d'après la proposition 4 1, toute fonction u de $X^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$ est à trace nulle sur Γ_0.

- Si $\Omega_{ah} = \Omega_a$, la proposition 6 1 est alors une conséquence directe des lemmes 6.1 à 6 3.
- Si $\Omega_{ah} \neq \Omega_a$, il nous faut encore majorer les expressions

$$|u - \Pi_h u|_{W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a \setminus \Omega_{ah})} \quad \text{et} \quad \|r^{-1/2}(u - \Pi_h u)\|_{L^2(\Omega_a \setminus \Omega_{ah})}\,.$$

Puisque la partie courbe de la frontière Γ_a se trouve à une distance $b > 0$ de l'axe $r = 0$ et que $\Pi_h u \equiv 0$ sur $\Omega_a \setminus \Omega_{ah}$, cela revient à majorer

$$|u|_{H^1(\Omega_a \setminus \Omega_{ah})} \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2(\Omega_a \setminus \Omega_{ah})}\,.$$

Ces dernières estimations sont une conséquence directe du lemme 6 4.

Orientation : Pour obtenir une estimation d'erreur optimale dans le cas où u appartient à $H^2(\Omega)$, nous allons devoir recourir à un opérateur P_h de type « projection-interpolation », introduit par Clément [6] Dans le cas où u appartient à $H^3(\Omega)$, ce n'est pas nécessaire et nous recommandons au lecteur pressé de se reporter directement à la remarque 8.1.

7. RAPPEL DES RÉSULTATS DE CLÉMENT

On va définir dans ce paragraphe un opérateur P_h :

$$P_h : L^2(\Omega_a) \to R_h$$

qui ne sera pas, contrairement à l'opérateur Π_h, un opérateur d'interpolation, et qui nous servira à établir une estimation d'erreur optimale dans le cas où la solution u du problème (1.1) est seulement dans $H^2(\Omega)$.

Dans ce paragraphe on supposera que la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière. On appellera $\tilde{\Sigma}_h$ l'ensemble des sommets Q de la triangulation T_h, Σ_h l'ensemble des $S(h)$ sommets Q de T_h qui ne sont pas sur la frontière Γ_a et Σ_h^0 l'ensemble des $S^0(h)$ sommets intérieurs de T_h. On rappelle que si Q est un sommet de T_h, S_Q désigne l'ensemble réunion des triangles K de T_h qui ont Q pour sommet.

Étant donné un point Q de $\tilde{\Sigma}_h$, il existe une unique fonction ϕ_Q appartenant à $C^0(\overline{\Omega}_{ah})$ telle que

i) $\forall K \in T_h$, $\phi_{Q|K} \in \mathbb{P}_1(K)$;

ii) $\phi_Q(Q) = 1$;

iii) $\forall Q' \in \tilde{\Sigma}_h$, $Q' \neq Q$, $\phi_Q(Q') = 0$.

Remarquons que S_Q est précisément l'intersection du support de ϕ_Q avec Ω_{ah}.

On remarque également que R_h est l'espace vectoriel engendré par les $S(h)$ « fonctions de base » ϕ_Q, $Q \in \Sigma_h$ et que R_h^0 est engendré par les $S^0(h)$ « fonctions de base » ϕ_Q, $Q \in \Sigma_h^0$. On notera $d(S_Q)$ le diamètre de S_Q.

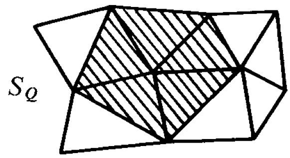


Figure 7.1.

Rappelons enfin que puisque la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière, il existe des constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ et $M > 0$ telles que, si $S_Q = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant j} K_i$ où Q appartient à $\tilde{\Sigma}_h$, alors

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & 1 \leqslant j \leqslant M \\ \text{ii)} & C_1\, h_{K_i} \leqslant d(S_Q) \leqslant C_2\, h_{K_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant j . \end{array}\right\} \tag{7.1}$$

Soit $Q \in \tilde{\Sigma}_h$ donné, on appelle alors $P_Q : L^2(S_Q) \to \mathbb{P}_1(S_Q)$ l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace $\mathbb{P}_1(S_Q)$. Par définition, on a pour $v \in L^2(S_Q)$:

$$(v - P_Q v, p)_{L^2(S_Q)} = 0 , \quad \forall p \in \mathbb{P}_1(S_Q) . \tag{7.2}$$

On rappelle le résultat suivant (Clément [6]).

LEMME 7.1 : *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in H^q(S_Q)$ où S_Q est le support d'une fonction ϕ_Q, $Q \in \tilde{\Sigma}_h$, on ait :*

$$| u - P_Q u |_{H^k(S_Q)} \leqslant C d(S_Q)^{q-k} \, | u |_{H^q(S_Q)} \tag{7.3}$$

où $0 \leqslant q \leqslant 2$ *et* $0 \leqslant k \leqslant q$.

On notera B_h^0 l'intérieur de la réunion de tous les triangles de la triangulation T_h qui touchent Γ_0.

On définit également B_h comme l'intérieur du fermé

$$\{ K \in T_h : K \cap \bar{B}_h^0 \neq \varnothing \} .$$

(Autrement dit, $\bar{B}_h$ est la réunion des supports des fonctions de base ϕ_Q associées aux sommets de la triangulation T_h qui sont dans $\bar{B}_h^0$.)

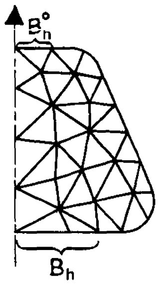


Figure 7.2.

On posera

$$l_1(h) = \sup_{B_h} r , \tag{7.4}$$

On a alors le

LEMME 7.2 : *Soit $(T_h)_h$ une famille régulière de triangulations. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in W^{1,2}_{-1/2}(B_{l_1(h)})$, on ait :*

$$| u |_{L^2_{-1/2}(B_h^0)} \leqslant C h \, | u |_{W^{1,2}_{-1/2}(B_{l_1(h)})} \tag{7.5}$$

et

$$| u |_{L^2_{-1/2}(B_h)} \leqslant Ch \, | u |_{W^{1,2}_{-1/2}(B_{l_1(h)})} \tag{7.6}$$

où

$$B_{l_1(h)} = \{ (r, z) \in \Omega_a : 0 < r < l_1(h) \}$$

Démonstration : On ne démontrera que l'inégalité (7.6), l'inégalité (7.5) se démontrant de manière analogue.

On va subdiviser $\overline{B}_{l_1(h)}$ en rectangles

$$\tilde{R} = \{ (r, z) : 0 \leqslant r \leqslant l_1(h) , \quad c_h \leqslant z \leqslant d_h \}$$

tels que

$$c l_1(h) \leqslant L_h \equiv d_h - c_h \leqslant C l_1(h)$$

où $c > 0$ et $C > 0$ sont des constantes indépendantes de h. (Autrement dit, on construit une triangulation de $\overline{B}_{l_1(h)}$ formée de rectangles.)

Pour démontrer (7.6), il suffit alors de montrer

$$| u |_{L^2_{-1/2}(\tilde{R})} \leqslant Ch \, | u |_{W^{1,2}_{-1/2}(\tilde{R})} \tag{7.7}$$

Soit alors $\hat{R}$ le carré $]0, 1[\times]0, 1[$ du plan $(\hat{r}, \hat{z})$ On introduit pour tout rectangle $\tilde{R}$, l'application affine $F_{\tilde{R}}$ qui transforme $\hat{R}$ en $\tilde{R}$; $F_{\tilde{R}}$ s'écrit

$$F_{\tilde{R}}(\hat{X}) = A\hat{X} + b \quad \text{où} \quad \hat{X} = (\hat{r}, \hat{z})$$

et où A est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} l_1(h) & 0 \\ 0 & L_h \end{pmatrix}$

Si $\hat{u}(\hat{X}) = u(F_{\tilde{R}}(\hat{X}))$, on vérifie (comme dans le lemme 6.1) que :

$$u \in W^{1,2}_{-1/2}(\tilde{R}) \Leftrightarrow \hat{u} \in W^{1,2}_{-1/2}(\hat{R})$$

En procédant comme dans la fin de la démonstration du lemme 6.1, on obtient (*cf.* (6.13) *et* (6.14)) :

$$\| r^{-1/2} u \|^2_{L^2(\tilde{R})} \leqslant C(l_1(h))^{-1} \, | \det A | \, \| \hat{r}^{-1/2} \hat{u} \|^2_{L^2(\hat{R})} . \tag{7.8}$$

Puisque $\hat{u}$ appartient à $W^{1,2}_{-1/2}(\hat{R})$, $\hat{u}$ est dans l'espace $X^{1,2}_{1/2}(\hat{R})$ et donc $\hat{u} = 0$ sur $\hat{r} = 0$; on peut donc appliquer le corollaire 4.1 et il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\| \hat{r}^{-1/2} \hat{u} \|_{L^2(R)} \leqslant C \, |\hat{u} |_{H^1(\hat{R})} \leqslant C \, |\hat{u} |_{W^{1,2}_{1/2}(\hat{R})} . \tag{7.9}$$

En retournant sur l'élément $\tilde{R}$, on a :

$$| \hat{u} |^2_{W^{1,2}_{-1/2}(\hat{R})} \leqslant C \, | \det A |^{-1} \, l_1(h) \, \| A \|^2 \, | u |^2_{W^{1,2}_{-1/2}(\tilde{R})} \tag{7.10}$$

(7.7) est alors une conséquence directe de (7.8), (7.9) et (7.10). C.Q.F.D.

Nous définissons à présent l'opérateur P_h

Pour $v \in L^2(\Omega_a)$, on définit

$$P_h \, v \equiv \sum_{Q \in \Sigma_h^1} v_Q \, \phi_Q \in R_h \tag{7.11}$$

où les scalaires v_Q sont définis à partir de l'opérateur P_Q par

$$v_Q \equiv (P_Q \, v)(Q)$$

et où Σ_h^1 désigne le sous-ensemble de Σ_h^0 des sommets de T_h qui n'appartiennent pas à la bande $\overline{B}_h^0$. De cette façon, la fonction $P_h \, v$ est identiquement nulle sur B_h^0 ; d'autre part, $P_h \, v$ est nulle sur Γ_{ah}.

THÉORÈME 7.1 : *Soit* $(T_h)_h$ *une famille régulière de triangulations. Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $u \in W^{1,2}_{-1/2}(\Omega_a) \cap H_0^1(\Omega_a)$, *on ait :*

$$\| u - P_h \, u \|_{L^2_{-1/2}(\Omega_a)} \leqslant Ch \, | u |_{W^{1,2}_{-1/2}(\Omega_a)} \, .$$

Preuve : On va distinguer plusieurs cas :

1) Si $K \subset \overline{B}_h^0$, alors, d'après (7.11), on a : $P_h \, u = 0$ sur K et, d'après le lemme 7.2,

$$\| u - P_h \, u \|_{L^2_{-1/2}(B_h^0)} = \| u \|_{L^2_{-1/2}(B_h^0)} \leqslant Ch \, | u |_{W^{1,2}_{-1/2}(B_{l_1(h)})} \, . \tag{7.12}$$

2) Si $K \subset B_h \diagdown B_h^0$, alors on peut supposer que le sommet Q_1 de K est dans $\overline{B}_h^0$; $P_h \, u$ s'écrit alors

$$P_h \, u \,|_K = \sum_{i=2}^{3} u_{Q_i} \, \phi_{Q_i} \, ,$$

en convenant que $u_{Q_i} = 0$ si $Q_i \notin \Sigma_h^1$.

On a donc

$$\| u - P_h \, u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} \leqslant C \left(\| u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} + \sum_{i=2}^{3} | u_{Q_i} |^2 \, \| \phi_{Q_i} \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} \right) . \tag{7.13}$$

Or

$$\| \phi_{Q_i} \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} \leqslant \left(\sup_K \frac{1}{r}\right) \|\phi_{Q_i}\|^2_{L^2(K)} \leqslant Ch_K^2 \left(\sup_K \frac{1}{r}\right). \tag{7.14}$$

Si $Q_i \notin \Sigma_h^1$, on a $u_{Q_i} = 0$ et sinon, grâce au lemme 7.1, on obtient :

$$| P_{Q_i} u |^2_{L^2(K)} \leqslant | u |^2_{L^2(K)} + Cd(S_{Q_i})^2 | u |^2_{H^1(S_{Q_i})}$$

d'où

$$| P_{Q_i} u |^2_{L^2(K)} \leqslant C\left[\left(\sup_K r\right) \| u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} + d(S_{Q_i})^2 \left(\sup_{S_{Q_i}} r\right) | u |^2_{W^{1,2}_{-1/2}(S_{Q_i})}\right]. \tag{7.15}$$

En passant sur un élément fini de référence $\hat{K}$ et en utilisant l'équivalence des normes sur l'espace $\mathbb{P}_1(\hat{K})$, on aboutit à l'inégalité :

$$| P_{Q_i} u |^2_{L^\infty(K)} \leqslant Ch_K^{-2} | P_{Q_i} u |^2_{L^2(K)} . \tag{7.16}$$

Les majorations (7.13) à (7.16) donnent :

$$\| u - P_h u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} \leqslant C\Bigg(\| u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} + \sum_{i=2}^{3} \left(\sup_K \frac{1}{r}\right)\Bigg[\left(\sup_K r\right) \| u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} + + d(S_{Q_i})^2 \left(\sup_{S_{Q_i}} r\right) | u |^2_{W^{1,2}_{-1/2}(S_{Q_i})}\Bigg]\Bigg).$$

D'où, puisque $\left(\sup_K \frac{1}{r}\right)\left(\sup_{S_{Q_i}} r\right) \leqslant C$,

$$\| u - P_h u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} \leqslant C\left(\| u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} + h^2 \sum_{i=2}^{3} | u |^2_{W^{1,2}_{-1/2}(S_{Q_i})}\right).$$

Finalement le lemme 7.2 et la propriété (7.1)i) entraînent, en sommant sur les triangles $K \subset \overline{B}_h \diagdown B_h^0$,

$$\| u - P_h u \|^2_{L^2_{-1/2}(B_h \diagdown B_h^0)} \leqslant Ch^2 | u |^2_{W^{1,2}_{-1/2}(B_{1(h)})} . \tag{7.17}$$

3) Si $K \not\subset \overline{B}_h$, alors, en désignant par $(Q_i)_{i=1 \text{ à } 3}$, les 3 sommets de K, on a :

$$P_h u |_K = \sum_{i=1}^{3} u_{Q_i} \phi_{Q_i}$$

où $u_{Q_i} = 0$ si $Q_i \notin \Sigma_h^1$.

a) Si $K \cap \Gamma_a = \phi$, si $K \cap \Gamma_a = 1$ côté de K, ou bien si $K \cap \Gamma_a = \{ Q_1 \}$ tel qu'il existe un triangle $K_1 \in S_{Q_1}$ avec $K_1 \cap \Gamma_a = 1$ côté de K_1, alors on peut écrire, d'après Clément [6, théorème 1 et inégalité 7]

$$\| u - P_h u \|^2_{L^2(K)} \leqslant Ch^2 \left(\sum_{i=1}^{3} | u |^2_{H^1(S_{Q_i})} \right)$$

et par conséquent,

$$\| u - P_h u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} \leqslant Ch^2 \left(\inf_K r \right)^{-1} \sum_{i=1}^{3} \left(\sup_{S_{Q_i}} r \right) | u |^2_{W^{1,2}_{1/2}(S_{Q_i})}$$

d'où, puisque $\left(\inf_K r \right)^{-1} \left(\sup_{S_{Q_i}} r \right) \leqslant C$, on déduit

$$\| u - P_h u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} \leqslant Ch^2 \left(\sum_{i=1}^{3} | u |^2_{W^{1,2}_{-1/2}(S_{Q_i})} \right). \tag{7.18}$$

b) Si $K \cap \Gamma_a = \{ Q_1 \}$, tel qu'il n'existe pas de triangle $K_1 \in S_{Q_1}$ avec $K_1 \cap \Gamma_a = 1$ côté de K_1 ou bien si $K \cap \Gamma_a = \{ Q_1, Q_2 \}$, alors K est un triangle voisin de la frontière courbe de Ω_a.

On a :

$$P_h u |_K = \sum_{i=2}^{3} u_{Q_i} \phi_{Q_i}$$

où $u_{Q_i} = 0$ si $Q_i \notin \Sigma_h^1$.

On supposera que Q_3 n'appartient pas à Γ_a ; si Q_2 est sur Γ_a, alors $u_{Q_2} = 0$ et $K \cap \Gamma_{ah} = Q_1 Q_2$.

On a, en tenant compte du fait que Ω_{ah} est à une distance $b > 0$ de l'axe $r = 0$:

$$\| u - P_h u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} \leqslant C \left\{ \left\| u - \sum_{i=1}^{3} (P_{Q_1} u)(Q_i) \phi_{Q_i} \right\|^2_{L^2(K)} + \right.$$
$$\left. + | u_{Q_1} |^2 \| \phi_{Q_1} \|^2_{L^2(K)} + \sum_{i=2}^{3} | (P_{Q_1} u)(Q_i) - u_{Q_i} |^2 \| \phi_{Q_i} \|^2_{L^2(K)} \right\}$$

d'où, avec le lemme 7.1,

$$\| u - P_h u \|^2_{L^2_{-1/2}(K)} \leqslant C \left[h^2 | u |^2_{H^1(S_{Q_1})} + h_K^2 | u_{Q_1} |^2 + \right.$$
$$\left. + h_K^2 \sum_{i=2}^{3} | (P_{Q_1} u)(Q_i) - u_{Q_i} |^2 \right]. \tag{7.19}$$

Si $Q_i \notin \Gamma_a$, grâce au lemme 7.1, à (7.1) et à (7.16), on a :

$$|(P_{Q_1} u)(Q_i) - u_{Q_i}|^2 \leqslant C h_K^{-2} [\| P_{Q_1} u - u \|_{L^2(K)}^2 + \| P_{Q_i} u - u \|_{L^2(K)}^2] \leqslant$$
$$\leqslant C(| u |_{H^1(S_{Q_1})}^2 + | u |_{H^1(S_{Q_i})}^2) \quad (7.20)$$

et si $Q_2 \in \Gamma_a$, on a :

$$|(P_{Q_1} u)(Q_2) - u_{Q_2}| = | P_{Q_1} u(Q_2) | . \quad (7.21)$$

Si $Q_2 \in \Gamma_a$, on notera τ_1 le segment $Q_1 Q_2$; sinon $\tau_1 \subset \partial\Omega_{ah}$ désignera le côté d'un triangle K_1 vérifiant la relation :

$$Q_1 \in \tau_1 \subset K_1 \subset S_{Q_1} ;$$

(7.19) et (7.21) nous montrent qu'il nous reste à majorer $\| P_{Q_1} u \|_{L^\infty(\tau_1)}$. En utilisant le lemme 4 de Clément [6], on peut écrire :

$$h_{K_1} | P_{Q_1} u |_{L^2(\tau_1)}^2 \leqslant C\big(h_{K_1} | u |_{L^2(\tau_1)}^2 + | u - P_{Q_1} u |_{L^2(K_1)}^2 +$$
$$+ h_{K_1}^2 | u - P_{Q_1} u |_{H^1(K_1)}^2\big) .$$

D'où, à l'aide du lemme 7.1, d'une inégalité inverse et de (7.1), on déduit :

$$| P_{Q_1} u |_{L^\infty(\tau_1)}^2 \leqslant C\big(h_{K_1}^{-1} | u |_{L^2(\tau_1)}^2 + | u |_{H^1(S_{Q_1})}^2\big) . \quad (7.22)$$

Or, d'après (6.24)

$$h_{K_1}^{-1} | u |_{L^2(\tau_1)}^2 \leqslant C h_{K_1} | u |_{H^1(\Theta_1)}^2 \quad (7.23)$$

où Θ_1 est l'ouvert borné de frontière formée par τ_1 et la portion de Γ_a comprise entre les extrémités de τ_1. Les majorations (7.19) à (7.23) nous donnent enfin

$$\| u - P_h u \|_{L^2_{-1/2}(K)}^2 \leqslant C h^2 \left(\sum_{i=1}^{3} | u |_{H^1(S_{Q_i})}^2 + | u |_{H^1(\Theta_1)}^2 \right) . \quad (7.24)$$

4) Finalement, puisque $P_h u \equiv 0$ sur $\Omega_a \setminus \Omega_{ah}$ et que Ω_{ah} est à une distance $b > 0$ de l'axe $r = 0$, le lemme 6.4 nous donne :

$$\| u - P_h u \|_{L^2_{-1/2}(\Omega_a \setminus \Omega_{ah})}^2 \leqslant C h^2 \| u \|_{W^{1,2}_{-1/2}(\Omega_a)}^2 . \quad (7.25)$$

On obtient enfin la majoration du théorème 7.1 par sommation des majorations (7.12), (7.17), (7.18), (7.24) et (7.25). □

THEOREME 7 2 *Soit $(T_h)_h$ une famille régulière de triangulations Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout*

$$u \in W^{1,2}_{-1/2}(\Omega_a) \cap H^1_0(\Omega_a) \cap W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a),$$

on ait

$$| u - P_h u |_{W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)} \leqslant Ch(\| u \|_{W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)} + \| u \|_{W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)})$$

Demonstration Remarquons tout d'abord qu'on a les inegalités suivantes

$$| u |_{W^{1,2}_{1/2}(B_h^\circ)} \leqslant Ch \, | u |_{W^{1,2}_{1/2}(B_{l_1(h)})} \tag{7 26}$$

et

$$| u |_{W^{1,2}_{1/2}(B_h)} \leqslant Ch \, | u |_{W^{1,2}_{1/2}(B_{l_1(h)})} \tag{7 27}$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théoreme 7 1, c'est pourquoi nous ne la ferons pas en détail Comme dans la démonstration du theoreme 7 1, on distingue plusieurs cas Les cas 1), 2), 3) *a*) et 4) se traitent comme pour le théorème 7 1, en utilisant les resultats de Clément [6, théorème 1, lemme 4 et inégalité 7], le lemme 7 1, les majorations (7 26) et (7 27) et le lemme 6 4

Par souci de commodité pour le lecteur, on traitera ci-dessous le cas 3) *b*), on considère donc un triangle K verifiant

- soit $K \cap \Gamma_a = \{ Q_1 \}$ tel qu'il n'existe pas de triangle $K_1 \in S_{Q_1}$ avec $K \cap \Gamma_a = 1$ côté de K_1,
- soit $K \cap \Gamma_a = \{ Q_1, Q_2 \}$

Si on reprend les notations du théorème 7 1, alors $P_h u |_K$ s'écrit

$$P_h u |_K = \sum_{i=2}^{3} u_{Q_i} \, \phi_{Q_i} \quad \text{ou} \quad u_{Q_i} = 0 \quad \text{si} \quad Q_i \notin \Sigma_h^1$$

En procédant comme dans la démonstration du théorème 7 1, on obtient

$$| u - P_h u |^2_{W^{1,2}_{1/2}(K)} \leqslant C \left[h^2 \sum_{i=1}^{3} | u |^2_{H^2(S_{Q_i})} + \| P_{Q_1} u \|^2_{L^\infty(\tau_1)} \right] \tag{7 28}$$

Grâce au lemme 4 de Clément [6], on a, en outre

$$h_{K_1} | P_{Q_1} u |^2_{L^2(\tau_1)} \leqslant C(k_{K_1} | u |^2_{L^2(\tau_1)} + | u - P_{Q_1} u |^2_{L^2(K_1)} + \\ + h^2_{K_1} | u - P_{Q_1} u |^2_{H^1(K_1)})$$

d'où, à l'aide du lemme 7.1, de (7.1) et d'une inégalité inverse, on déduit

$$\| P_{Q_1} u \|^2_{L^r(\tau_1)} \leqslant C(h_{K_1}^{-1} | u |^2_{L^2(\tau_1)} + h^2_{K_1} | u |^2_{H^2(S_{Q_1})}) . \tag{7.29}$$

Or, d'après (6.24) et (6.25), on a

$$h_{K_1}^{-1} | u |^2_{L^2(\tau_1)} \leqslant C h_{K_1} | u |^2_{H^1(\Theta_1)} \leqslant C h^3_{K_1} [| u |^2_{H^1(\Gamma_1)} + | u |^2_{H^2(\Theta_1)}] \tag{7.30}$$

où Γ_1 désigne la portion de Γ_a comprise entre les deux extrémités de τ_1.

Les majorations (7.28) à (7.30) donnent enfin :

$$| u - P_h u |^2_{W^{1,2}_{1/2}(K)} \leqslant C h^2 \left(\sum_{i=1}^{3} | u |^2_{H^2(S_{Q_i})} + | u |^2_{H^2(\Theta_1)} + | u |^2_{H^1(\Gamma_1)} \right) . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

8. CONSTRUCTION DE L'OPÉRATEUR r_{nN}

En vue d'étudier les propriétés d'approximation de l'espace V_{hN} introduit au § 5, nous allons étudier l'opérateur $r_{hN} : \mathscr{V} \to V_{hN}$ défini de la façon suivante :

$$(r_{hN} \tilde{u}) (r, z, \theta) = \sum_{|n| \leqslant N} u_{nh}(r, z) \, e^{in\theta} \tag{8.1)i}$$

avec

$$u_{nh} = \begin{cases} \Pi_h u_n , & \text{si} \quad | n | \leqslant 1 \\ P_h u_n , & \text{si} \quad 2 \leqslant | n | \leqslant N . \end{cases} \tag{8.1)ii}$$

Quant au domaine de définition $\mathscr{V}$ de r_{hN} il peut être choisi de la façon suivante :

$$\mathscr{V} = \{ \tilde{u} \in \tilde{V} : \exists u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \quad \text{avec} \\ \tilde{u}(r, z, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \} .$$

THEOREME 8.1 : *Si $(T_h)_h$ est une famille régulière de triangulations il existe une constante $C > 0$ telle que, l'on ait, pour toute fonction u appartenant à $H^l(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ avec $l = 2$ ou 3,*

$$\| \tilde{u} - r_{hN} \tilde{u} \|_{\tilde{V}} \leqslant C(N^{1-l} + h) \| u \|_{H^l(\Omega)} . \tag{8.2}$$

Preuve : Soit

$$\tilde{u}_N(r, z, \theta) = \sum_{|n| \leqslant N} u_n(r, z) \, e^{in\theta}$$

où les fonctions $u_n(r, z)$ sont les modes de Fourier de u (voir § 3).

On a

$$\| \tilde{u} - r_{hN} \tilde{u} \|_{\tilde{V}} \leqslant \| \tilde{u} - \tilde{u}_N \|_{\tilde{V}} + \| \tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u} \|_{\tilde{V}} , \tag{8.3}$$

de sorte qu'il suffit d'estimer séparément les deux termes.

1° *Estimation de* $\| \tilde{u} - \tilde{u}_N \|_{\tilde{V}}$

On a

$$\tilde{u} - \tilde{u}_N = \sum_{|n|>N} u_n(r, z)\, e^{in\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\tilde{u} - \tilde{u}_N) = \sum_{|n|>N} \frac{\partial u_n}{\partial r}\, e^{in\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\tilde{u} - \tilde{u}_N) = \sum_{|n|>N} \frac{\partial u_n}{\partial z}\, e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left| \frac{\partial}{\partial r}(\tilde{u} - \tilde{u}_N) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{u} - \tilde{u}_N) \right|^2 \right) d\theta =$$

$$= \sum_{|n|>N} \left(\left| \frac{\partial u_n}{\partial r}(r, z) \right|^2 + \left| \frac{\partial u_n}{\partial z}(r, z) \right|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant N^{-2k} \sum_{|n|>N} | n |^{2k} \left(\left| \frac{\partial u_n}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_n}{\partial z} \right|^2 \right)$$

d'ou en multipliant par $r\, dr\, dz$ et en intégrant sur Ω_a

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r}(\tilde{u} - \tilde{u}_N) \right\|_{\tilde{H}}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{u} - \tilde{u}_N) \right\|_{\tilde{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant CN^{-2k} \sum_{|n|>N} n^{2k} \left(\left\| \frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|_R^2 + \left\| \frac{\partial u_n}{\partial z} \right\|_R^2 \right). \tag{8.4}$$

De même, on a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{u} - \tilde{u}_N) = \sum_{|n|>N} \frac{in}{r}\, u_n\, e^{in\theta}$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{u} - \tilde{u}_N) \right|^2 d\theta = \sum_{|n|>N} \frac{n^2}{r^2} \, | u_n(r, z) |^2 \leqslant$$

$$\leqslant N^{-2k} \sum_{|n|>N} n^{2k+2} \frac{1}{r^2} \, | u_n(r, z) |^2$$

d'où

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\tilde{u} - \tilde{u}_N) \right\|_{\tilde{H}}^2 \leqslant N^{-2k} \sum_{|n| > N} n^{2(k+1)} \left\| \frac{u_n}{r} \right\|_R^2 . \tag{8.5}$$

Finalement, les majorations (3.5) et (3.8) montrent que si $u \in H^2(\Omega)$, on a :

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_N \|_{\tilde{V}}^2 \leqslant CN^{-2} \| u \|_{H^2(\Omega)}^2 .$$

D'autre part, si $u \in H^3(\Omega)$ les formules (8.4), (8.5) et les majorations (3.17) et (3.22) montrent que

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_N \|_{\tilde{V}}^2 \leqslant CN^{-4} \| u \|_{H^3(\Omega)}^2 .$$

2° *Estimation de* $\| \tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u} \|_{\tilde{V}}$

On a

$$\tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u} = \sum_{|n| \leqslant N} (u_n(r, z) - u_{nh}(r, z))\, e^{in\theta}$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left| \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u}) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u}) \right|^2 d\theta = \right.$$
$$= \sum_{|n| \leqslant N} \left(\left| \frac{\partial}{\partial r} (u_n - u_{nh}) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial z} (u_n - u_{nh}) \right|^2 \right).$$

En multipliant par le poids r et en intégrant en r et z, on obtient :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u}) \right\|_{\tilde{H}}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u}) \right\|_{\tilde{H}}^2 =$$
$$= 2\pi \sum_{|n| \leqslant N} | u_n - u_{nh} |_{W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)}^2 \leqslant$$
$$\leqslant Ch^2 \left[\sum_{|n| \leqslant N} | u_n |_{W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)}^2 + \sum_{2 \leqslant |n| \leqslant N} \| u_n \|_{W^{1,2}_{-1/2}(\Omega_a)}^2 \right] \leqslant Ch^2 \| u \|_{H^2(\Omega)}^2$$

où l'on a appliqué successivement la proposition 6.1 (pour $|n| \leqslant 1$), le théorème 7.2 (pour $|n| \geqslant 2$) et les majorations (3.4), (3.5) et (3.8)i) qui sont vraies pour $u \in H^2(\Omega)$.

La définition (2.3) de la norme $\tilde{V}$ montre que pour achever la démonstration du théorème, il reste à démontrer que

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u}) \right\|_{\tilde{H}}^2 \leqslant Ch^2 \| u \|_{H^2(\Omega)}^2 . \tag{8.6}$$

Or on a

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{u}_N - r_{hN}\,\tilde{u}) = \sum_{|n| \leqslant N} (in)(u_n - u_{nh})\, e^{in\theta}$$

et

$$\left\| \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{u} - r_{hN}\,\tilde{u}) \right\|^2_{\tilde{H}} = 2\,\pi \sum_{|n| \leqslant N} n^2 \left\| \frac{1}{r}(u_n - u_{nh}) \right\|^2_R .$$

On majore en premier lieu les termes $|n| = 1$, à l'aide de la proposition 6.1 :

$$\sum_{|n|=1} \left\| \frac{1}{r}(u_n - u_{nh}) \right\|^2_R \leqslant Ch^2 \sum_{|n|=1} |\,u_n\,|^2_{W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)} .$$

Ensuite, on utilise le théorème 7.1 qui montre que

$$\sum_{2 \leqslant |n| \leqslant N} n^2 \left\| \frac{1}{r}(u_n - u_{nh}) \right\|^2_R \leqslant Ch^2 \sum_{2 \leqslant |n| \leqslant N} n^2\,|\,u_n\,|^2_{W^{1,2}_{-1/2}(\Omega_a)} .$$

On déduit alors des majorations (3.4) (pour $|n| = 1$) et (3.3), (3.5), (3.8)i) (pour $|n| \geqslant 2$) que si $u \in H^2(\Omega)$, on a

$$\sum_{|n| \leqslant N} n^2 \left\| \frac{1}{r}(u_n - u_{nh}) \right\|^2_R \leqslant Ch^2\,\|\,u\,\|^2_{H^2(\Omega)}$$

d'où (8.6) et le résultat. C.Q.F.D.

Remarque 8.1 : Si l'on définissait r_{hN} par

$$(r_{hN}\,\tilde{u})(r, z, \theta) = \sum_{|n| \leqslant N} (\Pi_h\,u_n)(r, z)\, e^{in\theta}$$

on obtiendrait seulement

$$\|\,\tilde{u} - r_{hN}\,\tilde{u}\,\|_{\tilde{V}} \leqslant C(N^{-1} + hN)\,\|\,u\,\|_{H^2(\Omega)}$$

si $u \in H^2(\Omega)$.

En revanche, si $u \in H^3(\Omega)$, on obtiendrait toujours

$$\|\,\tilde{u} - r_{hN}\,\tilde{u}\,\|_{\tilde{V}} \leqslant C(N^{-2} + h)\,\|\,u\,\|_{H^3(\Omega)} . \tag{8.7}$$

En effet, dans la démonstration précédente, seule changerait l'estimation de

$$\|\,\tilde{u}_N - r_{hN}\,\tilde{u}\,\|^2_{\tilde{V}} \equiv \left\| \frac{\partial}{\partial r}(\tilde{u}_N - r_{hN}\,\tilde{u}) \right\|^2_{\tilde{H}} + \left\| \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{u}_N - r_{hN}\,\tilde{u}) \right\|^2_{\tilde{H}} + \left\| \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{u}_N - r_{hN}\,\tilde{u}) \right\|^2_{\tilde{H}} . \tag{8.8}$$

Or, les deux premiers termes du second membre sont toujours majorés par Ch^2 si $u \in H^2(\Omega)$ d'après la proposition 6.1 et la majoration (3.4).

Mais d'après la proposition 6.1, on obtient seulement la majoration suivante pour le troisième terme

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u}) \right\|_{\tilde{H}}^2 = 2\pi \sum_{|n| \leqslant N} n^2 \left\| \frac{1}{r} (u_n - \Pi_h u_n) \right\|_R^2 \leqslant$$
$$\leqslant Ch^2 \sum_{|n| \leqslant N} n^2 \, | u_n |_{W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)}^2 . \quad (8.9)$$

Donc si $u \in H^2(\Omega)$, d'après (8.9) et (3.4), on obtient seulement l'estimation

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u}) \right\|_{\tilde{H}}^2 \leqslant Ch^2 N^2 . \quad (8.10)$$

En revanche, si $u \in H^3(\Omega)$, les majorations (3.11), (3.19), (3.21) et (3.4) montrent que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 \, | u_n |_{W^{2,2}_{1/2}(\Omega_a)}^2 < + \infty \quad (8.11)$$

et donc, grâce à (8.9), on obtient l'estimation

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\tilde{u}_N - r_{hN} \tilde{u}) \right\|_{\tilde{H}}^2 \leqslant Ch^2 \, \| u \|_{H^3(\Omega)}^2 \quad (8.12)$$

d'où (8.7).

(L'avantage de cette démonstration pour le lecteur qui n'a pas lu le § 7 est qu'elle ne fait pas appel aux résultats de Clément.) □

9. ESTIMATION D'ERREUR DANS LA NORME DE $\tilde{H}$

Un corollaire immédiat des théorèmes 5.1 et 8.1 est que, sous les hypothèses du théorème 8.1, si la solution u du problème (1.1) est dans $H^l(\Omega)$, avec $l = 2$ ou 3, alors

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_{\tilde{V}} \leqslant C(N^{1-l} + h) \, \| u \|_{H^l(\Omega_a)} \quad (9.1)$$

pù $\tilde{u}_{hN}$ est la solution du problème approché (5.3).

Dans ce paragraphe nous montrons que sous certaines hypothèses supplémentaires que nous expliciterons, on a

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_{\tilde{H}} \leqslant C(N^{1-l} + h)(N^{-1} + h) \, \| u \|_{H^l(\Omega_a)} . \quad (9.2)$$

Pour établir l'estimation (9.2) on procède alors de la façon suivante. On remarque en premier lieu que

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_{\tilde{H}} = \sup_{\tilde{f} \in \tilde{H}} \frac{|(\tilde{u} - \tilde{u}_{hN}, \tilde{f})_{\tilde{H}}|}{\| \tilde{f} \|_{\tilde{H}}} . \tag{9.3}$$

Soit alors $\tilde{w} \in \tilde{V}$ la solution du problème *adjoint*

$$\forall \tilde{v} \in \tilde{V} , \quad b(\tilde{v}, \tilde{w}) = (\tilde{v}, \tilde{f})_{\tilde{H}} . \tag{9.4}$$

Si le problème adjoint de (1.1) est régulier, i.e., si l'application :

$$f \in H^{-1}(\Omega) \mapsto w \in V ,$$

(où w est l'unique solution de

$$\forall v \in V , \quad a(v, w) = L(v))$$

est un isomorphisme de $L^2(\Omega)$ sur $H^2(\Omega) \cap V$, on a, en posant

$$w(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \tilde{w}(r, z, \theta)$$

$$\| w \|_{H^2(\Omega)} \leqslant C \| \tilde{f} \|_{\tilde{H}} . \tag{9.5}$$

Comme d'autre part (voir 2.4) et (5.3))

$$b(\tilde{u} - \tilde{u}_{hN}, \tilde{w}_{hN}) = 0 , \quad \forall \tilde{w}_{hN} \in \tilde{V}_{hN} ,$$

on déduit de (9.4) que

$$(\tilde{u} - \tilde{u}_{hN}, \tilde{f})_{\tilde{H}} = b(\tilde{u} - \tilde{u}_{hN}, \tilde{w} - \tilde{w}_{hN})$$

et

$$|(\tilde{u} - \tilde{u}_{hN}, \tilde{f})_{\tilde{H}}| \leqslant C \| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_{\tilde{V}} \| \tilde{w} - \tilde{w}_{hN} \|_{\tilde{V}} . \tag{9.6}$$

Or en appliquant (9.1) à $\tilde{w}$ (avec $l = 2$), on a

$$\| \tilde{w} - \tilde{w}_{hN} \|_{\tilde{V}} \leqslant C(N^{-1} + h) \| w \|_{H^2(\Omega)} . \tag{9.7}$$

Finalement (9.3), (9.5), (9.6) et (9.7) montrent que

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_{\tilde{H}} \leqslant C(N^{-1} + h) \| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_{\tilde{V}}$$

d'où (9.2), grâce à (9.1).

10. GÉNÉRALISATION AU CAS D'ÉLÉMENTS FINIS DE DEGRÉ 2

On suppose pour simplifier que la méridienne Ω_a est un polygone convexe, de sorte que $\Omega_{ah} = \Omega_a$ et $\Gamma_{ah} = \Gamma_a$. Dans le cas où l'on utilise des éléments finis de degré 2, l'espace R_h est défini comme l'ensemble des fonctions $w_h \in C^0(\overline{\Omega}_a)$ dont la restriction à chaque triangle $K \in T_h$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$, et qui s'annulent sur Γ_a.

(Dans le cas où Ω_a ne serait pas un polygone, il faudrait utiliser des éléments finis isoparamétriques, ce qui alourdit beaucoup les notations.)

On peut choisir comme degrés de liberté pour l'espace R_h les valeurs aux sommets et aux milieux des côtés des triangles K de T_h qui ne sont pas situés sur la frontière Γ_a.

L'opérateur d'interpolation de Lagrange Π_h est alors défini de la façon suivante : pour $\varphi \in Z$ (voir § 6), $\Pi_h\, \varphi$ est la fonction de R_h qui coïncide avec φ en tous les sommets et en tous les milieux des côtés des triangles K de T_h.

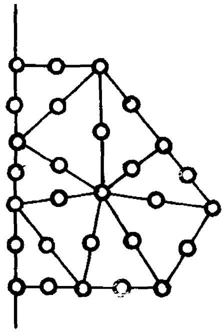


Figure 10.1. — Degrés de liberté de l'espace R_h dans le cas d'éléments finis de degré 2.

L'opérateur d'interpolation local

$$\Pi_K = \Pi_h\,|_K$$

a déjà été étudié au § 6 (voir lemmes 6.1 à 6.3 dans le cas $k = 3$).

Les résultats obtenus sont résumés dans la proposition suivante :

PROPOSITION 10.1 : *Si la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W^{3,2}_{1/2}(\Omega_a) \cap \mathring{W}^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$*

$$|\, u - \Pi_h\, u\,|_{W^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)} \leqslant C h^2\, |\, u\,|_{W^{3,2}_{1/2}(\Omega_a)} \tag{10.1}$$

et telle que, pour tout $u \in W^{3,2}_{1/2}(\Omega_a) \cap \mathring{X}^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$, *on ait, en outre,*

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_h u) \|_{L^2(\Omega_a)} \leqslant Ch^2 \, | u |_{W^{3,2}_{1/2}(\Omega_a)} \,. \tag{10.2}$$

Preuve : L'inégalité (10.1) est une conséquence directe du lemme 6.1 (*cf.* l'inégalité (6.1)) et du lemme 6.2 appliqués avec $k = 3$. Remarquons que, d'après la proposition 4.1, toute fonction u appartenant à $X^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$ est à trace nulle sur Γ_0 ; l'inégalité (10.2) découle alors immédiatement des lemmes 6.1 (*cf.* l'inégalité (6.3)) et 6.3 appliqués avec $k = 3$. C.Q.F.D.

On aura besoin en plus du résultat suivant :

LEMME 10.1 : *Sous les hypothèses de la proposition* 10.1, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $u \in W^{2,2}_{-1/2}(\Omega_a) \cap \mathring{W}^{1,2}_{1/2}(\Omega_a)$, *on ait*

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_h u) \|_{L^2(\Omega_a)} \leqslant Ch^2 \, | u |_{W^{2,2}_{-1/2}(\Omega_a)} \,. \tag{10.3}$$

Preuve : Démontrons, en premier lieu, que si $Q_0 \in \Gamma_0$ est le sommet d'un triangle K de T_h, on a :

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_{S_{Q_0}} u) \|_{L^2(S_{Q_0})} \leqslant Ch^2 \, | u |_{W^{2,2}_{-1/2}(S_{Q_0})} \,. \tag{10.4}$$

Avec les notations du lemme 6.1 et grâce aux majorations (6.13) et (6.14), on obtient :

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_{S_{Q_0}} u) \|^2_{L^2(S_{Q_0})} \leqslant C \, d(S_{Q_0})^{-1} \left(\sup_{1 \leqslant i \leqslant j_0} | \det B_i | \right) . | \hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u} |^2_{H^1(\hat{S})} \,. \tag{10.5}$$

Or $I - \hat{\Pi}$ est un opérateur continu de $H^2(\hat{S})$ dans $H^1(\hat{S})$ s'annulant sur l'espace $\mathbb{P}_2(\hat{S})$; on a donc la majoration classique :

$$| \hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u} |^2_{H^1(\hat{S})} \leqslant C \, | \hat{u} |^2_{H^2(\hat{S})} \leqslant C \, | \hat{u} |^2_{W^{2,2}_{-1/2}(\hat{S})} \,. \tag{10.6}$$

En revenant à l'élément S_{Q_0}, on obtient alors

$$| \hat{u} |^2_{W^{2,2}_{-1/2}(\hat{S})} \leqslant C \, d(S_{Q_0}) \sup_{1 \leqslant i \leqslant j_0} (| \det B_i |^{-1} \, \| B_i \|^4) \, | u |^2_{W^{2,2}_{-1/2}(S_{Q_0})} \,. \tag{10.7}$$

De (10.5), (10.6) et (10.7), on déduit (10.4) en tenant compte du fait que la famille $(T_h)_h$ est régulière.

Avec des techniques analogues à celles utilisées pour les lemmes 6.2 et 6.3, on montrerait que, si K est un triangle de T_h, tel que $K \cap \Gamma_0 = \varnothing$, on a :

$$\| r^{-1/2}(u - \Pi_K u) \|^2_{L^2(K)} \leqslant Ch^4 \, | u |^2_{W^{2,2}_{-1/2}(K)} \,. \tag{10.8}$$

La majoration (10.3) s'obtient alors par sommation à partir des majorations (10.4) et (10.8). C.Q.F.D.

On peut enfin énoncer l'analogue du théorème 8.1, pour l'opérateur r_{hN} défini par

$$(r_{hN}\,\tilde{u})(r, z, \theta) = \sum_{|n| \leqslant N} (\Pi_h\, u_n)(r, z)\, e^{in\theta}\,.$$

THÉORÈME 10.1 : *Si la famille de triangulations $(T_h)_h$ est régulière, alors il existe une constante C telle que l'on ait, pour toute fonction u appartenant à* $H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$\| \tilde{u} - r_{hN}\,\tilde{u} \|_{\tilde{V}} \leqslant C(N^{-2} + h^2) \| u \|_{H^3(\Omega)}\,.$$

Preuve : L'estimation du terme $\| \tilde{u} - \tilde{u}_N \|_{\tilde{V}}$ est la même qu'au théorème 8.1 (cas $l = 3$), et nous donne

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_N \|_{\tilde{V}} \leqslant CN^{-2} \| u \|_{H^3(\Omega)}\,.$$

Pour estimer le terme $\| \tilde{u}_N - r_{hN}\,\tilde{u} \|_{\tilde{V}}$, on utilise la relation (8.8). On a alors

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r}(\tilde{u}_N - r_{hN}\,\tilde{u}) \right\|_{\tilde{H}}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{u}_N - r_{hN}\,\tilde{u}) \right\|_{\tilde{H}}^2 =$$
$$= 2\pi \sum_{|n| \leqslant N} | u_n - \Pi_h\, u_n |_{W_{1/2}^{1,2}(\Omega_a)}^2 \leqslant$$
$$\leqslant Ch^4 \sum_{|n| \leqslant N} | u_n |_{W_{1/2}^{3,2}(\Omega_a)}^2 \leqslant Ch^4 \| u \|_{H^3(\Omega)}^2$$

d'après la proposition 10.1 et la majoration (3.10).

Enfin, pour majorer le troisième terme (voir (8.9))

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{u}_N - r_{hN}\,\tilde{u}) \right\|_{\tilde{H}}^2 = 2\pi \sum_{|n| \leqslant N} n^2 \left\| \frac{1}{r}(u_n - \Pi_h\, u_n) \right\|_R^2,$$

on applique d'une part la proposition 10.1 et la majoration (3.10) aux premiers termes $| n | = 1$ ou 2 :

$$\sum_{|n| \leqslant 2} n^2 \left\| \frac{1}{r}(u_n - \Pi_h\, u_n) \right\|_R^2 \leqslant Ch^4 \sum_{|n| \leqslant 2} | u_n |_{W_{1/2}^{3,2}(\Omega_a)}^2 \leqslant Ch^4 \| u \|_{H^3(\Omega)}^2$$

et d'autre part le lemme 10.1 et les majorations (3.11), (3.19), (3 21) aux termes d'ordre $|n| \geqslant 3$:

$$\sum_{3 \leqslant |n| \leqslant N} n^2 \left\| \frac{1}{r} (u_n - \Pi_h u_n) \right\|_R^2 \leqslant Ch^4 \sum_{3 \leqslant |n| \leqslant N} n^2 \, | u_n |^2_{W^{2,2}_{-1/2}(\Omega_a)} \leqslant$$

$$\leqslant Ch^4 \, \| u \|^2_{H^3(\Omega)}$$

d'où le résultat. C.Q.F.D.

On en déduit avec une modification convenable des définitions de l'espace V_{hN} et du problème approché (5 3) que si $\tilde{u}_{hN}$ désigne la solution obtenue par éléments finis de degré 2 en (r, z) et séries de Fourier en θ et que si la solution u du problème (1.1) est dans $H^3(\Omega)$, on a

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_{\tilde{V}} \leqslant C(N^{-2} + h^2) \, \| u \|_{H^3(\Omega)} \,.$$

Des arguments similaires à ceux développés au § 9 montreraient que, si le problème adjoint au problème (1.1) est régulier, on a

$$\| \tilde{u} - \tilde{u}_{hN} \|_{\tilde{H}} \leqslant C(N^{-2} + h^2)(N^{-1} + h) \, \| u \|_{H^3(\Omega)} \,.$$

On pourrait bien entendu généraliser à d'autres types d'éléments finis et monter en degré (mais il faudrait dans ce cas établir des majorations analogues à celles du § 3 lorsque $u \in H^k(\Omega)$ avec $k \geqslant 4$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R A ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press New York (1975)

[2] M S BAOUENDI, C GOULAOUIC, *Régularité et théorie spectrale pour une classe d'operateurs elliptiques dégenerés*, Arch Rational Mech Anal (34) (1969), p 361-379

[3] A BENDALI *Approximation of a degenerate boundary value problem by a finite element method*, RAIRO Analyse Numérique, 15, 2 (1981)

[4] P BOLLEY, J CAMUS, *Quelques resultats sur les espaces de Sobolev avec poids*, Séminaires d'Analyse Fonctionnelle de l'Université de Rennes (1968-1969)

[5] P G CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, (1978)

[6] Ph CLEMENT, *Approximation by finite element functions using local regularization*, R A I R O *9* (n° 2) (1975), p 77-84

[7] M CROUZEIX, *Cours d'Analyse Numérique des problèmes aux limites elliptiques*, Université de Rennes

[8] G GEYMONAT, P GRISVARD, *Problemi ai limiti lineari ellittici negli spazi di Sobolev con peso*, Le Matematiche, XXII fasc 2 (1967), p 1-38

[9] P GRISVARD, *Espaces intermediaires entre espaces de Sobolev avec poids*, Ann Scuol Norm Sup Pisa, Serie III, vol XVII, 3 (1963), p 255-296

[10] P GRISVARD, *Alternative de Fredholm relative au probleme de Dirichlet dans un polygone ou un polyedre*, 2e partie, Ann Scuol Norm Sup Pisa, serie IV, vol II, 3 (1975), p 359-388

[11] P GRISVARD, *Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyedral domain*, in Numerical Solution of Partial Differential Equations, III Synspade 1975, Bert Hubbard, ed , Academic Press, New York 1976

[12] J NECAS, *Les methodes directes en theorie des equations elliptiques*, Masson, Paris, 1972