

P.-L. LIONS

B. MERCIER

**Approximation numérique des équations
Hamilton-Jacobi-Bellman**

RAIRO. Analyse numérique, tome 14, n° 4 (1980), p. 369-393

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1980__14_4_369_0

© AFCET, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN (*)

par P.-L. LIONS ⁽¹⁾ et B. MERCIER ⁽²⁾

Communiqué par P. A. RAVIART

Résumé — On étudie des méthodes itératives pour la résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman faisant intervenir le maximum de plusieurs opérateurs uniformément elliptiques. On étudie aussi l'influence de la discrétisation par différences finies, et on donne des résultats numériques dans le cas de deux opérateurs permettant de comparer quatre des algorithmes étudiés.

Abstract — We study some iterative methods for the solution of Hamilton-Jacobi-Bellman equations involving the maximum of several uniformly elliptic operators. We study the effect of finite difference discretization. Finally we give some numerical results in the case of two operators, comparing the efficiency of some of the above algorithms.

INTRODUCTION

Dans cet article, nous étudions et proposons des méthodes itératives pour l'approximation numérique des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman. Précisons tout de suite la nature du problème : soit \mathcal{O} un ouvert borné de frontière régulière, soient A^1, \dots, A^m , m opérateurs uniformément elliptiques du 2° ordre à coefficients dont les termes d'ordre zéro sont supposés assez grands (voir la section 1 pour les hypothèses précises) et, enfin soient f^1, \dots, f^m , m fonctions données régulières sur \mathcal{O} , nous considérons le problème : trouver u [dans $W^{2, \infty}(\mathcal{O})$] solution de

$$\left. \begin{aligned} \max_{1 \leq \alpha \leq m} (A^\alpha u - f^\alpha) &= 0 \quad \text{p. p. dans } \mathcal{O}, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{aligned} \right\} \quad (0.1)$$

(*) Reçu septembre 1979

⁽¹⁾ Laboratoire d'Analyse numérique, Tour 55-65, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 5

⁽²⁾ Service Mathématiques appliquées, C E A, Centre d'Études de Limeil, B P n° 27, 94190 Villeneuve-Saint-Georges

Le problème (fortement non linéaire) précédent est le problème de Dirichlet pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman. Ce problème a été résolu par P. L. Lions [15] (voir la section 1 pour des rappels plus complets). Des problèmes du type (0.1) interviennent dans de multiples applications : contrôle stochastique [8, 2, 16, 26], gestion et économie [1, 25], mécanique et optique [13] avec des problèmes asymptotiques associés. Pour montrer l'étendue et la diversité des problèmes de type (0.1) signalons que l'équation de Monge-Ampère [9, 2] et le problème de l'obstacle en sont des cas particuliers.

Nous proposons ici diverses méthodes itératives dont nous étudions la convergence, la mise en œuvre et l'efficacité sur des exemples traités numériquement.

Donnons rapidement trois des méthodes proposées.

ALGORITHME I : On choisit u_α^0 solution de : $A^\alpha u_\alpha^0 = f^\alpha$ dans \mathcal{O} , $u_\alpha^0 = 0$ sur $\partial\mathcal{O}$. Par récurrence u_α^n étant donné, pour $\alpha = 1, \dots, m$, on calcule u_α^{n+1} comme étant la solution de l'inéquation variationnelle

$$\left. \begin{aligned} \text{Max}(A^\alpha u_\alpha^{n+1} - f^\alpha, u_\alpha^{n+1} - u_{\alpha+1}^n) &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ u_\alpha^{n+1} &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

en convenant que $u_{m+1}^n \equiv u_1^n$. Nous verrons que $u_\alpha^n(x)$ converge en décroissant vers $u(x)$ solution de (0, 1).

ALGORITHME II : On choisit u^0 solution de : $A^1 u^0 = f^1$ dans \mathcal{O} , $u^0 = 0$ sur $\partial\mathcal{O}$. Par récurrence u^n étant donné, on calcule $(\chi_\alpha^n)_{\alpha=1, \dots, m}$ de la façon suivante :

$$\chi_1^n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A^1 u^n - f^1)(x) = \underset{\alpha}{\text{Max}}(A^\alpha u^n - f^\alpha)(x), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\chi_2^n(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{si } (A^2 u^n - f^2)(x) \\ \quad = \underset{\alpha}{\text{Max}}(A^\alpha u^n - f^\alpha)(x) \quad \text{et } \chi_1^n(x) = 0 \\ 0 \quad \text{sinon,} \end{array} \right\} \quad (0.3)$$

$$\chi_m^n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A^m u^n - f^m)(x) \\ \quad = \underset{\alpha}{\text{Max}}(A^\alpha u^n - f^\alpha)(x) \quad \text{et } \chi_\alpha^n(x) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \alpha \leq m-1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que $\sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(x) \equiv 1$. Puis on définit u^{n+1} comme étant la solution du problème linéaire :

$$\sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^n(x) [A^{\alpha} u^{n+1} - f^{\alpha}] = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \quad \text{et} \quad u^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \partial\mathcal{O}. \quad (0.4)$$

Nous verrons que dans de nombreux cas $u^n(x)$ converge en décroissant vers $u(x)$. Une difficulté est attachée à la résolution du problème linéaire (0.4). Cet algorithme a été introduit par R. Bellman (voir par exemple Fleming-Rishel [8]). Une étude numérique de cet algorithme est faite dans [25].

ALGORITHME III : On se donne u^0 . Par récurrence u^n étant donné, on calcule u^{n+1} solution de

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u^{n+1} &= -\Delta u^n - \rho \{ \max (A^{\alpha} u^n - f^{\alpha}) \} & \text{dans } \mathcal{O}, \\ u^{n+1} &= 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{aligned} \right\} \quad (0.5)$$

où ρ est un nombre positif donné.

Nous montrerons que dans de nombreux cas u^n converge vers u et nous obtiendrons une estimation de la vitesse de convergence.

Le plan de cet article est le suivant :

1. Rappels et notations.
2. Algorithme I.
3. Algorithme II.
4. Algorithme III.
5. Méthode de Trotter.
6. Autres méthodes.
7. Approximation par différences finies et convergence.
8. Essais numériques et commentaires.

1. RAPPELS, HYPOTHÈSES ET NOTATIONS

1.1. Hypothèses et notations

Soit \mathcal{O} un ouvert borné de \mathbb{R}^N , de frontière régulière. Les opérateurs elliptiques A^1, \dots, A^m sont définis sur $\overline{\mathcal{O}}$ par

$$A^{\alpha} = - \sum_{k,l} a_{kl}^{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_k b_k^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_k} + c^{\alpha},$$

où les coefficients a_{kl}^α , b_k^α , c^α satisfont; pour $1 \leq \alpha \leq m$:

$$a_{kl}^\alpha = a_{lk}^\alpha, b_k^\alpha, c^\alpha \in C^2(\bar{\mathcal{O}}) \quad \text{pour } 1 \leq k, l \leq N, \quad (1.1)$$

$$\exists \nu > 0, \quad \forall x \in \bar{\mathcal{O}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{kl} a_{kl}^\alpha \xi_k \xi_l \geq \nu |\xi|^2 \quad (1.2)$$

et nous noterons $\lambda = \inf_{\alpha, x} c^\alpha(x)$.

Enfin les second-membres f^1, \dots, f^m satisfont, pour $1 \leq \alpha \leq m$:

$$f^\alpha \in W^{2, \infty}(\mathcal{O}). \quad (1.3)$$

1.2. Rappels

Donnons tout de suite le résultat principal concernant la résolution du problème (0.1), démontré dans P.-L. Lions [15].

THÉORÈME 1.1 : *Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.3) et si de plus*

$$\lambda \geq \lambda_0 \quad (1.4)$$

(où λ_0 est une constante ne dépendant que de \mathcal{O} , ν et des normes $C^2(\bar{\mathcal{O}})$ des coefficients a_{kl}^α , b_k^α) alors il existe une unique solution $u(x)$ dans $W^{2, \infty}(\mathcal{O})$ de

$$\max_{1 \leq \alpha \leq m} (A^\alpha u - f^\alpha) = 0 \quad p. p. \text{ dans } \mathcal{O}, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \quad (1.5)$$

REMARQUE 1.1 : D'autres résultats peuvent être trouvés dans P.-L. Lions [15, 16, 17, 19], dans H. Brezis et L. C. Evans [3, 7]. En ce qui concerne l'introduction et l'étude des méthodes itératives, nous nous bornerons à considérer le cas uniformément elliptique (sauf dans la section 5 consacrée à une méthode pour le problème parabolique), mais les résultats qui suivent s'étendent toutefois à l'étude de nombreuses équations de Hamilton-Jacobi-Bellman dégénérées.

REMARQUE 1.2 : La solution $u(x)$ de (1.5) peut s'interpréter (voir [8, 14, 15, 16, 23, 7]) comme la fonction coût optimum d'un problème de contrôle stochastique que nous ne détaillerons pas ici.

REMARQUE 1.3 : Dans de nombreux cas (par exemple a_{kl}^α indépendants de x) on sait (voir [15]) que l'on peut prendre dans le théorème 1.1 $\lambda_0 = 0$.

2. ALGORITHME I

2.1. Introduction de l'algorithme et énoncé du résultat principal

Nous poserons $(u_\alpha^0)_{1 \leq \alpha \leq m}$ les solutions de

$$A^\alpha u_\alpha^0 = f^\alpha \quad \text{dans } \mathcal{O}; \quad u_\alpha^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}.$$

Nous définissons ensuite par récurrence $(u_\alpha^{n+1})_{1 \leq \alpha \leq m}$ comme étant les solutions de

$$\text{Max}(A^\alpha u_\alpha^{n+1} - f^\alpha, u_\alpha^{n+1} - u_{\alpha+1}^n) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad u_\alpha^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \quad (2.1)$$

en convenant de noter $u_{m+1}^k = u_1^k$. Alors les résultats classiques de régularité des solutions d'inéquations variationnelles montrent que

$$u_\alpha^n \in W^{2,p}(\mathcal{O}) \quad (\forall p < +\infty).$$

Nous avons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1 : *Sous les hypothèses (1.1) à (1.4), pour tout α dans $\{1, \dots, m\}$, la suite (u^n) converge en décroissant vers la solution $u(x)$ de (1.5) i. e.*

$$\forall x \in \overline{\mathcal{O}} \quad u_\alpha^n(x) \underset{n \nearrow +\infty}{\searrow} u(x) \quad \text{et} \quad u_\alpha^n(x) \underset{C(\overline{\mathcal{O}})}{\rightarrow} u(x).$$

REMARQUE 2.1 : Sous des hypothèses beaucoup plus faibles sur les coefficients et les données, on peut montrer (comme suit) que le résultat est conservé : la convergence ayant alors lieu vers une solution généralisée de (1.5) (voir [23]).

REMARQUE 2.2 : La résolution de chacun des problèmes (2.1) est classique et du point de vue pratique on pourra se reporter à [10], ainsi qu'à [24] (voir la section 8 pour la description de la méthode employée).

2.2. Démonstration du théorème 2.1

1) Rappelons tout d'abord un résultat de [15], utilisé pour la démonstration du théorème 1.1. Soit $\beta(t)$ une fonction de classe C^∞ , convexe, croissante telle que $\beta(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $\beta(t) > 0$ pour $t > 0$. On note : $\beta_\varepsilon(t) = \beta(t/\varepsilon)$ et on considère le « système pénalisé » suivant :

$$A^\alpha u_\alpha^\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon - u_{\alpha+1}^\varepsilon) = f^\alpha \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad u_\alpha^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}; \quad (2.2)$$

ce système admet une unique solution dans $C^2(\overline{\mathcal{O}})$. De plus (voir [15]) nous avons, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$;

$$\forall x \in \overline{\mathcal{O}}, \quad u_\alpha^\varepsilon(x) \searrow u(x).$$

2) Nous introduisons alors une méthode itérative semblable à (2.1), approximant (2.2) :

Nous posons : $u_\alpha^{\varepsilon,0} = u_\alpha^0$. Par récurrence $u_\alpha^{\varepsilon,N+1}$ est la solution de

$$\left. \begin{aligned} A^\alpha u_\alpha^{\varepsilon,N+1} + \beta_\varepsilon(u_\alpha^{\varepsilon,N+1} - u_{\alpha+1}^{\varepsilon,N}) &= f^\alpha \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ u_\alpha^{\varepsilon,N+1} &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

On obtient aisément par une application standard du principe du maximum que : $u_\alpha^{\varepsilon, N}(x) \searrow u_\alpha^\varepsilon(x)$, $\forall x \in \overline{\mathcal{O}}$, lorsque $N \rightarrow +\infty$.

(Remarquer que cette méthode itérative s'apparente fortement à la méthode itérative fréquemment utilisée dans la résolution des inéquations quasi variationnelles).

(3) Nous montrons maintenant que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$;

$$u_\alpha^{\varepsilon, N}(x) \searrow u_\alpha^N(x), \quad \forall x \in \overline{\mathcal{O}}. \quad (2.4)$$

Montrons ce fait par récurrence. Supposons donc démontré

$$u_\alpha^{\varepsilon, N}(x) \searrow u_\alpha^N(x), \quad \forall x \in \overline{\mathcal{O}}, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \text{ lorsque } \varepsilon \searrow 0.$$

Alors, par une application standard du principe du maximum $u_\alpha^{\varepsilon, N+1}(x)$ décroît lorsque ε décroît.

Comme $u_\alpha^{\varepsilon, N+1} \geq u_\alpha^\varepsilon \geq u$, il existe v_α^{N+1} tel que $u_\alpha^{\varepsilon, N+1}(x) \searrow v_\alpha^{N+1}(x)$ pour $x \in \overline{\mathcal{O}}$ et $\varepsilon \searrow 0$. Il suffit de montrer que $u_\alpha^{N+1} = v_\alpha^{N+1}$.

Or, nous avons

$$A^\alpha u_\alpha^{N+1} + \beta_\varepsilon (u_\alpha^{N+1} - u_{\alpha+1}^{\varepsilon, N}) \leq A^\alpha u_\alpha^{N+1} + \beta_\varepsilon (u_\alpha^{N+1} - u_{\alpha+1}^N) \leq f^\alpha$$

et donc $u_\alpha^{N+1}(x) \leq v_\alpha^{N+1}(x)$, pour $x \in \overline{\mathcal{O}}$.

Enfin, soit $v_\alpha^{\eta, \varepsilon}$ la solution de

$$A^\alpha v_\alpha^{\eta, \varepsilon} + \beta_\varepsilon (v_\alpha^{\eta, \varepsilon} - u_{\alpha+1}^{\eta, N}) = f^\alpha \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad v_\alpha^{\eta, \varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

d'après le principe du maximum, on a

$$u_\alpha^{\varepsilon, N+1} \leq v_\alpha^{\eta, \varepsilon} \quad \text{pour tout } \varepsilon \leq \eta_i$$

On sait par ailleurs que $v_\alpha^{\eta, \varepsilon}$ décroît lorsque $\varepsilon \searrow 0$ vers la solution de l'inéquation variationnelle

$$\text{Max} (A^\alpha v_\alpha^\eta - f^\alpha, v_\alpha^\eta - u_{\alpha+1}^{\eta, N}) = 0 \quad \text{sur } \mathcal{O}, \quad v_\alpha^\eta = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}.$$

Donc

$$v_\alpha^{N+1}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\alpha^{\varepsilon, N+1}(x) \leq v_\alpha^\eta(x), \quad \forall x \in \overline{\mathcal{O}}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence et le lemme de Dini, la continuité de u_α^N entraîne l'uniforme convergence de $u_{\alpha+1}^{\eta, N}$ vers $u_{\alpha+1}^N$ lorsque $\eta \rightarrow 0$. Grâce aux résultats classiques de convergence de solutions d'inéquations variationnelles on

a la convergence uniforme de v_α^η vers u_α^{N+1} lorsque $\eta \rightarrow 0$, et donc $v_\alpha^{N+1} \leq u_\alpha^{N+1}$. Finalement $v_\alpha^{N+1} = u_\alpha^{N+1}$ et (2.5) est démontré.

4) Il est alors aisé de conclure puisque pour tout x dans $\overline{\mathcal{O}}$:

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \searrow u_\alpha^\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \searrow \lim_{N \nearrow +\infty} \searrow u_\alpha^{\varepsilon, N}(x),$$

or l'inversion de deux limites décroissantes est licite et ceci entraîne

$$u(x) = \lim_N \searrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} \searrow u_\alpha^{\varepsilon, N}(x) = \lim_N u_\alpha^{\varepsilon, N}(x).$$

Puisque $u \in C(\overline{\mathcal{O}})$, le lemme de Dini montre la convergence uniforme.

3. ALGORITHME II

3.1. Introduction de l'algorithme II

Soit u^0 (par exemple) la solution de

$$A^1 u^0 = f^1 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad u^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

A partir de (χ_α^{n-1}, u^n) on « définit » (χ_α^n, u^{n+1}) de la façon suivante :

$$\chi_\alpha^n \in L^\infty(\mathcal{O}), \quad 0 \leq \chi_\alpha^n \leq 1 \quad \text{p.p.}, \quad \sum_{\alpha=1}^m \chi_\alpha^n(x) = +1$$

et

$$\sum_{\alpha=1}^m \chi_\alpha^n(x) (A^\alpha u^n - f^\alpha)(x) = \max_{1 \leq \alpha \leq m} (A^\alpha u^n - f^\alpha), \quad (3.1)$$

ceci ne définit pas χ_α^n de manière unique, et on peut par exemple utiliser le choix de $\chi_\alpha^n(x)$ donné par les formules (0.3).

Enfin u^{n+1} sera déterminé par le problème linéaire suivant :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^m \chi_\alpha^n(x) (A^\alpha u^{n+1} - f^\alpha)(x) &= 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O}, \\ u^{n+1} &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

L'algorithme est donc parfaitement déterminé à condition qu'on sache résoudre les problèmes elliptiques linéaires (3.1) ce qui présente une difficulté sérieuse. Théoriquement, la résolution de (3.2) est connue si $m=2$ (voir [3]), si les opérateurs A^α sont de Cordès (voir [20]) ou bien si les opérateurs A^α ont même

partie principale (voir la section suivante 3.2). Pratiquement, le problème (3.2) doit être résolu en dimension finie, sous forme discrétisée et on est alors amené à inverser une matrice (non singulière) sans propriétés particulières (voir la section 8, pour les méthodes utilisées). En dimension finie, la convergence de cet algorithme a été démontrée dans [6]. Nous allons justifier la convergence dans un cas très simple.

3.2. Démonstration de la convergence dans un cas particulier

PROPOSITION 3.1. — Nous supposons que (1.1) et (1.2) ont lieu, que $\lambda \geq 0$ et de plus que les opérateurs A^α ont même partie principale

$$\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \quad a_{kl}^\alpha = a_{kl}, \quad \forall x \in \mathcal{O}.$$

Alors il existe une unique solution u^{n+1} de (3.1) dans $C^2(\bar{\mathcal{O}})$.

De plus $u^n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} u(x)$, où $u(x)$ est la solution de (1.5), et la convergence a lieu dans $W^{3,p}(\mathcal{O})$ faible ($\forall p < \infty$).

REMARQUE 3.1 : Ce résultat (élémentaire) est dû à Fleming-Rishel [8].

Démonstration : La seule partie non immédiate de la proposition est la convergence de $u^n(x)$ vers $u(x)$.

1) La décroissance de u^n découle du principe du maximum et du fait que

$$\max_{\alpha} (A^\alpha u^n - f^\alpha)(x) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^n(x) (A^\alpha u^n - f^\alpha)(x) \geq \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^{n-1}(x) (A^\alpha u^n - f^\alpha)(x) = 0$$

et

$$\sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^n(x) (A^\alpha u^{n+1} - f^\alpha)(x) = 0.$$

2) Le fait que $u^{n+1} \geq u$ découle d'un argument analogue puisque

$$\sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^n(x) (A^\alpha u - f^\alpha)(x) \leq \max_{\alpha} (A^\alpha u - f^\alpha)(x) = 0.$$

3) D'après ce qui précède $u^{n+1}(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} v(x)$, $\forall x \in \bar{\mathcal{O}}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et $v \geq u$.

En particulier $\|u^n\|_{L^\infty(\mathcal{O})}$ est bornée, et ceci entraîne au vu de (3.2) et de l'hypothèse faite sur les opérateurs que $\|u^n\|_{W^{3,p}(\mathcal{O})}$ est bornée ($\forall p < \infty$). En particulier

$$u^n \rightarrow v \text{ dans } C^2(\mathcal{O}).$$

Or

$$\max_{\alpha} (A^{\alpha} u^n - f^{\alpha}) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^n (A^{\alpha} u^n - f^{\alpha}) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^n A^{\alpha} (u^n - u^{n+1}),$$

donc $\max_{\alpha} (A^{\alpha} u^n - f^{\alpha}) \rightarrow 0$ uniformément sur $\bar{\mathcal{O}}$, d'où $\max_{\alpha} (A^{\alpha} v - f^{\alpha}) = 0$, d'où $v = u$, d'après l'unicité.

4. ALGORITHME III

4.1. Notations et hypothèses

En vue de démontrer la convergence de l'algorithme III, nous allons faire quelques hypothèses différentes de (1.1) à (1.4) :

$$a_{ki}^{\alpha} = a_{ik}^{\alpha}, \quad b_k^{\alpha}, \quad c^{\alpha} \in L^{\infty}(\mathcal{O}), \quad (4.1)$$

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \text{p. p. } x \in \mathcal{O}, \quad \sum_{k,l} (a_{kl}^{\alpha})^2 \leq \frac{1}{N-1+\varepsilon} (\sum_k a_{kk}^{\alpha})^2 \quad (1 \leq \alpha \leq m), \quad (4.2)$$

$$f^{\alpha} \in L^2(\mathcal{O}) \quad (1 \leq \alpha \leq m). \quad (4.3)$$

Nous noterons $\lambda = \inf_{\alpha, x} \text{ess } c^{\alpha}(x)$.

La condition (4.2) est la première condition de Cordès (voir Cordès [4, 5]). Cette condition est toujours vérifiée si $N \leq 2$. Son utilité dans la résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman est mise en évidence dans [20].

Introduisons maintenant l'algorithme III : soit u^0 quelconque dans $H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$; $u^0 \equiv 0$ par exemple. On définit u^{n+1} à partir de u^n par

$$-\Delta u^{n+1} = -\Delta u^n - \rho \left\{ \max_{\alpha} (A^{\alpha} u^n - f^{\alpha}) \right\}, \quad u^n \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}) \quad (4.4)$$

où ρ est une constante positive. Ainsi on passe de u^n à u^{n+1} par une application non linéaire que nous noterons T_{ρ} .

4.2. Le résultat de convergence

THÉORÈME 4.1 : *Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (4.2) et (4.3) et si de plus $\lambda \geq \lambda_0$ [où λ_0 ne dépend que de \mathcal{O} , ε et des normes $L^{\infty}(\mathcal{O})$ de a_{ki}^{α} , b_{ik}^{α}] il existe une constante $\rho_m > 0$ telle que pour tout $\rho \in]0, \rho_m[$, T_{ρ} soit une contraction de rapport $k_{\rho} < 1$ sur $H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$ muni de la norme $\| \| u \| \| = | \Delta u |_{L^2(\mathcal{O})}$.* (4.5)

Le théorème 4.1 est dû à P. L. Lions [20], et découle aisément du lemme suivant (découlant lui-même d'un résultat de Koselev [12]) :

LEMME 4.1 : *Sous les hypothèses du théorème 4.1, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que pour tout u, v dans $H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$:*

$$(-\Delta(u-v), \max_{\alpha} (A^{\alpha} u - f^{\alpha}) - \max_{\alpha} (A^{\alpha} v - f^{\alpha}))_{L^2(\mathcal{O})} \geq \gamma \|u-v\|_{H^2(\mathcal{O})}^2. \quad (4.6)$$

REMARQUE 4.1 : Les résultats précédents (ainsi que les méthodes de démonstration) s'adaptent au cas où les opérateurs A^{α} satisfont (1.1), (1.2), (4.3) et $a_{ik}^{\alpha} = a_{ik}$ ($1 \leq \alpha \leq m$).

REMARQUE 4.2 : Nous voyons donc qu'il faut choisir ρ de manière optimale (i. e. de manière à rendre k_{ρ} le plus petit possible), un tel choix est d'ailleurs confirmé dans les résultats numériques.

5. UNE MÉTHODE DE TROTTER

5.1. Description de la méthode

Rappelons tout d'abord un résultat concernant la version parabolique de (1.5) (pour la démonstration, voir [22]).

THÉORÈME 5.1 : *Soit $T > 0$ fixé sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.3) et si de plus*

$$u_0 \in W^{2, \infty}(\mathcal{O}) \cap W_0^{1, \infty}(\mathcal{O}) \quad (5.1)$$

alors il existe une unique solution $u(t, x)$ dans $W^{2, 1, \infty}([0, T] \times \mathcal{O})$ de

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} + \max_{1 \leq \alpha \leq m} (A^{\alpha} u - f^{\alpha})(t, x) &= 0 \quad \text{p. p. dans }]0, T[\times \mathcal{O}, \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ u(t, x) &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Introduisons alors une méthode itérative (de type Trotter) : soit $n \in \mathbb{N}$ on pose $\Delta t = T/n$ et pour $k \leq n$ on introduit $(v_n^{k, \alpha})$ solutions de

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_n^{k, \alpha}}{dt} + A^{\alpha} v_n^{k, \alpha} - f^{\alpha} &= 0 \quad \text{p. p. dans }]0, \Delta t[\times \mathcal{O}, \\ v_n^{k, \alpha}(0, x) &= u_n^k(x), \\ v_n^{k, \alpha}(t, x) &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, \quad \forall t \in [0, \Delta t] \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

et on pose $u_n^{k+1}(x) = \min_{\alpha} v_n^{k, \alpha}(\Delta t, x)$.

Enfin on initialise la méthode en posant $u_n^0(x) = u_0(x)$, et on considère la suite $u^n(x) = u_n^n(x)$.

5.2. Le résultat de convergence

THÉOREME 5.2 : *Sous les hypothèses du théorème 5.1, la suite (u^n) définie précédemment converge dans $C(\bar{\mathcal{O}})$ vers $u(T, x)$ quand n tend vers l'infini, où $u(t, x)$ est la solution de (5.2).*

REMARQUE 5.1 : Ce résultat est démontré dans [20], à l'aide d'une technique probabiliste. Il serait intéressant de montrer ce résultat par des arguments analytiques.

REMARQUE 5.2 : Du point de vue pratique, la résolution des équations paraboliques linéaires (5.3) ne présente pas de difficulté : on peut par exemple employer des méthodes d'éléments finis. Quant à l'opération définissant u_n^{k+1} , il s'agit uniquement d'une simple opération de comparaison.

REMARQUE 5.3 : Nous n'avons pas testé l'efficacité de la méthode précédente sur des exemples concrets. Nous nous sommes contentés de comparer une « version stationnaire » de cette méthode aux autres méthodes introduites dans les sections 2, 3, 4 (cf. section 8).

5.3. Une version stationnaire

Nous allons donner une autre méthode itérative (qui s'apparente à la méthode précédente) destinée à approximer la solution de (1.5). Soit $k > 0$ fixé : on considère u_α^0 ($1 \leq \alpha \leq m$) définis comme à la section 2, et on pose $u^0 = \inf u_\alpha^0$. Et on définit u_α^{n+1} , u^{n+1} à partir de u^n de la manière suivante : soit u_α^{n+1} la solution du problème de Dirichlet linéaire

$$\left. \begin{aligned} A^\alpha u_\alpha^{n+1} + \frac{1}{k} u_\alpha^{n+1} &= \frac{1}{k} u^n + f^\alpha && \text{dans } \mathcal{O}, \\ u_\alpha^{n+1} &= 0 && \text{sur } \partial\mathcal{O} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

et on pose : $u^{n+1} = \inf_\alpha u_\alpha^{n+1}$.

Nous avons alors le résultat suivant :

PROPOSITION 5.1 : *Pour $k > 0$ fixé, les suites (u_α^n) définies précédemment convergent dans $C(\bar{\mathcal{O}})$ vers (u_α^n) unique solution du système suivant dans $C^2(\bar{\mathcal{O}})$:*

$$A^\alpha u_\alpha^k + \frac{1}{k} (u_\alpha^k - \inf_{\beta \neq \alpha} u_\beta^k) = f^\alpha \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad u_\alpha^k = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \quad (5.5)$$

De plus quand $k \rightarrow 0$, (u_α^k) décroît vers la solution $u(x)$ de (1.5) (et la convergence a donc lieu dans $C(\bar{\mathcal{O}})$).

Démonstration : La première partie de la proposition se démontre aisément grâce au principe du maximum, en effet on obtient l'existence de $\gamma > 0$ tel que

$$\|u_\alpha^{n+1} - u_\alpha^n\|_{C(\bar{\mathcal{O}})} \leq \frac{1/k}{(1/k) + \gamma} \|u^n - u^{n-1}\|_{C(\bar{\mathcal{O}})} = \frac{1}{1 + \gamma k} \|u^n - u^{n-1}\|_{C(\mathcal{O})},$$

donc

$$\|u^{n+1} - u^n\|_{C(\bar{\mathcal{O}})} \leq \frac{1}{1 + \gamma k} \|u^n - u^{n-1}\|_{C(\bar{\mathcal{O}})},$$

d'où (u_α^n) converge géométriquement vers u_α dans $C(\bar{\mathcal{O}})$ et u^n converge géométriquement vers \bar{u} dans $C(\bar{\mathcal{O}})$. En particulier

$$\bar{u} = \inf_{\alpha} u_\alpha.$$

D'autre part d'après (5.4), on obtient :

$$A^\alpha u_\alpha + \frac{1}{k} u_\alpha = \frac{1}{k} \bar{u} + f^\alpha,$$

ce qui achève la démonstration de la première partie de la proposition.

La démonstration de la convergence u_α^k vers u s'obtient par des arguments semblables à ceux utilisés dans le théorème 2.1, aussi nous l'omettrons.

6. REMARQUES SUR D'AUTRES MÉTHODES

6.1. Le cas de deux opérateurs

D'après H. Brézis et L. C. Evans [3], le problème (1.5), sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.4) et (4.3) dans le cas où $m=2$, se réduit à l'inéquation variationnelle suivante : trouver $w \in L^2(\mathcal{O})$ solution de

$$\left. \begin{aligned} (Kw - f^1, z - w)_{L^2(\mathcal{O})} &\geq 0, & \forall z \in C, \\ w &\in C, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

où C est le convexe fermé de $L^2(\mathcal{O})$ défini par $C = \{z \in L^2, z \leq f^2 \text{ p. p.}\}$ et où K est l'opérateur linéaire continu de $L^2(\mathcal{O})$ dans $L^2(\mathcal{O})$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} Kw = A^1 u \text{ et } u \text{ est la solution de} \\ A^2 u = w \text{ dans } \mathcal{O}, \quad u \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}). \end{array} \right.$$

De plus sous les hypothèses (1.1), (1.2) et (1.4), K est monotone coercif i. e. :

$$\exists \gamma > 0, \quad \forall w \in L^2(\mathcal{O}), \quad (Kw, w)_{L^2(\mathcal{O})} \geq \gamma \|w\|_{L^2(\mathcal{O})}^2.$$

L'existence et l'unicité d'une solution w de (6.1) sont alors immédiates et u , unique solution de (1.5), est définie par

$$A^2 u = w \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad u \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}).$$

Ainsi tout revient à résoudre (6.1). Or on dispose de nombreuses méthodes itératives permettant de résoudre efficacement (6.1) (cf. par exemple P.-L. Lions et B. Mercier [24]). Donnons une méthode itérative : w^0 quelconque dans $L^2(\mathcal{O})$, w^{n+1} est défini par

$$w^{n+1} = P_C [w^n - \rho(Kw^n - f^1)], \quad (6.2)$$

où P_C est l'opération de projection sur C i. e.

$$P_C z = \inf(z, f^2) \quad \text{p. p. dans } \mathcal{O}.$$

Alors pour ρ convenablement choisi, il est pratiquement immédiat de montrer que w^n converge géométriquement dans $L^2(\mathcal{O})$ vers la solution w de (6.1). Si u^n désigne la solution de

$$A^2 u^n = w^n \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad u^n \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$$

(et alors $A^2 u^n = Kw^n$), nous pouvons réécrire (6.2) de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} A^2 u^{n+1} &= A^2 u^n - \max(A^2 u^n - f^2, \rho(A^1 u^n - f^1)), \\ u^{n+1} &\in H^2 \cap H_0^1(\mathcal{O}). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Et nous constatons que (6.2) ou (6.3) est une variante de l'algorithme III.

6.2. Un problème de minimisation convexe

On peut remarquer que sous les hypothèses du théorème 1.1, la solution $u(x)$ de (1.5) est l'unique solution du problème de minimisation convexe

$$\min_{u \in H^2 \cap H_0^1(\mathcal{O})} \int_{\mathcal{O}} \left\{ \max_{\alpha} (A^{\alpha} u - f^{\alpha})(x) \right\}^2 dx = J(u).$$

Comme J est convexe, lipschitzienne, et que dans de nombreux cas on peut montrer qu'elle est coercive, ceci peut inciter à utiliser des méthodes de gradient afin de calculer la solution $u(x)$ du problème de minimisation. Néanmoins comme cette approche nous a semblé *a priori* un peu lourde et difficile à implémenter, nous ne l'avons pas testée numériquement.

7. APPROXIMATION

Pour simplifier l'exposé, nous considérons le cas bidimensionnel où \mathcal{O} est le carré unité de R^2 . On introduit alors un réseau uniforme de pas $h = 1/(M+1)$, et on recherche la solution approchée dans l'espace V_h des fonctions étagées qui sont constantes sur les pavés élémentaires

$$\left] \left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i + \frac{1}{2} \right) h \left[\times \left] \left(j - \frac{1}{2} \right) h, \left(j + \frac{1}{2} \right) h \left[\right.$$

pour $i, j = 1, \dots, M-1$, et nulles ailleurs. La dimension de cet espace V_h est M^2 . Chacun des opérateurs A^α , $\alpha = 1, \dots, m$ est alors remplacé par $B^\alpha + \lambda I$, où B^α est une matrice $M^2 \times M^2$ définie de la façon suivante.

Soit $v \in V_h$ donné, on appelle $v_{i,j}$ la valeur de V_h au point ih, jh du réseau, et $(B^\alpha v)_{i,j}$ celle de $B^\alpha v$ qui est donnée par

$$(B^\alpha v)_{i,j} = - \sum_{k,l} a_{kl}^\alpha (D_{kl} v)_{i,j} + \sum_k b_k^\alpha (D_k v)_{i,j} + (c^\alpha - \lambda) v_{i,j},$$

où les coefficients a_{kl}^α , b_k^α , c^α sont évalués au point ih, jh , et les D_{kl} sont des matrices représentant les opérateurs de dérivation discrète

$$(D_{11} v)_{i,j} \equiv \frac{1}{h^2} (v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}),$$

$$(D_{22} v)_{i,j} \equiv \frac{1}{h^2} (v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}),$$

$$(D_{12} v)_{i,j} \equiv \frac{1}{h^2} (2v_{i,j} + v_{i-1,j-1} + v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1}),$$

$$(D_1 v)_{i,j} \equiv \begin{cases} \frac{1}{h} (v_{i,j} - v_{i-1,j}) & \text{si } b_1^\alpha > 0, \\ \frac{1}{h} (v_{i+1,j} - v_{i,j}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(D_2 v)_{i,j} \equiv \begin{cases} \frac{1}{h} (v_{i,j} - v_{i,j-1}) & \text{si } b_2^\alpha > 0, \\ \frac{1}{h} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Les deux premiers choix (schémas) sont classiques, le troisième a été effectué de telle sorte que la méthode soit équivalente à la méthode d'éléments finis la plus simple s'il n'y avait pas les termes du 1^{er} ordre. Les discrétisations de ces derniers sont décentrées.

En plus des hypothèses (1.1) à (1.4) faites pour le problème continu, on suppose que

$$a_{12}^\alpha(x) \leq \frac{1}{2} \min(a_{11}^\alpha(x), a_{22}^\alpha(x)), \quad \forall x \in \bar{\mathcal{O}},$$

de telle sorte que les matrices $B^\alpha = ((b_{ki}^\alpha))_{k,l=1,\dots,M^2}$ soient des matrices vérifiant :

$$b_{kk}^\alpha > 0 \quad \text{et} \quad b_{kl}^\alpha \leq 0 \quad \text{pour} \quad k \neq l, \quad (7.1)$$

$$\sum_l b_{kl}^\alpha \geq 0, \quad \forall k, \quad \text{avec inégalité stricte pour } k=1 \text{ au moins} \quad (7.2)$$

(propriété de diagonale dominante),

$$\forall k > 1 \text{ il existe } l < k \text{ tel que } b_{kl}^\alpha < 0 \text{ (irréductibilité)}. \quad (7.3)$$

D'après Varga [28], p. 85, les B^α sont donc des M -matrices, qui vérifient en particulier le principe du maximum :

$$B^\alpha v \leq 0 \quad \Rightarrow \quad v \leq 0,$$

où l'inégalité doit s'étendre composante par composante dans R^{M^2} .

Le problème approché est alors tout naturellement :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\text{Max}_\alpha ((B^\alpha + \lambda I) u_h - g^\alpha) = 0, \quad (7.4)$$

où $g^\alpha = [f^\alpha]_h$ est (par définition de $[\cdot]_h$) l'interpolée de f , c'est-à-dire la fonction de V_h qui coïncide avec f^α aux points (ih, jh) du réseau.

Le problème approché (7.4) admet une solution unique (cf. Delebecque-Quadrat [6], th. 3).

Stabilité

Nous commençons par démontrer le résultat de stabilité suivant, où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme L^∞ de V_h qui coïncide avec la norme ∞ de R^{M^2} .

THÉORÈME 7.1 : Soit $z_h \in V_h$ la solution du problème perturbé

$$\text{Max}_\alpha (B^\alpha z_h - (g^\alpha + \varepsilon^\alpha)) = 0, \quad (7.5)$$

où $\varepsilon^\alpha \in V_h$, alors

$$\|z_h - u_h\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda} \max_\alpha \|\varepsilon^\alpha\|_\infty.$$

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME 7.1 : Soit A une matrice vérifiant (7.1) et (7.2), et u vérifiant $Au + \lambda u \leq f$, alors

$$u \leq b = \frac{1}{\lambda} \|f\|_{\infty}.$$

Démonstration : Soit i l'indice pour lequel u atteint son maximum

$$u_i = \max_J u_j.$$

Si $u_i \leq 0$ le résultat est démontré. On suppose donc $u_i > 0$:

$$(a_{ii} + \lambda)u_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}u_j \leq f_i,$$

d'où

$$\lambda u_i \leq f_i - a_{ii}u_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}u_j \leq f_i - (a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij})u_i,$$

où l'on a utilisé la négativité des a_{ij} pour majorer $-a_{ij}u_j$ par $-a_{ij}u_i$. Finalement

$$a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} = \sum_j a_{ij} \geq 0 \text{ entraîne que}$$

$$u_i \leq \frac{1}{\lambda} f_i$$

d'où le résultat.

Démonstration du théorème 7.1 · Nous notons $(u_i)_{i \leq i \leq M^2}$ les composantes, de u_h et (z_i) celles de z_h .

L'équation (7.4) entraîne l'inégalité

$$\sum_j b_{ij}^{\alpha} u_j + \lambda u_i \leq f_i^{\alpha}, \quad \forall i, \quad \forall \alpha, \quad (7.6)$$

cette inégalité étant une égalité pour au moins un indice $\alpha = \alpha(i)$ qui dépend de i ; u_h est donc solution du système linéaire

$$C u_h + \lambda u_h = e,$$

où

$$C = ((c_{ij})) \text{ avec } c_{ij} = b_{ij}^{\alpha(i)}, \quad \forall i, j \quad \text{et} \quad e_i = f_i^{\alpha(i)}$$

c'est-à-dire que la ligne n° i de C est identique à la ligne n° i de $B^\alpha(i)$. De même l'équation (7.5) entraîne

$$\sum_j b_{ij}^\alpha z_j + \lambda z_i \leq f_i^\alpha + \varepsilon_i^\alpha \quad (7.7)$$

avec égalité pour un indice α éventuellement différent : $\alpha = \alpha'(i)$.

On a de façon analogue

$$C' z_h + \lambda z_h = e' + \eta'$$

où

$$c'_{ij} = b_{ij}^{\alpha'(i)}, \quad e'_i = f_i^{\alpha'(i)} \quad \text{et} \quad \eta'_i = \varepsilon_i^{\alpha'(i)}.$$

De plus, (7.6) et (7.7) entraînent

$$C' u_h + \lambda u_h \leq e',$$

$$C z_h + \lambda z_h \leq e + \eta,$$

où

$$\eta = (\eta_i) \quad \text{et} \quad \eta_i = \varepsilon_i^{\alpha(i)}.$$

D'où par différence

$$C'(u_h - z_h) + \lambda(u_h - z_h) \leq -\eta',$$

$$C(z_h - u_h) + \lambda(z_h - u_h) \leq \eta$$

et en appliquant le lemme 7.1, ce qui est loisible puisque C et C' sont des M -matrices vérifiant (7.1), (7.2), (7.3), on obtient :

$$u_h - z_h \leq \frac{1}{\lambda} \|\eta'\|_\infty,$$

$$z_h - u_h \leq \frac{1}{\lambda} \|\eta\|_\infty.$$

d'où le résultat puisque $\|\eta'\|_\infty$ et $\|\eta\|_\infty \leq \max_\alpha \|\varepsilon^\alpha\|_\infty$. \square

Convergence

Le résultat de stabilité nous permet de démontrer que si $u \in C^2(\bar{\mathcal{O}})$, la solution u_h du problème approché converge vers u lorsque $h \rightarrow 0$.

En effet (cf. Godounov [11]), les opérateurs discrétisés B^α sont des approximations consistantes des opérateurs A^α , c'est-à-dire $[u]_h$ désignant

l'interpolée de u aux nœuds du réseau, et $[A^\alpha u]_h$ celle de $A^\alpha u$, (qui a un sens si $u \in C^2(\bar{\mathcal{O}})$), on a

$$B^\alpha [u]_h - [A^\alpha u]_h = \varepsilon_h^\alpha$$

avec $\varepsilon_h^\alpha \in V_h$ et

$$\|\varepsilon^\alpha\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{si } h \rightarrow 0, \quad \text{si } u \in C^2(\bar{\mathcal{O}})$$

et

$$\|\varepsilon^\alpha\|_\infty = O(h^\theta) \quad \text{si } u \in C^{2, \theta}(\bar{\mathcal{O}}) \quad \text{pour } 0 < \theta \leq 1 \quad (1).$$

Or, comme on a choisi $g^\alpha = [f_\alpha]_h$, on a

$$\text{Max}_\alpha ([A^\alpha u]_h - g^\alpha) = 0$$

puisque u est la solution du problème initial, d'où

$$\text{Max}_\alpha (B^\alpha [u]_h - (g^\alpha + \varepsilon_h^\alpha)) = 0$$

de sorte que l'on peut appliquer le résultat de stabilité (th. 7.1) à $z_h = [u]_h$ qui nous donne $\|[u]_h - u_h\|_\infty \leq \max_\alpha \|\varepsilon_h^\alpha\|_\infty$.

On en déduit que si $u \in C^2(\bar{\mathcal{O}})$, u_h converge vers u en norme L^∞ discrète, et que si de plus $u \in C^{2, \theta}(\bar{\mathcal{O}})$, ce que l'on sait démontrer dans certains cas (2), on a l'estimation d'erreur

$$\|[u]_h - u_h\|_\infty = O(h^\theta).$$

8. ESSAIS NUMÉRIQUES

Nous nous sommes limités dans ces essais au cas de deux opérateurs à coefficients constants, et sans termes du 1^{er} ordre.

Avant de donner les résultats, nous passons en revue les particularités de chaque algorithme en ce qui concerne la programmation.

On remplace dorénavant $B^\alpha + \lambda I$ par B^α .

8.1. Implémentation de l'algorithme I

On remarquera qu'il n'est pas nécessaire de calculer *tous* les u_α^n pour $\alpha = 1, \dots, m$ dans l'algorithme I. Il suffit en effet de connaître $u_{\alpha+1}^n$ pour calculer

(1) $C^{2, \theta}(\bar{\mathcal{O}}) \subset C^2(\bar{\mathcal{O}})$ est le sous-ensemble des fonctions dont les dérivées secondes sont höldériennes d'ordre θ .

(2) Dans le cas de 2 opérateurs [3] ou de la dimension 2 [20].

u_α^{n+1} . Dans le cas $m=2$, nous avons donc seulement calculé $u_2^0, u_1^1, u_2^2, \dots, u_2^n, u_1^{2n+1}, \dots$ ce qui donne lieu à deux fois moins de calculs sur notre ordinateur qui n'est pas organisé pour le calcul parallèle. A chaque itération de l'algorithme I, nous devons résoudre une inéquation variationnelle (problème d'*obstacle*) :

$$\text{Max}(B^1 u^{2n+1} - g^1, u^{2n+1} - u^{2n}) = 0, \quad (8.1)$$

$$\text{Max}(B^2 u^{2n+2} - g^2, u^{2n+2} - u^{2n+1}) = 0, \quad (8.2)$$

où nous avons abandonné pour simplifier l'indice inférieur.

La décroissance ponctuelle de la suite u^n ainsi générée est immédiate. Le point de départ u^0 est choisi solution de $B^2 u^0 = g^2$.

Pour résoudre (8.1) et (8.2) on utilise l'algorithme II.

8.2. Implémentation de l'algorithme II

Par commodité, on remplace la suite des fonctions caractéristiques χ_i^n par une suite de fonctions $\alpha^n(i)$ définies en chaque point $i \in [1, M^2]$ du réseau et valant 1 ou 2.

L'algorithme est alors défini ainsi :

u^n étant donné par récurrence, calculer

$$\alpha^n(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } (B^1 u^n - g^1)_i > (B^2 u^n - g^2)_i, \\ 2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$C^n = ((c_{ij}^n)), \quad \text{où } c_{ij}^n = b_{ij}^{\alpha^n(i)}, \quad \forall i, j \in [1, M^2],$$

$$e^n = (e_i^n), \quad \text{où } e_i^n = g_i^{\alpha^n(i)},$$

u^{n+1} solution de $C^n u^{n+1} = e^n$.

Là encore, la ligne n° i de C^n est identique à la ligne n° i de $B^{\alpha^n(i)}$. Les matrices C^n satisfaisant les conditions (7.1) à (7.3) sont des M -matrices mais pas nécessairement définies positives (noter que la transposée de C^n n'est pas en général diagonale dominante).

D'après un résultat de Tartar [27], il existe des matrices diagonales D^n (à coefficients diagonaux ≥ 0) telles que les $D^n C^n$ soient définies positives. Autrement dit un simple changement d'échelle (mais lequel ?) suffirait à rendre les C^n définies positives. On pourrait déjà opérer le changement d'échelle sur les ordres de grandeur respectifs des coefficients des deux opérateurs suggéré ultérieurement à la remarque 8.1, pour faciliter le calcul de u^{n+1} .

Les matrices C^n n'étant ni symétriques, ni définies positives, elles sont difficiles à inverser par des méthodes itératives, et nous avons préféré utiliser la méthode

d'élimination de Gauss, qui marche très bien mais coûte plus cher en encombrement mémoire.

En revanche si B^1 ou B^2 se réduit à l'identité (c'est-à-dire si on résout un problème de l'obstacle du type de ceux rencontrés à chaque itération de l'algorithme I, la matrice C est du type

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où A_{11} est symétrique et définie positive. Dans ce cas on peut donc utiliser la méthode du gradient conjugué, qui s'avère extrêmement rapide, d'autant plus que le nombre de variables indépendantes diminue.

8.3. Implémentation de l'algorithme III

Matriciellement l'algorithme s'écrit :

$$C u^{n+1} = C u^n - \rho \max_{\alpha} (B^{\alpha} u^n - g^{\alpha}), \quad (8.3)$$

où C est la matrice du schéma à 5 points discrétisant l'opposé du laplacien. La matrice C étant symétrique et définie positive nous avons utilisé la méthode du gradient conjugué, pour résoudre le système linéaire (8.3) ⁽³⁾, et cela nous a donné pleine satisfaction. La matrice C étant invariable au cours des itérations on pourrait la factoriser sous la forme LL^T une fois pour toutes, pour diminuer le nombre de calculs à effectuer à chaque itération, au détriment de l'encombrement mémoire.

REMARQUE 8.1 : Le problème initial (1.5) est visiblement équivalent au problème

$$\max(A^1 u - f^1, \theta A^2 u - \theta f^2) = 0,$$

dont la solution est évidemment indépendante de θ , $\forall \theta > 0$.

Ceci montre que l'on peut ajuster les ordres de grandeur des coefficients a_{ij}^1 et a_{ij}^2 , et il y a intérêt à le faire pour l'algorithme III. Supposons en effet que f^1 (et donc g^1) soit infiniment grand, l'algorithme se réduit à

$$C u^{n+1} = C u^n - (B^2 u^n - g^2)$$

qui converge pour $0 < \rho < \rho_1$; si maintenant f^2 (et donc g^2) est infini, il se réduit à $C u^{n+1} = C u^n - \rho(B^1 u^n - g^1)$ qui converge pour $0 < \rho < \rho_2$. L'ajustement optimal aura pour effet de rendre $\rho_1 = \rho_2$, comme l'ont montré les essais numériques.

⁽³⁾ Dans ce cas, la « Fast Fourier Transform » serait idéale.

8.4. Implémentation de la méthode de Trotter

En discrétisant (5.4) on aboutit à un système linéaire dont la matrice est définie positive et strictement diagonale dominante. Dans le cas que nous avons considéré où il n'y a pas de termes du 1^{er} ordre, elle sera de plus symétrique et donc inversible par la méthode du gradient conjugué. Dans le cas contraire on pourrait utiliser une autre méthode itérative comme la surrelaxation ponctuelle ou par blocs. De toutes manières ce système linéaire est bien mieux conditionné que celui qui intervient à l'algorithme II, dans le cas général.

8.5. Résultats

On a choisi

$$\begin{aligned} a_{11}^1 &= 1, & a_{12}^1 &= a_{21}^1 = \frac{1}{4}, & a_{22}^1 &= 1; \\ a_{11}^2 &= \frac{1}{2}, & a_{12}^2 &= a_{21}^2 = \frac{1}{20}, & a_{22}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Soit $u_e = x(1-x)y(1-y)$, on a choisi

$$f^1 = f^2 = \max(A^1 u_e, A^2 u_e),$$

de sorte que u_e est en fait la solution exacte.

Le pas de discrétisation choisi était $h=1/10$, et il y a donc 81 variables indépendantes.

Le tableau I donne une idée de la vitesse de convergence des 3 méthodes : pour avoir une convergence à 10^{-5} près (différence relative entre deux itérés successifs) il faut 10 itérations avec l'algorithme I, 3 avec l'algorithme II et 10 avec l'algorithme III.

A chaque itération de l'algorithme I, on résout un problème d'obstacle [(8.1) ou (8.2)] qui demandent chacun 3 itérations de l'algorithme I. Malgré cela, il est difficile de savoir quel est le meilleur des algorithmes I et II sur un exemple réel à cause de la différence déjà signalée d'encombrement mémoire.

En revanche, il est clair que l'algorithme III est meilleur que l'algorithme I dans l'exemple que nous avons traité. De plus il permet facilement de prendre en compte des opérateurs dégénérés [nous avons traité le cas $A^1 = -(\partial^2/\partial x_1^2)$, $A^2 = -(\partial^2/\partial x_2^2)$ avec succès].

On notera dans le tableau I que la valeur au centre du carré ne bouge que toutes les deux itérations. En effet une fois sur deux, elle appartient à la zone où l'obstacle est actif.

TABLEAU 1

Valeur de w^n au centre du carré

n	Algorithme I	Algorithme II	Algorithme III
1	0,065 222	0,083 143	0,062 617
2	0,065 222	0,064 099	0,061 132
3	0,064 384	0,064 099	0,063 673
4	0,064 384		0,063 806
5	0,064 248		0,064 027
6	0,064 248		0,064 068
7	0,064 171		0,064 101
8	0,064 171		0,064 125
9	0,064 171		0,064 135
10	0,064 171		0,064 135

Le grand avantage de l'algorithme II est de donner lieu à une décroissance ponctuelle C'est le meilleur des algorithmes que nous connaissons pour résoudre le problème de l'obstacle

Examen des frontières libres

La frontière libre est donnée sous forme d'un tableau carré de « 1 » ou de « 2 » selon que $\max(B^\alpha u - g^\alpha) = 0$ est atteint pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$

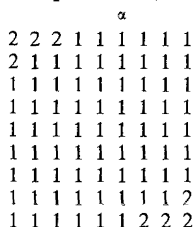


Fig 1 - Frontiere libre exacte

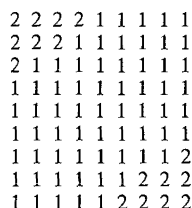


Fig 2 - Frontiere libre donnee par les algorithmes II et III

L'algorithme I ne donne que les zones de contact dans les problèmes d'obstacles résolus aux itérations paires et impaires, qui n'ont qu'un lointain rapport avec la frontière libre cherchée (fig 3)



$n=9$
 $n=10$

Fig 3 - Zones de contact avec l'obstacle dans les itérations paires et impaires de l'algorithme I

CONCLUSION

L'algorithme II est le plus rapide mais le plus difficile à programmer et le plus encombrant en mémoire, sauf dans le cas où l'un des opérateurs se réduit à l'identité, c'est-à-dire dans le cas d'un problème d'obstacle.

L'algorithme I a l'avantage d'avoir une décroissance ponctuelle et aucun paramètre à ajuster, comme l'algorithme II. Il donne lieu à plus de calculs mais moins d'encombrement mémoire.

L'algorithme III est un très bon algorithme à la fois sur le plan des calculs et de l'encombrement mémoire. Il permet en outre d'envisager des opérateurs dégénérés.

Enfin la méthode de Trotter est plus adaptée à la résolution des problèmes d'évolution qu'à celle des problèmes stationnaires.

Ces conclusions ne concernent que les quelques exemples que nous avons traités qui n'impliquent que 2 opérateurs et un pas de discrétisation relativement grossier $h = 1/10$.

Le problème correspondant est en définitive *facile* à résoudre (une dizaine d'itérations, et une centaine d'instructions FORTRAN pour les algorithmes I, III et Trotter).

REMERCIEMENTS

Nous remercions M. Bonnet pour une amélioration de la démonstration du lemme 7.1.

Résultats obtenus par la méthode de Trotter

On sait que pour k fixé, la suite u^n dégénérée par l'algorithme (5.4) converge vers $u^k \equiv \inf_{\alpha} u_{\alpha}^k$. D'autre part u^k décroît vers u solution du problème initial, lorsque $k \rightarrow 0$. Évidemment la convergence de u^n vers u^k est d'autant plus lente que k est petit, comme le montre le tableau II, où n^* désigne le nombre d'itérations nécessaires pour que la suite u^n ait convergé à 10^{-5} près.

TABLEAU II

Résultats donnés par la méthode de Trotter

k	u^k	n^*
1	0,064 826	120
0,5	0,064 592	200
0,1	0,064 236	660
0,05	0,064 171	1 750

On voit tout de même que u^k converge très rapidement vers u lorsque $k \rightarrow 0$. Malgré cela la méthode de Trotter est sûrement un bien meilleur algorithme pour résoudre le problème d'évolution que le problème stationnaire. Il faut en effet environ 100 fois plus d'itérations pour obtenir u avec 3 chiffres exacts que pour l'un des algorithmes I, II ou III. Encore n'y a-t-il qu'environ 20 fois plus de calculs car la méthode du gradient conjugué pour résoudre (5.4) converge 5 fois plus vite du fait que le point de départ est beaucoup plus proche du point d'arrivée que dans les autres algorithmes.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 A BENSOUSSAN et A LESOURNE, *Optimal Growth of a Self-Financing Firm in an Uncertain Environment*, Rapport Univ Paris-IX
- 2 A BENSOUSSAN et J -L LIONS, *Applications des inequations variationnelles en contrôle stochastique*, Dunod, Paris, 1978
- 3 H BREZIS et L C EVANS, *A Variational Inequality Approach to the Bellman-Dirichlet Equation for Two Elliptic Operatas*, M R C report, Univ Wisconsin, Madison, # 1789, Arch Rat Mech Anal (a paraître)
- 4 H O CORDES, *Über die erste ranwertaufgabe bei quasilinearen differential gleichungen zweiter ordnung in mehr als zwei variablen*, Math Annalen, vol 131, 1956, p 278-312
- 5 H O CORDES, *Zero Order a priori Estimates for Solutions of Elliptic Differential Equations*, Proc Symp Pure Math, vol 4, 1961, p 157-166
- 6 F DELEBECQUE et J P QUADRAT, *Problemes asymptotiques dans la commande de la chaîne de Markov possédant des interactions fortes et faibles* (a paraître)
- 7 L C EVANS et A FRIEDMAN, *Optimal Stochastic Switching and the Dirichlet Problem for the Bellman Equations*, Trans Amer Math Soc (a paraître)
- 8 W H FLEMING et R RISHEL, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1975
- 9 B GAVEAU, *Methodes de contrôle optimal en analyse complexe*, I, J Funct Anal, vol 25, n° 4, 1977, p 391-411
- 10 R GLOWINSKI, J -L LIONS et R TREMOLIERES, *Analyse numerique des inequations variationnelles*, Dunod, Paris, 1976
- 11 S GODOUNOV et V RIABENKI, *Schemas aux differences*, Editions de Moscou, 1977
- 12 A I KOSELEV, *An Inequality for Elliptic Operators of Second-Order with Restricted Coefficients*, Soviet Math Dokl, vol 12, n° 4, 1972, p 1009
- 13 S N KRUKOV, *Generalized Solutions of the Hamilton-Jacobi Equations of Eikonal Type*, I, Math U S S R Sbornik, vol 27, n° 3, 1975, p 406-446
- 14 N V KRYLOV, *Control of a Solution of a Stochastic Integral Equation*, Th Proba Appl, vol 17, 1972, p 114-131
- 15 P -L LIONS, *Resolution des problemes generaux de Bellman-Dirichlet*, C R Acad Sc, Paris, t 287, serie A, 1978, p 747-750, Acta Mathematica, article detaille (a paraître)
- 16 P -L LIONS, *Contrôle de diffusions dans R^N* , C R Acad Sc, Paris, t 288, serie A, 1979 p 339-342 Comm Pure Appl Math article detaille (a paraître)
- 17 P -L LIONS, *Le probleme de Cauchy pour les equations de Hamilton-Jacobi-Bellman* (a paraître)

18. P.-L. LIONS, *Some Problems Related to the Bellman-Dirichlet Equation for Two Elliptic Operators*, M.R.C. report, Univ. Wisconsin, Madison, # 1816, Comm. P.D.E. (à paraître).
19. P.-L. LIONS, *Problèmes de Bellman dégénérés* (à paraître).
20. P.-L. LIONS, *Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et opérateurs de Cordès* (à paraître).
21. P.-L. LIONS, *Problèmes de transmission et leurs processus de diffusion* (à paraître).
22. P.-L. LIONS, *Une formule de Trotter pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman* (à paraître).
23. P.-L. LIONS et J. L. MENALDI, *Problèmes de Bellman avec le contrôle dans les coefficients de plus haut degré*, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 287, série A, 1978, p. 409-412.
24. P.-L. LIONS et B. MERCIER, *Splitting Algorithms for the Sum of Two Non Linear Operators*, Rapport École Polytechnique, Paris, n° 29, 1978; S.I.A.M. J. Num. Anal. (à paraître).
25. J. P. QUADRAT, *Analyse numérique de l'équation de Bellman stochastique*, Rapport Laboria, n° 140, 1975, I.R.I.A., 78000 Rocquencourt, France.
26. J. P. QUADRAT, *Contrôle optimal de diffusions stochastiques*, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 284, série A, 1977, p. 1109-1112.
27. L. TARTAR, *Une nouvelle caractérisation des M-matrices*, R.I.R.O., 5^e année, n° R3, 1971, p. 127-128.
28. R. S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, 1964.