RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

J. MORGAN-SCIARRINO

Algorithme d'approximation interne de problèmes de point de selle avec contraintes via l'optimisation

RAIRO. Analyse numérique, tome 14, nº 2 (1980), p. 189-202

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1980__14_2_189_0>

R A I R O Analyse numerique/Numerical Analysis
(vol 14 n° 2 1980 p 189 a 202)

ALGORITHME D'APPROXIMATION INTERNE DE PROBLÈMES DE POINT DE SELLE AVEC CONTRAINTES VIA L'OPTIMISATION (*)

par J MORGAN-SCIARRINO (1)

Communique par J CEA

Resume — *On presente dans cet article un procede d'approximation interne d'un probleme de point de selle avec contraintes non limitees par une suite de problemes d'optimisation pouvant être consideres comme sans contraintes Ceci conduit a un algorithme dont chaque iteration consiste en une maximisation par rapport a l'une des variables et une minimisation par rapport a l'autre On en demontre la convergence forte dans des espaces de Hilbert et on donne des majorations d'erreurs*

Abstract — A saddle-point problem with several unbounded constraints is transformed by means of an internal penalty function into the solution of a sequence of unconstrained optimization problems This leads to an iterative implementable procedure each iteration consists of two steps of optimization minimization in one variable and maximization on the other not on finding a saddle-point of the corresponding penalty saddle function This method is shown to be strongly convergent in Hilbert spaces and can provide an estimate of errors

1. INTRODUCTION

Soit K_1 (respectivement K_2) un sous-ensemble convexe ferme d'un espace de Hilbert réel V_1 (resp V_2) et une fonctionnelle réelle J definie sur $K_1 \times K_2$

On considère le probleme suivant

PROBLEME (*P*) trouver un point de selle de J sur $K_1 \times K_2$, c'est-à-dire un couple $(u_1, u_2) \in K_1 \times K_2$ tel que

$$J(u_1, v_2) \leqq J(u_1, u_2) \leqq J(v_1, u_2), \qquad \forall (v_1, v_2) \in K_1 \times K_2 \qquad (1\ 1)$$

Diverses methodes d'approximation de problemes d'optimisation ont été adaptées a l'approximation de problèmes de point de selle avec contraintes [1] mais ces méthodes ne peuvent être employees que dans le cas où les fonctionnelles introduites par le probleme sont partout definies L'adaptation de

(*) Reçu octobre 1978

(1) Istituto di Matematica dell Universita di Napoli Italie

R A I R O Analyse numerique/Numerical Analysis, 0399-0516/1980/189/S 5 00

la méthode de A. V. Fiacco et G. P. McCormick aux problèmes de point de selle avec contraintes [8, 6] a permis d'établir une méthode d'approximation interne qui ne nécessite pas que les fonctionnelles soient partout définies. Toutefois les résultats établis ne font que transformer le problème de point de selle avec contraintes en un problème de point de selle pouvant être considéré comme sans contraintes et ne fournissent donc pas de moyens simples pour approcher numériquement le point de selle cherché. Le but de cet article est de présenter un procédé d'approximation interne du problème (P) par une suite de problèmes d'optimisation pouvant être considérés comme sans contraintes ou plus précisément un algorithme dont chaque itération consiste en la résolution de deux problèmes d'optimisation pouvant être considérés comme sans contraintes, maximisation par rapport à l'une des variables puis minimisation par rapport à l'autre. Ceci permettra, après discrétisation, d'utiliser d'une part les résultats établis par A. V. Fiacco et G. P. McCormick en optimisation et d'autre part des techniques bien connues d'optimisation comme celle très simple d'emploi des variations locales [2].

2. HYPOTHÈSES

Pour $i=1, 2$ on note $(\ ,\ )_i$ le produit scalaire dans V_i, $\|\ \|_i$ la norme sur V_i et $\langle\ ,\ \rangle_i$ la dualité entre l'espace V_i et son dual V_i'.

1° La fonctionnelle J, définie sur $K_1 \times K_2$, vérifie :

J est deux fois continûment différentiable sur $K_1 \times K_2$ et pour $i=1, 2$ les opérateurs linéaires $D_i^2 J\ (v_1, v_2) : V_i \to V_i'$ sont surjectifs pour tout couple (v_1, v_2) de $K_1 \times K_2$. (2.1)

J est fortement convexe-concave sur $K_1 \times K_2$ c'est-à-dire : il existe deux constantes positives T_1 et T_2 telles que

$$\left.\begin{array}{c} J(v_1+w_1, v_2)-J\ (v_1, v_2) \geqq \langle D_1 J(v_1, v_2), w_1 \rangle_1 + T_1 \|w_1\|_1^2, \\ J(v_1, v_2+w_2)-J(v_1, v_2) \leqq \langle D_2 J(v_1, v_2), w_2 \rangle_2 - T_2 \|w_2\|_2^2, \\ \forall (v_1, v_2) \in K_1 \times K_2, \quad \forall (w_1, w_2) \in K_1 \times K_2. \end{array}\right\} \quad (2.2)$$

Pour tout couple (v_1, v_2) de $K_1 \times K_2$ l'application $D_2 D_1 J\ (v_1, v_2) : V_2 \to V_1'$ est indépendante de l'une des deux variables. Par la suite on supposera que l'on se trouve dans le cas où cette application est indépendante de la variable v_1. (2.3)

Il existe k, réel positif, tel qu'on ait :

$$\left.\begin{array}{c} \|[D_1^2 J(v_1, v_2)]^{-1}\| . \|D_2 D_1 J(v_1, v_2)\|^2 \|[D_2^2 J(v_1, v_2)]^{-1}\| \leqq k, \\ \forall (v_1, v_2) \in K_1 \times K_2. \end{array}\right\} \quad (2.4)$$

2° Pour $i=1, 2$ on considère des fonctionnelles $G_{i,j}$ $(j=1, \ldots, q_i)$ vérifiant : $G_{i,j}$ est concave et deux fois continûment différentiable sur l'ensemble K_i. (2.5.)

On suppose alors l'ensemble K_i défini de la manière suivante :

$$K_i=\{v_i \in V_i/G_{i,j}(v_i) \geqq 0, j=1, \ldots, q_i\} \tag{2.6}$$

et tel que

$$\mathring{K}_i=\{v_i \in V_i/G_{i,j}(v_i)>0, j=1, \ldots, q_i\} \tag{2.7}$$

est un ensemble non vide.

REMARQUE 2.1 : Les hypothèses (2.1) et (2.2) impliquent que, pour $i=1, 2$, et pour tout couple (v_1, v_2) de $K_1 \times K_2$, les opérateurs $D_i^2 J(v_1, v_2)$ sont des homéomorphismes linéaires de V_i sur V_i'.

REMARQUE 2.2 : L'hypothèse (2.3) est notamment vérifiée dans le cas suivant :

$$J(v_1, v_2)=J_1(v_1)+J_2(v_2)+b(v_2, v_1),$$

où J_1 (respectivement J_2) est une fonctionnelle deux fois continûment différentiable sur K_1 (resp. K_2) et b est une fonctionnelle linéaire continue par rapport à l'une des variables et continûment différentiable par rapport à l'autre.

REMARQUE 2.3 : On considère le cas d'une fonctionnelle de type quadratique, c'est-à-dire

$$J(v_1, v_2)=a_1(v_1, v_1)-a_2(v_2, v_2)+b(v_2, v_1)-L_1(v_1)+L_2(v_2),$$

où a_1 et a_2 sont des formes bilinéaires symétriques et coercives, b est une forme bilinéaire continue et L_1 et L_2 sont des formes linéaires continues. Ce cas est donc un cas particulier de celui défini dans la remarque 2.2.

Si les opérateurs A_1 et A_2 associés aux formes bilinéaires a_1 et a_2 sont inversibles alors les hypothèses (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) sont vérifiées et de plus on peut prendre

$$k=\frac{1}{4}\|A_1^{-1}\|.\|B\|^2\|A_2^{-1}\|,$$

où B est l'opérateur associé à la forme bilinéaire b.

3. DESCRIPTION DU PROCÉDÉ D'APPROXIMATION

1° Rappelons d'abord brièvement certains résultats, démontrés dans [8], que nous utiliserons par la suite.

Pour $i=1, 2$ on se donne une suite de nombres positifs r_i et une fonction positive croissante $\varepsilon_i : r_i \to \varepsilon_i(r_i)$ telle que $\varepsilon_i(r_i) \to 0$ quand $r_i \to 0$ et on pose $r=(r_1, r_2)$. On définit une fonctionnelle J_r sur $\mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2$ de la manière suivante : suivante :

$$J_r(v_1, v_2)=J(v_1, v_2)+\varepsilon_1(r_1)\sum_1^{q_1}\frac{1}{G_{1,j}(v_1)}-\varepsilon_2(r_2)\sum_1^{q_2}\frac{1}{G_{2,j}(v_2)} \tag{3.1}$$

et on introduit deux applications univoques $\Phi_r : \mathring{K}_2 \to \mathring{K}_1$ et $\alpha_r : \mathring{K}_1 \to \mathring{K}_2$ définies par

$$J_r(\Phi_r(v_2), v_2)=\inf_{v_1\in\mathring{K}_1} J_r(v_1, v_2), \tag{3.2}$$

$$J_r(v_1, \alpha_r(v_1))=\sup_{v_2\in\mathring{K}_2} J_r(v_1, v_2). \tag{3.3}$$

On considère alors le problème approché suivant :

Problème (P_r) : trouver un point de selle de J_r sur $\mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2$, c'est-à-dire un couple $(u_{1,r}, u_{2,r})\in\mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2$ tel que :

$$\left.\begin{array}{c} J_r(u_{1,r}, v_2)\leqq J_r(u_{1,r}, u_{2,r})\leqq J_r(v_1, u_{2,r}), \\ \forall (v_1, v_2)\in\mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2. \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

On démontre l'existence et l'unicité de sa solution et la convergence forte de cette solution vers la solution du problème $(\mathscr{P})$. De plus $u_{1,r}$ et $u_{2,r}$ vérifient :

$$u_{1,r}=\Phi_r(u_{2,r}) \qquad \text{et} \qquad u_{2,r}=\alpha_r(u_{1,r}), \tag{3.5}$$

$$\|u_{i,r}-u_i\|^2\leqq\frac{1}{T_i}\left[\varepsilon_1(r_1)\sum_1^{q_1}\frac{1}{G_{1,j}(u_{1,r})}+\varepsilon_2(r_2)\sum_1^{q_2}\frac{1}{G_{2,j}(u_{2,r})}\right]. \tag{3.6}$$

2° Dans cet article on introduit une nouvelle application univoque $T_{r,\beta}$: $\mathring{K}_1 \to \mathring{K}_1$ définie par

$$T_{r,\beta}=(1-\beta)(\Phi_r\circ\alpha_r)+\beta I_{V_1}, \qquad \beta\in\mathbb{R}$$

et on montre que pour certaines valeurs de β cette application est contractante (de rapport de contraction indépendant de r) ce qui permet de construire un procédé itératif de la manière suivante : on se donne une double suite $r_n=(r_{1,n}, r_{2,n})$ de nombres positifs décroissants vers zéro quand $n\to+\infty$ et une valeur arbitraire $x_{1,0}$ de $\mathring{K}_1$, on donne au paramètre β la valeur β_0 qui rend le rapport de contraction minimal et on définit une double suite $(x_{1,n}, x_{2,n})$ à partir de $x_{1,0}$ par :

$$x_{2,n}=\alpha_{r_n}(x_{1,n-1}), \tag{3.7}$$

$$x_{1,n}=(1-\beta_0)\Phi_{r_n}(x_{2,n})+\beta_0 x_{1,n-1}=T_{r_n,\beta_0}(x_{1,n-1}). \tag{3.8}$$

On démontre alors que la double suite $(x_{1,n}, x_{2,n})$ converge fortement vers la solution (u_1, u_2) du problème (P) et on établit des majorations d'erreurs.

REMARQUE 3.1 : A chaque itération on détermine $x_{2,n}$ en maximisant J_{r_n} par rapport à une variable et $\Phi_{r_n}(x_{2,n})$ en minimisant par rapport à l'autre. La détermination de $x_{1,n}$ et $x_{2,n}$ conduit donc à la résolution de deux problèmes d'optimisation.

REMARQUE 3.2 : Si dans l'hypothèse (2.3) on suppose que l'application $D_2 D_1 J(v_1, v_2)$ de V_2 dans V_1' est indépendante de v_2 (au lieu de l'être de v_1) on peut remplacer l'algorithme défini par (3.7) et (3.8) par un algorithme analogue faisant intervenir l'application $\alpha_r \circ \Phi_r$ au lieu de l'application $\Phi_r \circ \alpha_r$:

$$x_{1,n} = \Phi_{r_n}(x_{2,n-1}), \tag{3.9}$$

$$x_{2,n} = (1-\beta_0)\,\alpha_{r_n}(x_{1,n}) + \beta_0 x_{2,n-1}. \tag{3.10}$$

REMARQUE 3.3 : Pour déterminer un point de départ du procédé, c'est-à-dire un élément $x_{1,0}$ de $\mathring{K}_1$ on peut utiliser la méthode indiquée par A. V. Fiacco dans [3], après discrétisation.

La démonstration de la convergence du procédé exige la connaissance de résultats préliminaires que nous présentons sous forme de propositions dans le paragraphe suivant.

4. PÉNALISATION INTERNE ET OPTIMISATION

Étudions les propriétés de l'application $\Phi_r \circ \alpha_r : \mathring{K}_1 \to \mathring{K}_1$.

PROPOSITION 4.1. — *L'application $\Phi_r \circ \alpha_r$ (respectivement $\alpha_r \circ \Phi_r$) admet l'élément $u_{1,r}$ (resp. $u_{2,r}$), solution du problème (P_r), comme unique point fixe sur $\mathring{K}_1$ (resp. $\mathring{K}_2$) pour tout r positif.*

Démonstration : D'après (3.5) on a

$$(\Phi_r \circ \alpha_r)(u_{1,r}) = u_{1,r} \qquad \text{et} \qquad (\alpha_r \circ \Phi_r)(u_{2,r}) = u_{2,r},$$

par suite $u_{1,r}$ (resp. $u_{2,r}$) est point fixe de $\Phi_r \circ \alpha_r$ (resp. de $\alpha_r \circ \Phi_r$). Montrons l'unicité de ce point fixe. Supposons pour cela qu'il existe un autre point fixe $\bar{u}_{1,r}$ de $\Phi_r \circ \alpha_r$ sur $\mathring{K}_1$, distinct de $u_{1,r}$. Posons $\bar{u}_{2,r} = \alpha_r(\bar{u}_{1,r})$. On a $\Phi_r(\bar{u}_{2,r}) = \bar{u}_{1,r}$. Par suite

$$J_r(\bar{u}_{1,r}, \bar{u}_{2,r}) = \inf_{v_1 \in \mathring{K}_1} J_r(v_1, \bar{u}_{2,r}) = \sup_{v_2 \in \mathring{K}_2} J_r(\bar{u}_{1,r}, v_2)$$

et $(\bar{u}_{1,r}, \bar{u}_{2,r})$, est donc un point de selle de J_r sur $\mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2$. Le point de selle de J_r sur $\mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2$ étant unique on en déduit le résultat énoncé.

PROPOSITION 4.2 : *L'application* $(-\Phi_r \circ \alpha_r) : \mathring{K}_1 \to \mathring{K}_1$ *est différentiable et monotone pour tout r positif, c'est-à-dire : pour tout couple*

$$(v_1, w_1) \in \mathring{K}_1 \times \mathring{K}_1 \, ((\Phi_r \circ \alpha_r)(v_1) - (\Phi_r \circ \alpha_r)(w_1), v_1 - w_1)_1 \leqq 0.$$

Démonstration : En utilisant le fait que les éléments $\Phi_r(v_2)$ et $\alpha_r(v_1)$ vérifient :

$$D_1 J_r(\Phi_r(v_2), v_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad D_2 J_r(v_1, \alpha_r(v_1)) = 0$$

et en appliquant le théorème des fonctions implicites on montre que $\Phi_r \circ \alpha_r$ est différentiable sur $\mathring{K}_1$ et de plus, pour tout $v_1 \in \mathring{K}_1$ on a

$$\begin{aligned}[D(\Phi_r \circ \alpha_r)](v_1) = [D_1^2 J_r((\Phi_r \circ \alpha_r)(v_1), \alpha_r(v_1))]^{-1} \\ \circ [D_2 D_1 J_r((\Phi_r \circ \alpha_r)(v_1), \alpha_r(v_1))] \circ [D_2^2 J_r(v_1, \alpha_r(v_1))]^{-1} \\ \circ [D_1 D_2 J_r(v_1, \alpha_r(v_1))]. \quad (4.1)\end{aligned}$$

Démontrons maintenant la monotonie.

En appliquant les règles de dérivation à la fonctionnelle J_r définie par (3.1) on obtient :

$$D_1^2 J_r(v_1, v_2) = D_1^2 J(v_1, v_2) + \varepsilon_1(r_1) \sum_1^{q_1} D^2\left(\frac{1}{G_{1,j}}\right)(v_1), \tag{4.2}$$

$$D_2^2 J_r(v_1, v_2) = D_2^2 J(v_1, v_2) - \varepsilon_2(r_2) \sum_1^{q_2} D^2\left(\frac{1}{G_{2,j}}\right)(v_2), \tag{4.3}$$

$$D_1 D_2 J_r(v_1, v_2) = D_1 D_2 J(v_1, v_2). \tag{4.4}$$

Pour $i = 1, 2$ appelons U_i l'isomorphisme canonique de V_i sur V_i' défini par

$$(v_i, w_i)_i = U_i(w_i) . v_i = \langle U_i(w_i), v_i \rangle_i .$$

Soit V un espace de Hilbert. On rappelle qu'un opérateur symétrique de $\mathscr{L}(V, V)$ est dit positif si $(Av, v)_V \geqq 0$ pour tout $v \in V$ et négatif si $(Av, v)_V \leqq 0$ pour tout $v \in V$.

D'après les hypothèses (2.1) et (2.2) l'opérateur $U_1^{-1} \circ D_1^2 J\ (v_1, v_2)$ de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$ [resp. l'opérateur $U_2^{-1} \circ D_2^2 J(v_1, v_2)$ de $\mathscr{L}(V_2, V_2)$] est donc positif (resp. négatif) pour tout couple $(v_1, v_2) \in \mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2$. De plus on sait que si A est un opérateur positif de $\mathscr{L}(V, V)$ alors l'opérateur $A + \lambda I_V$ est positif inversible et tel que

$$\|(A + \lambda I_V)^{-1}\|^{-1}_{\mathscr{L}(V, V)} \geqq \lambda \quad [9] \qquad \text{pour} \quad \lambda > 0.$$

On peut donc en déduire que pour tout couple (v_1, v_2) de $\mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2$ l'opérateur $U_1^{-1} \circ D_1^2 J_r(v_1, v_2)$ de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$ [resp. l'opérateur $U_2^{-1} \circ D_2^2 J_r(v_1, v_2)$ de $\mathscr{L}(V_2, V_2)$] est positif et inversible (resp. négatif et inversible) et de plus

$$\| [D_1^2 J_r(v_1, v_2)]^{-1} \|_{\mathscr{L}(V_1', V_1)} \leqq \| [D_1^2 J(v_1, v_2)]^{-1} \|_{\mathscr{L}(V_1', V_1)}, \tag{4.5}$$

$$\| [D_2^2 J_r(v_1, v_2)]^{-1} \|_{\mathscr{L}(V_2', V_2)} \leqq \| [D_2^2 J(v_1, v_2)]^{-1} \|_{\mathscr{L}(V_2', V_2)}. \tag{4.6}$$

Dans le but d'achever la démonstration de la proposition démontrons maintenant le lemme suivant :

LEMME 4.1 : *Si l'homéomorphisme linéaire A_1 de V_1 sur V_1' (resp. l'homéomorphisme linéaire A_2 de V_2 sur V_2') est tel que l'opérateur $U_1^{-1} \circ A_1$ de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$ [resp. l'opérateur $U_2^{-1} \circ A_2$ de $\mathscr{L}(V_2, V_2)$] est symétrique positif (resp. symétrique négatif) et si l'application B appartient à $\mathscr{L}(V_1, V_2')$ alors l'opérateur $A_1^{-1} \circ {}^tB \circ A_2^{-1} \circ B$ de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$ (ou ${}^tB$ est l'application transposée de B) est symétrique négatif.*

Démonstration : En effet l'opérateur $A_2^{-1} \circ U_2$ de $\mathscr{L}(V_2, V_2)$ [resp. l'opérateur $C_1 = A_1^{-1} \circ U_1$ de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$] étant symétrique négatif (resp. symétrique positif) on peut vérifier que l'opérateur $C_2 = U_1^{-1} \circ {}^tB \circ A_2^{-1} \circ B$ est symétrique négatif et que les opérateurs C_1 et C_2 commutent. Le produit $A_1^{-1} \circ {}^tB \circ A_2^{-1} \circ B$ des opérateurs C_1 et C_2 est donc un opérateur symétrique négatif de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$.

C Q F D

Pour utiliser ce lemme on pose

$$A_1 = D_1^2 J_r((\Phi_r \circ \alpha_r)(v_1), \alpha_r(v_1)), \qquad A_2 = D_2^2 J_r(v_1, \alpha_r(v_1))$$

et

$$B = D_1 D_2 J_r(v_1, \alpha_r(v_1)).$$

Ces opérateurs vérifient les hypothèses du lemme 4.1 ce qui permet d'en déduire que, pour tout v_1 de $\mathring{K}_1$, $D(\Phi_r \circ \alpha_r)(v_1)$ est un opérateur symétrique négatif de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$. On a alors, pour tout couple (v_1, w_1) de K_1^2 :

$$((\Phi_r \circ \alpha_r)(v_1) - (\Phi_r \circ \alpha_r)(w_1), v_1 - w_1)_1 = (D(\Phi_r \circ \alpha_r)(t_1) . \Psi_1, \Psi_1), \tag{4.7}$$

avec $t_1 \in \check{K}_1$ et $\Psi_1 = v_1 - w_1 \in V_1$ d'où le résultat énoncé.

PROPOSITION 4.3 : *L'application $\Phi_r \circ \alpha_r$ est lipchitzienne de rapport k sur $\mathring{K}_1$ ou encore*

$$\| (\Phi_r \circ \alpha_r)(v_1) - (\Phi_r \circ \alpha_r)(w_1) \|_1 \leqq k \| v_1 - w_1 \|_1, \qquad \forall (v_1, w_1) \in \mathring{K}_1^2.$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser (4.1), (4.4), (4.5), (4.6) et (2.4).

REMARQUE 4.1 : La démonstration des propositions 4.1, 4.2 et 4.3 reste valable dans le cas où l'hypothèse (2.2) de forte convexe-concavité de la fonctionnelle J est remplacée par l'hypothèse suivante :

J est strictement convexe-concave sur $K_1 \times K_2$,

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\|v_1\| \to +\infty \\ v_1 \in K_1}} J(v_1, v_2) = +\infty, & \forall v_2 \in K_2, \\ \lim\limits_{\substack{\|v_2\| \to +\infty \\ v_2 \in K_2}} J(v_1, v_2) = -\infty, & \forall v_1 \in K_1. \end{cases}$$

L'hypothèse de forte convexe-concavité [qui assure la convergence forte de la solution du problème (P_r) vers la solution du problème (P)] nous permet de démontrer de plus que l'application $(-\Phi_r \circ \alpha_r)$ est non seulement monotone mais également fortement monotone, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive α, appellée constante de coercivité, telle que, pour tout couple $(v_1, w_1) \in \mathring{K}_1 \times \mathring{K}_1$ on ait

$$-((\Phi_r \circ \alpha_r)(v_1) - (\Phi_r \circ \alpha_r)(w_1), v_1 - w_1)_1 \geqq \alpha \|v_1 - w_1\|_1^2. \tag{4.8}$$

si on suppose de plus :

$$\| v_2^{-1} \circ D_1 D_2 J(v_1, v_2).t_1 \|_2^2 \geqq T \|t_1\|_1^2, \qquad \forall t_1 \in V_1.$$

PROPOSITION 4.4 : *L'application $(-\Phi_r \circ \alpha_r)$ est fortement monotone sur $\mathring{K}_1$ et a pour constante de coercivité $\alpha = 4\,T_1\,T_2\,T/M_1^2\,M_2^2$, T_i étant défini par (2.2) et M_i étant un majorant de $\|D_i^2 J(V_1, V_2)\|$ pour $i = 1, 2$.*

Démonstration : J étant fortement convexe-concave sur $K_1 \times K_2$ d'après [1] on a

$$\langle D_1^2 J(v_1, v_2)(w_1 - v_1), (w_1 - v_1) \rangle_1 \geqq 2\,T_1 \|w_1 - v_1\|_1^2,$$
$$\forall (v_1, v_2) \in K_1 \times K_2, \quad \forall w_1 \in K_1,$$
$$-\langle D_2^2 J(v_1, v_2)(w_2 - v_2), w_2 - v_2 \rangle_2 \geqq 2\,T_2 \|w_2 - v_2\|_2^2,$$
$$\forall (v_1, v_2) \in K_1 \times K_2, \quad \forall w_2 \in K_2.$$

Pour tout $(v_1, v_2) \in \mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2$ on montre alors que

$$\langle D_1^2 J(v_1, v_2).t_1, t_1 \rangle_1 \geqq 2\,T_1 \|t_1\|_1^2, \qquad \forall t_1 \in V_1,$$
$$-\langle D_2^2 J(v_1, v_2).t_2, t_2 \rangle_2 \geqq 2\,T_2 \|t_2\|_2^2, \qquad \forall t_2 \in V_2.$$

On peut en déduire que, pour tout couple $(v_1, v_2) \in \mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2$, l'opérateur $[D_1^2 J(v_1, v_2)]^{-1} \circ U_1$ de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$ est coercif de constante de coercivité $2\,T_1/M_1^2$, c'est-à-dire :

$$(([D_1^2 J(v_1, v_2)]^{-1} \circ U_1).t_1, t_1)_1 \geqq 2\,T_1 \|t_1\|_1^2/M_1^2, \qquad \forall t_1 \in V_1.$$

De même l'opérateur

$$[-U_1^{-1}]\circ[D_2 D_1 J(v_1, v_2)]\circ[D_2^2 J(v_1, v_2)]^{-1}\circ[D_1 D_2 J(v_1, v_2)]$$

de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$ est coercif de constante de coercivité $2\,T_2\,T/M_2^2$.

Posons

$$[D_1^2 J((\Phi_r\circ\alpha_r)(v_1), \alpha_r(v_1))]^{-1}\circ U_1 = C_1(v_1),$$

$$[-U_1^{-1}]\circ[D_2 D_1 J((\Phi_r\circ\alpha_r)(v_1), \alpha_r(v_1))]$$
$$\circ[D_2^2 J(v_1, \alpha_r(v_1))]^{-1}\circ[D_1 D_2 J(v_1, \alpha_r(v_1))] = C_2(v_1)$$

et

$$C(v_1) = C_1(v_1).C_2(v_1).$$

On vient de voir que les opérateurs $C_1(v_1)$ et $C_2(v_1)$ de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$ sont coercifs pour tout v_1 de $\mathring{K}_1$ et on sait que ces deux opérateurs commutent (démonstration de la proposition 4.2). Montrons maintenant que leur produit $C(v_1)$ est également coercif.

En effet l'opérateur $C_2(v_1)$ étant positif il existe un unique opérateur positif $B_2(v_1)$ de $\mathscr{L}(V_1, V_1)$ tel que $B_2^2(v_1) = C_2(v_1)$ [10]. De plus cet opérateur commute avec tout opérateur commutant avec $C_2(v_1)$ donc en particulier avec $C_1(v_1)$. Par suite

$$\begin{aligned}(C_1(v_1)C_2(v_1)t_1, t_1)_1 &= (C_1(v_1)B_2(v_1)B_2(v_1)t_1, t_1)_1\\ &= (B_2(v_1)C_1(v_1)B_2(v_1)t_1, t_1)\\ &= (C_1(v_1)B_2(v_1)t_1, B_2(v_1)t_1) \geqq 2\,T_1\,\|B_2(v_1)t_1\|_1^2/M_1^2.\end{aligned}$$

Mais

$$\|B_2(v_1)t_1\|_1^2 = (B_2(v_1)t_1, B_2(v_1)t_1) = (C_2(v_1)t_1, t_1) \geqq 2\,T_2\,\|t_1\|_1^2\,T/M_2^2$$

ce qui nous permet d'en déduire que l'opérateur $C(v_1)$ est coercif de constante de coercivité $4\,T_1\,T_2\,T/M_1^2\,M_2^2 = \alpha$.

De plus d'après (4.2), (4.3) et (4.4) :

$$-(D(\Phi_r\circ\alpha_r)(v_1).t_1, t_1) \geqq (C(v_1)t_1, t_1), \qquad \forall v_1\in\mathring{K}_1, \quad \forall t_1\in V_1,$$

donc $D(\Phi_r\circ\alpha_r)(v_1)$ est un opérateur coercif de constante de coercivité α, d'où le résultat énoncé.

Afin de rendre évident le théorème 4.1 démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 4.2 : *Soit K un convexe fermé d'un espace de Hilbert réel V et f une application univoque de $\mathring{K}$ dans $\mathring{K}$, lipchitzienne de rapport k, d'opposée $(-f)$*

fortement monotone (de rapport de coercivité γ) et admettant $\bar{x}$ pour unique point fixe sur $\mathring{K}$. Alors l'application $g_\beta : \mathring{K} \to \mathring{K}$ définie par

$$g_\beta = (1-\beta) f + \beta I_V, \qquad \beta \in \mathbb{R},$$

admet $\bar{x}$ pour unique point fixe sur $\mathring{K}$, est contractante (c'est-à-dire lipchitzienne de rapport inférieur à 1) si le paramètre β appartient à l'ensemble $I_{k,\gamma}$ défini par

$$I_{k,\gamma} = \left]\max\left(0, \frac{k^2-1}{k^2+2\gamma+1}\right), 1\right[\tag{4.9}$$

et a un rapport de contraction minimal si

$$\beta = \beta_{\text{opt}} = \frac{k^2+\gamma}{k^2+2\gamma+1}.$$

Démonstration : On vérifie aisément que l'élément $\bar{x}$ est un point fixe de g_β et qu'il en est l'unique point fixe sur $\mathring{K}$.

Montrons maintenant que g_β est lipchitzienne. On a

$$\|g_\beta(u) - g_\beta(v)\|_V^2 = \beta^2 \|u-v\|_V^2 + (1-\beta)^2 \|f(u) - f(v)\|_V^2 + 2\beta(1-\beta)\,(f(u) - f(v), u-v)_V.$$

Pour $\beta \in]0, 1[$;

$$2\beta(1-\beta)\,(f(u)-f(v), u-v)_V \leqq -2\beta(1-\beta)\gamma\|u-v\|_V^2.$$

Par suite

$$\|g_\beta(u) - g_\beta(v)\|_V^2 \leqq (\beta^2(1+k^2+2\gamma) - 2\beta(k^2+\gamma) + k^2)\|u-v\|_V^2.$$

Posons

$$[\theta(\beta)]^2 = \beta^2(1+k^2+2\gamma) - 2\beta(k^2+\gamma) + k^2.$$

Si $\beta \in]0, 1[$ l'application g_β est donc lipchitzienne de rapport $\theta(\beta)$ et sera contractante si $\theta(\beta) < 1$ ce qui est vérifié si β appartient à l'intervalle $I_{k,\gamma}$ défini par (4.9).

De plus on peut montrer facilement que $\theta(\beta)$ est minimal pour

$$\beta = \beta_{\text{opt}} = \frac{k^2+\gamma}{k^2+2\gamma+1}$$

et dans ce cas

$$[\theta(\beta)]^2 = \frac{k^2-\gamma^2}{k^2+2\gamma+1}.$$

THÉORÈME 4.1 : *Soit* β *appartenant à* $\mathbb{R}$. *On considère l'application* $T_{r,\beta} : \mathring{K}_1 \to \mathring{K}_1$ *définie par*

$$T_{r,\beta}=(1-\beta)(\Phi_r \circ \alpha_r)+\beta I_V \tag{4.10}$$

et on pose $\gamma=4\,T_1\,T_2\,T/M_1^2\,M_2^2$.

L'application $T_{r,\beta}$ *admet l'élément* $(u_{1,r})$ *défini par* (3.4) *pour unique point fixe sur* $\mathring{K}_1$ *et est contractante quand* β *appartient à* $I_{k,\gamma}$ *défini par* (4.9). *Le rapport de contraction* $\theta(\beta)$ *est alors minimal pour*

$$\beta=\beta_{\text{opt}}=\frac{k^2+\gamma}{k^2+2\gamma+1} \qquad et \qquad [\theta(\beta_{\text{opt}})]^2=\frac{k^2-\gamma^2}{k^2+2\gamma+1}.$$

Démonstration : L'application $\Phi_r \circ \alpha_r : \mathring{K}_1 \to \mathring{K}_1$ vérifiant les hypothèses du lemme 4.2 il suffit d'appliquer ce lemme en prenant $f=\Phi_r \circ \alpha_r$.

REMARQUE 4.2 : A toute valeur de β fixée correspond une infinité d'applications contractante $(T_{r,\beta})_{r>0}$ de même rapport de contraction, minimum lorsque $\beta=(k^2+\gamma)/(k^2+2\gamma+1)$.

5. CONVERGENCE DE L'ALGORITHME

Rappelons la méthode itérative présentée dans le paragraphe 3. Pour $i=1, 2$ on considère une suite $r_{i,n}$ de nombres positifs décroissants vers zéro quand $n \to +\infty$. On pose $r_n=(r_{1,n}, r_{2,n})$ et on note Φ_n l'application Φ_{r_n}, α_n l'application α_{r_n} et T_n l'application T_{r_n,β_0} où β_0 est une valeur fixée du paramètre β (on peut prendre par exemple $\beta_0=\beta_{\text{opt}}$). La suite $(x_{1,n}, x_{2,n})$ est donc définie, à partir d'une valeur fixée $x_{1,0}$ de $\mathring{K}_1$, par

$$x_{2,n}=\alpha_n(x_{1,n-1}), \qquad n \geqq 1, \tag{5.1}$$

$$x_{1,n}=T_n(x_{1,n-1})=(1-\beta_0)\Phi_n(x_{2,n})+\beta_0\,x_{1,n-1}. \tag{5.2}$$

PROPOSITION 5.1 : *La suite* $(x_{1,n}, x_{2,n})$ *converge fortement vers* (u_1, u_2), *solution du problème* (P), *quand* $n \to +\infty$.

Démonstration : Notons $u_{1,n}$ l'élément u_{1,r_n}, première composante du point de selle de J_{r_n}, dont on sait qu'il est l'unique point fixe de l'application T_n sur $\mathring{K}_1$. L'application T_n est contractante de rapport $\theta(\beta_0)$ donc

$$\|u_{1,n}-x_{1,n}\|=\|T_n(u_{1,n})-T_n(x_{1,n-1})\| \leqq \theta(\beta_0)\|u_{1,n}-x_{1,n-1}\|.$$

Mais

$$\|u_{1,n}-x_{1,n-1}\| \leqq \|u_{1,n}-u_{1,n-1}\|+\|u_{1,n-1}-x_{1,n-1}\|,$$

donc en posant

$$e_n = \|u_{1,n} - u_{1,n-1}\| \quad \text{et} \quad f_n = \|u_{1,n} - x_{1,n}\|,$$

on obtient :

$$f_n \leqq \theta(\beta_0) e_n + \theta(\beta_0) f_{n-1},$$

et par suite

$$0 \leqq f_n \leqq [\theta(\beta_0)]^n f_0 + \sum_{k=1}^{n} e_k [\theta(\beta_0)]^{n+1-k}. \tag{5.3}$$

On sait que la suite $u_{1,n}$ converge fortement vers u_1 quand $n \to +\infty$ (paragraphe 3.1) donc la suite $e_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. De plus $\theta(\beta_0) \in]0, 1[$ donc en utilisant le lemme de Toeplitz [7] on en déduit que f_n tend vers zéro quand $n \to +\infty$ et donc que $\|u_1 - x_{1,n}\|$ tend lui aussi vers zéro quand $n + +\infty$.

On vérifie alors aisément que $\|u_2 - x_{2,n}\|$ tend vers zéro quand $n + \to \infty$.

Remarque 5.1 : On peut montrer qu'il y a également convergence forte du processus quand on effectue à chaque étape plusieurs itérations ce qui doit permettre dans certains cas d'améliorer la vitesse de convergence.

6. APPROXIMATION NUMÉRIQUES : ITÉRATIONS APPROCHÉES

Du point de vue pratique, appliquer l'algorithme ci-dessus conduit à la recherche, à chaque étape, d'un maximum et d'un minimum. Quelle que soit la méthode d'optimisation utilisée, elle ne donnera qu'une approximation de l'élément cherché aussi est-on conduit à étudier la convergence de la suite $(x^*_{1,n}, x^*_{2,n})$ définie à partir de $x^*_{1,0}$ par

$$x^*_{2,n} = \alpha_n(x^*_{1,n-1}) + \eta_n, \qquad n \geqq 1, \tag{6.1}$$

$$x^*_{1,n} = T_n(x^*_{1,n-1}) + \varepsilon_n, \qquad n \geqq 1, \tag{6.2}$$

où ε_n et η_n sont les erreurs commises en approchant respectivement $T_n(x^*_{1,n-1})$ et $\alpha_n(x^*_{1,n-1})$ à l'aide d'une méthode classique d'optimisation.

Proposition 6.1 : *Si* $\|\varepsilon_n\| \to 0$ *et* $\|\eta_n\| \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *alors la suite* $(x^*_{1,n}, x^*_{2,n})$ *définie par* (6.1) *et* (6.2) *converge fortement vers* (u_1, u_2) *quand* $n \to +\infty$.

Démonstration : Il suffit de montrer que $\|x^*_{1,n} - x_{1,n}\| \to 0$ quand $n + +\infty$. On a

$$\|x^*_{1,n} - x_{1,n}\| \leqq \theta(\beta_0) \|x^*_{1,n-1} - x_{1,n-1}\| + \|\varepsilon_n\|.$$

En posant

$$E_n = \| x_{1,n}^* - x_{1,n} \|$$

on obtient :

$$E_n \leqq \theta(\beta_0) E_{n-1} + \| \varepsilon_n \|$$

et par suite

$$E_n \leqq [\theta(\beta_0)]^n E_0 + \sum_{k=1}^{n} [\theta(\beta_0)]^{n-k} \| \varepsilon_k \|.$$

En utilisant à nouveau le lemme de Toeplitz on en déduit le résultat énoncé.

7. MAJORATION D'ERREUR

Supposons que l'ensemble K_1 est borné. Dans le cas où l'ensemble K_2 et non l'ensemble K_1 est borné il suffit, ~~de considérer~~ l'algorithme défini par (3.9) et (3.10).

Posons

$$a_n^2 = \frac{1}{T_1} \left[\varepsilon_1(r_{1,n}) \sum_1^{q_1} \frac{1}{G_{1,j}(u_{1,n})} + \varepsilon_2(r_{2,n}) \sum_1^{q_2} \frac{1}{G_{2,j}(u_{2,n})} \right].$$

D'après (3.6) on a

$$\| u_1 - u_{1,n} \| \leqq a_n \qquad \text{et} \qquad e_k = \| u_{1,k} - u_{1,k-1} \| \leqq a_k + a_{k-1}.$$

L'ensemble K_1 étant borné il existe une constante positive M_1 telle que

$$\| v_1 \| \leqq M_1, \qquad \forall v_1 \in K_1.$$

Par suite

$$\| u_{1,0} - x_{1,0} \| \leqq 2 M_1.$$

De (5.3) on peut donc déduire :

$$\| u_1 - x_{1,n} \| \leqq 2 M_1 [\theta(\beta_0)]^n + \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k-1}) [\theta(\beta_0)]^{n+1-k} + a_n. \qquad (7.1)$$

Dans le cas des itérations approchées on obtient :

$$\| u_1 - x_{1,n}^* \| \leqq 4 M_1 [\theta(\beta_0)]^n + a_n + \sum_{k=1}^{n} \theta(\beta_0)^{n-k} (\| \varepsilon_k \| + \theta(\beta_0)\,(a_k + a_{k-1})). \qquad (7.2)$$

Du point de vue numerique le second membre de (7 2) n'est pas connu rigoureusement en raison de la presence des elements $u_{1\,k}$ dont on ne connaît qu'une approximation $x_{1\,k}^{*}$

De même on etablit facilement des majorations de $\|u_2-x_{2\,n}\|$ et de $\|u_2-x_{2\,n}^{*}\|$

BIBLIOGRAPHIE

1 A AUSLENDER, *Problemes de minimax via l analyse convexe et les inegalites variationnelles Theorie et algorithmes*, n° 77, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, 1972

2 Y CHERRUAULT, *Une methode directe de minimisation et applications*, R I R O , vol 10, 1968, p 31-52

3 A V FIACCO, *Comments on the paper of C Caroll*, Operations Reseach, vol 9, n° 2, mars-avril 1961, p 184-185

4 A V FIACCO et G P MCCORMICK, *The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Non linear Programming, a Primal dual Method*, Managment Science, vol 10, n° 2, 1964, p 360-366

5 A V FIACCO et G P MCCORMICK, *Non Linear Programming Sequential Unconstrained Minimization Technique*, Wiley, New York, 1970

6 J MORGAN-SCIARRINO, *Approximation interne de problemes de point de selle avec contraintes*, Boll Un Mat Ital , (5), vol 15-B, n° 1, 1978, p 147-160

7 J M ORTEGA et W C REINBOLDT, *Iterative Solutions of Non Linear Equations in Several Variables*, Academic Press, 1970

8 H SASAI, *An Interior Penalty Method for Minimax Problems with Constraints*, S I A M Control, vol 12, n° 4, 1974, p 643-649

9 L SCHWARTZ *Cours d analyse* Hermann Paris 1967

10 A C ZAANEN *Linear Analysis* North-Holland Amsterdam 1956