

J.-C. PAUMIER

**Solutions stables d'un problème simplifié  
de coque élastique**

*RAIRO. Analyse numérique*, tome 12, n° 3 (1978), p. 283-295

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1978\\_\\_12\\_3\\_283\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_3_283_0)

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SOLUTIONS STABLES D'UN PROBLÈME SIMPLIFIÉ DE COQUE ÉLASTIQUE (\*)

par J.-C. PAUMIER <sup>(1)</sup>

Communiqué par P G CIARLET

Résumé — Dans cet article on étudie en théorie non linéaire des coques élastiques minces le déplacement d'une coque cylindrique à base circulaire soumise à une pression externe et uniforme. Le problème bidimensionnel est simplifié en un problème monodimensionnel grâce à la forme particulière de la coque. Avec la formulation variationnelle on montre que, sous certaines conditions, le problème de l'équilibre stable possède (au moins) autant de solutions que le problème correspondant à pression nulle.

Avec la méthode des éléments finis on montre que le problème en dimension finie conserve la même propriété et on donne les estimations d'erreur habituelles.

Cet article résume les résultats de Paumier [1] et on donne la généralisation de la méthode au cas d'un autre modèle non linéaire en partant du même problème simplifié.

### 1. MISE EN FORME DES PROBLÈMES

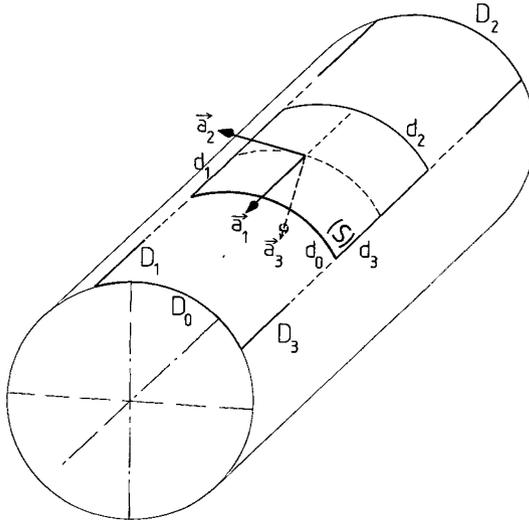
On considère la partie de cylindre droit à base circulaire limitée par deux segments de génératrices  $D_1$  et  $D_3$  et deux arcs de cercles parallèles  $D_0$  et  $D_2$  (voir fig.). Cette surface est la surface moyenne d'une coque élastique mince d'épaisseur constante  $h$ , homogène et isotrope dont on se propose d'étudier les déplacements de certains de ses points lorsqu'elle est soumise à une pression constante et uniformément répartie sur toute sa face extérieure et quand chacun de ses bords (correspondants aux segments  $D_1$  et  $D_3$ ) est ancré ou bien simplement supporté. On suppose que la longueur  $L$  du segment  $D_1$  est grande devant la longueur  $b-a$  de l'arc de cercle  $D_0$  et on restreint l'étude des déplacements des points de la coque à ceux des points de la portion de coque ( $C$ ) qui est située en son milieu et dont la surface moyenne ( $S$ ) est limitée par les arcs de cercles parallèles  $d_0$  et  $d_2$  et par les segments  $d_1 \subset D_1$  et  $d_3 \subset D_3$ . On suppose que la longueur  $l$  du segment  $d_1$  est petite devant  $L$ .

$(x^1, x^2)$  désigne le système de coordonnées curvilignes de la surface ( $S$ ) dont les génératrices sont les segments :  $x^2 = \text{Cte}$ ,  $-l/2 \leq x^1 \leq l/2$ , et les arcs de cercles parallèles :  $x^1 = \text{Cte}$ ,  $a \leq x^2 \leq b$ . En chaque point de cette surface on définit les

(\*) Reçu septembre 1977

<sup>(1)</sup> Département de Mathématiques, Université de Rouen, Mont-Saint-Aignan

vecteurs orthonormés  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  tangents aux lignes coordonnées et  $\vec{a}_3$  la normale unitaire à la surface (S) telle que le repère local  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  soit direct.  $1/c = R$  désigne le rayon du cylindre avec  $b - a < 2\pi R$ .



Figure

Nous utilisons la modélisation des coques minces développée par Koiter [2] dans laquelle on étudie le champ  $\vec{u}$  des déplacements de la surface moyenne de la coque. Compte tenu des deux hypothèses  $L \gg b - a$  et  $L \gg l$ , du fait que la pression est constante et uniformément répartie sur la face extérieure de la coque et que la coque est ancrée ou simplement supportée suivant  $D_1$  et  $D_3$ , on peut raisonnablement supposer que chaque segment de génératrice ( $d$ ) de la surface (S) va subir approximativement un déplacement de translation orthogonale à  $\vec{a}_1$  et que la fibre élastique ayant ( $d$ ) pour axe et  $h$  pour diamètre ne va subir approximativement aucune extension axiale. Ce qui nous amène à chercher le déplacement  $\vec{u}$  sous la forme  $\vec{u} = u_1 \vec{a}_2 + u_2 \vec{a}_3$  où  $u_1$  et  $u_2$  sont deux fonctions scalaires de  $x^2$  seulement devant vérifier l'un des trois types de conditions limites

$$u_1(a) = u_1(b) = u_2(a) = u_2(b) = 0 \quad (1)$$

(coque simplement supportée suivant  $D_1$  et  $D_3$ ),

$$u_1(a) = u_1(b) = u_2(a) = u_2(b) = u_2'(b) = 0 \quad (2)$$

(coque simplement supportée suivant  $D_3$  et ancrée suivant  $D_1$ ),

$$u_1(a) = u_1(b) = u_2(a) = u_2'(a) = u_2(b) = u_2'(b) = 0 \tag{3}$$

(coque ancrée suivant  $D_1$  et  $D_3$ ).

Nous introduisons différentes expressions de l'énergie de déformation

Modèle I :

$$E_1 = \frac{Ehl}{2(1-\nu^2)} \int_a^b \left[ (u_1' - cu_2)^2 + \frac{h^2}{12} (u_2'' + cu_1')^2 \right] ds, \tag{4}$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{Ehl}{2(1-\nu^2)} \int_a^b \left\{ \left[ u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2' + cu_1) \right]^2 + \frac{h^2}{12} (u_2'' + cu_1')^2 \right\} ds. \tag{5}$$

Modèle II ( $b - a \ll \pi R$ ) :

$$E_2 = \frac{Ehl}{2(1-\nu^2)} \int_a^b \left[ (u_1' - cu_2)^2 + \frac{h^2}{12} (u_2'')^2 \right] ds, \tag{6}$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{Ehl}{2(1-\nu^2)} \int_a^b \left\{ \left[ u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2'') \right]^2 + \frac{h^2}{12} (u_2'')^2 \right\} ds, \tag{7}$$

que nous utilisons sous l'hypothèse principale « faible courbure de la coque » pour le modèle II, ainsi que l'hypothèse « petits déplacements » pour les expressions (4) et (6) en théorie linéaire.

Les constantes  $E$  et  $\nu$  désignent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau composant la coque.

Les expressions (5) et (7) correspondent à deux types de théorie non linéaire donnés par Koiter [2], p. 50-51.

Les expressions (6) et (7) correspondent respectivement aux théories linéaire et non linéaire choisies dans les travaux de Rougée [3].

Dans un déplacement virtuel  $\vec{v} = v_1 \vec{a}_2 + v_2 \vec{a}_3$  compatible avec la simplification exposée ci-dessus, on calcule le travail virtuel  $T$  de la pression  $P = p Eh/(1-\nu^2)$  (intensité par unité de surface) s'exerçant normalement à la surface de la coque dans son état déformé

$$T = \frac{Ehl}{1-\nu^2} T' = Pl \int_b^a [-(cu_1 + u_2')v_1 + (1 + u_1' - cu_2)v_2] ds.$$

En appliquant le principe des travaux virtuels on obtient pour chaque modèle deux équations variationnelles, la première en théorie linéaire et la seconde en théorie non linéaire :

Modèle I :

$$\int_a^b \left[ (u_1' - cu_2)(v_1' - cv_2) + \frac{h^2}{12} (u_2'' + cu_1')(v_2'' + cv_1') \right] ds = T', \tag{8}$$

$$\int_a^b \left\{ \left[ u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2' + cu_1)^2 \right] [v_1' - cv_2 + (u_2' + cu_1)(v_2' + cv_1)] + \frac{h^2}{12}(u_2' + cu_1)(v_2' + cv_1) \right\} ds = T'. \quad (9)$$

Modèle II :

$$\int_a^b \left[ (u_1' - cu_2)(v_1' - cv_2) + \frac{h^2}{12} u_2'' v_2'' \right] ds = T', \quad (10)$$

$$\int_a^b \left[ \left( u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2')^2 \right) (v_1' - cv_2 + u_2' v_2') + \frac{h^2}{12} u_2'' v_2'' \right] ds = T'. \quad (11)$$

## 2. LES PROBLÈMES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES CONTINUS

On donne un sens aux équations (8)-(9)-(10)-(11) en choisissant  $u = (u_1, u_2)$  et  $v = (v_1, v_2)$  dans l'espace  $V_1 = H_0^1(I) \times H^2(I) \cap H_0^1(I)$  pour les conditions limites (1), dans l'espace  $V_2 = \{u \in V_1; u_2'(b) = 0\}$  pour les conditions limites (2), dans l'espace  $V_3 = H_0^1(I) \times H_0^2(I)$  pour les conditions limites (3). On a posé  $I = ]a, b[$  et  $H^m(I)$  désigne l'espace de Sobolev des fonctions de  $L^2(I)$  dont les dérivées au sens des distributions, d'ordre  $k \leq m$ , sont dans  $L^2(I)$ .  $H_0^m(I)$  désigne le sous-espace des fonctions de  $H^m(I)$  qui sont nulles en  $a$  et  $b$  ainsi que leurs dérivées d'ordre  $k \leq m-1$ . D'après le théorème d'inclusion de Sobolev si  $u_2 \in H^2(I)$  et si  $u_1 \in H^1(I)$ ,  $u_2$  est égale presque partout à une fonction de classe  $C^1$  et  $u_1$  est égale presque partout à une fonction continue; cela suffit à donner un sens aux équations (9) et (11).

Dans ce qui suit on désignera indifféremment  $V_1, V_2$  et  $V_3$  par  $V$  dans lequel on définit le produit scalaire

$$((u, v)) = \int_I u_1' v_1' ds + \int_I u_2'' v_2'' ds.$$

$V$  est un espace de Hilbert séparable pour ce produit scalaire et la norme associée :  $u \mapsto \|u\| = ((u, u))^{1/2}$  est équivalente à la norme de l'espace produit :  $u \mapsto (\|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_2^2)^{1/2}$  où

$$\|w\|_m = \left[ \sum_{k=0}^m \int_I |w^{(k)}|^2 ds \right]^{1/2}$$

Dans ce qui suit les modèles I et II sont analysés de la même manière, seuls diffèrent les calculs et les valeurs des constantes. Nous représenterons ces deux modèles par le même formalisme.

Problème (P<sup>0</sup>) désigne la version linéaire d'un des modèles [équation (8) ou (10)] et problème (P) la version non linéaire du même modèle [respectivement : équation (9) ou (10)] :

$$\begin{aligned}
 \text{(P}^0\text{)} & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) + p.d(u, v) = p.L(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \\
 \text{(P)} & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) + b(u, v) + p.d(u, v) = p.L(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

THÉORÈME 1 : Il existe un réel  $p_0 > 0$  tel que pour chaque  $p \in J_0 = ] - p_0, p_0[$  le problème variationnel linéaire (P<sup>0</sup>) possède une solution unique  $u^1$  qui appartient à  $\mathcal{C}^\infty(\bar{I}) \times \mathcal{C}^\infty(\bar{I})$  et qui vérifie, par exemple dans le cas « modèle II + conditions limites (1) » :  $u_2^{1''}(a) = u_2^{1''}(b) = 0$ .

Démonstration : On applique le théorème de Lax-Milgram en montrant tout d'abord qu'il existe une constante réelle  $\alpha_0 > 0$  telle que  $a(u, u) \geq \alpha_0 \|u\|^2$ ,  $\forall u \in V$ ; et ensuite qu'il existe une fonction réelle  $\alpha$  définie et continue sur  $J_0$  telle que pour tout  $p \in J_0$  :  $0 < \alpha(p) \leq \alpha_0$

$$a(u, u) + p.d(u, u) \geq \alpha(p) \|u\|^2, \quad \forall u \in V.$$

Pour ce dernier point on se sert de la continuité de la forme bilinéaire  $d(\cdot, \cdot)$ . Pour le premier point, existence de  $\alpha_0$ , le cas du modèle II se déduit des équivalences de normes dans  $H_0^1(I)$  et  $H_0^1(I) \cap H^2(I)$ , tandis que le cas du modèle I se déduit des résultats de Ciarlet [4] car il faut signaler la ressemblance formelle qu'il y a entre les équations issues de la modélisation des arcs circulaires et les équations que nous utilisons ici.

On interprète ensuite le problème résolu au sens des distributions et on en déduit le résultat de régularité de la solution  $u^1$  (voir par exemple Schwartz [5], p. 130-131) ainsi que les conditions limites éventuelles. ■

Pour montrer l'existence de solutions mécaniquement stables au problème variationnel non linéaire (P) on a utilisé le théorème de Newton-Kantorovitch (voir appendice) qui présente l'avantage pratique de fournir un algorithme utilisable pour l'approche numérique de ces solutions. Ce théorème permet, dans certaines conditions, de montrer l'existence de plusieurs solutions au problème (P) lorsque  $|p|$  est assez petit, chacune de ces solutions étant voisine d'une solution  $u^0$  du problème (R) [problème (P) où  $p=0$ ] vérifiant une condition de stabilité mécanique (S) :

$$\text{(R)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 \in V \text{ tel que} \\ a(u^0, v) + b(u^0, v) = 0, \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \beta_0 > 0 \text{ tel que} \\ a(v, v) + \langle \partial_1 b(u^0, v), v \rangle \geq \beta_0 \|v\|^2, \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

$\partial_1 b(u^0, v)$  désigne la dérivée au sens de Fréchet en  $u^0$  de l'application  $u \mapsto b(u, v)$ .  $\|\cdot\|^*$  désignera la norme standard de l'espace  $V'$  dual de l'espace  $V$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit entre  $V'$  et  $V$ .

Naturellement  $u^0 = 0$  est solution du problème (R) et vérifie la condition (S) avec  $\beta_0 = \alpha_0$ . Mais on peut, dans le cas du modèle II + conditions limites (1), déterminer des solutions du problème (R) qui ne sont pas identiquement nulles. Les résultats numériques obtenus dans Paumier [1] corroborent cette idée de recherche de plusieurs solutions puisque dans certains cas on obtient deux solutions approchées distinctes au problème (P).

Par le calcul et en utilisant le fait qu'il y a injection continue de  $H^1(I)$  dans  $L^4(I)$ , on met en évidence quelques propriétés de l'application  $b(\cdot, \cdot)$  :

$B \subset V$  désigne la boule ouverte de centre  $u^0$  arbitraire et de rayon  $R > 0$ ;

LEMME 1 : Il existe deux constantes positives  $k$  et  $l$  telles que :

$$\left. \begin{array}{l} \|\partial_1 b(u, v) - \partial_1 b(\tilde{u}, v)\|^* \leq [k(R + \|u^0\|) + l] \|u - \tilde{u}\| \cdot \|v\|, \\ \forall v \in V, \quad \forall u, \tilde{u} \in B; \end{array} \right\} (12)$$

Ces deux constantes ne dépendent pas de  $u^0$  et de  $R$ . On pose  $K = k(R + \|u^0\|) + l$ .

Pour tout  $u \in V$ , il existe une application continue et croissante  $\varphi_u$  de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, +\infty[$  telle que

$$|b(u+w, v) - b(u, v)| \leq \|v\| \cdot \|w\| \varphi_u(\|w\|), \quad \forall v, w \in V. \quad (13)$$

THÉORÈME 2 : Soit  $u^0$  une solution du problème (R) vérifiant la condition (S). Alors il existe un réel  $p_1 > 0$  tel que pour chaque  $p \in J_1 = ]-p_1, p_1[$ , le problème (P) admet une solution mécaniquement stable  $u^*(p)$  qui est unique dans une certaine boule ouverte  $Q$  de l'espace  $V$ , de centre  $u^0$  et de rayon  $\rho(p) > 0$ .

Démonstration : Application du théorème abstrait (th. 6) avec  $X = V$ ,  $T = a + b + p.d$  et  $f = p.L$ . Du fait que  $u^0$  vérifie la condition (S) on voit qu'il existe une application  $\beta$  définie et continue sur un certain intervalle  $\mathcal{I} = ]-q, q[$ ,  $q > 0$ , telle que  $\forall p \in \mathcal{I}$  :

$$\left. \begin{array}{l} a(v, v) + \langle \partial_1 b(u^0, v), v \rangle + p.d(v, v) \geq \beta(p) \|v\|^2, \quad \forall v \in V; \\ 0 < \beta(p) \leq \beta_0. \end{array} \right\} (14)$$

$u^0$  étant solution du problème (R), on voit que

$$\eta(p) = \frac{|p|}{\beta(p)} \|L - d(u^0, \cdot)\|^* \quad \text{et} \quad \xi(p) = \frac{1}{\beta(p)} K \cdot \eta(p),$$

vérifient la condition (iv) du théorème 6 pourvu que  $|p|$  soit assez petit,  $p \in \mathcal{I}$  et que la constante  $R$  soit fixée, indépendante de  $p$  et assez grande pour que (v) soit vérifiée; on a pris  $R = \beta_0/l$ .

Enfin on remarque que la forme  $d(\cdot, \cdot)$  est symétrique et que  $a(u, v) + b(u, v)$  dérive à une constante multiplicative près de l'expression  $\tilde{E}_1$  ou  $\tilde{E}_2$  suivant le modèle choisi (5) ou (7); par conséquent la condition 3° du théorème 6 est vérifiée et la solution  $u^*(p)$  réalise le minimum local de la fonctionnelle  $J$  ce que l'on a interprété comme résultat de stabilité mécanique de cette solution. ■

**COROLLAIRE 1 :** Si  $u^0 = 0$  le théorème 2 s'applique et  $J_1 \subset J_0$ . Pour chaque  $p \in J_0$ , la première itération de Newton nous donne l'unique solution  $u^1(p)$  du problème (P<sup>0</sup>) mais les itérations suivantes ne sont pas nécessairement définies sauf si  $p \in J_1$ .

*Démonstration :* Conformément au théorème 6 la première itération de Newton est la résolution du problème variationnel linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) + p.d(u, v) + \langle \partial_1 b(u^0, v), u \rangle \\ = p.L(v) - a(u^0, v) - p.d(u^0, v) - b(u^0, v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

On a  $\partial_1 b(0, v) = 0$  et  $b(0, v) = 0, \forall v \in V$ ; on retrouve la formulation du problème (P<sup>0</sup>). ■

### 3. PROBLÈMES APPROCHÉS

On définit l'approximation interne  $V_h$  de l'espace  $V$ . On traite par exemple le cas de l'espace  $V = V_1$ , on pose pour  $N$  entier  $\geq 2$  :

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad s_i = a + ih \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N,$$

$$I_i = [s_{i-1}, s_i] \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N.$$

$$V_{h1} = \{ v_{h1} \in C^0(\bar{I}); v_{h1}|_{I_i} \in P_1(I_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq N, v_{h1}(a) = v_{h1}(b) = 0 \},$$

$$V_{h2} = \{ v_{h2} \in C^1(\bar{I}); v_{h2}|_{I_i} \in P_3(I_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq N, v_{h2}(a) = v_{h2}(b) = 0 \},$$

où  $P_k(I_i)$  désigne l'espace des polynômes de degré  $\leq k$  définis sur l'intervalle  $I_i$  et  $C^k(\bar{I})$  l'espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur l'intervalle fermé  $\bar{I}$ .

On munit  $V_h = V_{h1} \times V_{h2}$  du produit scalaire induit par celui de  $V$ .  $V_h$  est un sous-espace de Hilbert (de dimension  $3N - 1$ ) de  $V$  et on peut exhiber une base  $\mathcal{B}$  de cet espace comme l'ensemble des fonctions

$$q_{1i} = (p_{1i}, 0), \quad q_{2i} = (0, p_{2i}) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N - 1$$

et

$$q_{3i} = (0, p_{3i}) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N;$$

où

$$p_{1i} \in V_{h1} \quad \text{avec} \quad p_{1i}(s_j) = \delta_{ij} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq N,$$

$$p_{2i} \in V_{h2} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{2i}(s_j) = \delta_{ij} \\ p'_{2i}(s_j) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq N,$$

$$p_{3i} \in V_{h2} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{3i}(s_j) = 0 \\ p'_{3i}(s_j) = \delta_{ij} \end{array} \right\} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq N,$$

$\delta_{ij}$  désignant le symbole de Kronecker.

Du fait que  $V \subset C^0(\bar{I}) \times C^1(\bar{I})$ , on définit l'opérateur d'interpolation  $r_h$  de  $V$  dans  $V_h$  par

$$r_h v = \sum_{i=1}^{N-1} (v_1(s_i) q_{1i} + v_2(s_i) q_{2i}) + \sum_{i=0}^N v'_2(s_i) q_{3i}.$$

En suivant les résultats classiques de la méthode des éléments finis (voir par exemple Ciarlet-Raviart [6]), on montre que cet opérateur est convergent

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h v - v\| = 0, \quad \forall v \in V.$$

On définit les problèmes approchées  $(P_h^0)$  et  $(P_h)$  :

$$(P_h^0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) + p.d(u_h, v_h) = p.L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

$$(P_h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) + b(u_h, v_h) + p.d(u_h, v_h) = p.L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

**THÉORÈME 3 :** Pour chaque  $p \in J_0$  le problème  $(P_h^0)$  admet une solution unique  $u_h^1$  et on a la majoration de l'erreur

$$\|u_h^1 - u^1\| \leq C_p h (|u_1^1|_2^2 + |u_2^1|_3^2)^{1/2},$$

où  $C_p$  désigne une constante indépendante de  $h$  et  $|w|_k = \|w^{(k)}\|_{L^2(I)}$ .

*Démonstration* : En écrivant que  $u_h^1$  est la projection de  $u^1$  solution du problème (P<sup>0</sup>) pour le même  $p$ , sur le sous-espace  $V_h$  de  $V$  suivant le produit scalaire  $a(\cdot, \cdot) + p.d(\cdot, \cdot)$ , on obtient une majoration du type

$$\|u_h^1 - u^1\| \leq D_p \|r_h u^1 - u^1\|$$

où  $D_p$  est une constante indépendante de  $h$ .

On utilise la régularité de la solution  $u^1$  pour obtenir, suivant les résultats classiques de la méthode des éléments finis, la majoration

$$\|r_h u^1 - u^1\| \leq E h (|u^1|_2^2 + |u^1|_3^2)^{1/2},$$

$E$  constante indépendante de  $h$ . ■

Pour la résolution du problème (P<sub>h</sub>) on utilise à nouveau le théorème abstrait 6 avec  $X = V_h$  et  $x^0 = r_h u^0$  où  $u^0$  est une solution du problème (R) vérifiant la condition (S).

**THÉORÈME 4** : Soit  $p \in J_1$ . Si  $h$  est assez petit le problème (P<sub>h</sub>) admet une solution stable  $u_h^*(p)$  qui est unique dans une certaine boule ouverte  $Q_h$  de l'espace  $V_h$  de centre  $r_h u^0$  et de rayon  $\rho^h(p) > 0$ .

*Démonstration* : On procède comme pour le théorème 2 avec  $R = \beta_0/l$ . La condition (ii) du théorème 6 se vérifie aisément en utilisant les inégalités (12) et (14) :

$$a(v_h, v_h) + p.d(v_h, v_h) + \langle \partial_1 b(r_h u^0, v_h), v_h \rangle \geq \beta^h(p) \|v_h\|^2, \quad \forall v_h \in V_h;$$

avec

$$\beta^h(p) = \beta(p) - K \|r_h u^0 - u^0\|,$$

qui est positif dès que  $h$  est assez petit.

La condition (iii) est également vérifiée à partir de l'inégalité (12) avec la constante

$$K^h = K + k \|r_h u^0 - u^0\|.$$

Pour la condition (iv), on prend

$$\frac{1}{\beta^h(p)} [ |p| ( \|L - d(u^0, \cdot)\|^* + \|d(r_h u^0 - u^0, \cdot)\|^* ) + \|a(r_h u^0, \cdot) + b(r_h u^0, \cdot)\|^* ],$$

comme valeur de  $\eta^h(p)$  et

$$\xi^h(p) = \frac{1}{\beta^h(p)} K^h \eta^h(p).$$

On a  $\lim_{h \rightarrow 0} \|d(r_h u^0 - u^0, \cdot)\|^* = 0$  et avec l'inégalité (13) on montre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|a(r_h u^0, \cdot) + b(r_h u^0, \cdot)\|^* = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{h \rightarrow 0} \xi^h(p) = \xi(p) < \frac{1}{2} \quad \text{puisque } p \in J_1.$$

Si  $h$  est assez petit on aura  $\xi^h(p) < 1/2$  et la condition (iv) sera réalisée. ■

**COROLLAIRE 2 :** Si  $u^0 = 0$ , le théorème 4 s'applique sans hypothèse particulière sur  $h$ . Pour chaque  $p \in J_0$  la première itération de Newton nous donne la solution  $u_h^1$  du problème  $(P_h^0)$  mais les itérations suivantes ne sont pas nécessairement définies sauf si  $p \in J_1$ .

*Démonstration :* Il suffit de remarquer qu'avec  $u^0 = 0$  et pour tout  $h$  on a

$$\alpha(p) = \beta(p) = \beta^h(p), \quad \eta^h(p) = \eta(p) = \frac{|p|}{\beta(p)} \|L\|^*, \quad \forall p \in J_0,$$

$$K^h = K = kR + l,$$

et que

$$\xi^h(p) = \xi(p) < \frac{1}{2}, \quad \forall p \in J_1. \quad \blacksquare$$

#### 4. CONVERGENCE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME $(P_h)$ VERS CELLE DU PROBLÈME $(P)$ :

Avec le théorème 6 les deux rayons  $\rho(p)$  et  $\rho^h(p)$  des boules  $Q$  et  $Q_h$  (th. 2 et 4) valent respectivement  $\beta(p)/K$  et  $\beta^h(p)/K^h$  puisque dans les deux cas  $R = \beta_0/l$ .

**LEMME 2 :** On a  $Q_h \subset Q$ .

*Démonstration :* Ceci résulte d'un calcul simple en tenant compte des définitions précédentes de  $\beta^h(p)$  et  $K^h$ . ■

**THÉORÈME 5 :** Soit  $p \in J_1$  et  $h$  assez petit. Alors il existe une constante  $\chi_p > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|u^*(p) - u_h^*(p)\| \leq \chi_p \|u^*(p) - r_h u^*(p)\|.$$

On en déduit que  $u_h^*(p)$  tend vers  $u^*(p)$  dans  $V$ -fort lorsque  $h$  tend vers zéro.

*Démonstration :* Puisque  $u_h^*(p) = u_h$  et  $u^*(p) = u$  sont solutions des problèmes  $(P_h)$  et  $(P)$ , on a pour tout  $v_h \in V_h$  :

$$a(u_h - u, v_h) + p.d(u_h - u, v_h) + b(u_h, v_h) - b(u, v_h) = 0,$$

et avec  $v_h = u_h - r_h u$  on obtient :

$$\begin{aligned} & a(u_h - u, u_h - u) + p.d(u_h - u, u_h - u) + b(u_h, u_h - u) - b(u, u_h - u) \\ & = a(u_h - u, r_h u - u) + p.d(u_h - u, r_h u - u) \\ & \quad + b(u_h, r_h u - u) - b(u, r_h u - u). \end{aligned} \tag{15}$$

1° Avec le lemme 2 on a  $u_h \in Q$  et en appliquant le lemme 3 (voir appendice) on minore le premier membre de (15) par

$$\sigma_p^* \|u_h - u\|^2 \tag{16}$$

$\sigma_p^* > 0$  désignant une constante indépendante de  $h$ .

2° Avec l'inégalité (13) du lemme 1 et en utilisant la continuité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot) + p.d(\cdot, \cdot)$ , on majore le second membre de (15) par l'expression

$$\|u_h - u\| \cdot \|r_h u - u\| [M_p + \varphi_u(\|u_h - u\|)], \tag{17}$$

$\varphi_u$  étant croissante et  $\|u_h - u\| < 2 \cdot \rho(p)$ , l'expression (17) est majorée par

$$\mu_p \|u_h - u\| \cdot \|r_h u - u\|, \tag{18}$$

$\mu_p$  désignant une constante positive indépendante de  $h$ .

3° Avec l'identité (15) et les expressions (16) et (17) on a

$$\sigma_p^* \|u_h - u\| \leq \mu_p \|r_h u - u\|. \quad \blacksquare$$

**COROLLAIRE 3 :** Dans le cas où  $u^0 = 0$ , le théorème 5 s'applique sans hypothèse particulière sur  $h$ .

## APPENDICE

(théorème de Newton-Kantorovitch)

$X$  désigne un espace de Hilbert réel de norme notée  $\|\cdot\|$  et dont la norme standard de l'espace dual  $X'$  est notée  $\|\cdot\|^*$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de la dualité entre les espaces  $X'$  et  $X$ .

$T$  désigne une application définie sur  $X \times X$  à valeurs réelles qui est non linéaire par rapport à sa première variable et telle que pour tout  $x \in X$ , l'application  $y \rightarrow T(x, y)$  de  $X$  dans  $\mathbf{R}$  est linéaire continue.  $f$  désigne un élément de l'espace  $X'$ .

Soit le problème variationnel non linéaire

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } x \in X \text{ tel que} \\ T(x, y) = \langle f, y \rangle, \quad \forall y \in X. \end{cases}$$

THÉORÈME 6 : On suppose qu'il existe  $x^0 \in X$  tel que :

(i) pour tout  $y \in X$ , l'application  $x \rightarrow T(x, y)$  est Fréchet-différentiable dans la boule ouverte  $B$  de centre  $x^0$  et de rayon  $R > 0$ , dérivée notée  $\partial_1 T(x, y)$ ;

(ii) il existe  $\gamma > 0$  tel que

$$\langle \partial_1 T(x^0, y), y \rangle \geq \gamma \|y\|^2, \quad \forall y \in X;$$

(iii) il existe  $K > 0$  tel que

$$\|\partial_1 T(x, y) - \partial_1 T(\tilde{x}, y)\|^* \leq K \|x - \tilde{x}\| \|y\|, \quad \forall y \in X, \quad \forall x, \tilde{x} \in B;$$

(iv)  $\xi = K \eta / \gamma < 1/2$  où  $\eta \geq (1/\gamma) \|f - T(x^0, \cdot)\|^*$ ;

(v)  $t^* = (\gamma/K)(1 - \sqrt{1 - 2\xi}) < R$ .

Alors :

1° le problème variationnel non linéaire ( $\mathcal{P}$ ) admet une solution  $x^* \in S$  boule fermée de centre  $x^0$  et de rayon  $t^*$ ,  $x^*$  étant limite forte dans  $X$  de la suite  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de points de  $S$  bien définie par les itérations

$$\begin{aligned} k &= 0, 1, \dots \\ x^{k+1} &= x^k + z^{k+1} \end{aligned}$$

où  $z^{k+1}$  est la solution du problème variationnel linéaire

$$(\mathcal{P}^k) \quad \begin{cases} \text{Trouver } z \in X \text{ tel que} \\ \langle \partial_1 T(x^k, y), z \rangle = \langle f, y \rangle - T(x^k, y), \quad \forall y \in X; \end{cases}$$

2° cette solution  $x^*$  de ( $\mathcal{P}$ ) est unique dans la boule ouverte  $Q$  de centre  $x^0$  et de rayon  $\rho = \min(R, \gamma/K)$ ;

3° s'il existe une application  $J$  de  $X$  dans  $\mathbf{R}$  dont la dérivée  $J'(x)$  vérifie :

$$\langle J'(x), y \rangle = T(x, y) - \langle f, y \rangle, \quad \forall x, y \in X,$$

alors  $x^*$  réalise le minimum local dans  $Q$  de l'application  $J$ .

Démonstration : On montre que pour tout  $x \in Q$ , la forme bilinéaire  $(z, y) \rightarrow \langle \partial_1 T(x, y), z \rangle$  est  $X$ -elliptique et avec le théorème de Banach-Steinhaus on montre qu'elle est continue; ce qui permet d'appliquer le théorème de Lax-Milgram. Ensuite on procède comme dans la démonstration du théorème de Newton-Kantorovitch décrite par Ortega [1] en utilisant la technique des suites majorantes. Pour démontrer les 2° et 3° on utilise le résultat de monotonie locale suivant dont la dernière propriété ne sert qu'à la section 4.

LEMME 3 : Sous les hypothèses du théorème 6, il existe une application  $\sigma$  de  $Q \times Q$  dans  $\mathbf{R}$  telle que

$$T(x, x-y) - T(y, x-y) \geq \sigma(x, y) \|x-y\|^2, \quad \sigma(x, y) > 0, \quad \forall x, y \in Q;$$

et il existe une constante  $\sigma^* > 0$  telle que

$$\sigma(x, x^*) \geq \sigma^*, \quad \forall x \in Q$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- 1 J-C PAUMIER *Analyse numérique d'un problème de coque élastique mince en théories linéaire et non linéaire*, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Paris-VI, 1977, *Stable Solutions to a Shell Problem* (à paraître dans *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*)
- 2 W T KOITER, *On the Nonlinear Theory of Thin Elastic shells*, Proc Kon Ned Akad Wetensch, vol B 69, 1966, p 1-54
- 3 P ROUGÉE, *Equilibre des coques élastiques minces inhomogènes en théorie non linéaire*, Thèse, Université de Paris 1969
- 4 P G CIARLET, *Numerical Analysis of the Finite Element Method*, Séminaire de Mathématiques supérieures Université de Montreal 16 juin-11 juillet 1975
- 5 L SCHWARTZ *Théorie des Distributions* 1966, Hermann Paris
- 6 P G CIARLET et P A RAVIART, *General Lagrange and Hermite Interpolation in  $\mathbf{R}^n$  with Applications to Finite Element methods*, Arch Rat Mech Anal, vol 46, n° 3, 1972, p 177-189
- 7 J M ORTEGA *The Newton Kantorovitch Theorem*, Amer Math Monthly, tome 75, 1968, p 658-660