RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

S. KESAVAN
M. VANNINATHAN

Sur une méthode d'éléments finis mixte pour l'équation biharmonique

RAIRO. Analyse numérique, tome 11, nº 3 (1977), p. 255-270
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_3_255_0>

R.A.I.R.O. Analyse Numérique/Numerical Analysis
(vol. 11, n° 3, 1977, p. 255 à 270)

SUR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS MIXTE POUR L'ÉQUATION BIHARMONIQUE [1]

par S. KESAVAN [2] et M. VANNINATHAN [2]

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *Le but de ce travail est l'étude de l'ordre de convergence lorsque l'on utilise des éléments finis isoparamétriques ainsi qu'un procédé d'intégration numérique pour approcher la solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique, par une méthode d'éléments finis mixtes proposée par Ciarlet et Raviart.*

1. INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné du plan $\mathbf{R}^2$, dont la frontière Γ est suffisamment régulière. Considérons le problème suivant :

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega & (1.1) \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma & (1.2) \end{array}\right\} \text{(P1)},$$

où la fonction f (sur laquelle nous faisons des hypothèses convenables plus loin) est donnée dans $L^2(\Omega)$.

La formulation variationnelle la plus connue pour le problème (P1) consiste de trouver l'unique fonction $u \in H_0^2(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \qquad \forall v \in H_0^2(\Omega) \tag{1.3}$$

Les approximations de ce problème par les éléments finis conformes se trouvent, par exemple, dans Ciarlet [3].

[1] Manuscrit reçu le 3 septembre 1976. Révision reçue le 11 mars 1977.
[2] IRIA-LABORIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150, Le Chesnay et School of Mathematics-Tata Institute of Fundamental Research Bombay, India.

Ciarlet et Raviart [7] ont étudié une autre formulation variationnelle qui conduit à une méthode d'éléments finis mixte et qui donne non seulement une approximation u_h de la solution u du problème (P1) mais aussi une approximation φ_h de $-\Delta u$ (qui est utile parce que Δu représente la vorticité dans les problèmes d'hydrodynamique. En outre, on n'utilise que des éléments « du type C^0 ». Lorsque Ω est un polygone et tous les éléments finis sont « droits », Ciarlet et Raviart ont obtenu l'ordre de convergence

$$|u - u_h|_{1,\Omega} + |\Delta u + \varphi_h|_{0,\Omega} = 0(h^{k-1}), \tag{1.4}$$

en utilisant des éléments finis associés aux polynômes de degré $\leqslant k$, où $k \geqslant 2$. La résolution effective du problème discret par des méthodes de dualité se trouve dans Ciarlet et Clowinski [4] et des exemples numériques se trouvent dans Bourgat [1].

Le but de ce travail est d'étendre ces résultats au cas d'un domaine plus général en utilisant des éléments finis isoparamétriques ainsi qu'un procédé d'intégration numérique. Pour la simplicité nous ne considérons que le cas où $k = 2$.

Le lecteur trouvera ce genre de problèmes, traités d'une manière abstraite, dans Brezzi et Raviart [2] mais leurs résultats ne contiennent pas les nôtres.

On utilise les notations $\|\,.\,\|_{m,p,\Omega}$ et $|\,.\,|_{m,p,\Omega}$ pour les normes et semi-normes habituelles dans les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ respectivement (on supprime l'indice p lorsque $p = 2$).

2. RAPPELS SUR LE PROBLÈME CONTINU

Nous supposons que la frontière Γ est lipschitzienne continue au sens de Necás [8].

Soit $\underline{W} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni de la norme

$$\underline{v} = (v, \psi) \in \underline{W} \to |v|_{1,\Omega} + |\psi|_{0,\Omega}.$$

On peut donc définir la forme bilinéaire $a(.,.)$ sur $W \times W$ et la forme linéaire $f(.)$ sur W (qui sont continues) par

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_\Omega \varphi\psi\, dx, \tag{2.1}$$

$$f(\underline{v}) = \int_\Omega f v\, dx, \tag{2.2}$$

$$\forall \underline{u} = (u, \varphi) \in \underline{W} \quad , \quad \forall \underline{v} = (v, \psi) \in \underline{W}.$$

Posant $M = H^1(\Omega)$ on définit la forme bilinéaire continue sur $\underline{W} \times M$ par l'équation.

$$b(\underline{v}, \mu) = \int_\Omega \operatorname{grad} v \operatorname{grad} \mu \, dx - \int_\Omega \psi \mu \, dx, \tag{2.3}$$

$$\forall \underline{v} = (v, \psi) \in \underline{W} \quad , \quad \forall \mu \in M.$$

Enfin soit

$$\underline{V} = \{ \underline{v} \in \underline{W} ; b(\underline{v}, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in M \}. \tag{2.4}$$

Considérons les deux problèmes suivants :

Trouver $\underline{u} \in \underline{V}$ tel que

$$\left. a(\underline{u}, \underline{v}) = f(\underline{v}), \qquad \forall \underline{v} \in \underline{V} \right\} (\text{P2}), \tag{2.5}$$

et,

Trouver $(\underline{u}, \mu^*) \in \underline{W} \times M$ tel que

$$\left.\begin{array}{ll} a(\underline{u}, \underline{v}) - f(\underline{v}) + b(\underline{v}, \mu^*) = 0, & \forall \underline{v} \in \underline{W}, \quad (2.6) \\ b(\underline{u}, \mu) = 0, \quad \forall \mu \in M. & \quad (2.7) \end{array}\right\} (\text{P3}).$$

Si $\underline{u} = (u, \varphi)$ est la solution du problème (P2) (qui existe et qui est unique), alors $u \in H_0^2(\Omega)$, $\varphi = -\Delta u$ et u vérifie l'équation (1.3). Si $(\underline{u}, \mu^*)$ est une solution du problème (P3), alors $\underline{u}$ est la solution du problème (P2). Réciproquement, si $\underline{u} = (u, -\Delta u)$ est la solution du problème (P2) et si $u \in H^3(\Omega)$, alors $(\underline{u}, -\Delta u)$ est la solution du problème (P3).

Ces résultats sont démontrés dans [7]. La discrétisation du problème (P3) conduit à un système linéaire qu'on peut résoudre et la « première coordonnée » de cette solution donne directement la solution du problème discret qui correspond au problème (P2).

3. LE PROBLÈME DISCRET

Nous allons étudier maintenant le problème discret associé au problème (P3) du numéro 2.

Établissons d'abord une famille de triangulations $\{ \mathscr{T}_h \}_h$ du domaine Ω par des éléments finis isoparamétriques. Si $K \in \mathscr{T}_h$, soit h_K le diamètre de $\widetilde{K}$, l'élément « droit » associé à K. On pose

$$h = \max_{K \in \mathscr{T}_h} h_K \tag{3.1}$$

Soit Ω_h l'ouvert modifié formé par la réunion des éléments K, $K \in \mathcal{T}_h$. On désigne par Γ_h la frontière de Ω_h. On remarque ici que tous les éléments $K \in \mathcal{T}_h$ qui sont à l'intérieur de Ω_h sont « droits » et ceux qui sont à la frontière ont un seul côté courbé, soit celui qui forme partie de Γ_h.

Faisons les hypothèses suivantes sur la famille $\{ \mathcal{T}_h \}_h$:

(H1) La famille est régulière (cf. Ciarlet-Raviart [6]) du type $(2, S)$, c'est-à-dire, l'élément $\hat{K}$ de référence est un triangle associé à l'espace $\hat{P} = P(2)$ des polynômes de degré $\leqslant 2$.

En outre il existe une constante τ indépendante de h telle que

$$h \leqslant \frac{1}{\tau} \min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \tag{3.2}$$

(H2) Il existe un ouvert borné $\tilde{\Omega} \Subset \mathbf{R}^2$ tel que

$$\Omega \subset \tilde{\Omega},\ \Omega_h \subset \tilde{\Omega},\ \forall h. \tag{3.3}$$

(H3) La solution u de l'équation (1.3) admet une extension $\tilde{u}$ sur $\tilde{\Omega}$ qui appartient à $W^{4,\infty}(\tilde{\Omega})$.

(H4) La fonction f admet une extension $\tilde{f}$ sur $\tilde{\Omega}$ qui appartient à $L^\infty(\tilde{\Omega})$.

REMARQUE 3.1 : Grâce à l'hypothèse (H2), on peut employer l'inégalité de Poincaré-Friedrichs dans chaque ouvert Ω_h mais avec une constante qui est indépendante de h. ■

REMARQUE 3.2 : On modifiera l'hypothèse (H4) plus loin. ■

REMARQUE 3.3 : Puisque, pratiquement, nous choisirons toujours les nœuds de chaque triangulation dans $\bar{\Omega}$, on verra que les extensions $\tilde{u}$ et $\tilde{f}$ n'interviennent pas dans nos calculs. Mais elles paraîtront dans les majorations d'erreur, et elles doivent être choisies une fois pour toutes. ■

Définissons l'espace $Y_h \subset H'(\Omega_h)$ par

$$Y_h = \{ v : \Omega_h \to \mathbf{R}\ |v| \in P \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}, \tag{3.4}$$

où P est l'espace de dimension finie associé à K. Alors, on définit le sous-espace

$$X_h = \{ v \in Y_h\ |v| \Gamma_h = 0 \} \tag{3.5}$$

de l'espace $H_0^1(\Omega_h)$.

REMARQUE 3.4 : On utilise le même espace Y_h pour approcher les espaces $H^1(\Omega_h)$ et $L^2(\Omega_h)$. ■

On a maintenant les formes bilinéaires et linéaires suivantes :

$$\tilde{a}_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = \int_{\Omega_h} \varphi_h \psi_h \, dx, \tag{3.6}$$

$$\tilde{b}_h(\underline{v}_h, \mathrm{v}_h) = \int_{\Omega_h} \operatorname{grad} v_h \, . \operatorname{grad} \mathrm{v}_h \, dx - \int_{\Omega_h} \psi_h \mathrm{v}_h \, dx, \tag{3.7}$$

$$\tilde{f}_h(\underline{v}_h) = \int_{\Omega_h} \tilde{f} \, v_h \, dx, \tag{3.8}$$

$$\forall u_h = (\underline{u}_h, \varphi_h) \in \underline{W}_h, \qquad \forall \underline{v}_h = (v_h, \psi_h) \in \underline{W}_h, \qquad \forall \mathrm{v}_h \in Y_h,$$

où $\underline{W}_h = X_h \times Y_h$.

On a aussi le lemme suivant qui est utile (Inégalités « inverses ») :

LEMME 3.1 : *Soit $\mathrm{v}_h \in Y_h$. Il existe des constantes C_1 et C_2 indépendantes de h telles que*

$$|\mathrm{v}_h|_{1,\Omega_h} \leqslant C_1 h^{-1} |\mathrm{v}_h|_{0,\Omega_h}, \tag{3.9}$$

$$|\mathrm{v}_h|_{0,\infty,\Omega_h} \leqslant C_2 h^{-1} \|\mathrm{v}_h\|_{1,\Omega_h}. \tag{3.10}$$

Si $\mathrm{v}_h \in X_h$, on peut remplacer $\|\cdot\|_{1,\Omega_h}$ par $|\cdot|_{1,\Omega_h}$.)

Démonstration : On ne donne que l'idée de la démonstration.

On obtient des majorations analogues dans chaque élément K et puis celle qui est désirée par sommation sur K. Pour obtenir la majoration « locale » on utilise la régularité de la famille de triangulations pour aller au triangle $\hat{K}$ de référence (où on peut utiliser l'équivalence de deux normes sur un espace de dimension finie) et pour revenir à K.

On remarque que dans le cas où h apparaît avec une puissance négative on a besoin de la condition (3.2) pour obtenir la majoration « globale » à partir de la majoration « locale ». ■

Puisque dans la plupart des situations il ne sera pas facile d'évaluer les intégrales sur Ω_h, il vaut mieux utiliser un procédé d'intégration numérique. Introduisons donc un tel procédé sur l'élément de référence $\hat{K}$ comme indiqué ci-dessous :

$$\int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{x}) \, d\hat{x} \sim \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\varphi}(\hat{b}_l), \tag{3.11}$$

où les points $\hat{b}$, $1 \leqslant l \leqslant L$ appartiennent à $\hat{K}$. Cela induit, de la manière habituelle, un procédé d'intégration numérique sur chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\int_K \varphi(x) \, dx \sim \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,k} \varphi(b_{l,k}), \tag{3.12}$$

où

$$\omega_{l,K} = \hat{\omega}_l J_{F_K}(\hat{b}_l), \qquad (1 \leqslant l \leqslant L) \tag{3.13}$$
$$b_{l,K} = F_K(\hat{b}_l) \tag{3.14}$$

(F_K est le difféomorphisme $\hat{K} \to K$ donné par la régularité de la triangulation et J_{F_K} est son Jacobien).

Alors on peut définir les fonctionnelles d'erreur ci-dessous :

$$\hat{E}(\hat{\varphi}) = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{x})\, d\hat{x} - \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\varphi}(\hat{b}_l), \tag{3.15}$$

$$E_K(\varphi) = \int_K \varphi(x)\, dx - \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K}\varphi(b_{l,K}), \tag{3.16}$$

qui sont telles que

$$E_K(\varphi) = \hat{E}(\hat{\varphi} J_{F_K}). \tag{3.17}$$

On a maintenant les formes bilinéaires et linéaires :

$$a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K}\varphi_h(b_{l,K})\psi_h(b_{l,K}), \tag{3.18}$$

$$b_h(\underline{v}_h, \nu_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \left[\omega_{l,K}\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial v_h}{\partial x_i}(b_{l,K})\frac{\partial \nu_h}{\partial x_i}(b_{l,K}) - \psi_h(b_{l,K}) \cdot \nu_h(b_{l,x})\right)\right], \tag{3.19}$$

$$f_h(\underline{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \tilde{f}(b_{l,K}) v_h(b_{l,K}), \tag{3.20}$$

$$\forall \underline{u}_h = (u_h, \varphi_h) \in \underline{W}_h, \forall \underline{v}_h = (v_h, \psi_h) \in \underline{W}_h, \forall \nu_h \in Y_h.$$

On a aussi l'analogue discret de l'espace $\underline{V}$:

$$\underline{V}_h = \{ \underline{v}_h \in \underline{W}_h \mid b_h(\underline{v}_h, \nu_h) = 0 \ \forall \nu_h \in Y_h \}. \tag{3.21}$$

On peut donc poser le problème discret :

Trouver, $\underline{u}_h \in \underline{W}_h$, et $\mu_h \in Y_h$ tels que

$$\left.\begin{aligned} &a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) - f_h(\underline{v}_h) + b_h(\underline{v}_h, \mu_h) = 0, \forall \underline{v}_h \in \underline{W}_h && (3.22)\\ &b_h(\underline{u}_h, \nu_h) = 0, \forall \nu_h \in Y_h. && (3.23)\end{aligned}\right\}(P_h)$$

Avant de commencer l'étude des problèmes (P_h), on suppose que les hypothèses suivantes seront valables dans toute la suite (avec les hypothèses H1-H4) :

(H5) Dans le procédé d'intégration numérique, tous les poids $\hat{\omega}$, $1 \leqslant l \leqslant L$, sont positifs.

(H6) L'ensemble de nœuds $\{ \hat{b}_l \}$, $1 \leqslant l \leqslant L$, contient un sous-ensemble qui est P(2) unisolvent.

(H7) Le procédé est exact pour les polynômes de degré $\leqslant 5$, i.e.

$$\hat{E}(\hat{p}) = 0, \ \forall \hat{p} \in \mathrm{P}(5). \tag{3.24}$$

Grâce aux hypothèses (H5) et (H6) on peut démontrer, par des méthodes analogues à celles de Ciarlet (*cf.* n° 8, [3]), les deux inégalités ci-dessous :

$$C_1 \, |\hat{p}|^2_{0,\hat{K}} \leqslant \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l (\hat{p}(\hat{b}_l))^2 \leqslant C_2 \, |\hat{p}|^2_{0,\hat{K}}, \tag{3.25}$$

$$C_3 \, |\hat{p}|^2_{1,\hat{K}} \leqslant \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} (\hat{b}_l) \right)^2 \right) \leqslant C_4 \, |\hat{p}|^2_{1,K}, \forall \hat{p} \in P(2), \tag{3.26}$$

où C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont des constantes indépendantes de h. Alors on a immédiatement le lemme suivant :

LEMME 3.2 : (a) *Il existe une constante* β *indépendante de* h *telle que*

$$|v_h|_{1,\Omega_h} \leqslant \beta \, |\psi_h|_{0,\Omega_h}. \tag{3.27}$$

(b) *La forme bilinéaire* $a_h(.,.)$ *est uniformément* V_h*-elliptique* i.e., *il existe une constante* α *indépendante de* h *telle que*

$$a_h(\underline{v}_h, v_h) \geqslant \alpha \, |\psi_h|^2_{0,\Omega_h}, \ \forall \underline{v}_h = (v_h, \psi_h) \in V_h. \tag{3.28}$$

(c) *Il existe un élément* $\underline{u}_h = (u_h, \varphi_h) \in \underline{V}_h$ *et un seul tel que*

$$a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = f_h(\underline{v}_h), \ \forall \underline{v}_h \in \underline{V}_h. \tag{3.29}$$

(d) *Il existe une solution et une seule pour le problème* (P_h), *soit* $(\underline{u}_h, \mu_h) \in \underline{W}_h \times Y_h$ *et* $\underline{u}_h$ *vérifie les équations* (3.29).

(e) *Soit* $\underline{v}_h = (v_h, \psi_h) \in \underline{V}_h$. *Alors il existe une constante* C *indépendante de* h *telle que*

$$|\psi_h|_{0,\Omega_h} \leqslant C h^{-1} \, |v_h|_{1,\Omega_h} \tag{3.30}$$

il existe une constante C *indépendante de* h *telle que*

$$|\psi_h|_{1,\Omega_h} \leqslant C_1 h^{-2} \, |v_h|_{1,\Omega_h} \quad \blacksquare \tag{3.31}$$

Maintenant on va étudier la convergence de cette méthode. Commençons par une majoration « abstraite ».

THÉORÈME 3.1 : *Soit* $(u, -\Delta u)$ *la solution du problème* (P2) *et posons* $\underline{\tilde{u}} = (\tilde{u}, -\Delta\tilde{u})$. *Soit* $((u_h, \varphi_h), \mu_h)$ *la solution du problème* (Ph). *Alors il existe une constante C, indépendante de h, telle que*

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{u} - u_h|_{1,\Omega_h} + |\Delta\tilde{u} + \varphi_h|_{0,\Omega_h} \leqslant C\Bigg[\inf_{\underline{v}_h = (v_h, \psi_h) \in \underline{V}_h}\Bigg(\{|\tilde{u} - v_h|_{1,\Omega_h} \\
&+ |\Delta\tilde{u} + \psi_h|_{0,\Omega_h}\} + \sup_{\underline{w}_h \in \underline{W}_h} \frac{|\tilde{a}_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h) - a_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h)|}{\|\underline{w}_h\|}\Bigg) + \sup_{\underline{w}_h \in \underline{W}_h} \frac{|f_h(\underline{w}_h) - \tilde{f}(\underline{w}_h)|}{\|\underline{w}_h\|} \\
&+ \sup_{\underline{w}_h \in \underline{W}_h} \frac{|\tilde{b}_h(\underline{w}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u})) - b_h(\underline{w}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u}))|}{\|\underline{w}_h\|} \\
&+ \|\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u})\|_{1,\Omega_h} + h^{-1} m(\Omega_h - \Omega \cap \Omega_h)(|\tilde{u}|_{4,\infty,\Omega} + |\tilde{f}|_{0,\infty,\tilde{\Omega}})\Bigg] \quad (3.32)
\end{aligned}
$$

où Π_h *désigne l'opérateur d'interpolation dans l'espace* Y_h, $\breve{m}(A)$ *la mesure (de Lebesgue) d'un ensemble* $A \subset \mathbf{R}^2$, *et* $\|\,.\,\|$, *la norme sur* $\underline{W}_h$ *induite de* $H_0^1(\Omega_h) \times L^2(\Omega_h)$.

Démonstration : Soit $\underline{V}_h = (\underline{v}_h, \psi_h)$ un élément quelconque de V_h.

Alors

$$
\begin{aligned}
|\tilde{u} - u_h|_{1,\Omega_h} + |\Delta\tilde{u} + \varphi_h|_{0,\Omega h} &\leqslant |\tilde{u} - v_h|_{1,\Omega h} + |v_h - u_h|_{1,\Omega h} \\
&\quad + |\Delta\tilde{u} + \psi_h|_{0,\Omega h} + |\varphi_h - \psi_h|_{0,\Omega h} \\
&\leqslant |\tilde{u} - v_h|_{0,\Omega_h} + |\Delta\tilde{u} + \psi_h|_{0,\Omega_h} + (1 + \beta)\,|\varphi_h - \psi_h|_{0,\Omega h} \quad (3.33)
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\begin{aligned}
\alpha\,|\varphi_h - \psi_h|^2_{0,\Omega h} &\leqslant a_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h, \underline{u}_h - \underline{v}_h,) \\
&= \tilde{a}_h(\underline{\tilde{u}}_h - \underline{v}_h, \underline{u}_h - \underline{v}_h) + [\tilde{a}_h(\underline{v}_h, \underline{u}_h - \underline{v}_h) \\
&\qquad - a_h(\underline{v}_h, \underline{u}_h - \underline{v}_h)] \\
&\quad + [f_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h) - \tilde{f}_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h)] + [\tilde{f}_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h) - \tilde{a}_h(\underline{\tilde{u}}, \underline{u}_h - \underline{v}_h)]
\end{aligned}
$$

Puisque $\underline{u}_h - \underline{v}_h \in \underline{V}_h$, on peut donc écrire

$$
\begin{aligned}
\alpha\,|\varphi_h - \psi_h|^2_{0,\Omega_h} &\leqslant \tilde{a}_h(\underline{\tilde{u}} - \underline{v}_h, \underline{u}_h - \underline{v}_h) + [\tilde{a}_h(\underline{v}_h, \underline{u}_h - \underline{v}_h) \\
&\quad - a_h(\underline{v}_h, \underline{u}_h - \underline{v}_h)] + [f_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h) - \tilde{f}_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h)] \\
&\quad + [b_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u})) - \tilde{b}_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u})) \\
&\quad + [\tilde{f}_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h) - \tilde{a}_h(\underline{\tilde{u}}, \underline{u}_h - \underline{v}_h) + b_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u}))]. \quad (3.34)
\end{aligned}
$$

Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f}_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h) - \tilde{a}_h(\underline{\tilde{u}}, \underline{u}_h - v_h) + \tilde{b}_h(\underline{u}_h - \underline{v}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u})) \\
&\quad = \int_{\Omega_h} (\varphi_h - \psi_h)(\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u}))\,dx + \int_{\Omega_h} \tilde{f}(u_h - v_h)\,dx
\end{aligned}
$$

$$+ \int_{\Omega_h} \operatorname{grad}(u_h - v_h) \cdot \operatorname{grad}(\Pi_h(\Delta\tilde{u}))\,dx$$

$$+ \int_{\Omega_h} \Delta^2 \tilde{u}(u_h - v_h)\,dx - \int_{\Omega_h} \Delta^2 \tilde{u}(u_h - v_h)\,dx$$

$$= \int_{\Omega_h} (\varphi_h - \psi_h)(\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u}))\,dx + \int_{\Omega_h} (\tilde{f} - \Delta^2\tilde{u})(u_h - v_h)\,dx$$

$$+ \int_{\Omega_h} \operatorname{grad}(u_h - v_h) \cdot \operatorname{grad}(\Delta u - \Pi_h(\Delta u))\,dx$$

$$\leqslant |\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u})|_{0,\Omega_h} |\varphi_h - \psi_h|_{0,\Omega_h} + \beta\,|\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u})|_{1,\Omega_h} |\varphi_h - \psi_h|_{0,\Omega_h}$$

$$+ |u_h - v_h|_{0,\infty,\Omega_h} \int_{\Omega_h} |\Delta^2\tilde{u} - \tilde{f}|\,dx.$$

$$\leqslant C_1 \left[\|\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u})\|_{1,\Omega_h} + h^{-1} \int_{\Omega_h} |\Delta^2\tilde{u} - f|\,dx \right] |\varphi_h - \psi_h|_{0,\Omega_h}$$

d'après le lemme 3.1 on a maintenant :

$$\int_{\Omega_h} |\Delta^2\tilde{u} - \tilde{f}|\,dx = \int_{(\Omega_h - \Omega\cap\Omega_h)} |\Delta^2\tilde{u} - \tilde{f}|\,dx \leqslant |\Delta^2\tilde{u} - \tilde{f}|_{0,\infty,\tilde{\Omega}}\, m(\Omega_h - \Omega\cap\Omega_h)$$

$$\leqslant (|\tilde{u}|_{4,\infty,\tilde{\Omega}} + |\tilde{f}|_{0,\infty,\tilde{\Omega}})\, m(\Omega_h - \Omega\cap\Omega_h)$$

puisque $\Delta^2\tilde{u} = \tilde{f}$ sur Ω.

Substituant dans (3.34) et ensuite dans (3.33) on obtient la majoration (3.32) après avoir pris la borne inférieure dans $\underline{V}_h$. ■

Dans la relation (3.32) il est difficile de majorer la quantité

$$|\tilde{u} - v_h|_{1,\Omega_h} + |\Delta\tilde{u} + \psi_h|_{0,\Omega_h}.$$

Alors on la remplace comme indiqué dans le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2 : *Il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\{ |\tilde{u} - v_h|_{1,\Omega_h} + |\Delta\tilde{u} + \psi_h|_{0,\Omega_h} \}$$

$$\leqslant C \left[(1 + h^{-1}) \left\{ |\tilde{u} - v_h|_{1,\Omega_h} + \sup \left| \frac{\partial\tilde{u}}{\partial n} \right| \right\} + 2\,|\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u})|_{0,\Omega_h} \right.$$

$$\left. + \sup_{\chi_h \in Y_h} \frac{|\tilde{b}_h(\underline{v}_h, \chi_h) - b_h(\underline{v}_h, \chi_h)|}{|\chi_h|_{0,\Omega_h}} \right]. \quad (3.35)$$

$\forall \underline{v}_h = (v_h, \psi_h) \in \underline{V}_h$.

Démonstration : On a d'abord

$$|\Delta\tilde{u} + \psi_h|_{0,\Omega_h} \leqslant |\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u})|_{0,\Omega_h} + |\Pi_h(\Delta\tilde{u}) + \psi_h|_{0,\Omega_h}. \quad (3.36)$$

Posons

$$\nu_h = \Pi_h(\Delta\tilde{u}) + \psi_h. \quad (3.37)$$

Alors,

$$\begin{aligned}|\nu_h|^2_{0,\Omega_h} &= \int_{\Omega_h} (\Pi_h(\Delta\tilde{u}) + \psi_h)\nu_h\, dx \\ &= \int_{\Omega_h} (\Pi_h(\Delta\tilde{u}) - \Delta\tilde{u})\nu_h\, dx + \int_{\Omega_h} (\Delta\tilde{u} + \psi_h)\nu_h\, dx.\end{aligned}$$

Mais $b_h(\underline{v}_h, \nu_h) = 0$ et on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} (\Delta\tilde{u} + \psi_h)\nu_h\, dx &= \int_{\Omega_h} \Delta\tilde{u} \,.\, \nu_h\, dx + \int_{\Omega_h} \operatorname{grad} v_h \,.\, \operatorname{grad} \nu_h\, dx \\ &\quad + b_h(\underline{v}_h, \nu_h) - \tilde{b}_h(\underline{v}_h, \nu_h) \\ &= \int_{\Omega_h} \operatorname{grad}(v_h - \tilde{u}) \operatorname{grad} \nu_h\, dx + \int_{\Gamma_h} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\nu_h\, ds \\ &\quad + (b_h(\underline{v}_h, \nu_h) - b_h(\underline{v}_h, \nu_h)),\end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}|\nu_h|^2_{0,\Omega_h} \leqslant{}& |\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u})|_{0,\Omega_h} |\nu_h|_{0,\Omega_h} + C_1 h^{-1} |\tilde{u} - v_h|_{1,\Omega_h} |\nu_h|_{0,\Omega_h} \\ &+ \left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\right|_{0,\Gamma_h} |\nu_h|_{0,\Gamma_h} \\ &+ |b_h(\underline{v}_h, \nu_h) - \tilde{b}_h(\underline{v}_h, \nu_h)| \quad (3.38)\end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 3, [6], il existe grâce au lemme 3.1, une constante C indépendante de h telle que

$$|\nu_h|_{0,\Gamma_h} \leqslant C_2 \|\nu_2\|_{1,\Omega_h} \leqslant C_3(1 + h^{-1}) |\nu_h|_{0,\Omega_h}. \quad (3.39)$$

Or, il est facile de voir que la longueur de la frontière Γ_h est majorée par une constante indépendante de h. Alors, on a

$$\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\right|_{0,\Gamma_h} \leqslant C_4 \sup_{\Gamma_h}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\right|. \quad (3.40)$$

Dans ces conditions, les relations (3.38)-(3.40) nous donnent

$$|v_h|_{0,\Omega_h} \leqslant C\left[|\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u})|_{0,\Omega_h} + h^{-1}|\tilde{u} - v_h|_{1,\Omega_h} + (1 + h^{-1}) \sup_{\Gamma_h} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\right| + \sup_{\chi_h \in Y_h} \frac{|\tilde{b}_h(\underline{v}_h, \chi_h) - b_h(\underline{v}_h, \chi_h)|}{|\chi_h|_{0,\Omega_h}}\right],$$

et la relation (3.35) en découle ■

Remarquons maintenant que, puisque la fonction $\tilde{u}$ s'annule sur Γ (équation 1.2), elle s'annule aussi sur les nœuds de la triangulation $\mathscr{T}_h$ qui sont sur Γ_h. Alors $\Pi_h \tilde{u} = 0$ sur Γ_h et par conséquent $\Pi_h \tilde{u} \in X_h$. Il est facile de voir maintenant qu'étant donné un élément $v_h \in X_h$, il existe un élément $\psi_h \in Y_h$, et un seul, tel que $(v_h, \psi_h) \in \underline{V}_h$. Pour que nous puissions utiliser la théorie de l'interpolation pour les éléments fini isoparamétriques (*cf.* Ciarlet-Ravart [5]), nous choisissons l'unique élément $\psi_h \in Y_h$ tel que

$$\underline{v}_h = (\Pi_h \tilde{u}, \psi_h) \in \underline{V}_h,$$

et nous utiliserons cet élément dans les majorations ci-dessus.

Alors, on a

$$|\tilde{u} - v_h|_{1,\Omega_h} = |\tilde{u} - \Pi_h \tilde{u}|_{1,\Omega_h} \leqslant Ch^2 \|\tilde{u}\|_{3,\tilde{\Omega}}, \tag{3.41}$$

$$\|\Delta\tilde{u} - \Pi_h(\Delta\tilde{u})\|_{1,\Omega_h} \leqslant Ch \|\Delta\tilde{u}\|_{2,\tilde{\Omega}} \leqslant Ch \|\tilde{u}\|_{4,\tilde{\Omega}}. \tag{3.42}$$

Nous allons maintenant évaluer les quantités $m(\Omega_h - \Omega \cap \Omega_h)$ et $\sup_{\Gamma_h} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\right|$.

LEMME 3.3 : *Il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$m(\Omega_h - \Omega \cap \Omega_h) \leqslant Ch^3. \tag{3.43}$$

Démonstration : Nos notations se trouvent dans la figure 1

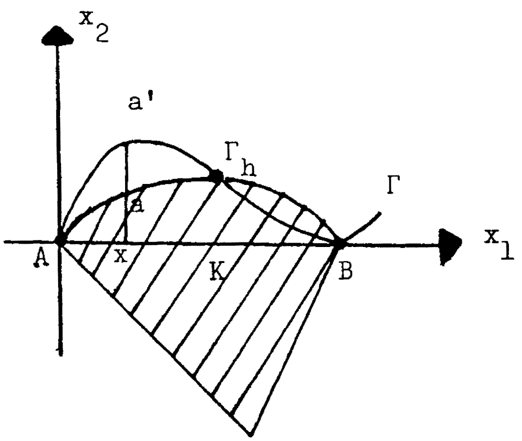

Figure 1.

D'abord $m(\Omega_h - \Omega \cap \Omega_h) = \sum_{K \in \partial\mathcal{T}_h} m(K \cap (\Omega_h - \Omega \cap \Omega_h))$, où $\partial\mathcal{T}_h$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}_h$ qui sont à la frontière. Il est facile de voir que

$$\max_{x \in [A,B]} \|a - a'\| \leqslant C_1 h^3,$$

où C_1 est indépendante de h. Par conséquent, on obtient

$$m(K \cap (\Omega_h - \Omega \cap \Omega_h) \leqslant C_2 h^4.$$

Mais on démontre facilement que le nombre d'éléments dans $\partial\mathcal{T}_h$ est majorée pour $C_3 h^{-1}$ et la combinaison de toutes ces observations achève la démonstration. ∎

LEMME 3.4 : *Il existe une constante indépendante de h telle que*

$$\sup_{\Gamma_h} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right| \leqslant C h^3 \|\tilde{u}\|_{4,\tilde{\Omega}}. \tag{3.44}$$

Démonstration : On utilise encore les notations de la figure 1. Soit a un point quelconque sur Γ_h. On peut écrire :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(a) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(a) n_i, \qquad \bar{n} = (n_i, n_2), n_1^2 + n_2^2 = 1. \tag{3.45}$$

Mais grâce à l'équation (1.2) les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,2$ sont nulles sur Γ. Alors, l'équation (3.45) s'écrit,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(a) = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(a') \right) n_i, \tag{3.46}$$

ce qui nous donne

$$\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(a) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(a') \right| \leqslant C_1 h^3 |\tilde{u}|_{2,\infty,\Omega}. \tag{3.47}$$

Mais d'après le théorème de Sobolev,

$$H^4(\tilde{\Omega}) \to C^2(\bar{\tilde{\Omega}})$$

(puisque on peut toujours supposer que $\tilde{\Omega}$ est régulier) et par conséquent

$$|\tilde{u} - u_h|_{1,\Omega_h} + |\Delta\tilde{u} + \varphi_h|_{0,\Omega_h} \leqslant \mathrm{Ch}\left(\|\tilde{u}\|_{4,\tilde{\Omega}} + |\tilde{u}|_{4,\infty,\tilde{\Omega}} + |\tilde{f}|_{0,\infty,\tilde{\Omega}}\right) + \sup_{\underline{w}_h \in \underline{W}_h} \frac{|\tilde{a}_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h) - a_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h)|}{\|\underline{w}_h\|} + \sup_{\underline{w}_h \in \underline{W}_h} \frac{|\tilde{f}_h(\underline{w}_h) - f_h(\underline{w}_h)|}{\|\underline{w}_h\|}$$

$$+ \sup_{\underline{w}_h \in \underline{W}_h} \frac{|\tilde{b}_h(\underline{w}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u})) - b_h(\underline{w}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u}))|}{\|\underline{w}_h\|}$$

$$+ \sup_{\chi_h \in Y_h} \frac{|\tilde{b}_h(\underline{v}_h, \chi_h) - b_n(\underline{v}_h, \chi_h)|}{|\chi_h|_{0,\Omega_h}} \tag{3.49}$$

où $\underline{v}_h = (\Pi_h \tilde{u}, \psi_h) \in \underline{V}_h$.

THÉORÈME 3.3 : *Si* $\underline{v}_h = (\Pi_h \tilde{u}, \psi_h) \in V_h$, *alors il existe une constante* C *indépendante de* h *telle que*

$$\sup_{\underline{w}_h \in \underline{W}_h} \frac{|\tilde{a}_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h) - a_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h)|}{\|\underline{w}_h\|} \leqslant Ch \, \|\tilde{u}\|_{3,\tilde{\Omega}} \tag{3.50}$$

Démonstration : Posons

$$\underline{w}_h = (w_h, \chi_h), \; \psi_h|_K = p_K, \qquad \chi_h|_K = q_K, \; \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{3.51}$$

On a d'abord

$$\tilde{a}_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h) - a_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_K(p_K q_K) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \hat{E}(\hat{p}_K \hat{q}_K J_{F_k}). \tag{3.52}$$

Pour un élément $\hat{q}_K \in P(2)$ donné, la forme linéaire

$$\hat{\varphi} \in W^{4,\infty}(\hat{K}) \to E(\hat{\varphi}\hat{q}_K)$$

est continue de norme $\leqslant \hat{C} \, |\hat{q}_K|_{0,\hat{K}}$ et puis grâce à l'hypothèse (H7) elle s'annule sur l'espace P(3). Alors, utilisant le lemme de Bramble-Hilbert (*cf.* n° 8, [3]) on a

$$\hat{\varphi} \in W^{4,\infty}(\hat{K}), \qquad |\hat{E}(\hat{\varphi}\hat{q}_K)| \leqslant C \, |\hat{\varphi}|_{4,\infty,\hat{K}} \, |\hat{q}_K|_{0,\hat{K}}.$$

Soit $\hat{\varphi} = J_{F_K} \hat{p}_K$. Alors,

$$|\hat{\varphi}|_{4,\infty,\hat{K}} \leqslant \hat{C}_1 \left(\sum_{j=0}^{2} |J_{F_k}|_{4-j,\infty,\hat{K}} |\hat{p}_K|_{j,\infty,\hat{K}} \right),$$

puisque $|\hat{p}_K|_{j,\infty,\hat{K}} = 0$ pour $j > 2$.

Malheureusement, puisqu'on ne sait rien sur la régularité de la fonction $\psi_h \in Y_h$ (sauf qu'elle appartient à $H^1(\Omega_h) \subseteq L^2(\Omega)$), nous ne pouvons pas garder les semi-normes $|\hat{p}_K|_{j,\infty,\hat{K}}$.

Mais pour $j \geqslant 1$, $|p|_{j,\infty,\hat{K}}$ et inf. $|\hat{p} + q|_{0,\hat{K}}$ définissant deux normes équivalentes sur l'espace (de dimension finie) $P(2)/P(j-1)$ et on peut donc écrire

$$|\hat{\varphi}|_{4,\infty,\hat{K}} \leqslant \hat{C}_2 \sum_{j=0}^{2} |J_{F_k}|_{4-j,\infty,\hat{K}} |\hat{p}_K|_{0,\hat{K}}.$$

Utilisant la régularité de la famille de triangulations, on obtient (*cf.* n^{os} 10 et 11 dans [3]).

$$|\hat{E}(J_{F_K}\,\hat{p}_K\hat{q}_K)| \leqslant \hat{C}_3 h_K^2\,|p_K|_{0,K}\,|q_K|_{0,K}, \tag{3.53}$$

d'où

$$\begin{aligned}|\tilde{a}_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h) - a_h(\underline{v}_h, \underline{w}_h)| &\leqslant \hat{C}_4 h^2\,|\psi_h|_{0,\Omega_h}\,|h|_{0,\Omega_h}\\ &\leqslant C_5 h\,|\Pi_h\tilde{u}|_{1,\Omega_h}\,\|\underline{w}_h\|\\ &- Ch\,\|\tilde{u}\|_{3,\tilde{\Omega}}\,\|\underline{w}_h\|\end{aligned} \tag{3.54}$$

d'après les relations (3.30) et (3.41). La conclusion s'ensuit immédiatement.

Suivant la méthode de démonstration du théorème 4, n° 8, [3], on obtient, de la même façon, le résultat ci-dessous :

THÉORÈME 3.4 : *Il existe des constantes C_1 et C_2 indépendantes de h telles que*

$$\sup_{\underline{w}_h \in \underline{W}_h} \frac{|\tilde{b}_h(\underline{w}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u})) - b_h(\underline{w}_h, \Pi_h(\Delta\tilde{u}))|}{\|\underline{w}_h\|} \leqslant C_1 h^2\,\|\tilde{u}\|_{4,\tilde{\Omega}}, \tag{3.55}$$

$$\sup_{\chi_h \in Y_h} \frac{|\tilde{b}_h(\underline{v}_h, \chi_h) - b_h(\underline{v}_h, \chi_h)|}{|\chi_h|_{0,\Omega_h}} \leqslant C_2 h\,\|\tilde{u}\|_{3,\tilde{\Omega}}, \tag{3.56}$$

où $\underline{v}_h = (\Pi_h\tilde{u}, \psi_h) \in \underline{V}_h$.

THÉORÈME 3.5 : *Remplaçons l'hypothèse* (H4) *par l'hypothèse :*

(H4′) *La fonction f admet une extension $\tilde{f}$ sur $\tilde{\Omega}$ qui appartient à $W^{2,q}(\tilde{\Omega})$* pour un $q \geqslant 2$.

Alors, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\sup_{\underline{w}_h \in \underline{W}_h} \frac{|\tilde{f}_h(\underline{w}_h) - f_h(\underline{w}_h)|}{\|\underline{w}_h\|} \leqslant \mathrm{C}h^2\,\|\tilde{f}\|_{2,q,\tilde{\Omega}}. \tag{3.57}$$

Démonstration : Soit $\underline{w}_h = (w_h, \chi_h) \in \underline{W}_h$, et soit $w_{h|K} = p_K$.

Alors on a $|\tilde{f}_h(\underline{w}_h) - f_h(\underline{w}_h)| \leqslant \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |E_K(\tilde{f}p_K)|$.

Or, d'après le théorème 5 (n° 11, [3]), on a

$$|E_K(\tilde{f}p_K)| \leqslant C_1 h_K^2 h_K^{2(1/2 - 1/q)}\,\|\tilde{f}\|_{2,q,K}\,\|P_K\|_{1,K}$$

soit encore

$$|E_K(\tilde{f}p_K)| - C_2 h_K^2 (m(\tilde{K}))^{1/2 - 1/q}\,\|\tilde{f}\|_{2,q,K}\,\|p_K\|_{1,K}, \tag{3.58}$$

où $\tilde{K}$ est l'élément « droit » associé à K. On obtient donc

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_h(\underline{w}_h) - \tilde{f}_h(\underline{w}_h)| &\leqslant C_3 h^2 \, (m(\underset{K}{\cup}\tilde{K}))^{1/2-1/q} \, \|\tilde{f}\,^2_{K,q,\Omega_h} \|w_h\|_{1,\Omega h} \\ &\leqslant C_4 h^2 \, \|\tilde{f}\|_{K,q,\tilde{\Omega}} \, |w_h|_{1,\Omega_h} \end{aligned} \tag{3.59}$$

puisque $w_h \in X_h$. Mais la quantité $m\ (\underset{K}{\cup}K)$ peut être majorée par une constante indépendante de h. Alors on a

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_h(\underline{w}_h) - f_h(\underline{w}_h)| &\leqslant Ch^2 \|\tilde{f}\|_{K,q,\tilde{\Omega}} \, |w_h|_{1,\Omega_h} \\ &\leqslant Ch^2 \, \|\tilde{f}\|_{K,q,\tilde{\Omega}} \, \|\underline{w}_h\| \end{aligned} \tag{3.60}$$

et la relation (3.57) en découle. ∎

REMARQUE 3.5 : L'hypothèse (H4)′ est plus forte que l'hypothèse (H4). Si la frontière de $\tilde{\Omega}$ est assez régulière on a l'inclusion continue

$$W^{K,q}(\tilde{\Omega}) \to C^0(\bar{\tilde{\Omega}})$$

et on obtient

$$\|\tilde{f}\|_{0,\infty,\tilde{\Omega}} \leqslant C \, \|\tilde{f}\|_{K,q,\tilde{\Omega}}.$$

Combinant la majoration (3.49) et les résultats des théorèmes 3.3-3.5, on obtient le résultat ci-dessous.

THÉORÈME 3.6 : *Supposons que les hypothèses* H1-H3, H4′ *et* H5-H7 *sont valables. Alors la méthode converge et on obtient la majoration d'erreur*

$$|\tilde{u} - u_h|_{1,\Omega_h} + |\Delta\tilde{u} + \varphi_h|_{0,\Omega_h} \leqslant Ch(\|\tilde{u}\|_{4,\infty,\tilde{\Omega}} + \|\tilde{f}\|_{2,q,\tilde{\Omega}}). \tag{3.61}$$

REMARQUE 3.6 : On a obtenu dans le cas des polynômes de degré $\leqslant 2$, le même ordre de convergence que celui obtenu dans [7] pour les éléments « droits ». Mais pour obtenir le même ordre de convergence dans le cas des polynômes de degré $\leqslant k$, il nous faudrait une hypothèse beaucoup plus forte à la place de l'hypothèse (H7), car on ne sait rien sur la régularité de la deuxième coordonnée de l'élément $\underline{u}_h \in \underline{V}_h$ dans les théorèmes (3.3) et (3.4). On serait alors obligé d'employer le lemme de Bramble-Hilbert de façon plus « complète ».

REFERENCES

1. J. F. BOURGAT, *Numerical study of a dual iterative method for solving a finite element approximation of the biharmonic equation*, Computer Methods in Apliey Mechanics and Engineering, 9, 1976, p. 203-218.

2. F. BREZZI and P. A. RAVIART, *Mixed finite element methods for 4th order elliptic equations*, École Polytechnique, Rapport Interne No 9, mai 1976.
3. P. G. CIARLET, *Numerical Analysis of the Finite Element Method*, Séminaires de Mathématiques Supérieures, Presses de l'Université de Montréal, 1975.
4. P. G. CIARLET and R. GLOWINSKI, *Dual iterative techniques for solving a finite element approximation of the biharmonic equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 5, 1975, p. 277-295.
5. P. G. CIARLET, P. A. RAVIART, *Interpolation theory over curved elements with applications to finite element methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1, 1972, p. 217-249.
6. P. G. CIARLET, P. A. RAVIART, The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods, 409-474, *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Ey. A. K. Aziz., Acayemic Press, 1972.
7. P. G. CIARLET, P. A. RAVIART, A mixed finite element method for the biharmonic equation, 125-145, *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, *Academic Press*, 1974.
8. J. NEČAS, *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson, Paris, 1967.