RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

PATRICK RABIER

Interpolation harmonique

RAIRO. Analyse numérique, tome 11, nº 2 (1977), p. 159-180

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_2_159_0>

R.A.I.R.O. Analyse Numérique/Numerical Analysis
(vol. 11, n° 2, 1977, p. 159 à 180)

INTERPOLATION HARMONIQUE [1]

par Patrick RABIER [2]

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *Nous étudions l'interpolation aux points d'un ensemble Σ de R^2, des fonctions harmoniques par des polynômes harmoniques de degré convenablement fixé.*

Si K désigne une partie compacte de R^2 contenant Σ, une estimation de l'approximation en fonction de paramètres géométriques de K (diamètre, « largeur ») et de l'ensemble Σ est donnée lorsque K est convexe puis dans un cas plus général.

I. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Au cours des développements ultérieurs, nous aurons constamment à utiliser diverses conséquences de l'identification de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{C}$. Afin d'éviter les confusions nous adopterons les conventions ci-après. Désignons par τ l'application :

$$\tau : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \to \tau(x, y) = x + iy \in \mathbf{C},$$

qui réalise l'isomorphisme ($\mathbf{R}$-linéaire) entre $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$. Soit E une partie de $\mathbf{R}^2$ et F un ensemble quelconque. Si f est une fonction de E dans F, nous noterons :

$$\tau_* f = f \circ \tau^{-1} : \tau(E) \to F. \tag{1.1}$$

Réciproquement, si f est une fonction de $\tau(E)$ dans F, nous noterons :

$$\tau^* f = f \circ \tau : E \to F. \tag{1.2}$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $\mathscr{H}(\Omega)$ désignera l'espace vectoriel réel des fonctions harmoniques dans Ω. Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ un multi-entier. On pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{(longueur de } \alpha\text{)}. \tag{1.3}$$

Soient alors $v \in \mathscr{H}(\Omega)$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$; on suppose que $|\alpha| \geq 1$. Nous allons mettre en évidence une écriture « canonique » de $D^\alpha v$ où $D^\alpha v = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x^{\alpha_1} \, \partial y^{\alpha_2}}$.

[1] Manuscrit reçu le 14 novembre 1975.
[2] Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie.

De façon précise :

$$|\alpha| \text{ pair : } \begin{cases} \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ pairs entraîne } D^\alpha v - \varepsilon D^\beta v, \varepsilon = \pm 1, \beta = (|\alpha|, 0). \\ \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ impairs entraîne } D^\alpha v = \varepsilon D^\beta v, \varepsilon = \pm 1, \beta = (|\alpha| - 1, 1). \end{cases} \tag{1.4}$$

$|\alpha|$ impair :

$$\begin{cases} \alpha_1 \text{ pair et } \alpha_2 \text{ impair entraîne } D^\alpha v - \varepsilon D^\beta v, \varepsilon = \pm 1, \beta = (|\alpha| - 1, 1). \\ \alpha_1 \text{ impair et } \alpha_2 \text{ pair entraîne } D^\alpha v = \varepsilon D^\beta v, \varepsilon = \pm 1, \beta = (|\alpha|, 0). \end{cases} \tag{1.5}$$

C'est évident pour $|\alpha| = 1$. Pour $|\alpha| \geq 2$, cela découle du fait que v est harmonique, donc aussi $D^\gamma v$ pour tout $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Il y a donc deux dérivations « canoniques » de longueur donnée n pour $n > 0$ (et une seule pour $n = 0$). Pour $n \in \mathbf{N}$, nous désignerons par A_n l'ensemble des multi-entiers « canoniques » de longueur $k \leq n$. L'ensemble A_n possède $2n + 1$ éléments, c'est-à-dire :

$$A_n = \{ (0, 0) \} \cup \{ (k, 0), (k - 1, 1) ; 1 \leq k \leq n \}.$$

Considérons maintenant une fonction f à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert Ω et un entier m positif ou nul. Alors, pour tout point (x, y) de Ω, $D^m f(x, y)$ appartient à $\mathscr{L}_m(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ où $\mathscr{L}_m(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel de dimension 2^m sur $\mathbf{R}$ des applications m-linéaires de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.

Compte tenu que $D^m f(x, y)$ est symétrique, la norme induite par la norme euclidienne (c'est-à-dire lorsque $\mathscr{L}_m(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ est identifié à $\mathbf{R}^{2^m}$) de $D^m f(x, y)$ est donnée par :

$$\|D^m f(x, y)\| = \left\{ \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left[\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k}(x, y) \right]^2 \right\}^{1/2}. \tag{1.6}$$

Pour les questions relatives au calcul différentiel, on pourra consulter [1].

Puisque dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, si $[\![D^m f(x, y)]\!]$ désigne la norme :

$$\operatorname*{Sup}_{\|\xi_1\| = \dots = \|\xi_m\| = 1} |D^m f(x, y) . (\xi_1, \cdots, \xi_m)|,$$

il existe deux constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de m telles que :

$$C_1 \|D^m f(x, y)\| \leq [\![D^m f(x, y)]\!] \leq C_2 \|D^m f(x, y)\|. \tag{1.7}$$

Le lemme suivant sera souvent utilisé par la suite :

LEMME 1.1 : *Soient U une fonction analytique de la variable $z = x + iy$ dans l'ouvert $\tau(\Omega)$ et m un entier supérieur ou égal à 1. On a :*

$$|U^{(m)}(z)| = \frac{1}{\sqrt{2^{m-1}}} \|D^m(\tau^* \operatorname{Re} U)(x, y)\|,$$

où $\|.\|$ désigne la norme de $\mathscr{L}_m(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ induite par la norme euclidienne.

Démonstration :

Posons Re $U = u$. Grâce à (1.6) nous avons :

$$\|D^m \tau^* u(x, y)\|^2 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left[\frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^{m-k} \partial y^k}(x, y) \right]^2.$$

Comme la fonction $\tau^* u$ est harmonique, on tire de (1.4) et (1.5) que :

$$\left| \frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^{m-k} \partial y^k}(x, y) \right| = \left| \frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^{m-1} \partial y}(x, y) \right| \text{ si } k \text{ est impair,}$$

$$\left| \frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^{m-k} \partial y^k}(x, y) \right| = \left| \frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^m}(x, y) \right| \text{ si } k \text{ est pair.}$$

D'où l'identité :

$$\|D^m \tau^* u(x, y)\|^2 = \left\{ \sum_{\substack{k \text{ impair} \\ k \leqslant m}} \binom{m}{k} \right\} \left[\frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^{m-1} \partial y}(x, y) \right]^2 + \left\{ \sum_{\substack{k \text{ pair} \\ k \leqslant m}} \binom{m}{k} \right\} \left[\frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^m}(x, y) \right]^2.$$

Mais on a $\sum_{\substack{k \text{ impair} \\ k \leqslant m}} \binom{m}{k} = \sum_{\substack{k \text{ pair} \\ k \leqslant m}} \binom{m}{k} = 2^{m-1}$ et donc :

$$\|D^m \tau^* u(x, y)\|^2 = 2^{m-1} \left\{ \left[\frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^{m-1} \partial y}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^m}(x, y) \right]^2 \right\}. \quad (1 \cdot 8)$$

Par ailleurs, si V est une fonction holomorphe dans l'ouvert $\tau(\Omega)$, on remarque que $V'(z) = \dfrac{\partial \tau^* V}{\partial x}(x, y)$ puisque la dérivée de V ne dépend pas de la direction.

Écrivons $V = \text{Re } V + i \text{ Im } V$; alors : $\tau^* V = \tau^* \text{Re } V + i\tau^* \text{Im } V$.

Par suite :

$$V'(z) = \frac{\partial \tau^* \text{Re } V}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial \tau^* \text{Im } V}{\partial x}(x, y).$$

Il découle des équations de Cauchy-Riemann que :

$$|V'(z)|^2 = \left[\frac{\partial \tau^* \text{Re } V}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \tau^* \text{Re } V}{\partial y}(x, y) \right]^2.$$

Choisissons $V = U^{(m-1)}$. Puisque $\tau^*(\operatorname{Re} U^{(m-1)})(x, y) = \dfrac{\partial^{m-1} \tau^* u}{\partial x^{m-1}}(x, y)$, on a :

$$|U^{(m)}(z)|^2 = \left[\frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^m}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial^m \tau^* u}{\partial x^{m-1}\, \partial y}(x, y)\right]^2.$$

En se reportant à (1.8), on achève la démonstration.

L'outil nécessaire à l'étude précédente se trouve dans [2].

Supposons que l'ouvert Ω est simplement connexe et prenons U fonction holomorphe dans $\tau(\Omega)$. Fixons $\zeta \in \mathbf{C}$ et considérons la fonction de la variable $z \in \tau(\Omega)$:

$$F(z) = U(z) + U'(z)(\zeta - z) + \ldots + \frac{U^{(n)}(z)}{n!}(\zeta - z)^n.$$

On vérifie sans difficulté que :

$$F'(z) = \frac{U^{(n+1)}(z)}{n!}(\zeta - z)^{n+1}.$$

Si $\zeta \in \tau(\Omega)$, $F(\zeta)$ est bien défini et l'on a :

$$F(\zeta) - F(z) = \int_z^\zeta F'(\xi)\, d\xi,$$

où l'intégrale du second membre est une intégrale curviligne qui peut être calculée le long de tout chemin de $\tau(\Omega)$ d'origine z et d'extrémité ζ. L'identité précédente s'écrit aussi :

$$U(\zeta) = U(z) + U'(z)(\zeta - z) + \ldots + \frac{U^{(n)}(z)}{n!}(\zeta - z)^n + \int_z^\zeta \frac{(\zeta - \xi)^n}{n!} U^{(n+1)}(\xi)\, d\xi. \quad (1.9)$$

La formule ci-dessus est valable pour tout z et tout ζ dans $\tau(\Omega)$; nous aurons à l'utiliser à plusieurs reprises et chaque fois que nous emploierons le terme « Formule de Taylor » c'est de la formule (1.9) qu'il s'agira.

Signalons également le lemme ([5], chapitre V, paragraphe 4) :

LEMME 2.1 : *Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux ouverts bornés simplement connexes de* $\mathbf{C}$, *de frontières respectives $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On suppose que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux courbes fermées simples de Jordan. Soit aussi Φ une représentation conforme de $\mathscr{D}_1$ sur $\mathscr{D}_2$. Alors, Φ se prolonge en un homéomorphisme (encore noté Φ) de $\mathscr{D}_1 \cup \mathscr{C}_1$ sur $\mathscr{D}_2 \cup \mathscr{C}_2$ (de sorte que $\Phi|_{\mathscr{C}_1}$ est un homéomorphisme de $\mathscr{C}_1$ sur $\mathscr{C}_2$).*

Il est fondamental pour la suite d'établir une inégalité de Markov en deux dimensions. Nous exposerons ici le point de vue de [6] mais on trouvera dans [4] une étude de ce sujet par une méthode différente.

Soit K une partie compacte convexe de $\mathbf{R}^2$, d'intérieur non vide ; soit $t_0 \in \partial K$ et u un vecteur unitaire. On considère l'hyperplan normal à u passant par t_0 :

$$\mathscr{H}_u = \{ t \in \mathbf{R}^2/(t - t_0, u) = 0 \},$$

où $(\,,\,)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^2$. On dira que $\mathscr{H}_u$ est un hyperplan d'appui de K en t_0 s'il ne contient pas de point intérieur à K. Alors, en changeant éventuellement u en $-u$, on peut supposer que $(t - t_0, u) \leq 0$ lorsque t parcourt K, auquel cas u est appelé vecteur normal extérieur à K en t_0.

Nous citerons les deux résultats suivants sans démonstration (*cf.* [6]) :

– Si $t_0 \in \partial K$, il existe au moins un hyperplan d'appui de K en t_0.

– Pour chaque direction u, il existe exactement deux hyperplans d'appui de K, l'un ayant le vecteur normal extérieur u et l'autre le vecteur normal extérieur $-u$.

Ils sont séparés par la distance $d_u > 0$.

On pose alors :

$$\lambda(K) = \operatorname*{Inf}_{\|u\|=1} d_u, \tag{1.10}$$

où $\|\,.\,\|$ est la norme euclidienne de $\mathbf{R}^2$, la quantité $\lambda(K)$ est appelée « largeur de K » ; nos hypothèses sur K font que $\lambda(K) > 0$.

Si $f \in \mathscr{C}^\infty(K)$ (pour la définition de $\mathscr{C}^\infty(K)$, on pourra consulter [4]) et si $m \in \mathbf{N}$, on pose :

$$|f|_{m,\infty,K} = \operatorname*{Sup}_{(x,y)\in K} \|D^m f(x, y)\|, \tag{1.11}$$

où $\|D^m f(x, y)\|$ est donnée par (1.6). Le résultat important de [6] est :

LEMME 3.1 : *Soit p un polynôme réel défini sur $\mathbf{R}^2$ de degré inférieur ou égal à $k \in \mathbf{N}$. On a alors :*

$$|p|_{1,\infty,K} \leq \frac{4k^2}{\lambda(K)} |p|_{0,\infty,K}.$$

Nous en déduisons :

COROLLAIRE 1.1 : *Soit p un polynôme de la variable complexe $z = x + iy$, de degré $k \in \mathbf{N}$. Alors :*

$$\operatorname*{Sup}_{z\in\tau(K)} |p'(z)| \leq \frac{4k^2}{\lambda(K)} \operatorname*{Sup}_{z\in\tau(K)} |p(z)|.$$

Démonstration :

On applique le Lemme 1.1 :

$$|p'(z)| = \|D(\tau^* \operatorname{Re} p)(x, y)\|.$$

Comme τ^* Re p est un polynôme réel défini sur $\mathbf{R}^2$ de degré inférieur ou égal à k, le Lemme 3.1 fournit pour $(x, y) \in K$:

$$\|D(\tau^* \operatorname{Re} p)(x, y)\| \leq |\tau^* \operatorname{Re} p|_{1,\infty,K} \leq \frac{4k^2}{\lambda(K)} |\tau^* \operatorname{Re} p|_{0,\infty,K}.$$

Puisque :

$$|\tau^* \operatorname{Re} p|_{0,\infty,K} = \operatorname*{Sup}_{(x,y)\in K} |\tau^* \operatorname{Re} p(x, y)| \leq \operatorname*{Sup}_{z\in\tau(K)} |p(z)|.$$

on conclut que :

$$|p'(z)| \leq \frac{4k^2}{\lambda(K)} \operatorname*{Sup}_{z\in\tau(K)} |p(z)|.$$

Le membre de droite étant indépendant de $z \in \tau(K)$, on déduit le Corollaire 1.1.

COROLLAIRE 2.2 : *Sous les mêmes hypothèses, on a :*

$$\forall 0 \leq m \leq k, \qquad \operatorname*{Sup}_{z\in\tau(K)} |p^{(m)}(z)| \leq \left[\frac{4k^2}{\lambda(K)}\right]^m \operatorname*{Sup}_{z\in\tau(K)} |p(z)|.$$

Démonstration : Immédiate avec le Corollaire 1.1.

Pour terminer, signalons que l'énoncé d'une propriété d'une fonction f sous-entendra toujours que cette propriété est vérifiée comme fonction de variables réelles si f est définie sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ et comme fonction de variable complexe si f est définie sur un sous-ensemble de $\mathbf{C}$. Par exemple, si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, « f analytique sur $\tau(\Omega)$ » signifie que f est une fonction holomorphe de la variable complexe $z = x + iy$ alors que « f analytique sur Ω » signifierait que f est analytique par rapport aux variables réelles x et y.

II. INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soit K une partie compacte convexe de $\mathbf{R}^2$, d'intérieur non vide $\overset{\circ}{K}$ et soient par ailleurs N points de $K (N \geq 1)$ notés :

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N).$$

On pose :

$$\Sigma = \{ (x_j, y_j) \}_{j=1}^N \subset K.$$

Si la fonction τ est définie comme dans le paragraphe I, il est commode d'écrire :

$$a_j = \tau(x_j, y_j) = x_j + iy_j \quad ; \quad 1 \leq j \leq N.$$

Pour tout $l = 1, \ldots, N$, il existe un et un seul polynôme à valeurs complexes p_l de degré inférieur ou égal à $N - 1$ tel que :

$$p_l(a_j) = \delta_{lj}, \tag{2.1}$$

où δ_{lj} désigne le symbole de Kronecker. Ce polynôme est d'ailleurs donné par la formule explicite :

$$p_l(z) = \frac{\prod_{j \neq l} (z - a_j)}{\prod_{j \neq l} (a_l - a_j)}. \tag{2.2}$$

Soit alors $P \in \mathscr{P}_{N-1}$, où $\mathscr{P}_{N-1}$ désigne l'espace vectoriel complexe des polynômes sur $\mathbf{C}$ de degré inférieur ou égal à $N - 1$. Le polynôme P s'écrit alors de manière unique :

$$P(z) = \sum_{l=1}^{N} P(a_l) p_l(z).$$

En effet, le polynôme $P(z) - \sum_{l=1}^{N} P(a_l) p_l(z)$. à N zéros distincts (les a_l pour $l = 1, \ldots, N$), comme il appartient à $\mathscr{P}_{N-1}$, il est identiquement nul.

Puisque K est convexe, il en va de même de $\mathring{K}$ et donc de $\tau(\mathring{K})$ qui est l'intérieur de $\tau(K)$. Soit U une fonction holomorphe dans $\tau(\mathring{K})$, continue sur $\tau(K)$. Fixons $z \in \tau(\mathring{K})$. Pour $\zeta \in \tau(K)$, on écrit :

$$U(\zeta) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{U^{(j)}(z)}{j!} (\zeta - z)^j + \mathscr{R}(z, \zeta). \tag{2.3}$$

La fonction $\mathscr{R}(z, \zeta)$ est continue sur l'ensemble $\tau(\mathring{K}) \times \tau(K)$ puisque la formule (2.3) équivaut à

$$\mathscr{R}(z, \zeta) = U(\zeta) - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{U^{(j)}(z)}{j!} (\zeta - z)^j. \tag{2.4}$$

Maintenant, on définit le polynôme $\tilde{U} \in \mathscr{P}_{N-1}$ par :

$$\tilde{U}(z) = \sum_{l=1}^{N} U(a_l) p_l(z),$$

d'où l'on tire :

$$\tilde{U}^{(m)}(z) = \sum_{l=1}^{N} U(a_l) p_l^{(m)}(z) \qquad \text{pour} \quad m \in \mathbb{N}.$$

En faisant $\zeta = a_l$ dans (2.3), on obtient :

$$\tilde{U}^{(m)}(z) = \sum_{l=1}^{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{U^{(j)}(z)}{j!} (a_l - z)^j + \mathscr{R}(z, a_l) \right) p_l^{(m)}(z). \tag{2.5}$$

Nous allons voir qu'en fait, on a une expression plus simple de la formule (2.5); précisément :

LEMME 1.2 : *Pour* $0 \leq m \leq N - 1$, *on a :*

$$\tilde{U}^{(m)}(z) = U^{(m)}(z) + \sum_{l=1}^{N} \mathcal{R}(z, a_l) p_l^{(m)}(z).$$

Démonstration : Si l'on reprend la formule (2.5), il s'agit de démontrer que :

$$\sum_{l=1}^{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{U^{(j)}(z)}{j!} (a_l - z)^j \right) p_l^{(m)}(z) = U^{(m)}(z).$$

Le membre de gauche s'écrit :

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{U^{(j)}(z)}{j!} \sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^j p_l^{(m)}(z).$$

Nous allons donc démontrer que :

$$\forall 0 \leq j_0 \leq N - 1, \qquad \sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^{j_0} p_l^{(m)}(z) \equiv m!\, \delta_{j_0 m}.$$

Supposons d'abord que $m = 0$.

Pour $j_0 = 0$, il découle de la définition de p_l que l'on a :

$$\sum_{l=1}^{N} p_l(z) \equiv 1.$$

Pour $j_0 > 0$, nous raisonnerons par récurrence; soit $U(z) = z^{j_0}$. Comme la condition $U \in \mathcal{P}_{N-1}$ entraîne $U = \tilde{U}$ et $\mathcal{R}(z, \zeta) \equiv 0$ (par les formules (2.3) ou (2.4)), on a par la formule (2.5) :

$$U(z) = \sum_{l=1}^{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{U^{(j)}(z)}{j!} (a_l - z)^j \right) p_l(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{U^{(j)}(z)}{j!} \sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^j p_l(z).$$

On utilise alors le fait que $U^{(j)}(z) \equiv 0$ pour $j > j_0$ et l'hypothèse de récurrence selon laquelle $j < j_0$ entraîne :

$$\sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^j p_l(z) \equiv \delta_{j,0}.$$

On aboutit alors à :

$$U(z) = U(z) + \frac{U^{(j_0)}(z)}{j_0!} \sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^{j_0} p_l(z).$$

De cette formule, et puisque $U^{(j_0)}(z) = j_0!$, on conclut que :

$$\sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^{j_0} p_l(z) \equiv 0,$$

ce qui achève la démonstration dans le cas où $m = 0$.

Étudions maintenant le cas $m = N - 1$. En prenant successivement

$$j_0 = 0, \ldots, N-2 \qquad \text{et} \qquad U(z) = z^{j_0},$$

un raisonnement analogue au précédent montre que :

$$\forall 0 \leq j_0 \leq N-2, \qquad \sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^{j_0} p_l^{(N-1)}(z) \equiv 0.$$

Ensuite, en prenant pour fonction $U(z)$ le polynôme z^{N-1}, on trouve que :

$$\sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^{N-1} p_l^{(N-1)}(z) \equiv (N-1)!,$$

ce qui fournit le résultat annoncé pour $m = N - 1$.

Enfin, lorsque $0 < m < N - 1$, la démonstration se fait en trois étapes, chacune d'elles se résolvant par une méthode identique à celle développée dans les deux cas particuliers précédents :

$$\sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^{j_0} p_l^{(m)}(z) \equiv 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leq j_0 < m,$$

$$\sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^{m} p_l^{(m)}(z) \equiv m!,$$

$$\sum_{l=1}^{N} (a_l - z)^{j_0} p_l^{(m)}(z) \equiv 0 \qquad \text{pour} \quad m < j_0 \leq N-1.$$

REMARQUE 1.2 : Le Lemme 1.2 est une adaptation au cas complexe d'un résultat pour les fonctions de variables réelles qui est donné dans [3].

LEMME 2.2 : *Sous les hypothèses précédentes (U fonction analytique dans $\tau(\mathring{K})$, continue sur $\tau(K)$) et en supposant de plus que $|U^{(N)}(\xi)|$ est borné dans $\tau(\mathring{K})$, on a la majoration :*

$$|\mathscr{R}(z, \zeta)| \leq \frac{1}{N!} \{ \sup_{\xi \in \tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)| \} |\zeta - z|^N.$$

pour tout $z \in \tau(\mathring{K})$ et tout $\zeta \in \tau(K)$.

Démonstration : Prenons $z \in \tau(\mathring{K})$ et $\zeta \in \tau(\mathring{K})$. L'ouvert $\tau(\mathring{K})$ est convexe et la formule de Taylor (1.9) s'applique :

$$\mathscr{R}(z, \zeta) = U(\zeta) - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{U^{(j)}(z)}{j!} (\zeta - z)^j = \int_z^{\zeta} \frac{(\zeta - \xi)^{N-1}}{(N-1)!} U^{(N)}(\xi)\, d\xi.$$

Posons $\xi(t) = z + t(\zeta - z)$. L'intégrale du second membre s'écrit alors :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} U^{(N)}(z + t(\zeta - z))(\zeta - z)^N \, dt.$$

Donc :

$$|\mathcal{R}(z,\zeta)| \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} |U^{(N)}(z+t(\zeta-z))|\,|\zeta-z|^N\,dt,$$

ce qui entraîne :

$$|\mathcal{R}(z,\zeta)| \leq \left\{\int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!}\,dt\right\} \operatorname*{Sup}_{\xi\in\tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)|\,|\zeta-z|^N,$$

établissant le résultat pour $z \in \tau(\mathring{K})$ et $\zeta \in \tau(\mathring{K})$ en vertu de l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!}\,dt = \frac{1}{N!}.$$

Puisque $\tau(K)$ est un ensemble convexe fermé d'intérieur non vide, on a l'identité :

$$\tau(\overline{\mathring{K}}) = \tau(K);$$

la continuité (à z fixé dans $\tau(\mathring{K})$) de la fonction : $\zeta \to \mathcal{R}(z,\zeta)$ sur l'ensemble $\tau(K)$ permet de prolonger l'inégalité obtenue pour $z \in \tau(\mathring{K})$, $\zeta \in \tau(\overline{\mathring{K}})$. Ceci achève la démonstration.

Maintenant définissons :

$$h(K) = \text{diamètre de } K \ (= \operatorname*{Sup}_{z\in\tau(K),\,\zeta\in\tau(K)} |z-\zeta|), \tag{2.6}$$

$$\delta(\Sigma) = \operatorname*{Inf}_{l\neq j} |a_l - a_j|.$$

Nous pouvons alors énoncer :

THÉORÈME 1.2 : *Soit U une fonction analytique dans $\tau(\mathring{K})$, continue sur $\tau(K)$, telle que $|U^{(N)}(\xi)|$ est borné dans $\tau(\mathring{K})$. Pour $0 \leq m \leq N-1$, il existe une constante A ne dépendant que de m et de N telle que :*

$$\operatorname*{Sup}_{z\in\tau(\mathring{K})} |(U^{(m)} - \tilde{U}^{(m)})(z)| \leq A \frac{[h(K)]^N}{[\lambda(K)]^m} \frac{[h(K)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \operatorname*{Sup}_{\xi\in\tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)|.$$

Démonstration : Le Lemme 1.2 donne pour $z \in \tau(\mathring{K})$:

$$|U^{(m)}(z) - \tilde{U}^{(m)}(z)| \leq \sum_{l=1}^{N} |\mathcal{R}(z,a_l)\,p_l^{(m)}(z)|.$$

Puis, par le Lemme 2.2 on obtient la majoration de $|\mathcal{R}(z,a_l)|$:

$$|\mathcal{R}(z,a_l)| \leq \frac{1}{N!} \operatorname*{Sup}_{\xi\in\tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)|\,|z-a_l|^N.$$

Utilisant le fait que $|z - a_l| \leq h(K)$, on a :

$$|\mathscr{R}(z, a_l)p_l^{(m)}(z)| \leq \frac{1}{N!} \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)| \, [h(K)]^N \operatorname*{Sup}_{z \in \tau(K)} |p_l^{(m)}(z)|.$$

Le Corollaire 2.1 fournit :

$$|\mathscr{R}(z, a_l)p_l^{(m)}(z)| \leq \frac{1}{N!} \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)| \, [h(K)]^N \frac{(2N-2)^{2m}}{[\lambda(K)]^m} \operatorname*{Sup}_{z \in \tau(K)} |p_l(z)|.$$

Enfin, des formules (2.2) et (2.7), on tire :

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \tau(K)} |p_l(z)| \leq \frac{[h(K)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}}.$$

ce qui entraîne :

$$|(U^{(m)} - \tilde{U}^{(m)})(z)| \leq \frac{(2N-2)^{2m}}{(N-1)!} \frac{[h(K)]^N}{[\lambda(K)]^m} \frac{[h(K)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)|.$$

On prend alors la borne supérieure sur $\tau(\mathring{K})$ du membre de gauche, ce qui conduit à la majoration annoncée.

Remarque 2.2 : Dans le cas où $N = 1$, la seule valeur admissible de m est $m = 0$. Il faut alors comprendre l'inégalité ci-dessus comme étant :

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \tau(\mathring{K})} |U(z) - \tilde{U}(z)| \leq h(K) \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(K)} |U'(\xi)|.$$

Nous allons donner une autre version du Théorème 1.2 qui ne fait pas intervenir la largeur $\lambda(K)$ de la partie K.

Théorème 2.2 : *Soit U une fonction analytique dans $\tau(\mathring{K})$, continue sur $\tau(K)$, telle $|U^{(N)}(\xi)|$ est borné dans $\tau(\mathring{K})$. Pour $0 \leq m \leq N-1$, il existe une constante A' ne dépendant que de m et de N telle que :*

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \tau(\mathring{K})} |(U^{(m)} - \tilde{U}^{(m)})(z)| \leq A'[h(K)]^{N-m} \frac{[h(K)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)|.$$

Démonstration : Repartons de l'inégalité (cf. démonstration du Théorème 1.2) :

$$|\mathscr{R}(z, a_l)p_l^{(m)}(z)| \leq \frac{1}{N!} \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)| \, [h(K)]^N \operatorname*{Sup}_{z \in \tau(K)} |p_l^{(m)}(z)|.$$

Puisque K a pour diamètre $h(K)$, il existe une boule fermée B de rayon $h(K)$ qui contient K et l'on a par suite :

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \tau(K)} |p_l^{(m)}(z)| \leq \operatorname*{Sup}_{z \in \tau(B)} |p_l^{(m)}(z)|.$$

La boule B a pour diamètre $h(B) = 2h(K)$. Le Corollaire 2.1 donne alors :

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \tau(B)} |p_l^{(m)}(z)| \quad \frac{(2N-2)^{2m}}{[\lambda(B)]^{2m}} \operatorname*{Sup}_{z \in \tau(B)} |p_l(z)|.$$

On voit sur la définition que si B est une boule :

$$\lambda(B) = h(B);$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \tau(B)} |p_l^{(m)}(z)| \leq \frac{(2N-2)^{2m}}{[2h(K)]^{m}} \operatorname*{Sup}_{z \in \tau(B)} |p_l(z)|.$$

Finalement, puisque la formule (2.2) donne le polynôme p_l sous forme explicite, on majore le second membre de l'inégalité précédente par :

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \tau(B)} |p_l(z)| \leq \frac{[h(B)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} = \frac{[2h(K)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}}.$$

On conclut alors comme dans le Théorème 1.2.

Du Théorème 1.2 et du Théorème 2.2, nous allons déduire deux corollaires. Signalons avant tout que nous utiliserons désormais la notation (1.6).

COROLLAIRE 1.2 : *Soit U une fonction analytique dans $\tau(\mathring{K})$, continue sur $\tau(K)$. telle que $|U^{(N)}(\xi)|$ est borné dans $\tau(\mathring{K})$.*

Pour $0 \leq m \leq N-1$, il existe une constante B ne dépendant que de m et de N telle que :

$$\operatorname*{Sup}_{(x,y) \in \mathring{K}} \|(D^m(\tau^* \operatorname{Re} U) - D^m(\tau^* \operatorname{Re} \tilde{U}))(x, y)\|$$
$$\leq B \frac{[h(K)]^N}{[\lambda(K)]^m} \frac{[h(K)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \operatorname*{Sup}_{(s,t) \in \mathring{K}} \|D^N(\tau^* \operatorname{Re} U)(s, t)|.$$

Démonstration : Le Lemme 1.1 donne d'une part :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{N-1}}} \operatorname*{Sup}_{(s,t) \in \mathring{K}} \|D^N(\tau^* \operatorname{Re} U)(s, t)\| = \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\mathring{K})} |U^{(N)}(\xi)|,$$

et d'autre part, pour $1 \leq m \leq N-1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2^{m-1}}} \operatorname*{Sup}_{(x,y) \in \mathring{K}} \|(D^m(\tau^* \operatorname{Re} U) - D^m(\tau^* \operatorname{Re} \tilde{U}))(x, y)\| = \operatorname*{Sup}_{z \in \tau(\mathring{K})} |(U^{(m)} - \tilde{U}^{(m)})(z)|.$$

L'inégalité est donc prouvée par l'intermédiaire du Théorème 1.2 lorsque $1 \leq m \leq N-1$. Lorsque $m = 0$, on a simplement :

$$\operatorname*{Sup}_{(x,y) \in \mathring{K}} |(\tau^* \operatorname{Re} U - \tau^* \operatorname{Re} \tilde{U})(x, y)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{z \in \tau(\mathring{K})} |U(z) - \tilde{U}(z)|,$$

et le résultat en découle.

COROLLAIRE 2.2 : *Soit U une fonction analytique dans* $\tau(K)$, *continue sur* $\tau(K)$ *telle que* $|U^N(\xi)|$ *est borné dans* $\tau(\overset{\circ}{K})$.

Pour $0 \leq m \leq N-1$, *il existe une constante B′ ne dépendant que de m et de N telle que :*

$$\operatorname*{Sup}_{(x,y)\in\overset{\circ}{K}} \|(D^m(\tau^* \operatorname{Re} U) - D^m(\tau^* \operatorname{Re} \tilde{U}))(x, y)\| \leq B'[h(K)]^{N-m} \frac{[h(K)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \operatorname*{Sup}_{(s,t)\in\overset{\circ}{K}} \|D^N(\tau^* \operatorname{Re} U)(s, t)\|.$$

Démonstration : Identique à celle du Corollaire 1.2 mais en utilisant le Théorème 2.2 au lieu du Théorème 1.2.

Nous allons maintenant énoncer le théorème important de ce paragraphe :

THÉORÈME 3.2 : *Supposons que* ∂K *est une courbe fermée simple de Jordan. Soit u une fonction harmonique dans* $\overset{\circ}{K}$, *continue sur K et telle que* $\|D^N u(s, t)\|$ *est borné dans* $\overset{\circ}{K}$. *Il existe alors un polynôme harmonique* $\tilde{u}$ *de degré inférieur ou égal à* $N-1$, *entièrement caractérisé par la donnée de u et vérifiant :*

$$\tilde{u}(x_j, y_j) = u(x_j, y_j) \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N.$$

De plus, pour $0 \leq m \leq N-1$:

Il existe une constante B (la même que dans le Corollaire 1.2) telle que :

$$\operatorname*{Sup}_{(x,y)\in\overset{\circ}{K}} \|D^m(u - \tilde{u})(x, y)\| \leq B \frac{[h(K)]^N}{[\lambda(K)]^m} \frac{[h(K)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \operatorname*{Sup}_{(s,t)\in\overset{\circ}{K}} \|D^m u(s, t)\|.$$

Il existe une constante B′ (la même que dans le Corollaire 2.2) telle que :

$$\operatorname{Sup} \|D^m(u - \tilde{u})(x, y)\| \leq B'[h(K)]^{N-m} \frac{[h(K)]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \operatorname*{Sup}_{(s,t)\in\overset{\circ}{K}} \|D^N u(s, t)\|.$$

Démonstration : Nous allons d'abord prouver qu'il existe une fonction U, analytique dans $\tau(\overset{\circ}{K})$, continue sur $\tau(K)$, telle que $u = \tau^* \operatorname{Re} U$ et telle que $|U^{(N)}(\xi)|$ est borné dans $\tau(\overset{\circ}{K})$. Si l'on a trouvé une fonction U vérifiant les trois premières conditions, la quatrième est automatiquement satisfaite puisque par hypothèse la quantité $\|D^N u(s, t)\|$ est bornée dans $\overset{\circ}{K}$ et il suffit donc d'appliquer le Lemme 1.1.

Si K est le disque-unité fermé D, l'existence de la fonction U est une conséquence de la formule de Poisson (*cf.* par exemple [2]). Soit alors Φ une représentation conforme de $\tau(\overset{\circ}{D})$ sur $\tau(\overset{\circ}{K})$. Le Lemme 2.1 affirme que Φ se prolonge en homéomorphisme de $\tau(D)$ sur $\tau(K)$. Par suite la fonction :

$$\tau^*((\tau_* u) \circ \Phi) : \overset{\circ}{D} \to \mathbf{R},$$

est harmonique et se prolonge en fonction continue sur D. Il existe donc une fonction V analytique dans $\tau(\mathring{D})$, continue sur $\tau(D)$ telle que :

$$\tau^*((\tau_* u) \circ \Phi) = \tau^* \operatorname{Re} V,$$

l'égalité précédente étant valable sur D. Définissons alors :

$$U = V \circ \Phi^{-1}.$$

La fonction U est alors analytique dans $\tau(\mathring{K})$, continue sur $\tau(K)$ et :

$$\tau^* \operatorname{Re} U = \tau^* (\operatorname{Re} (V \circ \Phi)^{-1}) = \operatorname{Re} (V \circ \Phi^{-1}) \circ \tau = (\operatorname{Re} V) \circ \Phi^{-1} \circ \tau.$$

D'après (2.8) :

$$\operatorname{Re} V = (\tau_* u) \circ \Phi,$$

donc :

$$\tau^* \operatorname{Re} U = (\tau_* u) \circ \tau = u \circ \tau^{-1} \circ \tau = u.$$

Cette égalité, valable dans K, achève de prouver notre assertion.

Maintenant, on pose :

$$\begin{cases} \tilde{U} = \sum_{l=1}^{N} U(a_l) p_l, \\ \tilde{u} \ = \tau^* \operatorname{Re} \tilde{U}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Alors, $\tilde{u}(x_j, y_j) = u(x_j, y_j)$ pour $1 \leq j \leq N$.

En effet :

$$\operatorname{Re} \tilde{U} = \sum_{l=1}^{N} \operatorname{Re} (U(a_l) p_l) = \sum_{l=1}^{N} \operatorname{Re} U(a_l) \operatorname{Re} p_l - \operatorname{Im} U(a_l) \operatorname{Im} p_l.$$

La condition :

$$p_l(a_j) = \delta_{lj} \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N \quad ; \quad 1 \leq l \leq N,$$

entraîne :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} p_l(a_j) = \delta_{lj} & \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N ; 1 \leq l \leq N, \\ \operatorname{Im} p_l(a_j) = 0 & \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N ; 1 \leq l \leq N. \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\operatorname{Re} \tilde{U}(a_j) = \operatorname{Re} U(a_j)$ pour $1 \leq j \leq N$ et comme $a_j = \tau(x_j, y_j)$ par définition, la formule (1.2) donne :

$$\tilde{u}(x_j, y_j) = u(x_j, y_j) \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N.$$

Montrons que le polynôme $\tilde{u}$ est entièrement déterminé par la fonction u.

Soit V une fonction analytique dans $\tau(\mathring{K})$, telle que τ^* Re $V = u$. Il est bien connu (cf. [2]) que la fonction $V - U$ est alors une constante imaginaire pure, de sorte que l'on peut écrire :

$$V = U + i\rho, \ \rho \in \mathbf{R}.$$

Ceci implique que V est une fonction continue sur $\tau(K)$ et l'on peut donc définir le polynôme :

$$\tilde{V} = \sum_{l=1}^{N} V(a_l) p_l.$$

Puisque :

$$\sum_{l=1}^{N} p_l \equiv 1,$$

on a :

$$\tilde{V} = \tilde{U} + i\rho,$$

d'où l'on conclut que τ^* Re $\tilde{V} = \tau^*$ Re $\tilde{U} = \tilde{u}$. Le polynôme $\tilde{u}$ ne dépend effectivement que de la fonction harmonique u.

Enfin, les deux inégalités du Théorème 3.2 sont des conséquences immédiates des résultats ci-dessus et des Corollaires 1.2 et 2.2. Ceci achève la démonstration.

On posera :

Définition : Le polynôme $\tilde{u}$ est appelé « polynôme d'interpolation de Lagrange de u aux points de Σ ».

REMARQUE 3.2 : Si l'on s'intéresse au cas où K et $\Sigma \subset K$ varient de façon à ce que $h(K)$ tende vers 0, on voit que la quantité $\dfrac{h(K)}{\delta(\Sigma)}$ intervient de façon fondamentale dans l'évaluation de l'erreur.

En vue d'obtenir une « bonne » approximation, on souhaite que ce rapport reste borné indépendamment de K et de Σ. Outre les contraintes sur la géométrie de K, il en est une sur celle de Σ que l'on peut facilement mettre en évidence pour que cette condition soit réalisée. Puisque $\Sigma \subset K$, on a l'inégalité :

$$h(\Sigma) \leq h(K).$$

Le rapport $\dfrac{h(K)}{\delta(\Sigma)}$ ne sera borné que si le rapport $\dfrac{h(\Sigma)}{\delta(\Sigma)}$ l'est aussi. Des définitions de $h(\Sigma)$ et de $\delta(\Sigma)$, il découle facilement que cette dernière condition équivaut à :

$$|a_l - a_j| \leq C\, |a_{l'} - a_{j'}|,$$

où C est une constante indépendante de Σ et où l, j, l', j' vérifient les conditions :

$$\begin{cases} 1 \leq l \leq N ; 1 \leq j \leq N ; j \neq l, \\ 1 \leq l' \leq N ; 1 \leq j' \leq N ; j' \neq l'. \end{cases}$$

Lorsque $K = \widehat{\Sigma}$ (enveloppe convexe de Σ), on a $h(\widehat{\Sigma}) = h(\Sigma)$ et la condition précédente est à la fois nécessaire et suffisante pour que l'on ait une « bonne » approximation.

REMARQUE 4.2 : Le calcul pratique du polynôme d'interpolation de Lagrange de u aux points de Σ, $\tilde{u}$, n'est pas immédiat à partir de la fonction u. En effet, il faut connaître $U(a_l)(1 \leq l \leq N)$ pour une fonction U analytique dans $\tau(\mathring{K})$, continue sur $\tau(K)$ et telle que $u = \tau^* \operatorname{Re} U$. Nous allons voir comment (au moins du point de vue théorique) nous pouvons procéder en évitant toutefois de calculer la fonction U.

Choisissons $(x_0, y_0) \in \mathring{K}$. Désignons par U la fonction analytique dans $\tau(\mathring{K})$, continue sur $\tau(K)$ dont la partie imaginaire est nulle en $a_0 = \tau(x_0, y_0)$ et telle que $u = \tau^* \operatorname{Re} U$. Posons :

$$v = \tau^* \operatorname{Im} U ;$$

des équations de Cauchy-Riemann, on tire que pour tout élément $h = (h_1, h_2)$ de $\mathbf{R}^2$ et tout point (x, y) de $\mathring{K}$:

$$Dv(x, y) \,.\, (h_1, h_2) = Du(x, y) \,.\, (h_2, -h_1). \tag{2.10}$$

L'ensemble K étant convexe, on sait que pour (x, y) dans $\mathring{K}$, on a :

$$v(x, y) = \int_0^1 Dv(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \,.\, (x - x_0, y - y_0)\, dt.$$

Par la formule (2.10), on obtient :

$$v(x, y) = \int_0^1 Du(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \,.\, (y - y_0, x_0 - x)\, dt. \tag{2.11}$$

La formule (2.11) est encore valable pour (x, y) dans K. En effet, on a déjà remarqué que $K = \overline{\mathring{K}}$ et pour $(x, y) \in K$ on a :

$$\varepsilon(x_0, y_0) + (1 - \varepsilon)(x, y) \in K \qquad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Par le changement de variable $s = \dfrac{t}{1 - \varepsilon}$ on obtient :

$$\int_0^{1-\varepsilon} Du(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \,.\, (y - y_0, x_0 - x)\, dt$$

$$= \int_0^1 Du(x_0 + s(1-\varepsilon)(x - x_0), y_0 + s(1-\varepsilon)(y - y_0)) .$$
$$((1-\varepsilon)(y - y_0), (1-\varepsilon)(x_0 - x))\, ds.$$

Grâce à la formule (2.11), on reconnaît au membre de droite l'expression de $v(x_0 + (1-\varepsilon)x, y_0 + (1-\varepsilon)y)$. La continuité de U entraînant celle de v, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} Du(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) . (y - y_0, x_0 - x)\, dt = v(x, y).$$

Ainsi :

$$v(x_l, y_l) = \int_0^1 Du(x_0 + t(x_l - x_0), y_0 + t(y_l - y_0)) . (y - y_0, x_0 - x_l)\, dt.$$

pour $1 \leq l \leq N$.

On connaît alors $U(a_l)$ et l'on peut calculer les polynômes $\tilde{U}$ et $\tilde{u}$ par la formule (2.9).

REMARQUE 5.2: Les résultats des Corollaires 1.2 et 2.2 ainsi que du Théorème 3.2 ont été donnés avec la norme (1.6). Ils restent évidemment valables si l'on emploie n'importe quelle norme équivalente, en particulier celle qui intervient dans (1.7).

III. INTERPOLATION DE LAGRANGE SUR DES ENSEMBLES NON CONVEXES

Nous nous proposons ici d'étendre certains résultats du paragraphe II à des cas plus généraux. Les données sont les suivantes :

– un ouvert borné simplement connexe de $\mathbf{R}^2$, Ω, dont la frontière est une courbe fermée simple de Jordan;

– un ouvert borné convexe de $\mathbf{R}^2$, Ω_0.

Soit φ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Ω_0 tel qu'il existe deux constantes positives $M_1(\varphi, \Omega, \Omega_0)$ et $M_{-1}(\varphi, \Omega, \Omega_0)$ vérifiant :

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} [D\varphi(x, y)] \leq M_1(\varphi, \Omega, \Omega_0); \quad \sup_{(x_0,y_0)\in\Omega_0} [D\varphi^{-1}(x_0, y_0)] \leq M_{-1}(\varphi, \Omega, \Omega_0), \tag{3.1}$$

avec les notations du paragraphe *I*. Nous conviendrons de désigner par $\mathscr{D}(\Omega, \Omega_0)$ l'ensemble des $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes de Ω sur Ω_0 qui vérifient les conditions (3.1).

On définit alors l'application

$\gamma : (z, t, \zeta) \in \tau(\Omega) \times [0, 1] \times \tau(\Omega) \to \gamma(z, t, \zeta)$

$$= (\tau_* \varphi)^{-1} [(\tau_* \varphi)(z) + t((\tau_* \varphi)(\zeta) - (\tau_* \varphi)(z))] \in \tau(\Omega) \quad (3.2)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \gamma(z, 0, \zeta) = z, \\ \gamma(z, 1, \zeta) = \zeta, \\ \gamma(z, t, z) = z \qquad \text{pour tout} \quad t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3.3)$$

De plus, l'application partielle $t \to \gamma(z, t, \zeta)$ est continûment différentiable dans $[0, 1]$ à z et ζ fixés dans $\tau(\Omega)$ et :

$$\gamma'_t(z, t, \zeta) = D(\tau_* \varphi)^{-1} [(\tau_* \varphi)(z) + t((\tau_* \varphi)(\zeta) - (\tau_* \varphi)(z))] \\ . [(\tau_* \varphi)(\zeta) - (\tau_* \varphi)(z)], \quad (3.4)$$

où γ'_t désigne la dérivée partielle $\dfrac{\partial \gamma}{\partial t}$.

Soit U une fonction analytique dans l'ouvert $\tau(\Omega)$. La formule de Taylor (1.9) peut s'écrire :

$$U(\zeta) = U(z) + U'(z)(\zeta - z) + \dots + \frac{U^{(n)}(z)}{n!}(\zeta - z)^n \\ + \int_0^1 \frac{(\zeta - \gamma(z, t, \zeta))^n}{n!} U^{(n+1)}(\gamma(z, t, \zeta))\gamma'_t(z, t, \zeta)\, dt \quad (3.5)$$

Supposons la fonction U continue sur $\tau(\overline{\Omega})$ et $|U^{(n+1)}(\xi)|$ borné sur $\tau(\Omega)$.

Nous allons chercher une majoration du module de :

$$\mathscr{R}(z, \zeta) = \int_0^1 \frac{(\zeta - \gamma(z, t, \zeta))^n}{n!} U^{(n+1)}(\gamma(z, t, \zeta))\gamma'_t(z, t, \zeta)\, dt.$$

Comme $\zeta = \gamma(z, 1, \zeta)$, le théorème des accroissements finis fournit :

$$|\zeta - \gamma(z, t, \zeta)| = |\gamma(z, 1, \zeta) - \gamma(z, t, \zeta)| \leq (1 - t) \operatorname*{Sup}_{s \in [0, 1]} |\gamma'_s(z, s, \zeta)|,$$

si bien que :

$$|\mathscr{R}(z, \zeta)| \leq \frac{1}{(n + 1)!} (\operatorname*{Sup}_{s \notin [0, 1]} |\gamma'_s(z, s, \zeta)|^{n+1} \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\Omega)} |U^{(n+1)}(\xi)|.$$

De l'identité (3.4) on déduit

$$|\mathscr{R}(z, \zeta)| \leq \frac{(M_{-1}(\varphi, \Omega, \Omega_0))^{n+1}}{(n + 1)!} \|\tau_* \varphi(\zeta) - \tau_* \varphi(z)\|^{n+1} \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\Omega)} |U^{(n+1)}(\xi)|.$$

Définissons (*cf.* [1]) la distance sur Ω, d_Ω, par :

$$d_\Omega((x, y), (x', y')) = \text{borne inférieure des longueurs des lignes brisées contenues dans } \Omega \text{ et joignant } (x, y) \text{ à } (x', y'). \tag{3.6}$$

Alors (*cf.* [1], proposition 3.4.1) :

$$\|\tau_* \varphi(\zeta) - \tau_* \varphi(z)\| \leq M_1(\varphi, \Omega, \Omega_0) d_\Omega(\tau^{-1}(z), \tau^{-1}(\zeta)),$$

d'où

$$|\mathscr{R}(z, \zeta)| \quad \frac{(M_1(\varphi, \Omega, \Omega_0) M_{-1}(\varphi, \Omega, \Omega_0))^{n+1}}{(n+1)!} [d_\Omega(\tau^{-1}(z), \tau^{-1}(\zeta))]^{n+1} \sup_{\xi \in \tau(\Omega)} |U^{(n+1)}(\xi)|. \tag{3.7}$$

Supposons maintenant qu'il existe une constante $C(\Omega)$ telle que :

$$d_\Omega((x, y), (x', y')) \leq C(\Omega) \|(x, y) - (x', y')\|,$$

pour tout $(x, y) \in \Omega$, tout $(x', y') \in \Omega$. L'inégalité (3.7) s'écrit alors :

$$|\mathscr{R}(z, \zeta)| \leq \frac{(M_1(\varphi, \Omega, \Omega_0) M_{-1}(\varphi, \Omega, \Omega_0))^{n+1}}{(n+1)!} (C(\Omega))^{n+1} \sup_{\xi \in \tau(\Omega)} |U^{(n+1)}(\xi)| \, |\zeta - z|^{n+1}, \tag{3.8}$$

cette inégalité étant valable pour $z \in \tau(\Omega)$ et $\zeta \in \tau(\Omega)$; d'après la formule (3.5), l'application $\zeta \to \mathscr{R}(z, \zeta)$ est continue sur $\tau(\overline{\Omega})$ à z fixé dans $\tau(\Omega)$ et par suite, la formule (3.8) est encore valable pour $z \in \tau(\Omega)$ et $\zeta \in \tau(\overline{\Omega})$. Désignons par $\mathscr{C}$ l'ensemble des ouverts convexes de $\mathbf{R}^2$.

Posons :

$$M(\Omega) = \inf_{\Omega_0 \in \mathscr{C}} \inf_{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \Omega_0)} M_1(\varphi, \Omega, \Omega_0) M_{-1}(\varphi, \Omega, \Omega_0).$$

L'inégalité (3.8) s'écrit :

$$|\mathscr{R}(z, \zeta)| \leq \frac{(M(\Omega))^{n+1} (C(\Omega))^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\xi \in \tau(\Omega)} |U^{(n+1)}(\xi)| \, |\zeta - z|^{n+1}. \tag{3.9}$$

Enfin, pour tout $M \geq 1$ et tout $C \geq 1$, définissons la famille $\mathscr{F}(M, C)$ d'ouverts de $\mathbf{R}^2$ par : Ω appartient à $\mathscr{F}(M, C)$ si et seulement si :

- Ω est simplement connexe ;
- $\partial\Omega$ est une courbe fermée simple de Jordan ;
- $M(\Omega) \leq M$, $C(\Omega) \leq C$.

Alors :

LEMME 1.3 : *Soient $\Omega \in \mathcal{F}(M, C)$ et U une fonction analytique dans $\tau(\Omega)$, continue sur $\tau(\overline{\Omega})$. On suppose que $|U^{(n+1)}(\xi)|$ est borné dans $\tau(\Omega)$. Pour tout $z \in \tau(\Omega)$ et pour tout $\zeta \in \tau(\overline{\Omega})$, on a :*

$$|\mathcal{R}(z, \zeta)| \leq \frac{M^{n+1} C^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\Omega)} |U^{(n+1)}(\xi)| \, |\zeta - z|^{n+1}. \tag{3.10}$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de l'inégalité (3.9).

Choisissons maintenant N points de $\mathbf{R}^2$:

$$(x_j, y_j) \,.\, 1 \leq j \leq N,$$

formant un ensemble Σ et soit Ω un ouvert de la famille $\mathcal{F}(M, C)$ tel que $\Sigma \subset \overline{\Omega}$.

Avec les notations du paragraphe II, $h(\overline{\Omega})$ désignera le diamètre de $\overline{\Omega}$ et $\delta(\Sigma)$ la quantité

$$\delta(\Sigma) = \operatorname*{Inf}_{j \neq l} |a_j - a_l|,$$

où $a_j = \tau(x_j, y_j) = x_j + iy_j$ pour $1 \leq j \leq N$.

Soit U une fonction analytique dans $\tau(\Omega)$, continue sur $\tau(\overline{\Omega})$. On définit le polynôme $\tilde{U}$ par :

$$\tilde{U} = \sum_{l=1}^{N} U(a_l) p_l \text{ où } p_l \text{ est donné par (2.2).} \tag{3.11}$$

THÉORÈME 1.3 : *Soient $\Omega \in \mathcal{F}(M, C)$ et U une fonction analytique dans $\tau(\Omega)$, continue sur $\tau(\overline{\Omega})$, telle que $|U^{(N)}(\xi)|$ est borné dans $\tau(\Omega)$. Pour $0 \leq m \leq N-1$, il existe une constante A ne dépendant que de m, N, M et C telle que :*

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \tau(\Omega)} |(U^{(m)} - \tilde{U}^{(m)})(z)| \leq A [h(\overline{\Omega})]^{N-m} \frac{[h(\overline{\Omega})]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \operatorname*{Sup}_{\xi \in \tau(\Omega)} |U^{(N)}(\xi)|.$$

Démonstration : On remarque que puisque l'ouvert Ω est borné, il est contenu dans une boule de rayon $h(\overline{\Omega})$. La démonstration s'effectue alors comme celle du Théorème 2.2. les résultats nécessaires à l'établissement de ce dernier se généralisent sans difficulté (sauf le Lemme 2.2 dont l'analogue est ici le Lemme 1.3) au cas qui nous intéresse ici.

COROLLAIRE 1.3 : *Soit $\Omega \in \mathscr{F}(M, C)$ et U une fonction analytique dans $\tau(\Omega)$, continue sur $\tau(\overline{\Omega})$, telle que $|U^{(N)}(\xi)|$ est borné dans $\tau(\Omega)$. Pour $0 \leq m \leq N - 1$, il existe une constante B ne dépendant que de m, N, M et C telle que :*

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} \|(D^m(\tau^* \operatorname{Re} \tilde{U}) - D^m(\tau^* \operatorname{Re} \tilde{U}))(x, y)\|$$
$$\leq B[h(\overline{\Omega})]^{N-m} \frac{[h(\overline{\Omega})]^{N-1}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \sup_{(s,t)\in\Omega} \|D^N(\tau^* \operatorname{Re} U)(s, t)\|.$$

Démonstration : identique à celle du Corollaire 2.2.

REMARQUE 1.3 : Jusqu'à présent, l'hypothèse selon laquelle $\partial\Omega$ est une courbe fermée simple de Jordan n'est pas intervenue. Nous allons pleinement l'utiliser dans le Théorème 2.3.

THÉORÈME 2.3 : *Supposons que l'ouvert Ω appartient à $\mathscr{F}(M, C)$ et soit u une fonction harmonique dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ et telle que $\|D^N u(s, t)\|$ est borné dans Ω.*

Il existe alors un polynôme harmonique $\tilde{u}$ de degré inférieur ou égal à $N - 1$, entièrement caractérisé par la seule donnée de u et vérifiant

$$\tilde{u}(x_j, y_j) = u(x_j, y_j) \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N.$$

Par ailleurs, pour $0 \leq m \leq N - 1$, il existe une constante B (la même que dans le Corollaire 1.3) telle que :

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} \|D^m(u - \tilde{u})(x, y)\| \leq B[h(\overline{\Omega})]^{N-m} \frac{[h(\overline{\Omega})]^{N-m}}{[\delta(\Sigma)]^{N-1}} \sup_{(s,t)\in\Omega} \|D^N u(s, t)\|.$$

Démonstration : Le polynôme $\tilde{u}$ est donné comme étant la partie réelle du polynôme $\tilde{U}$ défini par la formule (3.11) où U est une fonction analytique dans $\tau(\Omega)$, telle que $\tau^* \operatorname{Re} U = u$. La démonstration se poursuit comme dans le Théorème 3.2.

REMARQUE 2.3 : Le Théorème 1.3 ainsi que le Corollaire 1.3 sont des généralisations du Théorème 2.2 et du Corollaire 2.2 respectivement. Le Théorème 1.2 et le Corollaire 1.2 faisant intervenir la largeur $\lambda(K)$ de la partie convexe K de $\mathbf{R}^2$, nous ne pouvons pas obtenir de généralisation de ceux-ci, faute d'avoir une définition de la largeur d'une partie non convexe de $\mathbf{R}^2$.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. CARTAN, *Calcul différentiel*, Paris, Hermann, 1967.
2. H. CARTAN, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, Hermann, 1961.
3. P. G. CIARLET, P. A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite interpolation in* **R**(*with applications to finite element methods*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 46, 1972, pp. 177-199.

4. C. COATMELEC, *Approximation et interpolation des fonctions différentiable de plusieurs variables*, Annales scientifiques de l'École normale Supérieure, Vol. 83, 1966, pp. 271-341.

5. Z. NEHARI, *Conformal mapping*, International Series in Pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1952.

6. D. R. WILHELMSEN, *A Markov inequality in several variables*, Journal of Approximation Theory, Vol. 11, 1974.