

C. GILORMINI

**Bornes de l'erreur dans l'approximation polynomiale
avec contraintes d'interpolation**

RAIRO. Analyse numérique, tome 11, n° 2 (1977), p. 145-158

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_2_145_0

© AFCET, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BORNES DE L'ERREUR DANS L'APPROXIMATION POLYNOMIALE AVEC CONTRAINTES D'INTERPOLATION ⁽¹⁾

par C. GILORMINI ⁽²⁾

Communiqué par P. J. LAURENT

Résumé. — Dans cet article, on établit des encadrements de l'erreur dans l'approximation uniforme d'une fonction $(n + 1)$ fois continuellement dérivable par des polynômes de degré n soumis à des conditions d'interpolation.

I. INTRODUCTION

Pour l'approximation uniforme d'une fonction continue sur $[-1, +1]$ par des polynômes de degré n au plus, Bernstein a démontré le résultat suivant ([3], [4], [5], [8]) :

Si f et g sont $(n + 1)$ fois continuellement dérivables sur $[-1, +1]$ et si $|f^{(n+1)}(x)| \leq g^{(n+1)}(x)$ sur $[-1, +1]$, on a :

$$E_n(f) \leq E_n(g)$$

avec : $E_n(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|$, \mathcal{P}_n désignant l'espace des polynômes de degré n au plus.

Dans cet article, on étend ce résultat au cas de l'approximation uniforme avec conditions d'interpolation. On obtient également des encadrements de l'erreur pour l'approximation d'une fonction $(n + 1)$ fois dérivable par des polynômes de degré n avec conditions d'interpolation. Ces résultats généralisent ceux de Meinardus ([5]) et Phillips ([9]) obtenus dans le cas où il n'y a pas de contraintes d'interpolation ([3], [4], [8]).

II. APPROXIMATION AVEC CONDITIONS D'INTERPOLATION

Soit Q un sous-ensemble compact d'un intervalle $[a, b]$ contenant au moins $(n + 2)$ points et soit T un ensemble de points $t_1 < \dots < t_m$ de $[a, b]$ appelés nœuds ($m < n$).

⁽¹⁾ Manuscrit reçu le 16 mars 1976, et sous forme révisée le 8 décembre 1976.

⁽²⁾ Institut des Sciences de l'Ingénieur (Université de Nancy I), Vandœuvre les Nancy.

Soit E l'espace des fonctions réelles définies sur $[a, b]$ et continues sur Q , muni de la norme :

$$\|f\| = \max_{t \in Q} |f(t)|$$

Pour $f \in E$, on désigne par $W_n(f; T)$ l'ensemble des polynômes P de degré au plus n tels que :

$$P(t_i) = f(t_i) \quad i = 1, \dots, m$$

On sait ([2], [6], [7]) qu'il existe $P^* \in W_n(f; T)$ unique rendant minimum $\|f - P\|$ et on pose :

$$\varepsilon_n(f; T) = \|f - P^*\| = \inf_{P \in W_n(f; T)} \|f - P\|.$$

On a aussi ([2], [6]) une caractérisation du polynôme P^* et une borne inférieure de $\varepsilon_n(f; T)$:

THÉORÈME 1 : *pour que P soit la meilleure approximation de f dans $W_n(f; T)$, il faut et il suffit qu'il existe $(n - m + 2)$ points $e_1 < \dots < e_{n-m+2}$ de Q tels que :*

$$|f(e_i) - P(e_i)| = \|f - P\| \quad i = 1, \dots, n - m + 2$$

$$(-1)^{m_i} [f(e_i) - P(e_i)][f(e_{i+1}) - P(e_{i+1})] < 0 \quad i = 1, \dots, n - m + 1$$

où m_i est le nombre de nœuds contenus dans $[e_i, e_{i+1}]$.

En notant $\{s_1, \dots, s_{n+2}\}$ l'ensemble $\{e_1, \dots, e_{n-m+2}\} \cup T$ avec

$$s_1 < \dots < s_{n+2},$$

les conditions précédentes s'écrivent :

$$f(s_i) - P(s_i) = (-1)^i \varepsilon v_i \|f - P\| \quad i = 1, \dots, n + 2$$

avec : $\varepsilon = \pm 1$, $v_i = 0$ si s_i est un nœud, $v_i = 1$ dans l'autre cas.

THÉORÈME 2 : *s'il existe $P \in W_n(f; T)$ et $(n - m + 2)$ points*

$$e_1 < \dots < e_{n-m+2}$$

de Q tels que :

$$(-1)^{m_i} [f(e_i) - P(e_i)][f(e_{i+1}) - P(e_{i+1})] < 0 \quad i = 1, \dots, n - m + 1$$

où m_i est le nombre de nœuds contenus dans $[e_i, e_{i+1}]$, on a :

$$\varepsilon_n(f; T) \geq \min_j |f(e_j) - P(e_j)|$$

III. BORNES DE L'ERREUR POUR UNE FONCTION DÉRIVABLE

THÉORÈME 3 : si f est $(n + 1)$ fois continuellement dérivable sur $[a, b]$, on a :

$$\frac{A_n(T)}{(n + 1)!} \min_{[a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq \varepsilon_n(f; T) \leq \frac{A_n(T)}{(n + 1)!} \max_{[a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \quad (1)$$

avec :

$$A_n(T) = \inf_{x_i} \left[\max_{x \in [a, b]} |(x - x_1) \dots (x - x_{n-m+1})(x - t_1) \dots (x - t_m)| \right]$$

Cet encadrement étend celui donné dans le cas où il n'y a pas de nœuds dans [3] (prop. 8.3.c), [4] (prop. 3.6.8) ou [8] (th. 6.2) car d'après les propriétés des polynômes de Tchebycheff ([1]), on a alors :

$$A_n = \frac{(b - a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Soit P^* le polynôme de meilleure approximation de f dans $W_n(f; T)$. D'après le théorème 1, il existe $(n - m + 2)$ points $e_1 < \dots < e_{n-m+2}$ de Q tels que :

$$(-1)^{m_i+1} [f(e_i) - P^*(e_i)] [f(e_{i+1}) - P^*(e_{i+1})] > 0 \quad i = 1, \dots, n - m + 1$$

où m_i est le nombre de nœuds contenus dans $[e_i, e_{i+1}]$.

Cette inégalité montre que $f - P^*$ s'annule au moins $(m_i + 1)$ fois dans l'intervalle $]e_i, e_{i+1}[$, en comptant deux fois un zéro où $f - P^*$ ne change pas de signe.

Au total, (en comptant les multiplicités), $f - P^*$ s'annule au moins

$$\sum_{i=1}^{n-m+1} (m_i + 1) = n + 1$$

fois dans $[a, b]$.

Soient $t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_{n-m+1}$ $(n + 1)$ zéros de $f - P^*$.

D'après la formule de l'erreur dans l'interpolation d'Hermite ([1], p. 67), on a :

$$f(x) - P^*(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{n-m+1})(x - t_1) \dots (x - t_m) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \quad (2)$$

D'où, pour $x \in Q$:

$$|f(x) - P^*(x)| \geq |(x - x_1) \dots (x - t_m)| \min_{[a, b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \right|$$

ce qui entraîne :

$$\|f - P^*\| \geq \max_{x \in [a, b]} |(x - x_1) \dots (x - t_m)| \min_{[a, b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right|$$

D'où l'on déduit la première partie de l'inégalité (1) :

$$\varepsilon_n(f; T) \geq \frac{A_n(T)}{(n+1)!} \min_{[a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \quad (3)$$

Soient $x_1^*, \dots, x_{n-m+1}^*$ les valeurs rendant minimum la quantité

$$\max_{x \in [a, b]} |(x - x_1) \dots (x - x_{n-m+1})(x - t_1) \dots (x - t_m)|.$$

On a donc :

$$A_n(T) = \max_{x \in [a, b]} |(x - x_1^*) \dots (x - x_{n-m+1}^*)(x - t_1) \dots (x - t_m)|.$$

Soit R le polynôme d'interpolation (au sens de Hermite) de f aux points $x_1^*, \dots, x_{n-m+1}^*, t_1, \dots, t_m$. On a alors :

$$f(x) - R(x) = (x - x_1^*) \dots (x - x_{n-m+1}^*)(x - t_1) \dots (x - t_m) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

D'où :

$$\|f - R\| \leq A_n(T) \max_{[a, b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \quad (4)$$

Le polynôme R appartient à $W_n(f; T)$ et on a : $\varepsilon_n(f; T) \leq \|f - R\|$ ce qui démontre la 2^e partie de l'inégalité (1).

REMARQUE 1 : $f^{(n+1)}$ étant continue, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$\varepsilon_n(f; T) = \frac{A_n(T)}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

Dans le cas où il n'y a pas de nœuds, on retrouve le résultat démontré dans [4], [5] ou [9].

COROLLAIRE : si f est $(n+1)$ fois dérivable sur $[a, b]$, on a :

$$\varepsilon_n(f; T) \leq \frac{(b-a)^{n-m+1}}{2^{2n-2m+1}(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |(x - t_1) \dots (x - t_m)| \cdot \|f^{(n+1)}\|. \quad (5)$$

En effet :

$$\begin{aligned} A_n(T) &\leq \max_x |(x - t_1) \dots (x - t_m)| \cdot \inf_{x_i} [\max_x |(x - x_1) \dots (x - x_{n-m+1})|] \\ &= \frac{(b-a)^{n-m+1}}{2^{2(n-m)+1}} \max_x |(x - t_1) \dots (x - t_m)| \end{aligned}$$

d'après les propriétés des polynômes de Tchebycheff.

Cette majoration est moins bonne que celle du théorème 3 mais la quantité $\max_x |(x - t_1) \cdots (x - t_m)|$ est plus facile à calculer que $A_n(T)$.

IV COMPARAISON DE L'ERREUR POUR DEUX FONCTIONS f ET g

THÉORÈME 4: si f et g sont $(n + 1)$ fois continuellement dérivables sur $[a, b]$ et si $|f^{(n+1)}(x)| \leq g^{(n+1)}(x)$ sur $[a, b]$, on a :

$$\varepsilon_n(f; T) \leq \varepsilon_n(g; T) \quad (6)$$

Ce résultat généralise celui donné dans le cas sans conditions d'interpolation ([3], [4], [5], [8]).

Supposons d'abord $|f^{(n+1)}(x)| < g^{(n+1)}(x)$ sur $[a, b]$ et soit P^* la meilleure approximation de f dans $\mathcal{W}_n(f; T)$. D'après le théorème 1, il existe des points $e_1 < \dots < e_{n-m+2}$ de \mathcal{Q} tels que, si

$$\{s_1 < \dots < s_{n+2}\} = T \cup \{e_1, \dots, e_{n-m+2}\} :$$

$$f(s_i) - P^*(s_i) = (-1)^i \varepsilon v_i \|f - P^*\| \quad i = 1, \dots, n + 2$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, $v_i = 0$ si s_i est un nœud, $v_i = 1$ dans l'autre cas.

Soit R la meilleure approximation de g dans $\mathcal{W}_n(g; T)$ sur l'ensemble fini $\{e_1, \dots, e_{n-m+2}\}$. D'après le théorème 1, on a :

$$g(s_i) - R(s_i) = (-1)^i v_i \rho \quad i = 1, \dots, n + 2$$

et le théorème 2 donne : $\varepsilon_n(g; T) \geq |\rho|$.

Posons alors :

$$h(x) = [g(x) - R(x)]\varepsilon_n(f; T) - \varepsilon\rho[f(x) - P^*(x)]$$

$$\text{On a :} \quad h(s_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n + 2$$

h est une fonction $(n + 1)$ fois continuellement dérivable et admet $(n + 2)$ zéros distincts. D'après le théorème de Rolle, h' admet au moins $(n + 1)$ zéros distincts, \dots , $h^{(n+1)}$ admet au moins un zéro ξ :

$$g^{(n+1)}(\xi)\varepsilon_n(f; T) - \varepsilon\rho f^{(n+1)}(\xi) = 0$$

et comme $g^{(n+1)}$ ne s'annule pas :

$$\varepsilon_n(f; T) = |\rho| \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{g^{(n+1)}(\xi)} < |\rho| \leq \varepsilon_n(g; T)$$

Supposons maintenant $|f^{(n+1)}(x)| \leq g^{(n+1)}(x)$ sur $[a, b]$. Quel que soit $\alpha > 0$, on a :

$$|f^{(n+1)}(x)| < g^{(n+1)}(x) + \alpha = [g(x) + \alpha\varphi(x)]^{(n+1)}$$

avec :

$$\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'après ce qui précède, on a donc :

$$\varepsilon_n(f; T) < \varepsilon_n(g + \alpha\varphi; T)$$

Mais tout polynôme $R \in \mathcal{W}_n(g + \alpha\varphi; T)$ peut s'écrire $R = R_1 + \alpha R_2$ avec $R_1 \in \mathcal{W}_n(g; T)$ et $R_2 \in \mathcal{W}_n(\varphi; T)$:

$$\|g + \alpha\varphi - R\| \leq \|g - R_1\| + \alpha \|\varphi - R_2\|$$

Et finalement :

$$\varepsilon_n(f; T) < \varepsilon_n(g + \alpha\varphi; T) \leq \varepsilon_n(g; T) + \alpha \varepsilon_n(\varphi; T)$$

Cette inégalité étant vérifiée quel que soit $\alpha > 0$, il en résulte :

$$\varepsilon_n(f; T) \leq \varepsilon_n(g; T)$$

V. BORNES DE L'ERREUR DÉDUIT'S D'UN ENCADREMENT DE LA DÉRIVÉE D'ORDRE $n+1$

Pour la fonction $x \mapsto g(x) = \eta x^{n+3} + \tau x^{n+2} + x^{n+1}$, on peut obtenir un encadrement de $\varepsilon_n(g; T)$ donné par les lemmes 1 et 2.

LEMME 1 : en se plaçant sur l'intervalle $[-1, +1]$, on a :

$$\varepsilon_n(g; T) \geq \frac{B_n(T)}{2^{n-m}} \left| 1 + \tau \sum t_i + \eta \left(\sum_{i \geq j} t_i t_j + \frac{n-m+3}{4} \right) \right| \quad (7)$$

avec :

$$g(x) = \eta x^{n+3} + \tau x^{n+2} + x^{n+1}$$

$$B_n(T) = \min_{0 \leq k \leq n-m+1} \left| \prod_{j=1}^m \left(\cos \frac{k\pi}{n-m+1} - t_j \right) \right|.$$

Si $R \in \mathcal{W}_n(g; T)$, la fonction $g - R$ s'annule aux nœuds et :

$$g(x) - R(x) = (x - t_1) \dots (x - t_m) [\eta x^{n+3-m} + \lambda x^{n+2-m} + \mu x^{n+1-m} + P(x)] \quad (8)$$

où P est un polynôme de degré $n - m$ au plus.

En identifiant dans les deux membres de (8) les termes en x^{n+2} et x^{n+1} , on obtient :

$$\begin{cases} \lambda = \tau + \eta \sum t_i \\ \mu = 1 + \lambda \sum t_i - \eta \sum_{i < j} t_i t_j = 1 + \tau \sum t_i + \eta \sum_{i \geq j} t_i t_j \end{cases} \quad (9)$$

Introduisons les polynômes de Tchebycheff de première et de deuxième espèce T_k et U_k :

$$\begin{aligned} T_k(x) &= 2^{k-1}x^k + \dots \\ U_k(x) &= 2^kx^k - (k-1)2^{k-2}x^{k-2} + \dots \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \eta x^{n+3-m} + \lambda x^{n+2-m} + \mu x^{n+1-m} + P(x) \\ = \frac{1}{2^{n-m}} \left[\left(\mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right) T_{n-m+1}(x) \right. \\ \left. + (\lambda + \eta x)(x^2 - 1)U_{n-m}(x) + Q(x) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

où Q est un polynôme de degré $n - m$ au plus.

Choisissons R de manière à ce que le polynôme Q soit identiquement nul. Aux points $x_k = \cos \frac{k\pi}{n-m+1}$ ($0 \leq k \leq n-m+1$), on a

$$(x^2 - 1)U_{n-m}(x) = 0$$

et par suite d'après (8) et (10) :

$$g(x_k) - R(x_k) = \frac{(x_k - t_1) \cdots (x_k - t_m)}{2^{n-m}} \left(\mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right) (-1)^k. \quad (11)$$

L'inégalité à démontrer s'écrit simplement :

$$\varepsilon_n(g; T) \geq \frac{B_n(T)}{2^{n-m}} \left| \mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right| \quad (12)$$

avec :

$$B_n(T) = \min_k \left| \prod_{j=1}^m (x_k - t_j) \right|.$$

Nous supposons que $x_k \notin \{t_1, \dots, t_m\}$ et que de plus $\mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \neq 0$ (sinon l'inégalité se réduit à $\varepsilon_n \geq 0$).

Si l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ contient p nœuds, on a :

$$(-1)^p [(x_k - t_1) \cdots (x_k - t_m)] [(x_{k+1} - t_1) \cdots (x_{k+1} - t_m)] > 0$$

soit, d'après (11) :

$$(-1)^p [g(x_k) - R(x_k)] [g(x_{k+1}) - R(x_{k+1})] < 0$$

$$k = 0, 1, \dots, n - m + 1$$

Le théorème 2 donne alors :

$$\varepsilon_n(g; T) \geq \min_k |g(x_k) - R(x_k)|$$

c'est-à-dire l'inégalité (12).

LEMME 2 : en se plaçant sur l'intervalle $[-1, +1]$:

$$\varepsilon_n(g; T) \leq \frac{C}{2^{n-m}} \max_x |(x - t_1) \cdots (x - t_m)| \quad (13)$$

avec :

$$\begin{aligned} g(x) &= \eta x^{n+3} + \tau x^{n+2} + x^{n+1} \\ C &= \left[1 + \frac{n-m+2}{n-m+1} \left(\frac{\tau + \eta \sum t_i}{\mu} \right)^2 \right] \cdot |\mu| + \frac{n-m+5}{4} |\eta| \\ \mu &= 1 + \tau \sum t_i + \eta \sum_{i \geq j} t_i t_j \end{aligned}$$

En utilisant (8) et (10) avec $Q \equiv 0$, on a :

$$\varepsilon_n(g; T) \leq \|g - R\| \leq \frac{A}{2^{n-m}} \max_x |(x - t_1) \cdots (x - t_m)|$$

avec :

$$A = \left\| \left(\mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right) T_{n-m+1} + (\lambda + \eta x)(x^2 - 1) U_{n-m} \right\|. \quad (14)$$

Or d'après [5] (p. 79) :

$$\|T_{k+1} + \alpha(x^2 - 1)U_k\| \leq 1 + \frac{k+2}{k+1} \alpha^2$$

$$\|x(x^2 - 1)U_k\| \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A &\leq \left\| \mu T_{n-m+1} + \lambda(x^2 - 1)U_{n-m} \right\| + \left\| \eta \frac{n-m+3}{4} T_{n-m+1} \right\| \\ &\quad + \left\| \eta x(x^2 - 1)U_{n-m} \right\|, \\ A &\leq |\mu| \left[1 + \frac{n-m+2}{n-m+1} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right] + |\eta| \left(\frac{n-m+3}{4} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

En reportant la valeur de λ donnée par (9), on obtient (13).

REMARQUE 2 : on peut aussi majorer A en écrivant :

$$\begin{aligned} A &\leq \left| \mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right| \cdot \|T_{n-m+1}\| \\ &\quad + |\lambda| \cdot \|(x^2-1)U_{n-m}\| + |\eta| \cdot \|x(x^2-1)U_{n-m}\| \\ &\leq \left| \mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right| + |\lambda| \cdot \|(x^2-1)U_{n-m}\| + \frac{|\eta|}{2}. \end{aligned}$$

Or, en posant : $x = \cos \theta$:

$$|(x^2-1)U_{n-m}(x)| = |\sin \theta \sin(n-m+1)\theta| \leq 1.$$

Dans le lemme 2, C est alors remplacé par :

$$C' = \left| \mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right| + \frac{|\eta|}{2} + |\tau + \eta \Sigma t_i|$$

ou en majorant encore par :

$$C'' = |\mu| + |\eta| \frac{n-m+5}{4} + |\tau + \eta \Sigma t_i|.$$

REMARQUE 3 : On pourrait majorer $\varepsilon_n(g; T)$ en utilisant le corollaire du théorème 3 :

$$g(x) = \eta x^{n+3} + \tau x^{n+2} + x^{n+1}$$

$$g^{(n+1)}(x) = (n+1)! \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2} \eta x^2 + (n+2)\tau x + 1 \right].$$

D'où :

$\varepsilon_n(g; T)$

$$\leq \frac{\max_x |(x-t_1) \dots (x-t_m)|}{2^{n-m}} \left\| \frac{(n+2)(n+3)}{2} \eta x^2 + (n+2)\tau x + 1 \right\|.$$

Mais en général cette majoration est moins bonne que les précédentes à cause des facteurs $(n+2)$ et $(n+3)$.

En utilisant les lemmes 1 et 2 et un encadrement de $f^{(n+1)}(x)$, on obtient alors un encadrement de $\varepsilon_n(f; T)$:

THÉORÈME 5 : soit f une fonction $(n+1)$ fois continuellement dérivable sur $[-1, +1]$ et telle que :

$$0 \leq \alpha + \beta x + \gamma x^2 \leq f^{(n+1)}(x) \leq \alpha + \beta x + \delta x^2$$

avec $\alpha > 0$. On a alors :

$$\varepsilon_n(f; T) \geq \frac{A}{2^{n-m}(n+1)!} \min_{0 \leq k \leq n-m+1} \left| \prod_{j=1}^m \left(\cos \frac{k\pi}{n-m+1} - t_j \right) \right| \quad (15)$$

$$\varepsilon_n(f; T) \leq \frac{B}{2^{n-m}(n+1)!} \max_x |(x-t_1) \dots (x-t_m)| \quad (16)$$

avec :

$$A = \left| \alpha + \frac{\beta}{n+2} \sum t_i + \frac{2\gamma}{(n+2)(n+3)} \left[\sum_{i \geq j} t_i t_j + \frac{n-m+3}{4} \right] \right|$$

$$B = \alpha |\mu| + \frac{(n-m+5)|\delta|}{2(n+2)(n+3)} + \frac{n-m+2}{(n-m+1)\alpha|\mu|} \left[\frac{\beta}{n+2} + \frac{2\delta \sum t_i}{(n+2)(n+3)} \right]^2$$

$$\mu = 1 + \frac{\beta}{(n+2)\alpha} \sum t_i + \frac{2\delta}{(n+2)(n+3)\alpha} \sum_{i \geq j} t_i t_j.$$

Quand il n'y a pas de nœuds, on retrouve l'encadrement donné par Meinardus ([5], théorème 61).

Soit d'abord :

$$g_1(x) = \frac{\alpha x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\beta x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{2\gamma x^{n+3}}{(n+3)!}.$$

On a :

$$0 \leq g_1^{(n+i)}(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \leq f^{(n+i)}(x)$$

D'après le théorème 4 : $\varepsilon_n(f; T) \geq \varepsilon_n(g_1; T)$ et en appliquant le lemme 1, on obtient (15).

De même :

$$g_2(x) = \frac{\alpha x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\beta x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{2\delta x^{n+3}}{(n+3)!}$$

$$\varepsilon_n(f; T) \leq \varepsilon_n(g_2; T).$$

et en appliquant le lemme 2, on obtient (16).

REMARQUE 4 : on a le même résultat lorsque :

$$0 \leq \alpha + \beta x + \gamma x^2 \leq -f^{(n+i)}(x) \leq \alpha + \beta x + \delta x^2$$

avec $\alpha > 0$ car on peut appliquer le théorème 5 à $-f$ et on a :

$$\varepsilon_n(f; T) = \varepsilon_n(-f; T).$$

REMARQUE 5 : à la place de la constante C du lemme 2, on peut utiliser les constantes C' et C'' de la remarque 2. Dans la formule (16), B est alors remplacé par B' ou B'' :

$$B' = \left| \alpha \mu + \frac{(n - m + 3)\delta}{2(n + 2)(n + 3)} \right| + \frac{|\delta|}{(n + 2)(n + 3)} + \left| \frac{\beta}{n + 2} + \frac{2\delta \sum t_i}{(n + 2)(n + 3)} \right|$$

$$B'' = \alpha |\mu| + \frac{(n - m + 5)|\delta|}{2(n + 2)(n + 3)} + \left| \frac{\beta}{n + 2} + \frac{2\delta \sum t_i}{(n + 2)(n + 3)} \right|.$$

VI. EXEMPLES

Exemple 1 : approximation de e^x sur $[0, 1]$ par des polynômes de degré 1 avec un nœud $t_1 = 0$. On a alors (en conservant 7 décimales) :

$$\varepsilon_1 = 0.1413368$$

$$P^*(x) = 1 + 1.576945x$$

On obtient :

$$A_1(T) = \inf_{x_1} [\max_{[0,1]} |(x - x_1)x|]$$

soit, d'après [6] : $A_1(T) = 3 - 2\sqrt{2}$

Le théorème 3 donne alors l'encadrement :

$$0.0857 \leq \varepsilon_1 \leq 0.233$$

Pour appliquer le théorème 5, on pose $x = \frac{u + 1}{2}$ et on se ramène à l'approximation de $\sqrt{e} e^{\frac{u}{2}}$ sur $[-1, +1]$ avec un nœud $u_1 = -1$. On a ([5]) l'encadrement :

$$1 + u + \frac{u^2}{e} \leq e^u \leq 1 + u + (e - 2)u^2$$

$$\frac{\sqrt{e}}{4} \left(1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4e} \right) \leq f''(u) \leq \frac{\sqrt{e}}{4} \left(1 + \frac{u}{2} + \frac{(e - 2)u^2}{4} \right)$$

et le théorème 5 donne alors :

$$0 \leq \varepsilon_1 \leq 0.377$$

Exemple 2 : approximation de e^x sur $[0, 1]$ par des polynômes de degré 2 avec un nœud $t_1 = 0.5$

On a alors (avec 8 décimales) :

$$P^*(x) = 1.0092741 + 0.85805506x + 0.84167857x^2$$

$$\varepsilon_2 = 0.0092741$$

On obtient :

$$A_2(T) = \inf_{x_i} [\max_{[0,1]} |(x - x_1)(x - x_2)(x - 0.5)|]$$

ou, en posant : $x = \frac{u+1}{2}$:

$$A_2(T) = \frac{1}{8} \inf_{u_i} [\max_{[-1,+1]} |u(u - u_1)(u - u_2)|]$$

Le minimum est obtenu pour le polynôme $\frac{1}{4} T_3$ et on a :

$$A_2(T) = \frac{1}{32}.$$

Le théorème 3 donne alors l'encadrement :

$$0.0052 \leq \varepsilon_2 \leq 0.0142$$

En appliquant le théorème 5 comme dans l'exemple précédent, on se ramène

à l'approximation de $\sqrt{e} e^{\frac{u}{2}}$ sur $[-1, +1]$ avec un nœud $u_1 = 0$ et on obtient :

$$0 \leq \varepsilon_2 \leq 0.0180$$

REMARQUE 6 : On a obtenu une borne inférieure nulle car l'un des nœuds est égal à l'un des nombres $\cos \frac{k\pi}{n-m+1}$. Si le nœud n'est pas ± 1 , on peut améliorer le résultat en remplaçant n par $(n+1)$ car $\varepsilon_n(f; T) \geq \varepsilon_{n+1}(f; T)$. Ainsi dans l'exemple 2 :

$$\varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_3 \geq 0.00055$$

REMARQUE 7 : Le corollaire du théorème 3 et la remarque 5 fournissent également des estimations (moins bonnes que les précédentes) :

$$\varepsilon_1 \leq 0.680 \quad \text{et} \quad 0 \leq \varepsilon_1 \leq 0.415 \quad (\text{exemple 1})$$

$$\varepsilon_2 \leq 0.0283 \quad \text{et} \quad 0 \leq \varepsilon_2 \leq 0.0198 \quad (\text{exemple 2})$$

Exemple 3 : approximation de e^x sur $[-1, +1]$ par des polynômes de degré n quelconque avec un nœud $t_1 = 0$.

On a :

$$A_n(T) = \inf_{x_i} [\max_{x \in [-1,+1]} |x(x - x_1) \dots (x - x_n)|].$$

Si n est pair, le minimum est obtenu pour le polynôme de Tchebycheff T_{n+1} (qui s'annule pour $x = 0$) et on a alors :

$$A_n(T) = \frac{1}{2^n}.$$

Le théorème 3 donne alors :

$$\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!} \leq \varepsilon_{2k} \leq \frac{e}{2^{2k}(2k+1)!}. \quad (17)$$

Si n est impair, $A_n(T)$ ne s'exprime pas simplement et on peut seulement écrire :

$$\varepsilon_{2k+2} \leq \varepsilon_{2k+1} \leq \varepsilon_{2k}$$

soit, en utilisant (17) :

$$\frac{1}{2^{2k+2}(2k+3)!} \leq \varepsilon_{2k+1} \leq \frac{e}{2^{2k}(2k+1)!}. \quad (18)$$

Pour l'utilisation du théorème 5, on a :

$$1 + x + \frac{x^2}{e} \leq f^{(n+1)}(x) \leq 1 + x + (e-2)x^2.$$

On en déduit :

$$\varepsilon_{2k+1} \geq \frac{\cos \frac{k\pi}{2k+1}}{2^{2k}(2k+2)!} \left[1 + \frac{1}{4(k+2)e} \right]. \quad (19)$$

Pour n pair, on obtient seulement $\varepsilon_{2k} \geq 0$ qu'on remplace par $\varepsilon_{2k} \geq \varepsilon_{2k+1}$ c'est-à-dire :

$$\varepsilon_{2k} \geq \frac{\cos \frac{k\pi}{2k+1}}{2^{2k}(2k+2)!} \left[1 + \frac{1}{4(k+2)e} \right]. \quad (20)$$

Enfin, on a, quelle que soit la parité de n :

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{2^{n-1}(n+1)!} \left[1 + \frac{(n+4)(e-2)}{2(n+2)(n+3)} + \frac{n+1}{n(n+2)^2} \right]. \quad (21)$$

Sur cet exemple, on constate que les meilleures majorations sont fournies par le théorème 5 alors que les meilleures minoration sont fournies par le théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. J. DAVIS, *Interpolation and approximation*, Blaisdell, 1963.
2. F. R. DEUTSCH, *On uniform approximation with interpolatory constraints*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 24, 1968, p. 62-79.
3. M. GOLOMB, *Lectures on theory of approximation*, Argonne National Laboratory, 1962.
4. P. J. LAURENT, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972.
5. G. MEINARDUS, *Approximation of functions : theory and numerical methods*, Springer, New-York, 1967.
6. S. PASZKOWSKI, *Sur l'approximation uniforme avec des nœuds*, Ann. Polon. Math., Vol. 2, 1955, p. 118-135.
7. S. PASZKOWSKI, *On approximation with nodes*, Rozprawy Matematyczne, Vol. 14, 1957.
8. S. PASZKOWSKI, *The theory of uniform approximation*, Rozprawy Matematyczne, Vol. 26, 1962.
9. G. M. PHILIPPS, *Estimate of the maximum error in best polynomial approximations*, The Computer J., Vol. 11, 1968, p. 110-111.