RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

GÉRARD G. L. MEYER

Conditions de convergence pour les algorithmes itératifs monotones, autonomes et non déterministes

RAIRO. Analyse numérique, tome 11, nº 1 (1977), p. 61-74

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_1_61_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 11, n° 1, 1977, p. 61 à 74)

CONDITIONS DE CONVERGENCE POUR LES ALGORITHMES ITÉRATIFS MONOTONES, AUTONOMES ET NON DÉTERMINISTES (*)

par Gérard G. L. MEYER [1]

Communiqué par P.-J. Laurent

Résumé. — *Cet article présente des conditions de convergence pour les algorithmes itératifs, monotones, autonomes et non déterministes. On montre que ces conditions sont plus faibles que les conditions de convergence connues. La présentation des résultats est facilitée par l'introduction du concept d'ensemble caractéristique étendu d'une procédure itérative.*

INTRODUCTION

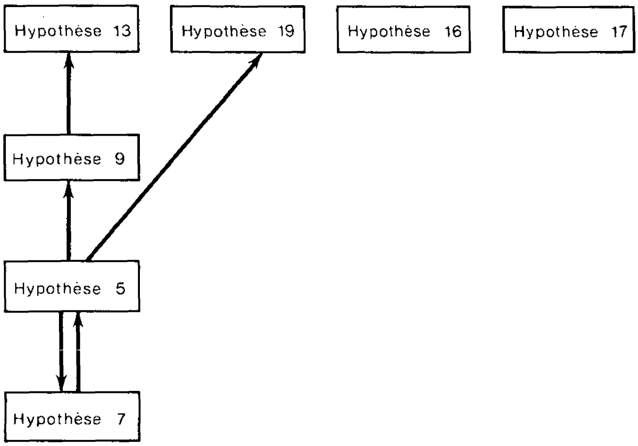
La théorie des modèles pour algorithmes itératifs a été développée essentiellement depuis 1963 par B. T. Polyak [13], W. I. Zangwill [14], E. Polak [11], G. G. L. Meyer [7, 8, 9] et P. Huard [2, 3, 4]. L'importance de la théorie est démontrée de manière implicite par l'usage qui en est fait dans les récents ouvrages sur l'optimisation [6, 12, 14]. Le formalisme de la théorie permet son application à l'analyse numérique ainsi qu'aux algorithmes de tri mais pour des raisons historiques, la littérature ne semble pas contenir de telles applications.

Cet article présente un ensemble de conditions de convergence pour une famille de modèles d'algorithmes. La famille choisie contient les algorithmes itératifs monotones, autonomes et non déterministes. La difficulté principale rencontrée dans l'étude de cette famille est due au non déterminisme des algorithmes. La représentation du non déterminisme fait intervenir des applications multivoques [1, 2]. Il est possible d'étudier des modèles dans lesquels les applications multivoques sont structurées [7, 9, 10]. Cet article est restreint aux cas dans lesquels les applications multivoques ne possèdent aucune structure.

L'article a deux buts : (i) présentation de nouvelles conditions de convergence et (ii) comparaison de ces conditions entre elles et avec les conditions existantes. Il se trouve que (i) et (ii) sont facilités par l'introduction d'un concept nouveau en théorie des modèles d'algorithmes : le concept d'ensemble caractéristique étendu.

(*) Reçu septembre 1975, et sous forme révisée le 18 novembre 1975.
[1] Electrical Engineering Department, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 21218 U.S.A.

Nous avons divisé notre travail en quatre parties. La première section contient la définition précise du modèle étudié. Le concept d'ensemble caractéristique étendu est introduit et comparé à celui plus classique d'ensemble caractéristique [9, 10]. La deuxième partie contient les conditions de convergence dans lesquelles les applications constituant le modèle interviennent de manière disjointe. La troisième section est consacrée aux conditions de convergence combinées. Ces conditions de convergence sont en général d'application difficile mais permettent d'obtenir des résultats même quand les conditions disjointes ne s'appliquent pas. Finalement, les différentes conditions de convergence sont comparées dans la dernière section. Nous montrons à l'aide d'exemples que les conditions combinées ne sont pas comparables. En fait, nos résultats mettent en évidence le fait que nos conditions de convergence combinées sont extrémales. Ce résultat est immédiat quand on considère le diagramme de Hasse dans lequel nous avons représenté les relations existant entre les conditions de convergence de cet article (voir *fig.*).



Comparaison des conditions de convergence

UNE CLASSE D'ALGORITHMES ITÉRATIFS

Dans cette étude nous considérons la classe des algorithmes itératifs, autonomes, monotones et non déterministes. Soit $\mathscr{I}$ un espace topologique normal et dans lequel tous les points sont fermés (*voir* [5], p. 112), T un sous-ensemble non vide et séquentiellement fermé de $\mathscr{I}$, $A(.)$ une multi-application de T dans T telle que $A(z)$ est non vide pour tout z de T et $c(.)$ une application de T dans E, l'ensemble des nombres réels. Les algorithmes auxquels nous nous intéressons ont la forme suivante.

1. ALGORITHME : *Soit z_0 un point donné de T.*

Étape 0 *:* Poser $i = 0$.

Étape 1 : Prendre un point x_i dans $A(z_i)$.

Étape 2 : Si $c(x_i) \geqq c(z_i)$, arrêter; autrement, poser $z_{i+1} = x_i$, poser $i = i+1$ et aller à l'étape 1.

L'algorithme 1 est monotone par rapport à l'application $c(.)$ car si $\{ z_i \}$ est une séquence générée par 1, alors $c(z_{i+1}) < c(z_i)$ pour tout couple d'éléments successifs z_{i+1} et z_i de la séquence. Le non-déterminisme de l'algorithme provient du fait que le point x_i est choisi de manière non précisée dans $A(z_i)$ à chaque itération. Nous notons aussi que la multi-application $A(.)$ ne dépend pas de l'indice d'itération i. L'algorithme 1 est donc autonome.

L'algorithme 1 peut générer des séquences finies ou infinies. L'ensemble de toutes les séquences qui peuvent être générées par 1 est noté S. Cet ensemble possède des propriétés finies et des propriétés asymptotiques. Il est utile et pratique de caractériser ces propriétés par deux ensembles F et Q.

2. DÉFINITION : F est l'ensemble de tous les points finaux de toutes les séquences finies de S et Q est l'ensemble de tous les points d'accumulation de toutes les séquences infinies de S.

L'intérêt de considérer l'ensemble F est que F peut être obtenu en général sans trop de difficultés. En fait, il est facile de constater que l'ensemble F correspondant à l'algorithme 1 peut être évalué à partir des éléments $A(.)$ et $c(.)$ de 1 :

$$F = \{ z \in T \mid \exists x \in A(z),\ c(x) \geqq c(z) \}.$$

L'ensemble F joue un rôle important dans la théorie des algorithmes itératifs et est habituellement appelé l'ensemble caractéristique de 1 (*voir* [9] et [10]).

Si F est en général obtenu facilement, l'ensemble Q par contre est difficile à décrire. Notre espoir principal est d'obtenir une borne supérieure pour Q. Il est clair que si F est une borne supérieure pour Q, alors les propriétés asymptotiques de 1 sont décrites par les propriétés finies de 1. Il se trouve que F n'est pas adéquat pour la tâche auquel nous voulons le destiner c'est-à-dire, borne supérieure pour Q.

3. *Exemple* : Prenons $\mathscr{I} = E$, $T = \{ z \mid z \geqq 0 \}$ et définissons les applications $A(.)$ et $c(.)$ de la façon suivante :

$$c(z) = (z-1)^2;$$

$$A(z) = \{ w \in [0;\ 7] \mid w < z \} \cup \{ 0 \}.$$

Dans ce cas, F est l'interval fermé

$$F = [0;\ 2],$$

mais l'algorithme 1 peut générer entre autres la séquence

$$z_i = 6 + 1/(2^i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots;$$

Cette séquence possède un point limite $z = 6$ et donc Q contient le point 6 qui n'est pas dans F.

L'exemple 3 conduit à la considération d'un autre ensemble que nous appelons l'ensemble caractéristique étendu F_e de l'algorithme 1.

4. DÉFINITION : F_e est l'ensemble de tous les points z de T tel que pour tout scalaire $\delta > 0$, il existe au moins un point x dans $A(z)$, x dépendant de δ, satisfaisant à $c(x) \geqq c(z) - \delta$, c'est-à-dire

$$F_e = \{ z \in T \mid \forall \delta > 0, \exists x \in A(z), c(x) \geqq c(z) - \delta \}.$$

Dans cet article nous notons par D^c le complément d'un sous-ensemble D de T par rapport à T. Plus précisement,

$$D^c = \{ z \in T \mid z \notin D \}.$$

L'ensemble F_e va jouer un rôle important par la suite et il est impératif que sa définition ne soit pas mal interprétée. De manière à clarifier la signification de F_e, nous donnons aussi une expression pour le complément de F_e :

$$F_e^c = \{ z \in T \mid \exists \delta > 0, \forall x \in A(z), c(x) < c(z) - \delta \}.$$

Nous notons que l'ensemble F_e^c n'est pas modifié si l'expression $c(x) < c(z) - \delta$ est remplacée par l'expression $c(x) \leqq c(z) - \delta$. De plus, la quantité δ n'est pas uniforme par rapport à z, mais peut dépendre de z.

Il est clair, surtout à partir de l'expression de F_e^c que F est un sous-ensemble de F_e. Dans l'exemple 3, l'ensemble caractéristique F est calculé et il est intéressant d'obtenir l'ensemble caractéristique étendu dans le même cas pour vérifier si le point 6 est inclus. On trouve en fait

$$F_e = [0; 7].$$

Ceci illustre le fait que F_e peut être très différent de F. En réalité, la seule relation existant entre F et F_e sans hypothèses supplémentaires est celle que nous avons déjà donnée, c'est-à-dire F est un sous-ensemble de F_e. Finalement, F est défini sans tenir compte de la structure de 1, alors que F_e en dépend fortement.

Les ensembles F et F_e sont reliés aux propriétés finies de l'algorithme 1. Les deux sections suivantes traitent des propriétés asymptotiques de 1 et plus précisément des conditions qui permettent d'obtenir des bornes supérieures pour l'ensemble Q.

CARACTÉRISATION DES PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES

Soit Q l'ensemble de tous les points d'accumulation de toutes les séquences générées par l'algorithme 1. Cet ensemble n'est pas nécessairement décrit par l'ensemble caractéristique F ou par l'ensemble caractéristique étendu F_e

de 1. Il est donc intéressant d'obtenir des bornes supérieures pour Q. Bien évidemment de telles bornes dependent des hypothèses faites sur les composants de l'algorithme 1, c'est-à-dire T, $A(.)$ et $c(.)$. Il est utile de pouvoir faire varier les hypothèses sur $A(.)$ et $c(.)$. Dans ce but, nous avons introduit un ensemble D, sous-ensemble de T et nous présentons des hypothèses qui assurent que Q est un sous-ensemble de D. Les variations de D entraînent des variations correspondantes sur la force des hypothèses et nous possédons donc un moyen aisé d'étudier ces variations.

Les hypothèses que nous présentons font intervenir les quantités T, $A(.)$, $c(.)$ et D de façon explicite. En particulier nous ne considérons pas d'hypothèses dans lesquelles les quantités T, $A(.)$, $c(.)$ et D interviennent de manière récursive.

Il existe essentiellement deux classes d'hypothèses : (i) les hypothèses qui font intervenir $A(.)$ et $c(.)$ de façon disjointe et (ii) les hypothèses qui font intervenir $A(.)$ et $c(.)$ de façon combinée. Dans cette section, nous présentons et nous comparons les hypothèses dans lesquelles $A(.)$ et $c(.)$ apparaissent de façon disjointe.

5. Hypothèse :

(i) $D \supseteq F$;

(ii) $A(.)$ est fermée sur D^c;

(iii) $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c;

(iv) $c(.)$ est semi-continue supérieurement sur T;

(v) T est séquentiellement compact.

6. Théorème : *Si l'hypothèse* 5 *est satisfaite, alors :*

(i) *toute séquence infinie générée par* 1 *possède au moins un point d'accumulation ;*

(ii) $Q \subseteq D$.

Démonstration :

(i) l'ensemble T est séquentiellement compact donc toute séquence infinie générée par 1 possède au moins un point d'accumulation;

(ii) soit z^* un point d'accumulation d'une séquence $\{z_i\}$ générée par 1. Il existe K, un sous-ensemble infini des entiers tel que $\{z_i\}_K$ converge vers z^*. Considérons la sous-suite $\{z_{i+1}\}_J$. L'ensemble T étant séquentiellement compact, il existe J, un sous-ensemble infini de K tel que $\{z_{i+1}\}_J$ converge vers un point z^{**}. Par hypothèse T est séquentiellement fermé et les points z^* et z^{**} sont tous les deux dans T.

Supposons que z^* appartienne à D^c. Alors z^{**} appartient à $A(z^*)$ et puisque $D \supseteq F$, z^* est dans F^c et il existe $\delta > 0$ tel que

$$c(z^{**}) \leqq c(z^*) - \delta.$$

L'application $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c et il existe donc k_1 tel que pour tout $i \geqq k_1$, i dans J,

$$c(z^*) \leqq c(z_i) + \delta/4.$$

L'application $c(.)$ est semi-continue supérieurement sur T et il existe donc k_2 tel que pour tout $i > k_2$, i dans J,

$$c(z_{i+1}) \leqq c(z^{**}) + \delta/4.$$

Posons $k = \max(k_1, k_2)$; alors pour tout $i \geqq k$, i dans J,

$$c(z_{i+1}) \leqq c(z_i) - \delta/2.$$

La séquence $\{ c(z_i) \}$ générée par 1 est monotone décroissante c'est-à-dire que pour tout i,

$$c(z_{i+1}) < c(z_i).$$

Il s'ensuit que la séquence $\{ c(z_i) \}$ n'est pas bornée inférieurement et ceci contredit le fait que pour tout $i \geqq k_1$, i dans J,

$$c(z^*) \leqq c(z_i) + \delta/4.$$

Ce résultat est proche du « théorème A de convergence » donné par Zangwill ([14], p. 91). Le théorème 6 diffère du résultat de Zangwill en essentiellement deux aspects :

(i) Au lieu de supposer T séquentiellement compact, Zangwill suppose que toutes les séquences dans S sont compactes;

(ii) Dans [14], l'application $c(.)$ est supposée continue sur T alors que l'hypothèse 5 demande seulement que $c(.)$ soit continue sur D^c et semi-continue supérieurement sur D.

Les concepts utilisés dans l'hypothèse 5 ne sont pas tous des concepts topologiques. Il est possible de modifier cette hypothèse de façon à n'utiliser que des concepts topologiques.

7. Hypothèse :

(i) $D \supseteq F$;
(ii) $A(.)$ est semi-continue supérieurement sur D^c;
(iii) l'ensemble $A(z)$ est fermé pour tout z de D^c;
(iv) $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c;
(v) $c(.)$ est semi-continue supérieurement sur T;
(vi) T est séquentiellement compact.

Nous savons que si $A(.)$ est semi-continue supérieurement en un point x et si $A(x)$ est fermé alors $A(.)$ est fermée en x. Ceci entraîne immédiatement le lemme suivant.

8. Lemme : *Si l'hypothèse 7 est satisfaite, alors l'hypothèse 5 est satisfaite.*

Les hypothèses 5 et 7 demandent que T soit séquentiellement compact. Cette condition n'est pas nécessaire si D contient non seulement F mais aussi F_e.

9. HYPOTHÈSE :

(i) $D \supseteq F_e$;
(ii) $A(.)$ est semi-continue supérieurement sur D^c;
(iii) $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c;
(iv) $c(.)$ est semi-continue supérieurement sur T.

10. THÉORÈME : *Si l'hypothèse 9 est satisfaite, alors* $Q \subseteq D$.

Démonstration : Soit z^* un point d'accumulation d'une séquence $\{ z_i \}$ générée par 1. Il existe K, un sous-ensemble infini des entiers tel que $\{ z_i \}_K$ converge vers z^*. Supposons que z^* appartienne à D^c. Alors z^* appartient à F_e^c et il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x dans $A(z^*)$:

$$c(x) \leqq c(z^*) - \delta.$$

L'application $c(.)$ est semi-continue supérieurement sur T donc l'ensemble

$$\{ y \in T \mid c(y) < c(z^*) - \delta/2 \},$$

est ouvert dans T et contient $A(z^*)$. La multi-application $A(.)$ est semi-continue supérieurement sur D^c et il existe $N_1(z^*)$, un voisinage de z^* tel que pour tout z' dans $N_1(z^*)$:

$$A(z') \subseteq \{ y \in T \mid c(y) < c(z^*) - \delta/2 \}.$$

L'application $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c et il existe un voisinage $N_2(z^*)$ tel que pour tout z' dans $N_2(z^*)$,

$$c(z^*) \leqq c(z') + \delta/4.$$

Posons $N(z^*) = N_1(z^*) \cap N_2(z^*)$. Alors $N(z^*)$ est un voisinage de z^* et pour tout z' dans $N(z^*)$ et pour tout x' dans $A(z')$,

$$c(x') \leqq c(z') - \delta/4.$$

La séquence $\{ z_i \}_K$ converge vers z^* et il existe k tel que

$$c(z_{i+1}) \leqq c(z_i) - \delta$$

pour tout $i \geqq k$, i dans K. La séquence $\{ c(z_i) \}$ décroît de façon monotone et ceci implique que $\{ c(z_i) \}$ « converge » vers $-\infty$. Ce résultat contredit le fait que pour tout i dans K,

$$c(z^*) \leqq c(z_i).$$

L'hypothèse 9 n'assure pas que chaque séquence infinie générée par 1 possède au moins un point d'accumulation. Au point de vue pratique, un algorithme qui génère des séquences infinies ne possédant pas de points d'accumulation ne présente que peu d'intérêt car nous ne pouvons pas caractériser ces séquences.

Nous possédons trois hypothèses qui font intervenir $A(.)$ et $c(.)$ de façon disjointe. Nous savons déjà que l'hypothèse 7 implique l'hypothèse 5. Nous montrons maintenant que l'hypothèse 5 implique l'hypothèse 9. Pour ce faire, nous utilisons le lemme bien connu suivant.

11. LEMME : *Si T est séquentiellement compact et si $A(.)$ est fermée sur un sous-ensemble G de T, alors $A(.)$ est semi-continue supérieurement sur G.*

12. THÉORÈME : *Si l'hypothèse 5 est satisfaite alors l'hypothèse 9 est satisfaite.*

Démonstration : Tenant compte du lemme 11, il est clair que nous avons seulement à prouver que F_e est un sous-ensemble de D.

Supposons que F_e n'est pas un sous-ensemble de D et prenons un point z dans l'intersection de D^c et F_e. Pour chaque $i \geqq 1$, il existe au moins un point x_i dans $A(z)$ tel que $c(x_i) \geqq c(z) - 1/(2^i)$. L'ensemble T est séquentiellement compact et il existe K, un sous-ensemble infini des entiers tel que la sous-séquence $\{x_i\}_K$ converge vers un point x^* de T. L'ensemble $A(z)$ est fermé et le point x^* est donc dans $A(z)$. L'application $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c et donc au point z. Il s'ensuit que $c(x^*) \geqq c(z)$. La définition de F montre que z est dans F ce qui est impossible car z est supposé être dans D^c et F est un sous-ensemble de D. Nous concluons qu'il n'existe pas de point z dans l'intersection de D^c et F_e.

Nous avons présenté des hypothèses qui mettent en jeu les applications $A(.)$ et $c(.)$ de façon disjointe. Il se trouve que ces hypothèses sont comparables en ce sens que, étant données deux de ces hypothèses, l'une implique toujours l'autre. La section suivante contient le deuxième type d'hypothèse que nous voulons étudier. Ces hypothèses sont plus faibles que les hypothèses du premier groupe mais sont aussi d'application plus difficile en général.

CONDITIONS DE CONVERGENCE COMBINÉES

Les hypothèses présentées jusqu'à présent font intervenir les applications $A(.)$ et $c(.)$ de manière disjointe. Il est possible d'obtenir des hypothèses plus faibles pour $A(.)$ et $c(.)$, mais alors les applications $A(.)$ et $c(.)$ apparaissent de façon combinée. L'inconvénient majeur des hypothèses combinées est leur difficulté d'application. Il est bien évident que si $A(.)$ et $c(.)$ sont des applications compliquées, alors il est en général difficile de vérifier que des conditions de convergence combinées sont vérifiées.

La première condition de convergence combinée pour l'algorithme 1 est en quelque sorte une conséquence de la démonstration du théorème 10.

Le lecteur peut remarquer que la majeure partie de la démonstration du théorème 10 consiste à prouver que si z^* est dans D^c, alors il existe un voisinage $N(z^*)$ de z^* et un scalaire $\delta > 0$ tels que pour tout x' dans $A(z')$ et pour tout z' dans $N(z^*)$,

$$c(x') \leqq c(z') - \delta.$$

13. HYPOTHÈSE :

(i) $D \supseteq F_e$;

(ii) si z est dans D^c, alors il existe un voisinage $N(z)$ de z et un scalaire $\delta > 0$ dépendant de z tels que $c(x') \leqq c(z') - \delta$ pour tout x' dans $A(z')$ et pour tout z' dans $N(z)$;

(iii) $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c.

La remarque concernant la démonstration du théorème 10 implique immédiatement le lemme suivant.

14. LEMME : *Si l'hypothèse* 9 *est satisfaite, alors l'hypothèse* 13 *est satisfaite.*

15. THÉORÈME : *Si l'hypothèse* 13 *est satisfaite, alors* $Q \subseteq D$.

Démonstration: Soit z^* un point d'accumulation d'une séquence $\{z_i\}$ générée par 1. Il existe K, un sous-ensemble infini des entiers tel que $\{z_i\}_K$ converge vers z^*. Supposons que z^* est dans D^c. Alors il existe un voisinage $N(z^*)$ de z^* et $\delta > 0$ tels que pour tout x' dans $A(z')$ et pour tout z' dans $N(z^*)$, $c(x') \leqq c(z') - \delta$. Il s'ensuit qu'il existe k tel que $c(z_{i+1}) \leqq c(z_i) - \delta$ pour tout $i \geqq k, i$ dans K. La séquence $\{z_i\}$ satisfait $c(z_{i+1}) < c(z_i)$ pour tout i et donc étant donné m, il existe p, dépendant de m, tel que $c(z_i) \leqq m$ pour tout $i \geqq p$.

L'application $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c. Étant donné δ, il existe un voisinage $N(z^*)$ de z^* tel que $c(z^*) \leqq c(z) + \delta$ pour tout z dans $N(z^*)$. Il s'ensuit qu'il existe k tel que $c(z^*) \leqq c(z_i) + \delta$ pour tout $i \geqq k$, i dans K et ceci contredit le fait que $c(z_i)$ peut être rendu aussi petit que nous le désirons en prenant i assez grand.

Le théorème 15 diffère du théorème correspondant de Polak (th. 10, p. 15 de [12]) en ce sens que l'application $c(.)$ est seulement supposée semi-continue sur D^c au lieu de continue sur D^c.

La démonstration du théorème 15 montre que l'on peut remplacer la condition de semi-continuité de $c(.)$ par la condition que $c(.)$ soit bornée inférieurement sur T (en fait, si D est fermé, il est suffisant que $c(.)$ soit bornée inférieurement sur D^c).

16. HYPOTHÈSE :

(i) $D \supseteq F_e$;

(ii) si z est dans D^c alors il existe un voisinage $N(z)$ de z et un scalaire $\delta > 0$ dépendant de z tels que $c(x') \leqq c(z') - \delta$ pour tout x' dans $A(z')$ et pour tout z' dans $N(z)$;

(iii) il existe m tel que $c(z) \geqq m$ pour tout z dans T.

17. HYPOTHÈSE :

(i) D est fermé et $D \supseteq F_e$;

(ii) si z est dans D^c alors il existe un voisinage $N(z)$ de z et un scalaire $\delta > 0$ dépendant de z tels que $c(x') \leqq c(z') - \delta$ pour tout x' dans $A(z')$ et pour tout z' dans $N(z)$;

(iii) il existe m tel que $c(z) \geqq m$ pour tout z dans D^c.

18. THÉORÈME : *Si l'hypothèse* 16 *ou l'hypothèse* 17 *est satisfaite alors* $D \supseteq Q$.

Démonstration : Si l'hypothèse 16 est satisfaite, alors la preuve du théorème 18 est essentiellement identique à la preuve du théorème 15. Supposons maintenant que l'hypothèse 17 est satisfaite. Alors si z^* dans Q est dans D^c il existe un voisinage $N(z^*)$ contenu tout entier dans D^c. Il s'ensuit qu'il existe k et K, un sous-ensemble infini des entiers tels que z_i appartient à $N(z^*)$ pour tout $i \geqq k$, i dans K. La première partie de la démonstration du théorème 15 montre que $c(z_i)$ peut être rendu aussi petit que nous le désirons en choisissant i assez grand. Mais $c(z_i) \geqq m$ pour tout $i \geqq k$, i dans K et nous avons donc une contradiction. Nous concluons que si z^* est dans Q, alors z^* est dans D.

Les conditions de l'hypothèse 16 sont similaires aux conditions du théorème 10, p. 15 de [12]. Par contre les conditions de l'hypothèse 17 permettent d'affaiblir les conditions sur $c(.)$ en renforçant les conditions sur D. Au lieu d'avoir $c(.)$ bornée inférieurement sur tout T, il suffit d'avoir $c(.)$ bornée inférieurement sur D^c quand D est fermé. Les trois conditions de convergence combinées font intervenir l'ensemble caractéristique étendu F_e. Nous présentons maintenant une condition de convergence qui ne fait intervenir que l'ensemble caractéristique F.

19. HYPOTHÈSE :

(i) $D \supseteq F$;

(ii) si z est dans D^c alors il existe un voisinage $N(z)$ de z tel que $c(x') < c(z)$ pour tout x' dans $A(z')$ et pour tout z' dans $N(z)$;

(iii) $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c.

20. THÉORÈME : *Si l'hypothèse* 19 *est satisfaite, alors* $D \supseteq Q$.

Démonstration : Soit z^* un point d'accumulation d'une séquence $\{z_i\}$ générée par l'algorithme 1. La séquence $\{z_i\}$ est infinie et donc $c(z_{i+1}) < c(z_i)$ pour tout i et il existe K, un sous-ensemble infini des entiers tel que la sous-séquence $\{z_i\}$ converge vers z^*. Supposons que z^* appartienne à D^c. L'application $c(.)$ est semi-continue inférieurement sur D^c et ceci entraîne immédiatement que $c(z^*) \leqq c(z_i)$ pour tout i. La partie (ii) de l'hypothèse 19 implique l'existence d'un voisinage $N(z^*)$ de z^* tel que $c(x') < c(z^*)$ pour tout x' dans $A(z')$ et pour tout z' dans $N(z^*)$. Il s'ensuit qu'il existe k tel que

$c(z_{i+1}) < c(z^*)$ pour tout $i \geqq k$, i dans K et ceci contredit le fait que $c(z^*) \leqq c(z_i)$ pour tout i. Nous concluons donc que z^* doit être dans D.

L'ensemble F intervient dans les hypothèses 5, 7 et 19. Les hypothèses 5 et 7 impliquent que $F = F_e$ donc l'hypothèse 19 est la seule hypothèse dans laquelle F joue un rôle important. Nous présentons maintenant un exemple qui montre que l'hypothèse 19 permet d'obtenir parfois une borne supérieure pour Q meilleure que les bornes obtenues en utilisant les autres hypothèses de cet article.

21. Exemple : Prenons $\mathscr{I} = E$, $T = \{ z \in E \mid z \geqq 0 \}$ et définissons les applications $A(.)$ et $c(.)$ de la façon suivante :

$$c(z) = \begin{cases} z, & 0 \leqq z < 2; \\ 2, & 2 \leqq z \leqq 4; \\ z, & 4 < z. \end{cases}$$

$$A(z) = \begin{cases} [1; 2), & 0 \leqq z \leqq 5; \\ [z-4; z-3), & 5 < z. \end{cases}$$

Alors,

$$F = [0; 2)$$

et

$$F_e = [0; 4].$$

Prenons $D = [0; 2]$. Il est facile de vérifier que l'hypothèse 19 est satisfaite et que les hypothèses 5, 7, 9, 13, 16 et 17 ne sont pas vérifiées.

COMPARAISON DES CONDITIONS DE CONVERGENCE

Nous avons présenté sept conditions de convergence, c'est-à-dire les hypothèses 5, 7, 9, 13, 16, 17 et 19. Nous savons déjà que 7 implique 5, que 5 implique 9 et que 9 implique 13 et l'exemple 21 montre que l'hypothèse 19 n'implique pas les autres hypothèses. Nous continuons maintenant notre investigation des relations entre nos conditions de convergence.

22. Exemple : Prenons $\mathscr{I} = E$, $T = \{ z \in E \mid z \geqq 0 \}$ et définissons $A(.)$ et $c(.)$ de la façon suivante :

$$c(z) = \begin{cases} 1, & z = 10; \\ z, & z \neq 10. \end{cases}$$

et

$$A(z) = \begin{cases} [0,25; 0,5], & z = 10; \\ [z/4; z/2], & z \neq 10. \end{cases}$$

Alors,

$$F = F_e = \{0\}.$$

Prenons $D = \{ 0 \}$. Il est facile de vérifier que les hypothèses 13, 16 et 17 sont satisfaites et que les hypothèses 5, 7, 9 et 19 ne sont pas satisfaites.

23. EXEMPLE : Prenons $\mathscr{I} = E$, $T = \{ z \in E \mid z \geqq 0 \}$ et définissons $A(.)$ et $c(.)$ de la façon suivante :

$$c(z) = \begin{cases} z, & 0 \leqq z \leqq 2; \\ 2, & 2 \leqq z < 3; \\ z, & 3 \leqq z. \end{cases}$$

$$A(z) = [z/4;\ z/2] \text{ pour tout } z.$$

Alors,

$$F = F_e = \{0\}.$$

Prenons $D = \{ 0 \}$. Il est facile de vérifier que les hypothèses 16 et 17 sont vérifiées et que les hypothèses 5, 7, 9, 13 et 19 ne sont pas vérifiées.

24. EXEMPLE : Prenons $\mathscr{I} = E$, $T = E$ et définissons $A(.)$ et $c(.)$ de la façon suivante :

$$c(z) = z \quad \text{pour tout } z.$$

$$A(z) = \begin{cases} [z/4;\ z/2], & 0 \leqq z; \\ [2z;\ 4z], & z < 0. \end{cases}$$

Alors,

$$F = F_e = \{0\}.$$

Prenons $D = \{ 0 \}$. Il est facile de vérifier que les hypothèses 9, 13 et 19 sont satisfaites et que les hypothèses 5, 7, 16 et 17 ne sont pas satisfaites.

25. EXEMPLE : Prenons $\mathscr{I} = E$, $T = [0;\ 10]$ et définissons $A(.)$ et $c(.)$ de la façon suivante :

$$c(z) = \begin{cases} 0, & z = 0; \\ -1/z, & 0 < z \leqq 1; \\ z-2, & 1 < z. \end{cases}$$

$$A(z) = [z/4;\ z/2] \quad \text{pour tout } z.$$

Alors,

$$F = F_e = \{0\}.$$

Prenons $D = [0;\ 1]$. Il est facile de vérifier que les hypothèses 5, 7, 9, 13, 17 et 19 sont satisfaites et que l'hypothèse 16 n'est pas satisfaite.

Les exemples 21, 22, 23, 24 et 25 montrent que la seule relation possible entre les conditions de convergence combinées est que 16 implique 17. Nous remarquons que si un exemple est choisi tel que 16 est satisfaite avec D ouvert alors 17 n'est pas satisfaite. Le lemme suivant s'ensuit immédiatement.

26. LEMME : *Les conditions de convergence combinées* 13, 16, 17 *et* 19 *ne sont pas comparables.*

Nous terminons cette section par l'examen des relations entre conditions de convergence combinées et disjointes.

27. LEMME : *Si l'hypothèse* 5 *est satisfaite, alors les hypothèses* 7 *et* 19 *sont satisfaites.*

Démonstration : Supposons que 5 est satisfaite. Nous avons seulement à prouver que (ii) de 7 est satisfaite. Si (ii) de 7 n'est pas satisfaite, alors il existe z dans D_c et un voisinage $N(A(z))$ de $A(z)$ tels que à tout voisinage $N(z)$ de z correspond un point z' dans $N(z)$ et un point x' dans $A(z')$ tels que x' est dans $A(z')$ et x' n'est pas dans $N(A(z))$. Il s'ensuit qu'il existe une séquence $\{z_i\}$ convergeant vers z et une séquence $\{x_i\}$ convergeant vers un point x telles que x_i est dans $A(z_i)$ mais non dans $N(A(z))$ pour tout i. L'ensemble $A(z)$ est fermé et donc x n'appartient pas à $A(z)$. Ceci contredit le fait que $A(.)$ est fermée sur D^c.

Nous prouvons maintenant que 5 implique 19. Il est clair que seule (ii) de 19 doit être prouvée. Choisissons un point z dans D^c et supposons que (ii) de 19 n'est pas satisfaite, alors à chaque voisinage $N(z)$ de z correspond z' dans $N(z)$ et x' dans $A(z')$ tels que $c(x') \geqq c(z)$. Il s'ensuit qu'il existe une séquence $\{z_i\}$ convergeant vers z et une séquence $\{x_i\}$ convergeant vers un point x telles que x_i appartient à $A(z_i)$ et $c(x_i) \geqq c(z)$ pour tout i. Par hypothèse $A(.)$ est fermée sur D^c et $c(.)$ est semi-continue supérieurement sur T et donc x est dans $A(z)$ et $c(x) \geqq c(z)$. Ceci contredit le fait que z a été choisi dans D^c.

28. EXEMPLE : Prenons $\mathscr{I} = E$, $T = \{z \in E \mid z \geqq 0\}$ et définissons $A(.)$ et $c(.)$ de la façon suivante :

$$c(z) = \begin{cases} 10, & z = 2; \\ z, & z \neq 2. \end{cases}$$

$$A(z) = \begin{cases} (0;\ -5z+22), & 0 \leqq z \leqq 4; \\ (z/2-2;\ z/2), & 4 \leqq z. \end{cases}$$

Alors,

$$F_i = F_e = [0;\ 4) \cup (4;\ 8).$$

Prenons $D = F_e$. Il est facile de vérifier que les hypothèses 9, 13, 16 et 17 sont satisfaites et que les hypothèses 5, 7 et 19 ne sont pas satisfaites.

Les différents résultats et exemples présentés dans cet article nous permettent d'obtenir toutes les relations qui peuvent exister entre chaque paire de conditions de convergence. Le résumé des résultats mettant en jeu les conditions de convergence disjointes est contenu dans le lemme suivant.

29. LEMME :

(i) *les hypothèses* 5 *et* 7 *sont équivalentes;*

(ii) *l'hypothèse* 5 *implique les hypothèses* 9 *et* 19 *mais n'implique pas les hypothèses* 16 *et* 17)

(iii) *l'hypothèse* 9 *implique l'hypothèse* 13 *mais n'implique pas les hypothèses* 5, 16, 17 *et* 19.

Les relations entre les différentes conditions de convergence sont des relations d'ordre. Nous pouvons donc les représenter graphiquement en utilisant un diagramme de Hasse (voir *fig.* 1). Ce diagramme met en évidence les implications et les non-implications entre conditions. En particulier, nous voyons facilement que les conditions de convergence combinées sont extrémales par rapport à la famille de conditions présentées dans cet article.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. W. HOGAN, *Point-to-Set Maps in Mathematical Programming*, S.I.A.M. Rev., vol. 15, 1973, p. 591-603.
2. P. HUARD, *Algorithmes d'optimisation et fonctions multivoques*, E.D.F., Bulletin de la Direction des Études et Recherches, Série C, vol. 2, 1972, p. 43-62.
3. P. HUARD, *Tentatives de synthèse dans les méthodes de programmation non linéaires*, Cahiers Centre Études Recherche Opér., vol. 16, 1974, p. 347-368.
4. P. HUARD, *Optimization Algorithms and Point-to-Set Mapping*, Math. Programming, vol. 8, 1975, p. 308-331.
5. J. L. KELLEY, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1955.
6. D. G. LUENBERGER, *Introduction to Linear and Non Linear Programming*, Addison-Wesley Publishing Co., 1973.
7. G. G. L. MEYER et E. POLAK, *Abstract Models for the Synthesis of Optimization Algorithms*, S.I.A.M. J. Control, vol. 9, 1971, p. 547-560.
8. G. G. L. MEYER, *Algorithm Model for Penalty Functions Type Iterative Procedures*, J. Comput. System Sci., vol. 9, 1974, p. 20-30.
9. G. G. L. MEYER, *A Canonical Structure for Iterative Procedures*, J. Math. Anal. Appl., vol. 52, 1975, p. 120-128.
10. G. G. L. MEYER, *A Systematic Approach to the Synthesis of Algorithms*, Numer. Math., vol. 24, 1975, p. 277-289.
11. E. POLAK, *On the Convergence of Optimization Algorithms*, Rev. Fr. Inform. Rech. Operation., vol. 16, 1969, p. 17-34.
12. E. POLAK, *Computational Methods in Optimization: A Unified Approach*, Academic Press, 1971.
13. B. T. POLYAK, *Gradient Methods for the Minimisation of Functionals*, U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys., vol. 3, 1963, p. 864-878 (Translation of Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz., vol. 3, 1963, p. 643-653).
14. W. I. ZANGWILL, *Non-Linear Programming: A Unified Approach*, Prentice Hall, 1969.