

J. ROUX

**Résolution numérique d'un problème d'écoulement  
subsonique de fluides compressibles**

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, tome 10, n° R3 (1976), p. 31-50

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1976\\_\\_10\\_3\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1976__10_3_31_0)

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME D'ÉCOULEMENT SUBSONIQUE DE FLUIDES COMPRESSIBLES

par J. ROUX (1)

Communiqué par P.-G. CIARLET

Résumé. — *Le problème de l'écoulement subsonique de fluides compressibles autour de profils symétriques est ramené à la résolution d'une inéquation variationnelle à coefficients dégénérés sur le bord du domaine. Des éléments finis particuliers sont utilisés pour la résolution numérique.*

### I. PRÉLIMINAIRES

On présente, dans cet article, une méthode de résolution numérique d'un problème de dynamique de fluides. La recherche de la solution est ramenée à la résolution d'une inéquation variationnelle par H. Brézis et G. Stampacchia [1].

On rappellera donc brièvement ici l'énoncé du problème.

On s'intéresse à l'écoulement plan, stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait compressible autour d'un profil convexe symétrique. Dans le plan physique de l'écoulement rapporté aux coordonnées  $(x, y)$  on utilisera les notations suivantes :

$\vec{q}$  = vecteur vitesse de composantes  $u$  et  $v$ ;

$\vec{q}_\infty$  = vecteur vitesse à l'infini;

$q = |\vec{q}|$ ;

$\rho$  = densité;

$\rho_\infty$  = densité à l'infini;

$c_q$  = vitesse locale du son;

$p$  = pression.

L'équation de continuité permet de conclure à l'existence d'une fonction  $\psi$  appelée fonction de courant et définie par

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v.$$

---

(1) Université de Paris-Sud, Bât. 425, Orsay.

Le vecteur vitesse  $q$  est caractérisé en tout point par son module et par l'angle  $\theta$  qu'il fait avec une horizontale fixe. On notera  $\mathcal{T}$  la transformation qui fait passer du plan physique  $(x, y)$  au plan de l'hodographe  $(q, \theta)$ .

$$(x, y) \rightarrow (q(x, y), \theta(x, y))$$

A condition de supposer la transformation  $\mathcal{T}$  réversible (on pourra consulter [7] pour avoir des conditions suffisantes pour que cette hypothèse soit vérifiée) on peut effectuer le changement de variable consistant à prendre  $q$

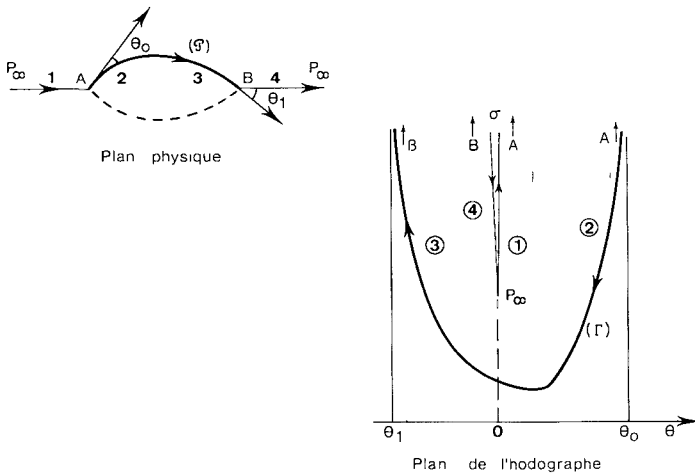


Figure 1.

et  $\theta$  comme variables indépendantes. On obtient alors l'équation du mouvement vérifiée par  $\psi$  dans le plan de l'hodographe (équation de Tchaplyguine) et en posant,

$$\sigma = \int_q^{c_q} \frac{\rho}{s} ds, \tag{1}$$

$$k = \frac{1 - (q^2/c_q^2)}{\rho^2}, \tag{2}$$

cette équation devient :

$$k \psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0. \tag{3}$$

*Nouvelle formulation.* — Le profil  $\mathcal{P}$  est supposé symétrique par rapport à l'axe  $x' x$  qui porte  $\vec{q}_\infty$  et on considère des écoulements symétriques autour de  $\mathcal{P}$ . On se restreindra donc à l'étude dans le demi-plan supérieur. Soit  $\mathcal{T}'$  la transformation  $(x, y) \mapsto (\sigma, \theta)$ . Le profil  $\mathcal{P}$  est transformé par  $\mathcal{T}'$  en

une courbe  $\Gamma$  d'équation  $\sigma = l(\theta)$  entièrement située dans le demi-plan  $\sigma > 0$  si l'écoulement est totalement subsonique, ce qui sera le cas par la suite (voir fig. 1).

On désigne par  $\theta = \theta(P)$  l'angle que la tangente en  $P \in \mathcal{P}$  forme avec  $x' x$  et par  $R(\theta)$  le rayon de courbure algébrique de  $\mathcal{P}$  au point  $P$ . On introduit les notations suivantes :

- $H$  = demi-hauteur du profil;
- $\theta_0$  =  $\theta(A)$ ;
- $\theta_1$  =  $\theta(B)$ ;
- $u(\theta, \sigma) = \int_{u(\theta)}^{\sigma} (k/q) \psi d\sigma$  pour  $\sigma < l$  et  $\theta_1 < \theta < \theta_0$ ;
- $D = \{ [\theta, \sigma], \sigma > l(\theta) \text{ et } \theta_1 < \theta < \theta_0 \} / \{ [0, \sigma], \sigma \geq \sigma_\sigma \}$ ;
- $\Omega = \{ [\theta, \sigma], \theta_1 < \theta < \theta_0 \text{ et } \sigma > 0 \}$ .

La fonction  $u$  vérifie alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{q^2} \left( \frac{q^2}{k} u_\sigma \right)_\sigma + u_{\theta\theta} + u &= -R \quad \text{dans } D, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \text{grad } u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ u(0, \sigma) &= H \quad \text{pour } \sigma \geq \sigma_\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

**THÉORÈME 1 :** *Si pour tout  $P$  de  $\mathcal{P}$  on a  $R \leq 0$  alors la solution  $u$  de (4) est solution de l'inéquation variationnelle :*

$$\forall v \in K_H, \quad a(u, v) \geq \int_{\Omega} R(v-u) q^2 d\theta d\sigma. \quad (5)$$

où

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} q^2 \left( \frac{1}{k} u_\sigma v_\sigma + u_\theta v_\theta - uv \right) d\theta d\sigma, \\ V &= \left\{ v \mid qv \in L^2(\Omega), qv_\theta \in L^2(\Omega), \frac{q}{\sqrt{k}} v_\sigma \in L^2(\Omega) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \\ K_H &= \{ v \in V \mid v \geq 0 \text{ et } v(0, \sigma) = H \text{ pour } \sigma \geq \sigma_\sigma \}. \end{aligned}$$

Il existe  $u$  unique solution de (5).

Le lecteur pourra consulter [8] pour la preuve de ce théorème.

## II. APPROXIMATION DE L'ESPACE $V$

**DÉFINITION 1 :** *On appelle approximation interne d'un espace normé  $V$  l'ensemble constitué par une famille de triplets  $\{ V_h, p_h, r_h \}$ , où :*

- (i)  $V_h$  est un espace normé inclus dans  $V$ ;

- (ii)  $p_h$  est un opérateur linéaire continu de  $V_h$  dans  $V$ ;
- (iii)  $r_h$  est un opérateur linéaire continu de  $V$  dans  $V_h$ ;
- (iv)  $h$  un paramètre destiné à tendre vers 0.

DÉFINITION 2 :  $L$ 'approximation  $\{V_h, p_h, r_h\}$  de  $V$  est stable si les normes des opérateurs  $p_h$  et  $r_h$  :

$$\begin{aligned} \|p_h\| &= \sup_{\substack{u_h \in V_h \\ \|u_h\|_h \leq 1}} \|p_h u_h\|, \\ \|r_h\| &= \sup_{\substack{u \in V \\ \|u\| \leq 1}} \|r_h u\|_h. \end{aligned}$$

sont majorés indépendamment de  $h$ .

DÉFINITION 3 :  $L$ 'approximation  $\{V_h, p_h, r_h\}$  de  $V$  est convergente si

$$\forall u \in V, \lim_{h \rightarrow 0} p_h r_h u = u$$

dans  $V$  fort.

PROPRIÉTÉ 1 : Soit  $\{V_h, p_h, r_h\}$  une approximation stable de  $V$ . Pour que cette approximation soit convergente il faut et il suffit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - p_h r_h u\| = 0$$

pour tous les  $u$  d'un sous-espace dense  $\mathcal{V}$  de  $V$ .

Dans ce qui suit on va démontrer que  $D(\Omega)$ , espace des fonctions indéfiniment continûment différentiables et à support compact dans  $\Omega$  est dense dans l'espace  $V$  muni de la norme :

$$\|v\|_V = \left( \|qv\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{q}{\sqrt{k}} v_\sigma \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|qv_0\|_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , on notera :

$L^2_\mu(\Omega)$  l'ensemble des fonctions mesurables et de carré intégrable pour la mesure  $x^\mu dx dy$ , muni de la norme  $\|u\|_{L^2_\mu(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x, y)|^2 x^\mu dx dy \right)^{1/2}$ ,

$V_\mu(\Omega)$  l'ensemble des  $u$  appartenant à  $L^2(\Omega)$  tels que l'on ait

$$\frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2_\mu(\Omega),$$

$\dot{V}_\mu(\Omega)$  la fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $V_\mu(\Omega)$ .

Les résultats suivants (lemme 1 et théorèmes 2 et 3) ont été obtenus par P. Grisvard (cf. [6]) pour un espace légèrement différent où le poids intervient pour la fonction et pour toutes les dérivées. Nous donnerons ici sans démonstration les résultats pour l'espace  $V_\mu$ .

LEMME 1 : Soit  $\Omega = \mathbf{R}^{2+} = \{ (x, y), x \geq 0 \}$ . Soit  $\varepsilon' (I \times \mathbf{R})$  l'espace des distributions à support dans  $I \times \mathbf{R}$  telles que  $I$  soit un compact de  $]0, \infty[$ . Alors  $\dot{V}_\mu (\Omega)$  est la fermeture de  $V_\mu (\Omega) \cap \varepsilon' (I \times \mathbf{R})$  dans  $V_\mu (\Omega)$ .

THÉORÈME 2 : Soit  $\Omega = \mathbf{R}^{2+}$ . Alors si l'on a  $\mu < 1$ ,  $\dot{V}_\mu (\Omega)$  est formé des fonctions de  $V_\mu (\Omega)$  telles que  $u (0, y) = 0$ .

THÉORÈME 3 : Soit  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  tel que  $\Omega = \{ (x, y) \mid y > 0 \text{ et } x_0 < x < x_1 \}$ . Désignons par  $\tilde{V} (\Omega)$  l'ensemble des fonctions de  $L^2 (\Omega)$  telles que  $\partial u / \partial x \in L^2 (\Omega)$ ,  $(1/\sqrt{y}) (\partial u / \partial y) \in L^2 (\Omega)$  et  $u = 0$  sur  $\partial \Omega$ . Alors  $D (\Omega)$  est dense dans  $\tilde{V} (\Omega)$ .

Soient  $\theta, \sigma, k$ , et  $\Omega$  définis comme dans  $I$  et

$$\tilde{V} (\Omega) = \left\{ v \in L^2 (\Omega), v \in L^2 (\Omega), \frac{V_\sigma}{\sqrt{k}} \in L^2 (\Omega) \quad \text{et} \quad y = 0 \text{ sur } \partial \Omega \right\}.$$

LEMME 2 : Au voisinage de  $\sigma = 0$  on a  $k$  équivalent à  $\lambda \sigma$ .

Pour  $q$  voisin de  $c_q$  on a  $\sigma \simeq \rho_c [(c_q - q) / c_q]$ ,  $\rho_c$  désignant la densité au point  $q = c_q$ . D'autre part  $k$  est équivalent pour  $\sigma$  petit à  $2 \sigma / \rho_c^3$  et ceci achève la démonstration du lemme avec  $\lambda = 2 / \rho_c^3$ . On en déduit comme conséquence directe le théorème suivant :

THÉORÈME 4 :  $D (\Omega)$  est dense dans  $\tilde{V} (\Omega)$ .

THÉORÈME 5 :  $D (\Omega)$  est dense dans  $V$ .

Pour tout domaine  $\Omega'$  borné inclus dans  $\Omega$  les normes de  $V$  et de  $\tilde{V}$  sont équivalentes. En utilisant une suite tronquante on montre que l'ensemble des fonctions de  $V$  à support compact forme un ensemble dense dans  $V$  muni de la norme :

$$\| u \|_V^2 = \| qu \|_{L^2 (\Omega)}^2 + \| qu_\theta \|_{L^2 (\Omega)}^2 + \left\| \frac{q}{\sqrt{k}} u_\sigma \right\|_{L^2 (\Omega)}^2.$$

REMARQUE : Ce résultat est particulièrement important pour l'approximation numérique puisqu'il ne sera possible que de considérer des domaines  $\Omega$  bornés.

### Approximation de l'espace $V$ par des éléments finis

On va, dans ce paragraphe, définir un espace de dimension finie  $V_h$  réalisant une approximation interne stable de l'espace  $V$ , il faudra en particulier que les éléments de  $V_h$  satisfassent à la condition  $v / \sqrt{\sigma} \in L^2 (\Omega)$ .

On définit le domaine :

$$\Omega_L = \{ [\theta, \sigma] \mid \theta_1 < \theta < \theta_0 \quad \text{et} \quad 0 < \sigma < L < +\infty \},$$

et on note  $\gamma$  la partie de la frontière de  $\Omega$  où l'on a, soit  $\theta = \theta_1$ , soit  $\theta = \theta_0$ , soit  $\sigma = 0$ ; et  $\gamma$  le complémentaire de  $\gamma$  dans  $\partial\Omega$ . D'autre part soit

$$V_L = \left\{ v \mid qv \in L^2(\Omega_L), qv_\theta \in L^2(\Omega_L), \frac{q}{\sqrt{k}} v_\sigma \in L^2(\Omega_L) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \gamma \right\}.$$

Dans tout ce qui suit on notera

$$\|v\| = \|v\|_L,$$

$$\|v\|_L^2 = \|qv\|_{L^2(\Omega_L)}^2 + \|qv_\theta\|_{L^2(\Omega_L)}^2 + \left\| \frac{q}{\sqrt{k}} v_\sigma \right\|_{L^2(\Omega_L)}^2.$$

Étant donnés des paramètres  $h' > 0$  et  $h_j > 0$  destinés à tendre vers 0, on associe à  $(h', h_j)_j$  un recouvrement de  $\Omega_L$  par des rectangles  $R_j$  tels que :

(i) tout rectangle  $R_j$  du recouvrement a une largeur égale à  $h'$  et une longueur égale à  $h_j$ ;

(ii) deux rectangles distincts  $R_j$  et  $R'_j$  du recouvrement ont :

- soit une intersection vide,
- soit une intersection réduite à un sommet commun,
- soit une intersection égale à un côté commun en entier;

(iii) la droite d'équation  $\theta = 0$  et les rectangles  $R_j$  ont :

- soit une intersection vide,
- soit une intersection réduite à un côté ou à un sommet du rectangle.

L'ensemble des points de discrétisation de  $\Omega_L$  est noté  $\Omega_h$  et l'ensemble des points de  $\Omega_h$  intérieurs à  $\Omega_L$  ou situés sur  $\gamma$  est noté  $\Omega_h$ . On désigne par  $Q$  l'espace des fonctions de la forme :

$$p(\theta, \sigma) = \alpha\theta + \beta\sigma\sqrt{\sigma} + \gamma\theta\sigma\sqrt{\sigma} + \delta,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  étant des constantes.

REMARQUES : (i) Comme  $\partial p / \partial \sigma = (3/2)\sqrt{\sigma}(\beta + \gamma\theta)$ , sur tout domaine  $S$  borné, la quantité  $\int_S [(1/\sqrt{\sigma})(\partial p / \partial \sigma)]^2$  est finie;

(ii) Si  $p$  est une fonction quelconque de l'espace  $Q$  et si on lui associe l'ensemble  $\sum$  formé par ses valeurs aux nœuds de la discrétisation, il est facile de voir que  $\sum$  est  $Q$ -unisolvant suivant la terminologie classique (cf. [2] et [9]).

### Détermination des fonctions de forme

Soit  $a_{ij} \in \Omega_h$ , de coordonnées  $\theta_i = ih'$ ,  $\sigma_j = \sum_{l=1}^i h_l$ . On désigne par  $w_{ij}$  la fonction dont la restriction à chaque rectangle du recouvrement est dans  $Q$

et est telle que

$$w_{ij}(a_{ij}) = 1, \\ w_{ij}(ak_l) = 0 \quad \text{pour } (i, j) \neq (k, l).$$

Le support de la fonction  $w_{ij}$  est constitué par les quatre rectangles dont un des sommets est  $a_{ij}$ . La restriction de  $w_{ij}$  à chacun de ces quatre rectangles est la suivante :

$$\left. \begin{aligned} w_{i,j}^1 &= \frac{s_{j+1}}{s_{j+1}-s} \frac{\theta}{k} + (i-1) \frac{\sigma \sqrt{\sigma}}{s_{j+1}-s_j} - \frac{\theta \sigma \sqrt{\sigma}}{k(s_{j+1}-s_j)} - (i-1) \frac{s_{j+1}}{s_{j+1}-s_j}, \\ w_{i,j}^2 &= -\frac{s_{j+1}}{s_{j+1}-s_j} \frac{\theta}{k} - (i+1) \frac{\sigma \sqrt{\sigma}}{s_{j+1}-s_j} + \frac{\theta \sigma \sqrt{\sigma}}{k(s_{j+1}-s_j)} + (i+1) \frac{s_{j+1}}{s_{j+1}-s_j}, \\ w_{i,j}^3 &= \frac{s_{j-1}}{s_j-s_{j-1}} \frac{\theta}{k} + (i+1) \frac{\sigma \sqrt{\sigma}}{s_j-s_{j-1}} - \frac{\theta \sigma \sqrt{\sigma}}{k(s_j-s_{j-1})} - (i+1) \frac{s_{j-1}}{s_j-s_{j-1}}, \\ w_{i,j}^4 &= -\frac{s_{j-1}}{s_j-s_{j-1}} \frac{\theta}{k} - \frac{(i-1) \sigma \sqrt{\sigma}}{s_j-s_{j-1}} + \frac{\theta \sigma \sqrt{\sigma}}{k(s_j-s_{j+1})} + (i-1) \frac{s_{j-1}}{s_j-s_{j-1}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

où

$$s_j = \left( \sum_{i=1}^j h_i \right)^{3/2}.$$

LEMME 3 : Les fonctions  $w_{ij}$  sont continues sur  $\bar{\Omega}_L$ .

Il suffit pour cela de regarder la valeur des fonctions  $w_i r_j$  sur chacun des côtés des rectangles de la discrétisation.

LEMME 4 : Les fonctions  $w_{ij}$  appartiennent à  $V_L$ .

Les fonctions  $w_{ij}$  appartiennent à  $\tilde{V}(\Omega_L)$  et donc à  $V_L$ .

DÉFINITION 4 : On définit l'espace  $V_h$  comme l'espace des fonctions  $v_h$  vérifiant les conditions suivantes :

- (i) la restriction de  $v_h$  à chaque rectangle  $R_i$  est une fonction de  $Q$ ;
- (ii) la restriction de  $v_h$  à  $\gamma$  est nulle.

THÉORÈME 6 :  $V_h$  est un sous-espace de dimension finie de  $V_L$ .

Ceci est une conséquence des lemmes 3 et 4.

DÉFINITION 5 : Soit  $r_h$  l'opérateur de  $V \rightarrow V_h$  qui à  $u \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap V$  associe la fonction  $r_h u$  de  $V_h$  définie par

$$\forall a_{ij} \in \Omega, \quad r_h u(a_{ij}) = u(a_{ij}),$$

$r_h u$  s'appelle l'interpolée de  $u$ .



On munit alors  $V_h$  du produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} ((u_h, v_h)) &= \int_{\Omega_L} (r_h q u_h)(r_h q v_h) d\theta d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega_L} (r_h q u_\theta)(r_h q v_\theta) d\theta d\sigma + \int_{\Omega_L} r_h \left( \frac{q}{\sqrt{k}} u_\theta \right) r_h \left( \frac{q}{\sqrt{k}} v_\theta \right) d\theta d\sigma. \end{aligned}$$

CONCLUSION : 1° Les fonctions de  $V_h$  égales à 1 sur un certain sommet appartenant à  $\Omega_h$  et nulles sur tous les autres forment une base de  $V_h$ .

2° L'espace  $V_h$  constitue une approximation interne et stable de l'espace.

### Un type de coordonnées adaptées au problème (coordonnées rectangulaires)

Soit  $P$  un point de  $\mathbf{R}^2$  appartenant à  $\bar{\Omega}_L$ . Il existe un rectangle de la quadrangulation,  $R_p$  et un seul tel que  $P$  appartienne à  $R_p$ . Soient  $A_1, A_2, A_3, A_4$  de coordonnées  $(\theta_i, \sigma_i)$ ,  $i = 1, 4$ , les sommets de  $R_p$ .

THÉORÈME 7 :  $P$  étant donné, appartenant à  $\bar{\Omega}_L$  et  $A_1, A_2, A_3, A_4$  définis comme précédemment, il existe quatre nombres réels  $\lambda_i = \lambda_i(P)$  tels que si  $P$  a pour coordonnées  $(\theta, \sigma)$  on ait

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i \theta_i, \\ \sigma \sqrt{\sigma} &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i \sigma_i \sqrt{\sigma_i}, \\ \theta \sigma \sqrt{\sigma} &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i \theta_i \sigma_i \sqrt{\sigma_i}, \\ 1 &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

De plus les  $\lambda_i$  sont déterminés de façon unique. Les  $\lambda_i$  sont appelés les coordonnées rectangulaires de  $P$  par rapport au système  $A_1, A_2, A_3, A_4$ .

Les  $\lambda_i$  vérifient

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \lambda_i (\theta_i - \theta) &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 \lambda_i (\sigma_i \sqrt{\sigma_i} - \sigma \sqrt{\sigma}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 \lambda_i (\theta_i \sigma_i \sqrt{\sigma_i} - \theta \sigma \sqrt{\sigma}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Étant donnés quatre scalaires  $u_1, u_2, u_3, u_4$  et un rectangle  $R$  de sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , il existe une fonction  $u$  et une seule appartenant à  $Q$  telle que  $u(A_i) = u_i$ . De plus pour tout point  $P$  de  $R$ ,  $u(P)$  s'écrit comme  $\sum_{i=1}^4 u_i \lambda_i(P)$ .

**Estimation de certains coefficients**

Soit  $M$  la matrice du système (8) et  $B = (b_{ij})$  la matrice inverse de  $M$ . On considère le rectangle  $R$  dont les sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ont respectivement pour coordonnées  $(\theta, \sigma), (\theta', \sigma), (\theta', \sigma'), (\theta, \sigma')$ . On note :

$$\begin{aligned} z &= \sigma \sqrt{\sigma}, \\ h &= \sigma' \sqrt{\sigma'} - \sigma \sqrt{\sigma}, \\ h' &= \theta' - \theta. \end{aligned}$$

Alors on obtient les résultats suivants :

$$\left. \begin{aligned} b_{13} &= \frac{1}{hh'}, \\ b_{23} &= -\frac{1}{hh'}, \\ b_{33} &= \frac{1}{hh'}, \\ b_{43} &= -\frac{1}{hh'}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= -\frac{z+h}{hh'}, & b_{12} &= \frac{\theta+k}{hh'}, \\ b_{21} &= \frac{z+h}{hh'}, & b_{22} &= \frac{\theta+k}{hh'}, \\ b_{31} &= -\frac{z}{hh'}, & b_{32} &= -\frac{\theta}{hh'}, \\ b_{41} &= \frac{z}{hh'}, & b_{42} &= \frac{\theta}{hh'}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

**Propriétés différentielles**

Soit  $D$  l'opérateur gradient. Par différenciation des résultats précédents on obtient :

$$\sum_{i=1}^4 D \lambda_i = 0 \quad (11)$$

et

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta} = b_{i1} + b_{iz} z = \frac{1}{h'} \quad (11')$$

**Calcul de l'erreur d'interpolation pour une fonction  $u$  de  $C^3(\bar{\Omega})$**

On pose

$$\begin{aligned} w(\theta, z) &= u(\theta, \sigma), \\ w_h(\theta, z) &= r_h u(\theta, \sigma), \end{aligned}$$

$w$  appartient à  $C^2(\bar{\Omega})$ . On va comparer  $w$  et  $w_h$  sur chaque rectangle  $R$  de la quadrangulation de sommets  $A_1, A_2, A_3, A^4$ . D'après la formule de Taylor on a

$$w(A_i) = w(P) + D_j w(P) \xi_{j,i} + \frac{1}{2} D_{jk}(P_i) \xi_{j,i} \xi_{k,i},$$

où

$$\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}) = PA_i,$$

et où  $P_i$  est un point du segment  $PA_i$ .

On a également :

$$\begin{aligned} w_h(P) &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i(P) w(A_i), \\ \sum \lambda_i D_j w(P) \xi_{j,i} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Il résulte donc de ce qui précède que

$$w_h(P) = w(P) + \frac{1}{2} D_{j,k} w(P_i) \xi_{j,i} \xi_{k,i},$$

et donc

$$|w_h(P) - w(P)| \leq \left( \sum_{j,k} D_{j,k} |w(P_i)|^2 \right)^{1/2} |\xi_{j,i}| \cdot |\xi_{k,i}|,$$

ou encore

$$\sup |w_h(P) - w(P)| \leq C_1(w) \rho^2(h, h'), \quad (13)$$

où

$$\rho(h, h') = \sup(h, h').$$

On s'intéresse maintenant à une estimation d'erreur concernant la dérivée de  $w$ . En différenciant (12) on obtient :

$$\begin{aligned} D w_h(P) &= \sum_{i=1}^4 w(P) D \lambda_i \\ &+ \sum_{i=1}^4 D_j w(P) \xi_{j,i} D \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 D_{j,k} w(P_i) \xi_{j,i} \xi_{k,i} D \lambda_i. \end{aligned} \quad (14)$$

En vertu de (11) le premier terme du second membre de l'égalité est nul. On va montrer que le second terme n'est autre que  $Dw(P)$ . Il suffit de prouver que

$$\left( \sum_{i=1}^4 D_j w(P) \xi_{j,i} D \lambda_i \right), PA_k = Dw(P) \cdot PA_k.$$

En utilisant (9) et (10) on obtient :

$$\left( \sum_{i=1}^4 D_j w(P) \xi_{j,i} D \lambda_i \right), PA_k = Dw(P) \cdot PA_k$$

En utilisant (14) on a le résultat suivant :

$$\begin{aligned} |Dw_h(P) - Dw(P)| &< \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 |D \lambda_i| \cdot |D_{j,k} w(P) \xi_{j,i} \xi_{k,i}| \\ &\leq C_2(w) |D \lambda_i| \rho^2(h, k), \end{aligned}$$

mais d'après (11') :

$$|D \lambda_i| < \frac{1}{\rho'(h, h')},$$

où  $\rho'(h, k) = \inf(h, k)$ , et on obtient :

$$\sup_{\rho \in \Omega} \text{ess} |Dw_h(P) - Dw(P)| \leq C_2(w) \frac{\rho^2(h, h')}{\rho'(h, h')}. \tag{15}$$

Soit maintenant  $\tilde{D}$  l'opérateur de composantes :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} - \frac{\partial u}{\partial \sigma} = - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} - \frac{\partial w}{\partial z}.$$

**THÉORÈME 8 :** Pour toute fonction  $u \in C^3(\bar{\Omega})$ , si l'on désigne par  $u_h$  la fonction interpolée de  $u$  définie par

$$\forall M \in \Omega_h, \quad u_h(M) = u(M),$$

alors

$$\begin{aligned} \text{Sup}_{\rho \in \Omega} |u_h(P) - u(P)| &\leq C_1(u) \rho^2(h, h'), \\ \text{Sup}_{\rho \in \Omega} \text{ess} |Du_h(P) - Du(P)| &\leq C_2(u) \frac{\rho^2(h, h')}{\rho'(h, h')}. \end{aligned}$$

**CONCLUSION :** L'approximation ainsi définie de l'espace  $V_L$  est stable et convergente dès que la quantité  $\delta(h, h') = \sup_R (\rho(h, h')/\rho'(h, h'))$  reste bornée quand  $\rho'(h, h') \rightarrow 0$ .

**Calcul de l'erreur d'interpolation pour une fonction  $u$  de  $\tilde{V}_2(\Omega_L)$ , ou**

$$\tilde{V}_2(\Omega_L) = \left\{ u \in \tilde{V}(\Omega_L) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(\Omega_L), \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \in L^2(\Omega_L), \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \in L^2(\Omega_L), \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \in L^2(\Omega_L) \right\}.$$

REMARQUE :  $\tilde{V}_2(\Omega_L)$  est inclus dans  $H^2(\Omega_L)$ , on en déduit que  $\tilde{V}_2(\Omega_L)$  est inclus dans  $C^0(\Omega_L)$ . On peut donc définir pour tout  $u \in \tilde{V}_2(\Omega_L)$  une fonction  $r_h u$  interpolée de  $u$ .

LEMME 5 : L'injection de  $\tilde{V}_2(\Omega_L)$  dans  $V_L$  est compacte

Posons, pour  $u \in \tilde{V}_1(\Omega_L)$ ,

$$w_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y};$$

alors  $w = (w_1, w_2) \in [L^2(\Omega_L)]^2$  et si  $u \in \tilde{V}_2(\Omega_L)$  alors  $w \in [H^1(\Omega_L)]^2$ . L'injection de  $H^1(\Omega_L)$  dans  $L^2(\Omega_L)$  étant compacte on en déduit le résultat.

THÉORÈME 9 : Soit  $P = \{ \text{fonctions de la forme } \alpha x + \beta y \sqrt{y} + \gamma xy \sqrt{y} + \delta \}$ . Il existe une constante  $C(K)$  telle que pour tout compact  $K \subset \Omega_L$  et pour tout opérateur  $\pi$  linéaire continu de  $V_2(K)$  dans  $V(K)$  vérifiant tout  $v$  de  $P$ ,  $\pi v = v$ , on ait la majoration :

$$\forall v \in \tilde{V}_2(\Omega_L), \quad \|v - \pi v\|_1 \leq C \|I - \pi\|_{\mathcal{L}(\tilde{V}_2, \tilde{V}_1)} |v|_2,$$

où

$$\| \cdot \|_1 = \| \cdot \|_{\tilde{V}} \\ |v|_2^2 = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_L)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\|_{L^2(\Omega_L)}^2 \\ + \left\| \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_L)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\|_{L^2(\Omega_L)}^2$$

Moyennant le lemme 5 et le changement de variables  $z = y \sqrt{y}$  ce théorème et le suivant sont obtenus par le même raisonnement que dans [2] et [9].

THÉORÈME 10 : Soit  $K$  un rectangle de  $\Omega_L$ . Avec les mêmes notations que dans le théorème 8 on a le résultat suivant :

$$\forall v \in \tilde{V}_2(\Omega_L), \quad |v - \pi v|_1 \leq C \frac{(h^2 + h'^2)}{\inf(h, h')} |v|_2.$$

REMARQUE : Dans un travail simultané, Ciavaldini et Tournemine (cf. [3]) donnent également une estimation de la convergence de la solution approchée  $u_L$  obtenue quand on coupe le domaine  $\Omega$  à la distance  $L$ , vers la solution  $u$  du problème correspondant à  $\Omega$  infini.

III. TRANSFORMATION DU PROBLÈME EN UN PROBLÈME DE RECHERCHE DE POINT DE SELLE

Soit  $K_{HL} = \{ v \in V_L \mid v(0, \sigma) = H \text{ pour } \sigma \geq \sigma_\infty, v(\theta, L) = w(\theta), v \geq 0 \}$  où  $w$  est défini par

$$w = A \cos \theta + B \sin \theta,$$

avec

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta} R \sin \theta \, d\theta, \quad B = \int_{\theta_1}^{\theta} -R \cos \theta \, d\theta \quad \text{pour } \theta \in ]\theta_1, \theta[,$$

$$A = - \int_{\theta}^{\theta_0} R \sin \theta \, d\theta, \quad B = \int_{\theta}^{\theta_0} R \cos \theta \, d\theta \quad \text{pour } \theta \in ]\theta, \theta_0[.$$

PROBLÈME  $P_1$  : Trouver  $u \in K_{HL}$  tel que  $\forall v \in K_{HL}$  on ait (avec les notations de I) :

$$a(u, v-u) \geq \int_{\Omega_L} R(v-u)q^2 \, d\theta \, d\sigma.$$

On définit  $J(v) = a(v, v) - 2 \int_{\Omega_L} R v q^2 \, d\theta \, d\sigma.$

PROBLÈME  $P_2$  : Trouver  $u \in K_{HL}$  tel que

$$J(u) = \inf_{v \in K_{HL}} J(v).$$

Soit  $K'_{HL} = \{ v \in V_L \mid v(0, \sigma) = H \text{ pour } \sigma \geq \sigma_\infty, v(\theta, L) = w(\theta) \}.$

PROBLÈME  $P_3$  : Trouver  $u \in K'_{HL}$  tel que

$$J(u) = \inf_{v \in K'_{HL}} \sup_{p \in (L^2(\Omega_L))^+} (J(v) - (p, qv)).$$

THÉORÈME 11 : Les problèmes  $P_1, P_2, P_3$  sont équivalents et admettent une solution unique.

$P_1$  équivalent à  $P_2$  est un résultat bien connu, de même que l'existence et l'unicité de la solution de  $P_1$  (cf. [8]). D'autre part l'équivalence de  $P_2$  et de  $P_3$  résulte du fait suivant : si  $v$  est négatif alors

$$\sup (J(v) - (p, qv)) = +\infty \quad \text{donc} \quad \inf_{v \in K_{HL}} \sup_{(p \in L^2(\Omega_L))^+} (J(v) - (p, qv))$$

n'est certainement pas atteint pour  $v < 0$ .

IV. DESCRIPTION DU PROBLÈME APPROCHÉ

On définit  $V_h$  comme en II et,

$$K_{HL}^h = \{ v \in V_h \mid v_h(0, \sigma) = H \text{ pour } \sigma \geq \sigma_\infty, v_h(\theta, L) = w_h(\theta) \text{ et } v_h \geq 0 \},$$

où  $w_h$  est la fonction de  $V_h$  interpolée de  $w$ .  $K_{HL}^h$  est définie de façon analogue à  $K_{HL}^h$ . Soit

$$L_h : V_h \rightarrow \mathbf{R},$$

$$v_h \mapsto \int_{\Omega_L} R_h v_h q_h^2 d\theta d\sigma.$$

où  $R_h q_h^2$  désigne la fonction interpolée de  $R_q^2$ .

PROBLÈME  $P_{3h}$  : Trouver  $u_h \in K_{HL}^h$  tel que

$$J_h(u_h) = \inf_{v_h \in K_{KL}^h} \sup_{p_h \in (L^2(\Omega_L))^+} (J_h(v_h) - (p_h, q_h v_h))$$

où

$$J_h(v_h) = a(v_h, v_h) - 2L(v_h).$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas continu ce problème admet une solution unique.

Soient  $u$  et  $u_h$  respectivement les solutions des problèmes  $P_1$  et  $P_{1h}$ , on se propose de calculer  $\|u - u_h\|_V$ . Par une méthode semblable, mais faisant de plus intervenir l'approximation de  $f$ , à celle utilisée par R. Falk [5] on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 12. — Soient  $u$  et  $u_h$  les solutions des problèmes  $P_1$  et  $P_{1h}$ ,  $\alpha$  et  $M$  respectivement les constantes de coercivité et de continuité, alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{1}{2\alpha} \{ M \|u - v_h\|_\sigma + (M^2 \|u - v_h\|_V^2) + 4 [ |f - Au|_{L^2(\Omega_L)} |u - v_h| + |f_h - Au| \cdot |u_h - v| + |f - f_h| \cdot |v_h - v| ]^{1/2} \}. \tag{16}$$

Supposons que  $u$  appartienne à  $C^3(\Omega_L)$  et choisissons pour  $v$  une fonction dont  $u_h$  est l'interpolée et pour  $v_h$  l'interpolée de  $u$ . D'après le théorème 9 on a

$$\|u - v_h\|_V \leq C_2 \frac{\rho^2(h, h')}{\rho'(h, h')},$$

$$|u_h - v| \leq C_1 \rho^2(h, h'),$$

$$|u - v_h| \leq C_1 \rho^2(h, h').$$

De même si  $f \in C^2(\Omega)$  on a  $|f - f_h| \leq C_1 \rho^2(h, h')$ , d'autre part :

$$|f - Au| = \int_{\Omega-D} f^2(\theta, \sigma) d\theta d\sigma,$$

( $D$  étant l'intérieur du domaine où l'équation  $Au = f$  est vérifiée), on peut donc en déduire, en utilisant le fait que  $\rho/\rho' > 1$  le théorème suivant :

THÉORÈME 13. — Si  $u$  et  $f$  appartiennent à  $C^3(\Omega)$ , alors il existe une constante  $\beta = \beta(\alpha, M)$  telle que  $u$  et  $u_h$  étant les solutions des problèmes  $P_1$  et  $P_{1h}$  on ait

$$\|u - u_h\|_V \leq \beta(\alpha, M) \frac{\rho^2(h, h')}{\rho'(h, h')}.$$

D'après le théorème de densité démontré en II, on peut déduire du théorème 13 le théorème 14.

THÉORÈME 14. — Soient  $u$  et  $u_h$  les solutions des problèmes  $P_1$  et  $P_{1h}$  alors

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_X &\rightarrow 0, \\ h &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nous nous proposons maintenant de décrire la résolution numérique du problème  $P_{3h}$  : l'algorithme utilisé est celui d'Uzawa (cf. [4]). Ceci revient à construire deux suites d'éléments  $u_h \in K_{HL}^h$ ,  $p_h^n \in L^2(\Omega_L)^+$ , ainsi définies. On part de  $p_h^0 \in (L^2(\Omega_L))^+$  quelconque, on calcule  $u_h^0$ ,  $p_h^1$ ,  $u_h^1$ , ... par :  $p_h^n$  étant connu, on détermine  $u_h^n$  comme l'élément de  $K_{HL}^h$  qui minimise :

$$J_h(v_h) - (q_h v_h, q_h p_h).$$

On définit ensuite :

$$p_h^{n+1} = \pi_{(L^2(\Omega_L))} + (p_h^n - \rho_n q_h^2 u_h^n),$$

où  $\pi$  est l'opérateur de projection.

En ce qui concerne la détermination de  $u_h^n$ ;  $p_h^n$  étant connu, on pose

$$u_h^{n+1} = u_h^n - \rho_1 S_h^{-1}(A u_h^n - R_h q_h^2 - p_h q_h^2), \tag{17}$$

où  $\rho_1$  sera précisé ultérieurement, et  $S_h$  est l'isomorphisme canonique de  $V_h$  sur  $V'_h$ . Soient

$$K_{0L}^h = \{v_h \in V \mid v_h(0, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \geq \sigma_\infty, v_h(\theta, L) = 0 \text{ et } v_h \geq 0\},$$

$B_0$  = base des fonctions de  $V_h$  nulles sur les sommets appartenant au segment  $\theta = 0$  et  $L \geq \sigma \geq \sigma_\infty$  et au segment  $\sigma = L$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$ . Alors la résolution de (17) est équivalente à la suivante :

$$\begin{aligned} \forall \theta_h \in B_0, \\ ((u_h^{n+1}, \theta_h))_{V_h} = ((u_h^n, \theta_h))_{V_h} - \rho_1 (A u_h^n - R_h q_h^2 - q_h^2 p_h, \theta_h)_{L^2(\Omega_L)}. \end{aligned} \tag{18}$$



D'autre part l'algorithme décrit par (18) permet de déterminer la solution du problème suivant :

Trouver  $u_h \in K'_{HL}$  tel que

$$\forall v_h \in K'_{HL}, \quad a(u_h, u_h - v_h) \geq \int_{\Omega_L} (R_h q_h^2 - q_h^2 p_h) d\theta d\sigma.$$

ou encore trouver  $u_h \in K'_{HL}$  tel que

$$\forall \theta_h \in B_0, \quad a(u_h, \theta_h) \geq \int_{\Omega_L} (R_h q_h^2 - q_h^2 p_h) \theta_h d\theta d\sigma.$$

ce qui s'exprime en changeant  $\theta_h$  en  $-\theta_h$  par

$$\forall \theta_h \in B_0, \quad a(u_h, \theta_h) = \int_{\Omega_L} (R_h q_h^2 - q_h^2 p_h) \theta_h d\theta d\sigma.$$

L'algorithme décrit va donc permettre de déterminer la solution du problème qui nous intéresse. D'après [4] l'algorithme précédent converge à condition de choisir  $\rho_1$  tel que

$$\|I - \rho_1 \delta^{-1} A\|_{\mathcal{L}(V)} \leq \beta < 1,$$

et  $\rho_n$  suffisamment petit.

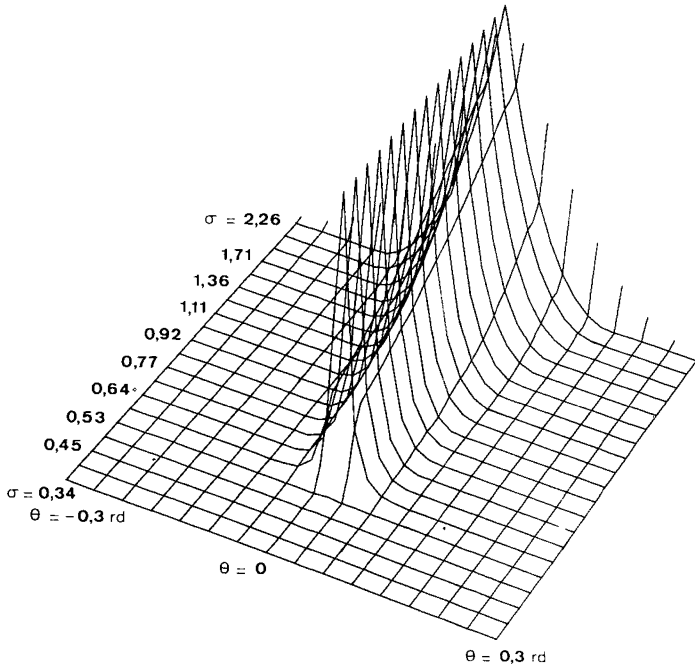


Figure 2.

*Résultats numériques*

On utilise l'algorithme précédent dans lequel on choisit  $\rho_1 = 1$ .

Pour les premiers essais on choisit  $q_I = 100$  m/s. Le temps de calcul est assez important ( $30'' \leq T \leq 2'$ ) pour une précision relative de l'ordre de  $10^{-4}$ . Les graphes suivants donnent  $u$  en fonction de  $\theta$ . On remarque que les solutions croissent très rapidement au voisinage de  $\sigma = L = 2,26$  (la vitesse en ce point est égale à 10 m/s) (fig. 2).

*Détermination de la frontière libre*

Le graphe suivant représente un essai de détermination de la frontière libre. Pour cela on trace un  $|$  aux points où  $u$  est supérieur à  $\mu_1$  et un  $w$  aux points où  $u$  est inférieur à  $\mu_2$  (fig. 3).

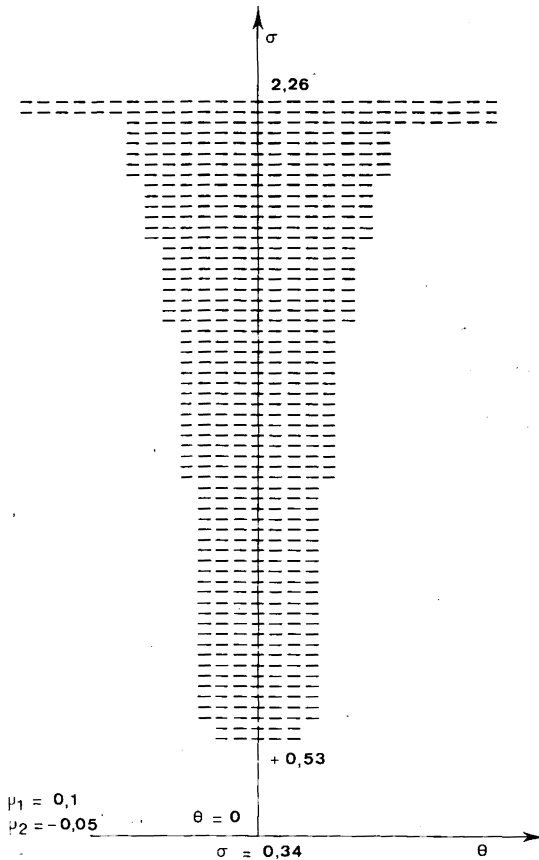
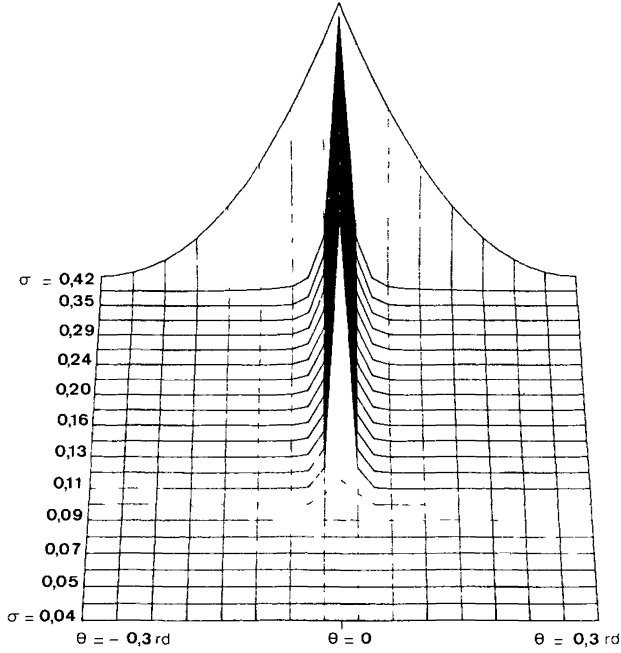


Figure 3.

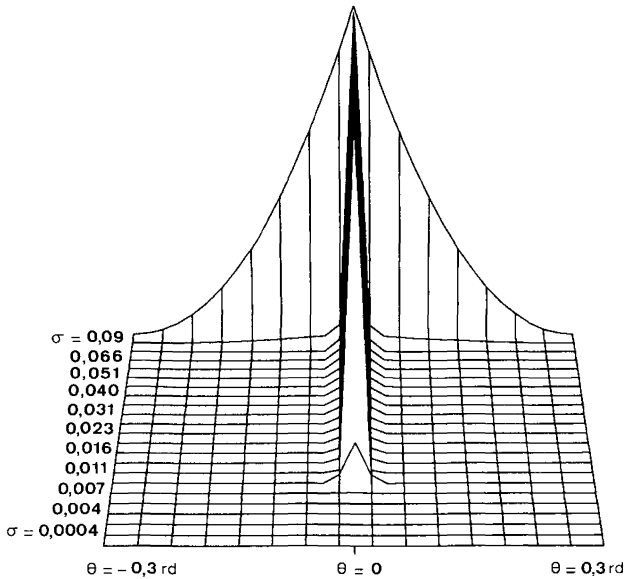
*Variations de la vitesse initiale*

Les graphes suivants représentent les variations de  $u(\theta, \sigma)$  pour différentes valeurs de la vitesse initiale.



**Figure 4.**

$q_1 = 200$  m/s (nombre de Mach  $\sim 0,6$ ).  $\rho_2$  décroît régulièrement de 600 à 200 (quand  $\sigma$  croit).



**Figure 5.**

$q_1 = 300$  m/s.  $\rho_2$  décroît régulièrement de 1 000 à 550.

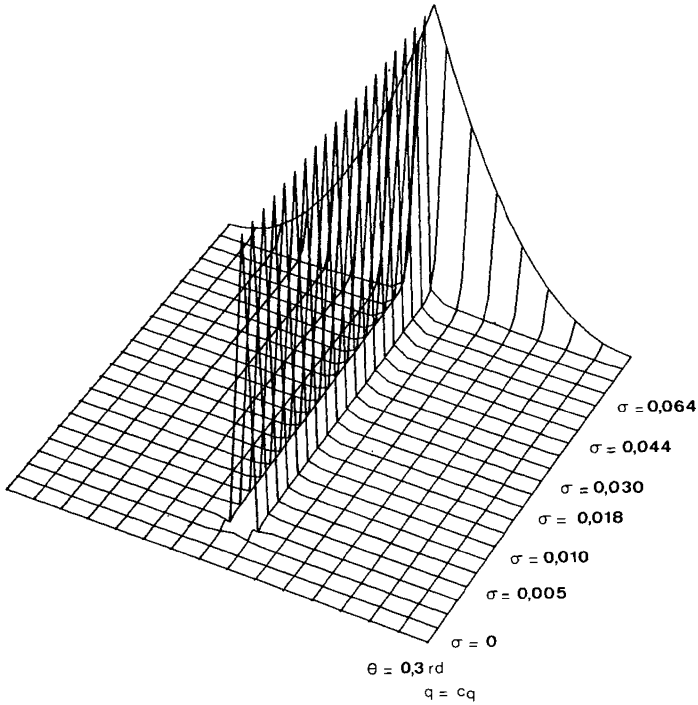


Figure 6.

$q_I = 320$  m/s (nombre de Mach  $\sim 0,9$ ).  $\rho_2$  décroît régulièrement de 1 200 à 750.

Dans ces deux derniers cas on constate que le graphe présente une anomalie pour  $\theta$  petit,  $q$  voisin de  $q_I$ . Il est probable que pour  $q_I$  voisin de  $C_q$  le problème devient transonique et la formulation utilisée non valable, en particulier la condition  $u(\theta, 0) = 0$  devient aberrante.

## CONCLUSION

La résolution numérique de l'inéquation variationnelle est satisfaisante cependant l'interprétation physique des résultats obtenus est très difficile. Ceci est dû d'une part à la difficulté de l'approximation de la frontière libre et d'autre part au fait que le problème est ramené à un problème dans le plan de l'hodographe. Il reste donc de nombreux points à résoudre, et notamment, déterminer la précision avec laquelle on peut espérer connaître le résultat dans le plan physique (quand toutefois la transformation permettant de passer du plan physique au plan de l'hodographe est effectivement réversible) : par exemple, lorsque la vitesse à l'infini  $q_I$  est proche de la vitesse du son, la distance

dans le plan de l'hodographe entre les points  $(\theta = 0, \sigma = \sigma_1)$  et  $(\theta = 0, \sigma = 0)$  est faible ( $\sigma_1$  est la valeur de  $\sigma$  pour  $q = q_1$ ) alors que dans le plan physique ceci correspond à une distance variant de quelques mètres à l'infini.

La méthode a été testée pour un profil constitué d'une partie d'une ellipse et aussi pour le NACA 0012. Pour  $q_1$  supérieur à  $\tilde{q}$  les solutions numériques ne sont plus satisfaisantes (en certains points,  $u$  reste négatif). La comparaison avec les résultats connus actuellement, surtout de nature expérimentale permettent de conjecturer que  $\tilde{q}$  est en réalité la vitesse critique. (On obtient par exemple pour le NACA 0012 :  $\tilde{q} \simeq 0,71$ .)

### BIBLIOGRAPHIE

1. H. BREZIS et G. STAMPACCHIA, *Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 276, série A, 1973, p. 129-132.
2. P.-G. CIARLET, *Numerical Analysis of the Finite Element Method*, Presses de l'Université de Montréal, 1976.
3. J.-F. CIAVALDINI, Communication au congrès d'analyse numérique, La Grande Motte, 1975.
4. I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris, 1974.
5. R. FALK, *Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities*, Math. Comp., vol. 28, 1974, p. 963-971.
6. P. GRISVARD, *Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids*, Ann. Éc. Norm. Pise, vol. 17, 1963, p. 255-296.
7. C. JACOB, *Détermination de la seconde approximation de l'écoulement compressible subsonique autour d'un profil donné*, Arch. Mech. stosowaney, vol. 16, 1964, p. 273-284.
8. J.-L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1968.
9. P. A. RAVIART, Cours Paris, 1972.