Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique

R. Arcangeli
J. L. Gout

Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, tome 10, nº R1 (1976), p. 5-27
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1976__10_1_5_0>

R.A.I.R.O.
ANALYSE NUMÉRIQUE
(Vol. 10, n° 3, mars 1976, p. 5 à 27)

SUR L'EVALUATION DE L'ERREUR D'INTERPOLATION DE LAGRANGE DANS UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$

par R. ARCANGELI [1] et J. L. GOUT [1]

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *On obtient différentes évaluations de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on en déduit des applications à la méthode des éléments finis sur des domaines polyédriques ou non polyédriques de $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'à l'intégration numérique dans $\mathbb{R}^n$.*

0. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Ce travail est consacré à une étude de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Les méthodes utilisées, basées sur la formule de Taylor avec reste intégral, permettent d'obtenir des majorations de l'erreur en semi-normes $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ (dont la définition est rappelée ci-dessous).

On en déduit des applications à l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans la méthode des éléments finis droits et à l'estimation de l'erreur d'intégration numérique dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Enfin on étudie l'erreur d'interpolation de Lagrange polynomiale dans un « élément fini de type pseudo-simplicial » de $\mathbb{R}^n$ (*cf.* paragraphe 4), le résultat obtenu permettant, dans certains cas, d'éviter le recours à la théorie des éléments finis courbes.

Cette étude a pour point de départ l'article de P. G. Ciarlet et P. A. Raviart [4]. Les résultats du paragraphe 2 font suite à celui de J. Meinguet [10], où est donné un encadrement de l'erreur de meilleure approximation uniforme (*cf.* également G. Strang [13], P. G. Ciarlet et P. A. Raviart [5], P. G. Ciarlet et C. Wagschal [6], R. E. Barnhill et J. R. Whiteman [1], J. H. Bramble et S. R. Hilbert [2] et [3]).

Soient n un entier $\geqslant 1$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, notée $\|\cdot\|$, et on désigne par h le diamètre de Ω.

(1) Département de Mathématiques, Université de Pau.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

et on note $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.

Soit p un réel avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes de) fonctions u qui appartiennent à $L^p(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leqslant m$, muni de sa topologie naturelle. Pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$, pour tout $l = 0, 1, \ldots, m$ et pour presque tout $x \in \Omega$, on note $D^l u(x)$ la $l^{\text{ième}}$ dérivée de u au point x et on pose

$$\|D^l u(x)\| = \sup_{\substack{\|\xi_i\| \leqslant 1 \\ 1 \leqslant i \leqslant l}} |D^l u(x) \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_l)|,$$

avec, par convention, $\|D^l u(x)\| = |u(x)|$ pour $l = 0$. On munit également $W^{m,p}(\Omega)$ des semi-normes

$$|u|_{l,p,\Omega} = \left(\int_\Omega \|D^l u(x)\|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant m,$$

lorsque $p < +\infty$, avec la modification habituelle lorsque $p = +\infty$. Toutefois, pour K compact de $\mathbb{R}^n$, on écrira pour simplifier, comme c'est l'usage, $W^{m,p}(K)$ [ou $H^m(K)$, dans le cas $p = 2$] au lieu de $W^{m,p}(\mathring{K})$, $\mathring{K}$ désignant l'intérieur de K, et $|\cdot|_{l,p,K}$ au lieu de $|\cdot|_{l,p,\mathring{K}}$.

Soit enfin k un entier $\geqslant 0$. On désigne par P_k l'espace des polynômes de degré $\leqslant k$ en les n variables $x_1, \ldots, x_n$.

1. ETUDE DIRECTE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION

On suppose que

(1-1) $\quad k + 1 > \dfrac{n}{p}$,

(1-2) $\quad \Omega$ est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, à frontière lipschitzienne, tel que $\bar{\Omega}$ soit étoilé par rapport à chacun des points de Σ,

où

(1-3) $\quad \Sigma = \{a_i\}_{i=1,\ldots,N}$ est un ensemble P-unisolvant de points de $\bar{\Omega}$, P désignant un espace de dimension finie N de fonctions définies sur $\bar{\Omega}$. tel que $P_k \subset P \subset C^k(\bar{\Omega})$.

(Pour la définition d'ensemble P-unisolvant, comme, de façon générale, pour la définition des différentes notions utilisées dans la méthode des éléments finis, nous renvoyons à Ciarlet-Raviart [4]). On a évidemment

$$N \geqslant \dim P_k = \binom{n+k}{k}.$$

Pour tout $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, pour tout $a \in \overline{\Omega}$ tel que $\overline{\Omega}$ soit étoilé par rapport au point a et pour tout $x \in \Omega$, on pose

$$\text{(1-4)} \qquad J(u, a)(x) = \int_0^1 (1-t)^k D^{k+1} u(x + t(a - x)) \cdot (a - x)^{k+1} \, \mathrm{d}t.$$

Compte tenu de (1-2) et (1-3), l'application de la formule de Taylor à l'ordre k avec reste intégral, donne, pour tout $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et pour tout $x \in \Omega$, les relations

$$\text{(1-5)} \qquad u(a_i) = \sum_{l=0}^{k} \frac{D^l u(x) \cdot (a_i - x)^l}{l!} + \frac{1}{k!} J(u, a_i)(x), \qquad i = 1, \dots, N.$$

On a d'abord la

Proposition 1-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (1-2) et (1-3). Alors, pour tout $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$,

$$\text{(1-6)} \qquad \|J(u, a_i)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k + 1 - \dfrac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} \, h^{k+1}, \qquad i = 1, \dots, N.$$

Démonstration

Le résultat est immédiat lorsque $p = +\infty$. On se borne à étudier le cas $1 < p < +\infty$, la démonstration se simplifiant dans le cas $p = 1$. On a

$$|J(u, a_i)(x)| \leqslant h^{k+1} \int_0^1 (1-t)^k \, \|D^{k+1} u(x + t(a_i - x))\| \, \mathrm{d}t$$

$$\leqslant h^{k+1} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{q}+\varepsilon} (1-t)^{k+\frac{1}{q}-\varepsilon} \, \|D^{k+1} u(x + t(a_i - x))\| \, \mathrm{d}t,$$

où ε est un nombre positif tel que $(k+1)p - p\varepsilon - n > 0$ et q est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder, il vient

$$|J(u, a_i)(x)| \leqslant h^{k+1}\left(\int_0^1 (1-t)^{-1+q\varepsilon}\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\int_0^1 (1-t)^{pk+\frac{p}{q}-p\varepsilon} \|D^{k+1}u(x+t(a_i-x))\|^p\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant h^{k+1}\left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{1/q}\left(\int_0^1 (1-t)^{pk+p-1-p\varepsilon} \|D^{k+1}u(x+t(a_i-x))\|^p\, \mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

On en déduit que

$$\int_\Omega |J(u, a_i)(x)|^p\, \mathrm{d}x$$

$$\leqslant h^{p(k+1)}\left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1}\int_{\Omega\times]0,1[} (1-t)^{p(k+1)-1-p\varepsilon} \|D^{k+1}u(x+t(a_i-x))\|^p\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t.$$

Effectuant dans l'intégrale du second membre le changement de variables

$$\left|\begin{array}{ll} y_j = x_j + t(a_{i,j} - x_j), & j = 1, \dots, n \\ s = t, & \end{array}\right.$$

On obtient

$$\int_\Omega |J(u, a_i)(x)|^p\, \mathrm{d}x \leqslant h^{p(k+1)}\left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1}\int_{\mathcal{C}} (1-s)^{p(k+1)-1-p\varepsilon-n} \|D^{k+1}u(y)\|^p\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s,$$

où $\mathcal{C}$ est un cône ouvert de base Ω et de hauteur 1 inscrit dans $\Omega \times]0,1[$. D'où l'inégalité

$$\int_\Omega |J(u, a_i)(x)|^p\, \mathrm{d}x$$

$$\leqslant h^{p(h+1)}\left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1}\left(\int_0^1 (1-s)^{p(k+1)-1-p\varepsilon-n}\, \mathrm{d}s\right)\left(\int_\Omega \|D^{k+1}u(y)\|^p\, \mathrm{d}y\right),$$

soit

$$\int_\Omega |J(u, a_i)(x)|^p\, \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1}\frac{1}{(k+1)p - p\varepsilon - n}|u|^p_{k+1,p,\Omega}\, h^{p(k+1)},$$

et le résultat, avec $\varepsilon = \dfrac{1}{q}\left[(k+1) - \dfrac{n}{p}\right]$. $\square$

On peut maintenant montrer le

Théorème 1-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (1-2) et (1-3). Soient Π l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur Σ et $\{ p_i \}_{i=1,\dots,N}$ l'ensemble des fonctions de base de P relativement à Σ. Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, on a :

$$(1\text{-}7) \qquad |u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leqslant \frac{1}{k!} \frac{1}{k + 1 - \dfrac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |p_i|_{m,\infty,\Omega} \right) |u|_{k+1,p,\Omega} \, h^{k+1}.$$

Démonstration

1° On montre d'abord (1-7) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et $p < +\infty$. Pour cela on reprend la démonstration du théorème 1 de Ciarlet-Raviart [4] en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, les p_i désignant ici les fonctions de base de P relativement à Σ. On obtient de même, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, la relation

$$D^m(\Pi u)(x) - D^m u(x) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N} J(u, a_i)(x) D^m p_i(x),$$

où $J(u, a_i)(x)$ est défini par (1-4). On en déduit que

$$|u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leqslant \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N} |p_i|_{m,\infty,\Omega} \, \| J(u, a_i) \|_{L^p(\Omega)}$$

et le résultat suit compte tenu de (1-6).

2° On en déduit le résultat général en distinguant les cas $p < +\infty$ et $p = +\infty$.

On vérifie en effet que, pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, on a : $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$. D'autre part,

– lorsque $p < +\infty$, on sait que $C^{k+1}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour tout $m = 0, 1, \dots, k + 1$, puisque Ω est borné à frontière continue (*cf.* J. Nečas [11]). Il suffit alors de raisonner par densité pour conclure.

– lorsque $p = +\infty$, on remarque que, pour tout $p \geqslant 1$:

$$W^{k+1,\infty}(\Omega) \subset W^{k+1,p}(\Omega),$$

car Ω est borné. Dans ce cas, la relation (1-7) s'obtient en faisant tendre p vers $+\infty$ dans le résultat précédent.

Remarque 1-1

Le théorème 1-1 s'applique évidemment à la méthode des éléments finis droits. Considérons seulement le cas des éléments finis de type n-simplexe : soit donc $(\mathcal{T}_h)$ une suite de triangulations d'un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n$

(*cf.* P. A. Raviart [12]) et supposons alors que $\overline{\Omega}$ soit un élément quelconque K d'une triangulation $\mathcal{T}_h$.

Dans ce cas, il est important de remarquer que, lorsque la suite de triangulations $(\mathcal{T}_h)$ est *régulière* (au sens de Ciarlet-Raviart [4]), la formule (1-7) conduit à des majorations *uniformes* de l'erreur d'interpolation (nous entendonc par là que ces majorations sont de la forme

$$|u - \Pi u|_{m,p,K} \leqslant C(n, k, m, p)\, |u|_{k+1,p,K}\, h^{k+1-m},$$

où $C(n, k, m, p)$ ne dépend pas de Σ et de K) : il suffit, pour le vérifier, d'utiliser un changement de variables qui ramène le calcul des $|p_i|_{m,\infty,K}$ à un calcul dans un n-simplexe de référence et de tenir compte de résultats de [4].

REMARQUE 1-2

Montrons maintenant que l'on peut *calculer* effectivement des majorations de l'erreur d'interpolation dans la méthode des éléments finis droits. Soient toujours $(\mathcal{T}_h)$ une suite de triangulations d'un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n$ et $\overline{\Omega} = K$ un élément quelconque d'une triangulation $\mathcal{T}_h$. Supposons que les fonctions de base p_i soient explicitées sous la forme

$$p_i(x) = f_i(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)), \qquad i = 1, \dots, N,$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^k indépendantes de Σ et de K et où $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ désignent les coordonnées barycentriques de x par rapport aux sommets du n-simplexe K.

On vérifie que, pour tout $m = 0, 1, \dots, k$ et pour tout $i = 1, \dots, N$

$$\|D^m p_i(x)\| \leqslant \left(\operatorname*{Max}_{j=1,\dots,n+1} \|D\lambda_j\|\right)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))|,$$

où ici $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$. Il résulte alors des relations (*cf.* Ciarlet-Wagschal [6])

$$\|D\lambda_j\| \leqslant \frac{1}{\rho}, \qquad j = 1, \dots, n+1,$$

où ρ désigne le maximum des diamètres des sphères contenues dans K, que l'on a, pour tout $m = 0, 1, \dots, k$,

$$\text{(1-8)} \qquad |u - \Pi u|_{m,p,K} \leqslant C(n, k, m, p, K)\, |u|_{k+1,p,K} \frac{h^{k+1}}{\rho^m},$$

avec

$$\text{(1-9)} \quad C(n, k, m, p, K) = \frac{1}{k!} \frac{1}{k + 1 - \dfrac{n}{p}} \sum_{i=1}^{N} \operatorname*{Max}_{x \in K} \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))|\right).$$

On constate que le second membre de (1-9) est en fait indépendant de K (il ne dépend que d'un n-simplexe fixe). On vérifie donc à nouveau que, si la suite de triangulations $(\mathcal{T}_h)$ est régulière, les majorations (1-8) sont uniformes.

On retrouve ainsi le théorème 5 de Ciarlet-Raviart [4] dans le cas où Π est l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur Σ.

Il est à souligner que le calcul des constantes (1-9) s'effectue directement et ne nécessite donc pas le passage par un élément fini de référence.

Du point de vue numérique, ce calcul présente des difficultés, même dans le cas où P est un espace de polynômes (on est ramené à la détermination de maximums de fonctions de $n + 1$ variables). Notons cependant que le calcul est aisé lorsque $m = k$ et $P = P_k$.

La méthode du paragraphe suivant, lorsqu'elle est applicable (*cf.* remarque 2-3), ne présente pas les mêmes inconvénients.

2. ETUDE BASEE SUR L'APPROXIMATION

Commençons par un résultat d'approximation.

Soient n un entier $\geqslant 1$, p un réel avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, k un entier tel que $k + 1 > \frac{n}{p}$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de diamètre h.

Pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et pour presque tout $a \in \Omega$, on note $\psi_T(u, a)$ le « polynôme de Taylor à l'ordre k de u au point a », défini par

$$\forall x \in \Omega, \qquad \psi_T(u, a)(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{D^l u(a) . (x - a)^l}{l!}, \tag{2-1}$$

et $D^m \psi_T(u, a)$ la dérivée $m^{\text{ième}}$ de l'application $x \to \psi_T(u, a)(x)$. On vérifie que l'application $(x, a) \to \|D^m \psi_T(u, a)(x)\|$ appartient à $L^p(\Omega \times \Omega)$.

Proposition 2-1

On suppose que n, p, k vérifient (1-1) et que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$, à frontière continue. Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout entier $m \geqslant 0$ tel que $k + 1 > m + \frac{n}{p}$, on a :

(i) Si $p < +\infty$,

$$\min_{\psi \in P_k} |u - \psi|_{m,p,\Omega} \leqslant \left(\frac{1}{\text{mes}\, \Omega} \int_\Omega |u - \psi_T(u, a)|^p_{m,p,\Omega} \, da \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\frac{1}{(k - m)!} \frac{1}{k + 1 - m - \frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} \, h^{k+1-m}$$

(ii) Si $p = +\infty$,

$$\min_{\psi \in P_k} |u - \psi|_{m,\infty,\Omega} \leqslant \sup_{a \in \Omega} \operatorname{ess} |u - \psi_T(u, a)|_{m,\infty,\Omega} \leqslant \frac{1}{(k+1-m)!} |u|_{k+1,\infty,\Omega}\, h^{k+1-m},$$

où $\psi_T(u, a)$ est défini par (2-1).

Démonstration

Dans (i) [resp. (ii)], la première inégalité est évidente. Tout revient donc, dans chaque cas, à vérifier la seconde.

1° Montrons d'abord la seconde inégalité dans (i) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$. On se borne à étudier le cas $1 < p < +\infty$, la démonstration se simplifiant dans le cas $p = 1$.

Soient $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et a un point quelconque de Ω, On a

$$|u - \psi_T(u, a)|_{m,p,\Omega} = \left(\int_\Omega \|D^m u(x) - D^m \psi_T(u, a)(x)\|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre $k - m$ pour $D^m u$ au voisinage de a, on a :

$$D^m u(x) - D^m \psi_T(u, a)(x) = \frac{1}{(k-m)!} \int_0^1 (1-t)^{k-m} D^{k+1} u(a + t(x-a)) \cdot (x-a)^{k+1-m} \, \mathrm{d}t,$$

d'où

$$\|D^m u(x) - D^m \psi_T(u, a)(x)\| \leqslant \frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!} \int_0^1 (1-t)^{k-m} \|D^{k+1} u(a + t(x-a))\| \, \mathrm{d}t.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|D^m u(x) - D^m \psi_T(u, a)(x)\|^p$$

$$\leqslant \left(\frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!} \right)^p \left(\frac{1}{q\varepsilon} \right)^{p-1} \int_0^1 (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} \|D^{k+1} u(a + t(x-a))\|^p \, \mathrm{d}t,$$

où ε est un nombre positif tel que $(k+1-m)p - p\varepsilon - n > 0$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En intégrant successivement les deux membres de l'inégalité précédente par rapport à x sur Ω, puis par rapport à a sur Ω, on a

$$\int_\Omega |u - \psi_T(u, a)|^p_{m,p,\Omega}\,da \leqslant \left(\frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!}\right)^p \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1}$$
$$\int_\Omega da \int_\Omega dx \int_0^1 (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon}\,\|D^{k+1}u(a + t(x-a))\|^p\,dt.$$

Après permutation des intégrations en x et a, l'intégrale du second membre s'écrit

$$\int_\Omega dx \int_{\Omega\times]0,1[} (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon}\,\|D^{k+1}u(a + t(x-a))\|^p\,da\,dt,$$

et en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 1-1, avec ici $\varepsilon = \dfrac{1}{q}\left(k+1-m-\dfrac{n}{p}\right)$, on obtient

$$\int_\Omega |u - \psi_T(u, a)|^p_{m,p,\Omega}\,da$$
$$\leqslant (\text{mes }\Omega)\left(\frac{1}{(k-m)!}\,\frac{1}{k+1-m-\dfrac{n}{p}}\right)^p |u|^p_{k+1,p,\Omega}\,h^{(k+1-m)p},$$

d'où la seconde inégalité dans (i) pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$.

2° Montrons maintenant que le résultat précédent est encore valable pour $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $p < +\infty$.

Soient $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $p < +\infty$ et $(u_j) \subset C^{k+1}(\Omega)$ une suite convergeant vers u dans $W^{k+1,p}(\Omega)$: il suffit de vérifier que, quand $j \to +\infty$,

$$\left(\int_\Omega |u_j - \psi_T(u_j, a)|^p_{m,p,\Omega}\,da\right)^{\frac{1}{p}} \to \left(\int_\Omega |u - \psi_T(u, a)|^p_{m,p,\Omega}\,da\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or, on a

$$\left|\left(\int_\Omega |u - \psi_T(u, a)|^p_{m,p,\Omega}\,da\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_\Omega |u_j - \psi_T(u_j, a)|^p_{m,p,\Omega}\,da\right)^{\frac{1}{p}}\right|$$
$$\leqslant \left(\int_\Omega |u - u_j|^p_{m,p,\Omega}\,da\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\psi_T(u, a) - \psi_T(u_j, a)|^p_{m,p,\Omega}\,da\right)^{\frac{1}{p}},$$

où les deux termes du second membre tendent vers 0, le premier par hypothèse et le second parce que majoré par

$$(\text{mes }\Omega)^{\frac{1}{p}} \sum_{l=m}^{k} \frac{h^{l-m}}{(l-m)!}\,|u - u_j|_{l,p,\Omega}.$$

3° La seconde inégalité dans (ii) résulte de l'inégalité correspondante dans (i). En effet, si $u \in W^{k+1,\infty}(\Omega)$ alors $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ pour tout $p \geqslant 1$, puisque Ω est borné, et il suffit de faire tendre p vers $+\infty$ dans (i) pour obtenir le résultat. □

Notons que la proposition 2-1 peut n'avoir lieu que pour $m = 0$. □

Signalons également que lorsque $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, on a (*cf.* J. Meinguet [10]) l'inégalité

$$\min_{\psi \in P_k} |u - \psi|_{m,\infty,\Omega} \leqslant \frac{1}{(k+1-m)!} |u|_{k+1,\infty,\Omega} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1-m} \quad \square.$$

On déduit de la proposition suivante 2-1 le résultat suivant, qui a pour point de départ une idée de J. Meinguet [10] :

Théorème 2-1

On suppose que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, que les hypothèses (1-1) et (1-3) sont vérifiées et que Π est l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur Σ.

Alors, pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout entier $m \geqslant 0$ tel que

$$k + 1 > m + \frac{n}{p},$$

on a :

$$(2\text{-}2) \qquad |u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leqslant \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\dfrac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega}\, h^{k+1-m}$$
$$+ \frac{1}{(\text{mes}\,\Omega)^{1/p}} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\dfrac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |p_i|_{m,p,\Omega}\right) |u|_{k+1,p,\Omega}\, h^{k+1},$$

où $\{p_i\}_{i=1,\dots,N}$ désigne l'ensemble des fonctions de base de P relativement à Σ.

Démonstration

Soient n, p, k vérifiant (1-1) avec $p < +\infty$, $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et m un entier $\geqslant 0$ avec $k + 1 > m + \dfrac{n}{p}$.

Puisque

$$\forall \psi \in P, \qquad \psi = \Pi \psi,$$

on a, pour tout $\psi \in P$:

$$|u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leqslant |u - \psi|_{m,p,\Omega} + |\Pi(u - \psi)|_{m,p,\Omega}$$
$$\leqslant |u - \psi|_{m,p,\Omega} + \left| \sum_{i=1}^{N} (u - \psi)(a_i) p_i \right|_{m,p,\Omega}$$

Prenant $\psi = \psi_T(u, a)$, avec $a \in \Omega$, quelconque, on obtient

$$|u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leqslant |u - \psi_T(u, a)|_{m,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|\; |p_i|_{m,p,\Omega},$$

d'où, en prenant les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonctions de la variable a. l'inégalité

$$(\text{mes }\Omega)^{\frac{1}{p}} |u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leqslant \left(\int_\Omega |u - \psi_T(u, a)|^p_{m,p,\Omega}\, \mathrm{d}a \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|^p \,\mathrm{d}a \right)^{\frac{1}{p}} |p_i|_{m,p,\Omega}.$$

Utilisant la proposition (2-1), point (i), avec $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, et compte tenu de ce que, d'après la proposition (1-1)

$$\left(\int_\Omega |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|^p \,\mathrm{d}a \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{k!} \frac{1}{k + 1 - \dfrac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega}\, h^{h+1},$$

on obtient (2-2) pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et $p < +\infty$.

Il suffit alors de reprendre la démonstration du théorème 1-1, 2° pour en déduire le cas général.

REMARQUE 2-1

Comme le théorème 1-1, le théorème 2-1 s'applique à la méthode des éléments finis droits. Ici aussi et pour les mêmes raisons que celles qui ont été développées dans la remarque 1-1, la formule (2-2) fournit, lorsque la suite de triangulation est régulière, des majorations uniformes de l'erreur d'interpolation dans un n-simplexe.

REMARQUE 2-2

Sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations que dans la remarque 1-1, on obtient, pour tout $i = 1, \ldots, N$ et pour tout entier $m \geqslant 0$ tel que $k + 1 > m + \dfrac{n}{p}$ avec $p < +\infty$, la relation

$$(2\text{-}3) \qquad |p_i|_{m,p,K} \leqslant \frac{1}{\rho^m} \left\{ \int_K \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+1}(x))| \right]^p \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Lorsque P est un espace de *polynômes*, le calcul des majorations (2-3) ne présente pas de difficultés particulières : on peut utiliser la formule

$$\int_K (\lambda_1(x))^{\nu_1} \dots (\lambda_{n+1}(x))^{\nu_{n+1}}\, dx = \frac{\nu_1! \dots \nu_{n+1}!}{(\nu_1 + \dots + \nu_{n+1} + n)!}\, n!\ \text{mes}\ K,$$

$$\nu_1, \dots, \nu_{n+1} \in \mathbb{N},$$

(*cf.* O. C. Zienkiewicz [15]) pour calculer le second membre de (2-3) ce qui conduit à des majorations du type

$$|p_i|_{m,p,K} \leqslant C_i \frac{(\text{mes}\ K)^{\frac{1}{p}}}{\rho^m},$$

où les C_i sont des constantes indépendantes de Σ et de K.

REMARQUE 2-3

Rappelons que le théorème 2-1 nécessite l'hypothèse $k + 1 > m + \frac{n}{p}$: il peut donc n'avoir lieu que pour $m = 0$, alors que le théorème 1-1 est toujours valable pour $m = 0, 1, \dots, k$.

Du point de vue du calcul numérique, l'utilisation du théorème 1-1 implique (*cf.* remarque 1-2) la détermination de maximums de fonctions de plusieurs variables, tandis que l'application du théorème 2-1 pour $p < +\infty$ entraîne seulement le calcul d'intégrales (*cf.* remarque 2-2). D'autre part, l'expérience montre que, pour $p < +\infty$, le théorème 2-1 donne de meilleurs résultats numériques que le théorème 1-1 (*cf.* les exemples numériques du paragraphe 3).

Notons enfin que dans le cas usuel $n = p = 2$, on a la possibilité d'utiliser le théorème 2-1 pour $m = 0, 1, \dots, k - 1$ et le théorème 1-1 pour $m = k$.

3. APPLICATIONS

3-1. Exemples d'application à la méthode des éléments finis droits

Soit K un triangle quelconque de $\mathbb{R}^2$. On note h le diamètre de K et ρ le diamètre du cercle inscrit dans K.

Donnons d'abord des exemples d'application du théorème 1-1 dans le cas $p = 2$.

EXEMPLE 3-1

On prend pour Σ l'ensemble des sommets de K et pour P l'espace P_1.

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^{3} |p_i|_{0,\infty,K} = 3$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \qquad |u - \Pi u|_{0,2,K} \leqslant 3\, |u|_{2,2,K} h^2$$

$m = 1$: On obtient $\sum_{i=1}^{3} |p_i|_{1,\infty,K} \leqslant \frac{3}{\rho}$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \qquad |u - \Pi u|_{1,2,K} \leqslant 3\, |u|_{2,2,K} \frac{h^2}{\rho}$$

EXEMPLE 3-2

On prend pour Σ l'ensemble des sommets et des milieux des côtés de K et pour P l'espace P_2.

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{0,\infty,K} = 6$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \qquad |u - \Pi u|_{0,2,K} \leqslant 2\, |u|_{3,2,K} h^3$$

$m = 1$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{1,\infty,K} \leqslant \frac{21}{\rho}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \qquad |u - \Pi u|_{1,2,K} \leqslant 6\, |u|_{3,2,K} \frac{h^3}{\rho}$$

$m = 2$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{1,\infty,K} \leqslant \frac{36}{\rho^3}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \qquad |u - \Pi|_{2,2,K} \leqslant 9\, |u|_{3,2,K} \frac{h^3}{\rho^2}. \quad \square$$

Reprenons les exemples précédents en appliquant maintenant le théorème 2-1.

Cas de l'exemple 3-1 : On a $k = 1$, $n = p = 2$, donc le théorème (2-1) n'a lieu que pour $m = 0$.

On obtient $\sum_{i=1}^{3} |p_i|_{0,2,K} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,(\text{mes } K)^{\frac{1}{2}}$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \qquad |u - \Pi u|_{0,2,K} \leqslant 3\, |u|_{2,2,K} h^2$$

Cas de l'exemple 3-2 : Ici $k = 2$, $n = p = 2$: les seules valeurs possibles de m sont $m = 0$ et $m = 1$.

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{0,2,K} = \dfrac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{10}} (\text{mes } K)^{1/2}$, *d'où*

$$\forall u \in H^3(K), \qquad |u - \Pi u|_{0,2,K} \leqslant |u|_{3,2,K} h^3$$

$m = 1$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{1,2,K} \leqslant \dfrac{3 + 6\sqrt{2}}{\rho} (\text{mes } K)^{1/2}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \qquad |u - \Pi u|_{1,2,K} \leqslant \left(1 + 3\frac{h}{\rho}\right) |u|_{3,2,K} h^2. \ \square$$

On peut remarquer que, lorsqu'il est applicable, le théorème 2-1 donne de meilleurs résultats que le théorème 1-1.

3-2. Application à l'intégration numérique

Pour tout $u \in C^0(\overline{\Omega})$, soit

$$R(u) = \int_\Omega u(x)\,dx - \sum_{i=1}^{N} \omega_i u(a_i) \tag{3-1}$$

l'erreur d'intégration de u sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ correspondant à une formule d'intégration approchée caractérisée par des poids ω_i, $i = 1, \ldots, N$ et des points $a_i \in \overline{\Omega}$, $i = 1, \ldots, N$. On suppose que

$$\forall \psi \in P_k, \qquad R\psi = 0, \tag{3-2}$$

i.e. que l'intégration est exacte sur P_k. Notons que l'on a

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = \text{mes } \Omega. \tag{3-3}$$

Théorème 3-1

On suppose que n, p, k vérifient (1-1), que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, que R est la forme linéaire définie par (3-1) et (3-2).

Alors, pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, on a :

$$|R(u)| \leqslant \left((\text{mes } \Omega)^{1/q} + \frac{\sum_{i=1}^{N} |\omega_i|}{(\text{mes } \Omega)^{1/p}} \right) \frac{1}{k!} \frac{1}{k + 1 - \dfrac{n}{p}} |u|_{k+1,p,K}\, h^{k+1}, \tag{3-4}$$

où q est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Démonstration

Il suffit de montrer (3-4) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et $p < +\infty$, le cas général résultant alors d'un raisonnement précédemment utilisé.

Soit donc $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$. On déduit de (3-1) et (3-2) que

$$|R(u)| \leqslant |u - \psi_T(u, a)|_{0,1,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |\omega_i| \, |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|$$

où $\psi_T(u, a)$, avec $a \in \Omega$, quelconque, est défini par (2-1). On a encore

$$|R(u)| \leqslant (\text{mes } \Omega)^{1/q} \, |u - \psi_T(u, a)|_{0,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |\omega_i| \, |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|.$$

Prenant alors les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonction de la variable a, on obtient

$$|R(u)| \leqslant (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_\Omega |u - \psi_T(u, a)|_{0,p,\Omega}^p \, da \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \frac{\sum_{i=1}^{N} |\omega_i|}{(\text{mes } \Omega)^{1/p}} \left(\int_\Omega |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|^p \, da \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On procède ensuite comme dans la démonstration du théorème (2-1) et le résultat suit. □

Notons que lorsque les poids ω_i sont *positifs*, il résulte de (3-3) que (3-4) s'écrit

$$|R(u)| \leqslant 2 \, (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{k!} \frac{1}{k + 1 - \frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} \, h^{k+1}. \quad \square$$

A notre connaissance, ce théorème (dans $W^{k+1,p}(\Omega)$ et en semi-normes $|\cdot|_{k+1,p,\Omega}$) est nouveau. Il prolonge $\left(\text{mais avec } h \text{ au lieu de } \frac{h}{2}\right)$ le résultat suivant dû à J. Meinguet [10] :

$$\forall u \in C^{k+1}(\bar{\Omega}), \qquad |R(u)| \leqslant 2 \text{ mes } \Omega \frac{1}{(k+1)!} |u|_{k+1,\infty,\Omega} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1},$$

où les poids ω_i sont supposés positifs.

4. INTERPOLATION POLYNOMIALE DANS UN ELEMENT FINI DE TYPE PSEUDO-SIMPLICIAL. APPLICATION A L'ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION DANS UN DOMAINE COURBE

Dans les paragraphes 1 et 2, nous avons obtenu des résultats généraux d'interpolation dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, mais nous avons vu que les applications à la méthode des éléments finis se limitaient au cas des *n-simplexes* de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce paragraphe, nous allons, par une autre méthode, étudier l'interpolation *polynomiale* dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ *de type non* (nécessairement) *simplicial*. On verra que le résultat obtenu permet d'estimer l'erreur d'interpolation dans des méthodes d'éléments finis *droits* sur des domaines *courbes* de $\mathbb{R}^n$.

Soit K un fermé de $\mathbb{R}^n$ (on supposera ultérieurement que K est un « élément fini de type pseudo-simplicial », en fait un élément d'un recouvrement convenable d'un domaine *courbe* de $\mathbb{R}^n$). On suppose que les hypothèses (1-2) et (1-3) sont vérifiées avec $\Omega = \overset{\circ}{K}$ et que, de plus :

$$P = P_k. \tag{4-1}$$

Notons que (4-1) implique qu'ici :

$$N = \binom{n+k}{k}.$$

Soient maintenant $v \in C^{k+1}(K)$ s'annulant sur Σ et $x \in \overset{\circ}{K}$. L'application de la formule de Taylor à l'ordre k avec reste intégral donne les relations

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^\alpha v(x)}{\alpha!}(a_i - x)^\alpha = -\frac{1}{k!} J(v, a_i)(x), \qquad i = 1, \dots, N, \tag{4-2}$$

où, pour tout $i = 1, \dots, N$, $J(v, a_i)(x)$ est défini par (1-4).

On notera $\Delta(x)$ le déterminant de (4-2) considéré comme système linéaire de N équations aux N inconnues $\dfrac{\partial^\alpha v(x)}{\alpha!}$, $|\alpha| \leqslant k$, supposées rangées dans un ordre quelconque (par exemple en ordonnant suivant la longueur des multi-indices α, et pour des multi-indices de même longueur suivant l'ordre lexicographique) :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & (a_{1,1} - x_1) \dots (a_1 - x)^\alpha \dots (a_{1,n} - x_n)^k \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 1 & (a_{i,1} - x_1) \dots (a_i - x)^\alpha \dots (a_{i,n} - x_n)^k \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 1 & (a_{N,1} - x_1) \dots (a_N - x)^\alpha \dots (a_{N,n} - x_n)^k \end{vmatrix} \tag{4-3}$$

où le terme général de la $i^{\text{ième}}$-ligne n'est autre que

$$(a_i - x)^\alpha = (a_{i,1} - x_1)^{\alpha_1} \dots (a_{j,n} - x_n)^{\alpha_n}.$$

On a d'abord :

Proposition 4-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-2), (1-3) et (4-1). Alors $\Delta(x)$ est indépendant de x et non nul.

Démonstration

– Le premier point se vérifie immédiatement par dérivation.

On a donc $\Delta(x) = \Delta(0)$ et on notera dans la suite Δ au lieu de $\Delta(x)$.

– Pour le second point, on considère (4-2) avec $v \in P_k$: la condition d'unisolvance (1-3) implique alors avec (4-1) que le système (4-2), où les restes intégraux sont alors nuls, n'a que la solution zéro. Donc $\Delta \neq 0$. □

On en déduit trivialement, sous les hypothèses (1-2), (1-3) et (4-1) que, pour tout $v \in C^{k+1}(K)$ s'annulant sur Σ, pour tout $x \in \mathring{K}$, pour tout α tel que $|\alpha| \leqslant k$, on a :

$$\frac{\partial^\alpha v(x)}{\alpha!} = \frac{\Delta_\alpha(x)}{\Delta}, \tag{4-4}$$

où les $\Delta_\alpha(x)$ sont les déterminants qui interviennent dans la résolution du système de Cramer (4-2). On vérifie que les $\Delta_\alpha(x)$ dépendent en général de x.

Il vient ensuite la

Proposition 4-2

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (4-1), ainsi que (1-2) et (1-3) avec $\Omega = \mathring{K}$. Alors pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, il existe une constante $\mathcal{C}(n, k, m, p)$ telle que, pour tout $u \in W^{k+1,p}(K)$, on ait :

$$|u - \Pi u|_{m,p,K} \leqslant \mathcal{C}(n, k, m, p) \frac{1}{|\Delta|} |u|_{k+1,p,K} \; h_K^{n\nu(n,k)+k+1-m}, \tag{4-5}$$

où Π est l'opérateur de P_k-interpolation de Lagrange sur Σ, Δ le déterminant (4-3), h_K le diamètre de K et $\nu(n, k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{n+j-1}{j-1}$.

Démonstration

Ici encore, il suffit de montrer (4-5) pour $u \in C^{k+1}(K)$.

Soit $v \in C^{k+1}(K)$ s'annulant sur Σ. Rappelons que, pour tout déterminant

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} \dots d_{1G} \\ \dots\dots\dots\dots \\ d_{G1} \dots d_{GG} \end{vmatrix}, \text{on a la majoration : } |D| \leqslant \prod_{j=1}^{G} \sum_{i=1}^{G} |d_{ij}|.$$

On en déduit que, pour tout α tel que $|\alpha| \leqslant k$ et pour tout $x \in K$, il existe une constante $\mathcal{C}_0(n, k)$ telle que

$$(4\text{-}6) \qquad |\Delta_\alpha(x)| \leqslant C_0(n, k)\left(\sum_{i=1}^{N} |J(v, a_i)(x)|\right) h_K^{n\nu(n,k)-m},$$

où $m = |\alpha|$ et

$$\nu(n, k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} j\binom{n+j-1}{j} = \sum_{j=1}^{k}\binom{n+j-1}{j-1}.$$

Il résulte alors de (4-4) et (4-6) que, pour tout $m = 0, 1, \dots, k$ et pour tout $x \in \overset{\circ}{K}$,

$$\operatorname*{Max}_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)| \leqslant m!\ \mathcal{C}_0(n, k)\frac{1}{|\Delta|}\left(\sum_{i=1}^{n} |J(v, a_i)(x)|\right) h_K^{n\nu(n,k)-m}.$$

Étant donné que

$$|v|_{m,p,K} \leqslant n^{\frac{m}{2}}\left(\int_{\overset{\circ}{K}} [\operatorname*{Max}_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|]^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

on obtient en utilisant (1-6), pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, la relation

$$(4\text{-}7) \qquad |v|_{m,p,K} \leqslant \quad (n, k, m, p)\frac{1}{|\Delta|}|v|_{k+1,p,K}\ h_K^{n\nu(n,k)+k+1-m},$$

où $\mathcal{C}(n, k, m, p)$ désigne une constante convenable.

Soit maintenant $u \in C^{k+1}(K)$, quelconque. Alors $u - \Pi u \in C^{k+1}(K)$: On peut écrire (4-7) avec $v = u - \Pi u$, ce qui donne (4-5) avec $u \in C^{k+1}(K)$. □

Pour toute application affine inversible F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

Proposition 4-3

Soient Δ le déterminant (4-3) et $\hat{\Delta}$ le déterminant (4-3) où l'on a remplacé a_i par $\hat{a}_i = F^{-1}(a_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Alors

$$(4\text{-}8) \qquad \Delta = (\det B)^{\nu(n,k)}\hat{\Delta},$$

où B est l'application linéaire associée à F et où $\nu(n, k) = \sum_{j=1}^{k}\binom{n+j-1}{j-1}$.

Démonstration. — Posons

$$\Delta = \Phi(a_1, \ldots, a_N)$$

et notons

$$\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad F(\hat{x}) = B\hat{x} + b,$$

avec $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, inversible et $b \in \mathbb{R}^n$.

On a encore

(4-9) $$\Delta = \Phi(F(\hat{a}_1), \ldots, F(\hat{a}_N)).$$

a) On vérifie d'abord que le second membre de (4-9) est indépendant de b : ce résultat s'obtient en dérivant par rapport aux composantes b_i de b.

On a donc

$$\Delta = \Phi(B\hat{a}_1, \ldots, B\hat{a}_N).$$

b) Dans un premier temps, montrons (4-8) lorsque la matrice (notée encore B) de l'application linéaire B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est *triangulaire*.

Supposons, pour fixer les idées, que B soit triangulaire supérieure :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ & b_{22} \ldots b_{2n} \\ 0 & \ldots \\ & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Calculons la dérivée de $\Phi(B\hat{a}_1, \ldots, B\hat{a}_N)$ par rapport à $b_{l,n}$, $1 \leqslant l \leqslant n - 1$. Étant donné que

$$\forall i = 1, \ldots, N : \frac{\partial[(B\hat{a}_i)^\alpha]}{\partial b_{l,n}} = \frac{\alpha_l}{b_{nn}} (B\hat{a}_i)^{\alpha'},$$

avec $|\alpha'| = |\alpha|$, $\alpha' \neq \alpha$, on en déduit que

$$\forall l = 1, \ldots, n - 1 : \frac{\partial \Phi(B\hat{a}_1, \ldots, B\hat{a}_N)}{\partial b_{l,n}} = 0.$$

En raisonnant de même successivement pour $b_{l,n-1}, b_{l,n-2}, \ldots, b_{l,2}$, on montre ainsi que $\Phi(B\hat{a}_1, \ldots, B\hat{a}_N)$ ne dépend que des termes diagonaux de B : On a donc

$$(B\hat{a}_i)^\alpha = \prod_{l=1}^{n} (b_{l,l}\hat{a}_{i,l})^{\alpha_l}.$$

Par raison de symétrie, on voit que, dans l'expression $\Phi(B\hat{a}_1, \ldots, B\hat{a}_N)$, les coefficients $b_{l,l}$ interviennent tous à une même puissance, notée $\nu(n, k)$. On a alors

$$\Delta = \left(\prod_{l=1}^{n} b_{l,l}\right)^{\nu(n,k)} \hat{\Delta},$$

d'où (4-8) lorsque B est triangulaire supérieure ou (par une démonstration analogue) triangulaire inférieure.

c) On utilise maintenant le résultat suivant :

Toute matrice régulière s'exprime comme produit d'un nombre fini de matrices triangulaires supérieures et inférieures.

Posons

$$B = B_q \dots B_1$$

et

$$\hat{a}_i^{(1)} = B_1 \hat{a}_i$$
$$\hat{a}_i^{(2)} = B_2 \hat{a}_i^{(1)}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_i = \hat{a}_i^{(q)} = B_q \hat{a}_i^{(q-1)}$$

Il résulte alors du b), avec des notations évidentes, que

$$\hat{\Delta}^{(1)} = (\det B_1)^{\nu(n,k)} \hat{\Delta}$$
$$\hat{\Delta}^{(2)} = (\det B_2)^{\nu(n,k)} \hat{\Delta}^{(1)}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\Delta = \hat{\Delta}^{(q)} = (\det B_q)^{\nu(n,k)} \hat{\Delta}^{(q-1)},$$

d'où la relation (4-8) dans le cas général. □

Soient maintenant K un n-simplexe non dégénéré de $\mathbb{R}^n$, $\tilde{K}$ un n-simplexe non dégénéré contenu dans K, F une application affine inversible de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\tilde{K} = F(\hat{K})$ et $\hat{\Delta}$ le déterminant (4-3) où l'on a remplacé a_i par $F^{-1}(a_i)$, $i = 1, \dots, N$.

On déduit des propositions (4-2) et (4-3) le

Théorème 4-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (4-1), ainsi que (1-2) et (1-3) avec $\Omega = \mathring{K}$. Alors pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, il existe une constante $\hat{\mathcal{C}}(n, k, m, p, \hat{K}, \hat{\Delta})$ telle que pour tout $u \in W^{k+1,p}(K)$, on ait :

$$\text{(4-10)} \quad |u - \Pi u|_{m,p,K} \leqslant \hat{\mathcal{C}}(n, k, m, p, \hat{K}, \hat{\Delta}) \left(\frac{h_K}{\rho_{\tilde{K}}}\right)^{n\nu(n,k)} |u|_{k+1,p,K}\, h_K^{k+1-m},$$

où Π est l'opérateur de P_k-interpolation de Lagrange sur Σ, h_K le diamètre de K, $\rho_{\tilde{K}}$ le maximum des diamètres des sphères contenues dans $\tilde{K}$ et où $\nu(n, k)$ est l'entier défini dans la proposition 4-2.

Démonstration

D'après la proposition 4-3

$$\frac{1}{|\Delta|} = \left(\frac{1}{|\det B|}\right)^{\nu(n,k)} \frac{1}{|\hat{\Delta}|}.$$

Comme d'autre part (*cf.* Ciarlet-Raviart [4])

$$\frac{1}{|\det B|} \leqslant \|B^{-1}\|^n \leqslant \left(\frac{h_{\hat{K}}}{\rho_{\tilde{K}}}\right)^n,$$

où $h_{\hat{K}}$ est le diamètre de $\hat{K}$, on déduit (4-10) de (4-5) avec

$$\hat{\mathcal{C}}(n, k, m, p, \hat{K}, \hat{\Delta}) = \mathcal{C}(n, k, m, p) \frac{h_{\hat{K}}^{n\nu(n,k)}}{|\hat{\Delta}|} \qquad \square$$

L'intérêt du théorème (4-1) réside surtout dans son application à la méthode des éléments finis.

Pour simplifier, plaçons-nous *en dimension* $n = 2$. Considérons un ouvert *convexe* borné *non polyédrique* Ω de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière Γ est continue et supposons réalisée une suite $(\mathcal{T}_h)$ de « triangulations » de $\bar{\Omega}$, suivant les idées de [12] : dans chaque triangulation $\mathcal{T}_h$, $\bar{\Omega}$ s'exprime comme réunion de sous-ensembles fermés K qui sont, ou bien des triangles (droits) K_d, ou bien des éléments courbes K_c dont le bord contient une partie de Γ. Un élément K_c est donc un « triangle à un ou deux côtés courbes » et on peut toujours par subdivision se ramener au cas où K_c possède un seul côté courbe. A tout élément K_c, on fait correspondre un triangle (droit) $\tilde{K}_c \subset K_c$ de telle sorte que, si on désigne par $\mathcal{K}$ l'ensemble de tous les triangles (droits) K_d et $\tilde{K}_c$ contenus dans $\bar{\Omega}$ et par $\mathcal{P}$ leur réunion, $\mathcal{P}$ soit un polyèdre et $\mathcal{K}$ réalise une triangulation de $\mathcal{P}$. Dans la pratique, le choix de $\tilde{K}_c$ sera le plus souvent canonique : on prendra pour $\tilde{K}_c$ le triangle construit sur les « sommets » de K_c.

Soit maintenant $\mathcal{T}_h$ une triangulation du type précédent. Donnons-nous un ensemble P_k-unisolvant quelconque $\hat{\Sigma}$ de N points de $\mathbb{R}^2$. Notons $\hat{K}$ l'enveloppe convexe fermée de $\hat{\Sigma}$ et, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, désignons par F_K une application affine inversible de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, telle que $K_d = F_{K_d}(\hat{K})$, si K est un élément droit K_d, ou telle que $\tilde{K}_c = F_{K_c}(\hat{K})$, si K est un élément courbe K_c. Enfin, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, définissons l'ensemble $\Sigma \subset K$ de points d'interpolation par la relation

$$\Sigma = F_K(\hat{\Sigma}).$$

[Notons que les éléments finis courbes introduits ici *ne sont pas* des éléments finis du type isoparamétrique (*cf.* Ciarlet-Raviart [5]), pour lesquels on n'a d'ailleurs pas $P = P_k$ en général].

Alors on peut, quel que soit $K \in \mathcal{T}_h$, approcher toute fonction $u \in W^{k+1,p}(K)$, avec $k + 1 > \frac{2}{p}$, par le P_k-interpolé de Lagrange sur Σ : on est ainsi ramené globalement à une méthode d'éléments finis droits. On obtient de la sorte, par exemple, une approximation interne de l'espace $H^1(\Omega)$. Remarquons cependant que l'approximation correspondante de $H_0^1(\Omega)$ *n'est pas interne*, la condition de nullité au bord ne se trouvant évidemment pas vérifiée.

Le théorème (4-1) est applicable dans le cas des éléments courbes K_c et fournit donc des majorations de l'erreur d'interpolation (dans le cas des éléments droits K_d, on prend évidemment $\tilde{K}_d = K_d$ et on retrouve ainsi le résultat standard des éléments finis droits). Notons que les majorations d'erreur (4-10) seront *uniformes* si

(4-11) $\quad \dfrac{h_K}{\rho_{\tilde{K}}}$ est borné indépendamment de K et de la triangulation $\mathcal{T}_h$

: on reconnaît là une adaptation de la notion de suite régulière de triangulations de Ciarlet-Raviart. Le théorème (4-1) montre donc que

(4-12) Si (4-11) est vérifiée, on a *les mêmes ordres asymptotiques d'erreur*, que K soit un élément droit ou un élément courbe.

En dimension $n > 2$, la situation est plus compliquée, les éléments courbes K_c que l'on obtient ne correspondant pas à une généralisation directe du « triangle à un ou deux côtés courbes » (nous ne préciserons pas ici la définition de ces éléments, que nous avons appelés « éléments finis de type pseudo-simplicial »). Le résultat (4-12) reste évidemment valable dans le cas général.

Grâce au théorème 4-1, on voit que l'on peut utiliser des éléments finis *droits* pour les problèmes de *Newman* d'ordre 2 sur des domaines *courbes* (convenables) et que l'on obtient de la sorte des majorations d'erreur du même ordre que dans le cas des domaines polygonaux.

REFERENCES

[1] Barnhill R. E. et Whiteman J. R., Error Analysis of Finite Element Methods with Triangles for Elliptic Boundary Value Problems, *The mathematics of Finite Elements and Applications* (J. R. Whiteman, ed.), 83-112, Acad. Press (1973).

[2] Bramble J. H. et Hilbert S. R., *Estimation of Linear Functionals on Sobolev Spaces with Application to Fourier Transforms and Spline Interpolation*, SIAM J. Numer. Anal., 7, 112-124 (1970).

[3] Bramble J. H. et Hilbert S. R., *Bounds for a Class of Linear Functionals with Applications to Hermite Interpolation*, Numer. Math., 16, 362-369 (1971).

[4] Ciarlet P. G. et Raviart P. A., *General Lagrange and Hermite Interpolation in* $\mathbb{R}^n$ *with Applications to Finite Element Methods*, Arch. Rat. Mech. Anal., 46, 177-199 (1972).

[5] Ciarlet P. G. et Raviart P. A., *Interpolation Theory over Curved Elements with Applications to Finite Element Methods*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engin., 1, 217-249 (1972).

[6] CIARLET P G et WAGSCHAL C , *Multipoint Taylor Formulas and Applications to Finite Element Method*, Numer Math , 17, 84-100 (1971)

[7] CHENIN P , *These 3^e cycle*, Grenoble (1974)

[8] COATMELEC C , *Approximation et interpolation des fonctions differentiables de plusieurs variables*, Ann Sc École Norm Sup (3) 83, 271-341 (1966)

[9] DESCLOUX J , *Methode des elements finis*, Ecole polytechnique federale de Lausanne (1973)

[10] MEINGUET J , Realistic Estimates for Generic Constants in Multivariate Pointwise Approximation, *Topics in Numerical Analysis II*, J J H Miller ed , Acad Press (1975)

[11] NEČAS J , *Les methodes directes en theorie des equations elliptiques*, Masson (1967)

[12] RAVIART P A , *Methodes des elements finis*, redige par J M Thomas, D E A Analyse Numerique, Paris VI (1971-1972)

[13] STRANG G , *Approximation in the Finite Element Method*, Numer Math , 19, 81-98 (1972)

[14] STROUD A H , *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice Hall (1971)

[15] ZIENKIEWICZ O C , *La methode des elements finis*, Ediscience, Paris (1973)