REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. ANALYSE NUMÉRIQUE

MARC ATTEIA

Fonctions « spline » et méthode d'éléments finis

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, tome 9, nº R2 (1975), p. 13-40

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1975__9_2_13_0>

R.A.I.R.O.
(9e année, août 2975, R-2, p. 13-40)

FONCTIONS « SPLINE » ET METHODE D'ELEMENTS FINIS

par Marc ATTEIA (1)

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *La méthode des éléments finis est présentée généralement, comme un procédé permettant de générer des bases (d'espaces de Hilbert convenables) particulièrement adaptées à la résolution des problèmes elliptiques par la méthode de Galerkin.*

Dans notre article, nous abordons la méthode des éléments finis du point de vue de la topologie algébrique. Nous montrons ainsi que toute fonction d'éléments finis peut être considérée comme une fonction « spline ». Notre approche a une portée plus générale qu'il ne paraît dans les exemples classiques que nous avons considérés.

INTRODUCTION

Le but de cet article est de montrer comment l'on peut identifier une approximation obtenue par une méthode (classique) d'éléments finis à une fonction « spline ».

La méthode de base utilisée pour établir cette identité est explicitée dans l'application 3.1. Elle a une portée très générale. Nous nous sommes restreints à l'appliquer aux exemples que nous avons jugé les plus significatifs, pour ne pas allonger démesurément cet article.

Voici, brièvement, comment nous procédons.

Soit $\mathcal{T}$ un complexe simplicial (géométrique) de $\mathbf{R}^n$.

$|\mathcal{T}|$ désignant le polyèdre associé à $\mathcal{T}$, considérons une fonction numérique f définie sur $|\mathcal{T}|$.

(1) U.E.R. de Mathématiques, Université Paul Sabatier, Toulouse.

Soit X une partie de $\mathbf{R}^n$ dont l'intersection avec $\mathcal{T}^0$ (ensemble des sommets de $\mathcal{T}$) n'est pas vide et τ_f une fonction (classique) d'éléments finis de type « Lagrange » ou « Hermite » interpolant f aux sommets de $\mathcal{T}$ contenus dans X. Nous montrons que τ_f coïncide sur $X \cap |\mathcal{T}|$ avec une fonction « spline » σ_f — qui minimise une fonctionnelle (semi-) hilbertienne sur une variété linéaire (convenable) de $\mathbf{R}^{|\mathcal{T}|}$.||

Nous avons rassemblé dans les paragraphes 1 et 2 les résultats sur les noyaux des sous-espaces hilbertiens qui nous sont indispensables et qui sont contenus dans l'article de L. Schwartz et dans le cours de J. Neveu indiqués dans la bibliographie.

Nous exposerons dans un article ultérieur les résultats auxquels la méthode, développée ci-dessous, conduit quand on l'applique aux problèmes de convergence et aux noyaux totalement positifs.

A. NOYAUX DE SOUS-ESPACES HILBERTIENS

1. Préliminaires

(i) Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et quasi-complet.

Définition 1.1 : On dira qu'un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{E}$ est un sous-espace *admissible* de $\mathcal{E}$ si E est muni d'une topologie $\mathcal{T}_E$ localement convexe séparée telle que :

(i) $(E, \mathcal{T}_E)$ soit quasi-complet

(ii) l'injection canonique k_E de E_σ dans $\mathcal{E}$ soit continue.

On rappelle qu'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E et un sous-espace vectoriel de E, muni d'une structure hilbertienne telle que l'injection canonique $j_{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ dans E soit continue.

Notons $\chi_{\mathcal{H}}$ l'isomorphisme canonique de $\overline{\mathcal{H}}'$ sur $\mathcal{H}$.

On a le schéma suivant :

$$\overline{E}' \xrightarrow{j^*_{\mathcal{H}}} \overline{\mathcal{H}}' \xrightarrow{\chi_{\mathcal{H}}} \mathcal{H} \xrightarrow{j_{\mathcal{H}}} E.$$

Le noyau de $\mathcal{H}$ (considéré comme sous-espace hilbertien de E) est l'élément $H_E \in \mathcal{L}(\overline{E}', E_\sigma)$ défini par $H_E = j_{\mathcal{H}} \circ \chi_{\mathcal{H}} \circ j_{\mathcal{H}^*}$.

Dans la suite, on sera conduit à considérer l'élément $\chi_{\mathcal{H}} \circ j^*_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}(\overline{E}'_s, \mathcal{H}_\sigma)$ que l'on notera encore H_E pour des raisons de commodité. On désignera par Hilb (E) l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de E.

(ii) X étant un ensemble quelconque, on notera dans la suite, $\mathbf{C}^X$ l'espace vectoriel des applications de X dans $\mathbf{C}$, muni de la topologie de la convergence simple.

Son dual, $(\mathbf{C}^X)'$ est l'espace des mesures à support fini dans X. Tout élément de $(\mathbf{C}^X)'$ est de la forme : $\sum_{x \in N(X)} c_x \delta_x$ où $N(X)$ est une partie *finie* de X, δ_x est la mesure de Dirac au point $x \in X$ et $c_x \in \mathbf{C}$.

Notons $<, >$ la dualité entre $\mathbf{C}^X$ et $(\mathbf{C}^X)'$:

$$\forall f \in \mathbf{C}^X, \langle f, \sum_{x \in N(X)} c_x \delta_x \rangle = \sum_{x \in N(X)} c_x f(x).$$

D'autre part, la conjugaison complexe établit sur $\mathbf{C}^X$ (resp $(\mathbf{C}^X)'$) une anti-involution telle que $\mathbf{C}^X$ (resp. $(\mathbf{C}^X)'$) puisse être considéré comme son propre anti-espace.

Supposons que E soit un sous-espace admissible de $\mathbf{C}^X$. La conjugaison complexe définie sur $\mathbf{C}^X$ induit sur E une anti-involution telle que $\overline{E}' = E$. Comme $(\overline{E})' = (\overline{E'})$, on en déduit que $\overline{E}' = E'$.

Soit k_E l'injection canonique de E dans $\mathbf{C}^X$.

$k_E^*[(\mathbf{C}^X)']$ est dense dans E' et puisque $\mathbf{C}^X$ et E sont leurs propres anti-espaces, ${}^t k_E[(\mathbf{C}^X)']$ est dense dans E'.

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E.

Notons $H(x, t)$ le noyau reproduisant de $\mathcal{H}$ considéré comme sous-espace hilbertien de $\mathbf{C}^X$ et posons : $H = \chi_{\mathcal{H}} \circ j_{\mathcal{H}}^* \circ k_E^*$.

On sait que :

$$\forall x \in X, \qquad H(., x) = H\delta_x \in \mathbf{C}^X.$$

Mais $H\delta_x = (H_E \circ k_E^*)\, \delta_x = H_E(k_E^* \cdot \delta_x) \in E$.

Posons : $\varepsilon_x = k_E^*\, \delta_x, \quad x \in X$.

ε_x est la mesure de Dirac au point $x \in X$, définie sur E.

En effet, $\forall x \in X$, $\forall g \in E$, on a :

$$g(x) = \langle k_E \cdot g, \delta_x \rangle = \langle \overline{\overline{k}_E \cdot \overline{g}, \overline{\delta}_x} \rangle = \langle \overline{\overline{k}_E \cdot \overline{g}, \delta_x} \rangle$$
$$= \langle \overline{g}, k^*\delta_x \rangle_{E,E'} = \langle g, \overline{\varepsilon}_x \rangle_{\overline{E},\overline{E}'} = \langle g, \overline{\varepsilon}_x \rangle_{E,E'}.$$

Mais $\forall x \in E$, $\forall g \in E$, on a :

$$\langle g, \varepsilon_x \rangle_{E,E'} = \langle \overline{\overline{g}, \overline{\varepsilon}_x} \rangle_{\overline{E},\overline{E}'} = \langle \overline{\overline{g}, \overline{\varepsilon}_x} \rangle_{E,E'} = \overline{\overline{g}(x)} = g(x).$$

Donc, $\varepsilon_x = \overline{\varepsilon}_x$.

EXEMPLE 1.1 :

$$X = [0, 1] \subset \mathbf{R} \quad , \quad E = C^0[0, 1], \qquad \mathcal{E} = \mathbf{R}^{[0,1]}.$$

$\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert $H^1(0, 1)$, muni du produit scalaire :

$$(f \mid g)_{\mathcal{H}} = \int_0^1 [f \cdot g + f' \cdot g'](t)\, dt.$$

On a le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathfrak{D}[0,1]} \arrow[d, mapsto] & & & \mathfrak{D}'[0,1] \\
\bar{E}' \arrow[r, mapsto] & \bar{\mathcal{H}}' \arrow[r, mapsto] & \mathcal{H} \arrow[r, mapsto] & E \arrow[u, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
\overline{(\mathbf{C}^{[0,1]})'} \arrow[u, mapsto] & & & \mathbf{C}^{[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Quelle que soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty[0, 1]$, on a :

$$(f \mid \psi)_{\mathcal{H}} = \int_0^1 [f(-\psi'' + \psi)](t)\, dt + (\psi' \cdot f)_0^1, \qquad f \in H^1(0, 1).$$

On en déduit que le noyau reproduisant de $H^1(0, 1)$ est la solution $H(x, t)$ du problème différentiel :

$$\left| \begin{array}{l} v''(t) - v(t) = \delta_x(t) \\ v'(0) = v'(1) = 0. \end{array} \right.$$

On sait que $H(x, t) = \begin{cases} a_1 e^x + a_2 e^- x & \text{si } x \leqslant t \\ b_1 e_x + b_2 e^{-x} & \text{si } x \geqslant t \end{cases}$.

Posons : $c_i = b_i - a_i$, $i = 1, 2$.

On a : $\left| \begin{array}{l} c_1 e^t + c_2 e^{-t} = 0 \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} = 1 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{e^{-t}}{2}, \qquad c_2 = -\frac{e^t}{2}.$$

D'autre part, $\left| \begin{array}{l} H'_x(0, t) = a_1 - a_2 = 0 \\ H'_x(1, t) = b_1 e - b_2 e^{-1} = 0 \end{array} \right.$

$$\frac{e^t \cdot e + e^t \cdot e^{-1}}{2} + a_1(e - e^{-1}) = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{e^{1-t} + e^{t-1}}{2(e - e^{-1})}$$

$$b_1 = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{1-t} + e^{t-1}}{2(e - e^{-1})} = \frac{e^{1-t} - e^{-1-t} - e^{1-t} - e^{t-1}}{2(e - e^{-1})} = -\frac{e^{t-1} + e^{-t-1}}{2(e - e^{-1})}$$

$$b_2 = -\frac{e^t}{2} - \frac{e^{1-t} + e^{t-1}}{2(e - e^{-1})} = -\frac{e^{1+t} - e^{t-1} + e^{1-t} + e^{t-1}}{2(e - e^{-1})}$$

$$= -\frac{e^{1-t} + e^{1+t}}{2(e - e^{-1})}.$$

D'où :

$$\boxed{H(x, t) = \begin{cases} \dfrac{Chx \cdot Ch(1-t)}{2\,Sht} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{Cht \cdot Ch(1-x)}{2\,Sht} & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}}$$

EXEMPLE 1.2 :

$$X = [0, 1] \subset \mathbf{R}, \qquad E = C^0[0, 1], \qquad \mathcal{E} = \mathbf{R}^{[0, 1]}$$

$\mathcal{H} = \{ f \in \mathcal{D}'[0, 1] ; f, f' \in \mathcal{L}^2[0, 1]$ *et* $f(0) = 0 \}$ avec

$$(f \mid g)_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (f' \cdot g')(t)\,\mathrm{d}t.$$

Quelle que soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty[0, 1] \cap \mathcal{H}$, on a :

$$(f \mid \psi)_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (-\psi'' \cdot f)(t)\,\mathrm{d}t + \psi'(1) \cdot f(1), \qquad f \in \mathcal{H}$$

On en déduit facilement que :

$$\boxed{H(x, t) = -(x - t)_+ + x = \mathrm{Min}\,(x, t), \quad x, \quad t \in X}$$

EXEMPLE 1.3 :

$$X = [0, 1] \subset \mathbf{R}, \quad E = C^1[0, 1], \quad \mathcal{E} = \mathbf{R}^{[0,1]}$$

$$\mathcal{H} = \{ f \in \mathcal{D}'[0, 1] ; \quad f, f', f'' \in \mathcal{L}^2[0, 1] \qquad et \qquad f(0) = f(1) = 0 \}$$

$$(f \mid g)_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (f'' \cdot g'')(t)\,\mathrm{d}t.$$

Quelle que soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty[0, 1] \cap \mathcal{H}$, on a :

$$(f \mid \psi)_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (-\psi^{(4)} \cdot f)(t)\,\mathrm{d}t + \psi''(1) f'(1).$$

On vérifie facilement que :

$$\boxed{H(x, t) = -(x - t)_+^3 - (t - 1)x^3 - (t^3 - 3t^2 + 2t)x, \qquad x, \ t \in X}$$

2. Opérations sur les noyaux de sous-espaces hilbertiens

(i) Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels topologiques, localement convexes séparés et quasi-complets.

Soient d'autre part :

(*) E un sous-espace admissible de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E,

(**) $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$.

Désignons par $u(E)$ l'image de E par u, muni de la topologie localement convexe séparée induite par celle de $\mathcal{F}$, et par F, le quasi-complété de $u(E)$.

F est un sous-espace admissible de $\mathcal{F}$.

Notons u_E la restriction de u à E. On vérifie facilement que $u_E \in \mathcal{L}(E_\sigma, F_\sigma)$.

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E et $u_{\mathcal{H}}$ la restriction de u à $\mathcal{H}$.

Notons $u(\mathcal{H})$ le sous-espace vectoriel de F, image de $\mathcal{H}$ par u et muni de la structure hilbertienne transportée de celle de $\mathcal{H}_{/\mathrm{Ker}(u)}$ par la bijection $\hat{u}_{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}_{/\mathrm{Ker}(u)}$ sur $\mathrm{Im}\,(u_{\mathcal{H}})$.

On sait que $u(\mathcal{H}) \in \mathrm{Hilb}\,(F)$.

Posons $\mathcal{K} = u(\mathcal{H})$.

On a le diagramme (commutatif) suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{E}' & \longmapsto & \overline{E}' & \longmapsto & \overline{\mathcal{H}}' & \longmapsto & \mathcal{H} & \longmapsto & E & \longmapsto & \mathcal{E} \\
{\scriptstyle u^*}\uparrow & & {\scriptstyle u_E^*}\uparrow & & & & & & \downarrow{\scriptstyle u_E} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\
\mathcal{F}' & \longmapsto & \overline{F}' & \longmapsto & \overline{\mathcal{K}}' & \longmapsto & \mathcal{K} & \longmapsto & F & \longmapsto & \mathcal{F}
\end{array}$$

D'où il résulte que :

$$K_{\mathcal{F}} = u \circ H_{\mathcal{E}} \circ u^* \quad , \quad K_F = u_E \circ H_E \circ u_E^*$$

et : $\forall f, g \in \mathcal{H}, \quad (uf \mid ug)_{\mathcal{K}} = (f \mid g)_{\mathcal{H}}$.

Applications

Soient X et Y deux ensembles quelconques.

Supposons que $\mathcal{E} = \mathbf{C}^X$ et $\mathcal{F} = \mathbf{C}^Y$.

(*) *Multiplication par une fonction*

Soit α un élément (quelconque) de E.

L'application : $u : \left| \begin{array}{l} \mathbf{C}^X \mapsto \mathbf{C}^X \\ \mathrm{f} \mapsto \alpha\,\mathrm{f} \end{array} \right.$ est une application linéaire et continue de $(\mathbf{C}^X)_\sigma$ dans $(\mathbf{C}^X)_\sigma$.

Posons : $\mathcal{K} = u(\mathcal{H}) = \alpha \cdot \mathcal{H}$.

Si $K(x, t)$ désigne le noyau reproduisant de $\mathcal{K}$, on a :

$$K(x, t) = \langle (u \circ H_{\mathcal{E}} \circ u^*)\delta_t, \delta_x \rangle.$$

Mais $\forall f \in \mathcal{E}$, $\forall x \in X$,

$$\langle f, u^*\delta_x \rangle = \langle \bar{u}f, \delta_x \rangle = \bar{\alpha}(x) \cdot f(x)$$

et : $\langle f, {}^t u\delta_x \rangle = \alpha(x) \cdot f(x)$.

Il en résulte que :

$$K(x, t) = \langle (H_{\mathcal{E}} \circ u^*)\delta_t, {}^t u\delta_x \rangle = \alpha(x) \cdot \bar{\alpha}(t) \cdot H(x, t)$$

où $H(x, t)$ est le noyau reproduisant de $\mathcal{H}$.

Le noyau reproduisant de $\alpha\mathcal{H}$ est la fonction : $\left\vert \begin{array}{l} X \times X \mapsto \mathbf{C} \\ (x, t) \mapsto \alpha(x) \cdot \bar{\alpha}(t) \cdot H(x, t) \end{array}\right.$

EXEMPLE 2.1 :

Mêmes hypothèses que dans l'exemple 1.2.

Supposons que $\alpha(x) = x^m$, $x \in [0, 1]$.

Soit $\mathcal{K} = \alpha\mathcal{H}$. Son noyau est :

$$K(x, t) = - x^m t^m [(x - t)_+ - x].$$

et $\mathcal{K} = \left\{ u \in \mathcal{D}'(0, 1);\ u, u' \in L^2(0, 1)\ \textit{et}\ \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{u(x)}{x^m} = 0 \right\}$ muni du produit scalaire :

$$(u \mid v)_{\mathcal{K}} = \int_0^1 \left(\frac{u(t)}{t^m}\right)' \cdot \left(\frac{v(t)}{t^m}\right)' \mathrm{d}t.$$

(**) *Image par une application de Y dans X*

Soit ρ une application de Y dans X.

L'application $u \left\vert \begin{array}{l} \mathbf{C}^X \mapsto \mathbf{C}^Y \\ \mathrm{f} \mapsto \mathrm{f} \circ \rho \end{array}\right.$ est une application linéaire et continue de $(\mathbf{C}^X)_\sigma$ dans $(\mathbf{C}^Y)_\sigma$.

Posons $\mathcal{K} = u(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \circ \rho$.

Soit $K(x, t)$ le noyau reproduisant de $\mathcal{K}$. On a :

$$K(x, t) = \langle (u \circ H_{\mathcal{E}} \quad u^*)\delta_t, \delta_x \rangle.$$

Mais $\forall f \in \mathcal{E}$, $\forall x \in X$,

$$\langle uf, \delta_x \rangle = f(\rho(x)) = \langle f, {}^t u\delta_x \rangle$$

et

$$\langle f, u^*\delta_x \rangle = \langle \bar{u}f, \delta_x \rangle = \overline{\langle u\bar{f}, \delta_x \rangle} = \bar{\bar{f}}(\rho(x)) = f(\rho(x)).$$

Il en résulte que :

$$K(x, t) = \langle H_{\mathcal{E}}(u^*\delta_t), {}^t u\delta_x \rangle = H(\rho(x), \rho(t))$$

où $H(x, t)$ est le noyau reproduisant de $\mathcal{H}$.

> Le noyau reproduisant de $\mathcal{H} \circ \rho$ est la fonction :
> $$\begin{array}{ll} X \times X \mapsto \mathbf{C} \\ (x, t) \mapsto H(\rho(x), \rho(t)). \end{array}$$

EXEMPLE 2.2 :

$$X = Y = [0, 1] \quad , \quad E = C^0(0, 1) \quad , \quad \mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbf{R}^{[0,1]}$$

$\mathcal{H} = \{ u \in \mathcal{D}'(0, 1); u, u' \in L^2(0, 1) \text{ et } u(0) = 0 \}$ muni du produit scalaire $(u \mid v)_1 = \int_0^1 u'(t) \,.\, v'(t) \,\mathrm{d}t$

$$\text{Considérons } \rho \left| \begin{array}{l} X \mapsto Y \\ x \mapsto x^m \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{K} = \mathcal{H} \circ \rho$. Son noyau est :

$$K(x, t) = -\left[(x^m - t^m)_+ - x^m\right].$$

et $\mathcal{K} = \left\{ u \in \mathcal{D}'(0, 1); u, u' \in L^2(0, 1) \text{ et } \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{u(x)}{x^m} = 0(1) \right\}$ muni du produit scalaire

$$(u \mid v)_{\mathcal{K}} = \int_0^1 \frac{u'(t) \cdot v'(t)}{m t^{m+1}} \,\mathrm{dt}.$$

(ii) *Produit cartésien*

Soit E (resp. F) un sous-espace admissible de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$).

Soit, d'autre part, $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{K}$) un sous-espace hilbertien de E (resp. F).

Notons G (resp. $\mathcal{L}$) le produit cartésien des espaces topologiques E et F (resp. $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$).

On vérifie facilement que $\mathcal{L}$ muni de la norme :

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{L} \mapsto \mathbf{R}_+ \\ (h, k) \mapsto \|(h, k)\|_{\mathcal{L}} = \sqrt{\|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \|k\|_{\mathcal{K}}^2} \end{array}\right.$$

est un sous-espace hilbertien de G.

Déterminons le noyau L de $\mathcal{L}$ connaissant les noyaux H de $\mathcal{H}$ et K de $\mathcal{K}$. On sait que :

$$\forall l = (h, k) \in \mathcal{L} \quad , \quad \forall g' = (e', f') \in G'$$

$$((h, k) \mid L(\overline{e}', \overline{f}'))_{\mathcal{L}} = (l \mid L\overline{g}')_{\mathcal{L}} = \langle l, g' \rangle = \langle (h, k), (e', f') \rangle$$
$$= \langle h, e' \rangle + \langle k, f' \rangle = (h \mid H\overline{e}') + (k \mid K\overline{f}')$$
$$= ((h, k) \mid (H\overline{e}', K\overline{f}')).$$

Donc :

$$\boxed{L(e', f') = (He', Kf')}$$

Supposons que $\mathcal{E} = \mathbf{C}^X$, $\mathcal{F} = \mathbf{C}^Y$.

Notons $H(x, t)$ (resp. $K(y, v)$, $L(x, y; t, v)$) les noyaux reproduisants de $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$). On a :

$$L(x, y; t, v) = \langle L(\delta_t, \delta_v), (\delta_x, \delta_y) \rangle = \langle (H\delta_t, K\delta_v), (\delta_x, \delta_y) \rangle,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{L(x, y; t, v) = H(x, t) + K(y, v)}$$

Exemple 2.3 :

Supposons que $X = Y = [0, 1]$ et que :

$$E = F = C^0[0, 1] \quad , \quad \mathcal{E} = \mathbf{R}^X \quad , \quad \mathcal{F} = \mathbf{R}^Y.$$

Posons aussi $D = X \times Y$.

Supposons d'autre part que :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} = \{ u \in \mathcal{D}'(0, 1) \quad ; \quad u, u' \in L^2(0, 1) \quad et \quad u(0) = 0 \},$$

muni du produit scalaire : $(u \mid v)_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_0^1 u'(t) \cdot v'(t) \, \mathrm{d}t.$

Si $\mathcal{L} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$, on a : $L(x, y; t, v) = x - (x - t)_+ + y - (y - v)_+$, et $\mathcal{L} = \{ u \in \mathcal{D}'(D) ; \forall (x, y) \in D, u(x, y) = a(x) + b(y)$ *avec* $a, b, a'_x, b'_y \in L^2(0, 1)$ *et* $a(0) = b(0) = a'(1) = b'(1) = 0 \}$ muni du produit scalaire :

$$(u \mid v)_{\mathcal{L}} = \int_0^1 [a'(t) \cdot c'(t) + b'(t) \cdot d'(t)] \, \mathrm{d}t$$

où $u(x, y) = a(x) + b(y)$ et $v(x, y) = c(x) + d(y)$.

(iii) *Produit tensoriel*

A et B étant deux espaces vectoriels topologiques localement convexes, on désignera dans la suite par $A \varepsilon B$ (resp. $A \pi B$) le produit tensoriel inductif (resp. projectif) de A et B.

On notera $A \hat{\varepsilon} B$ (resp. $A \hat{\pi} B$) le complété de $A \varepsilon B$ (resp. $A \pi B$). On sait que si A et B sont séparés, alors $A \varepsilon B$ et $A \hat{\varepsilon} B$ (resp. $A \pi B$ et $A \hat{\pi} B$) sont séparés. De plus l'injection canonique $j_\otimes$ (resp. $\hat{j}_\otimes$) de $A \pi B$ dans $A \varepsilon B$ (resp. $A \hat{\pi} B$ dans $A \varepsilon B$) est continue.

D'autre part $A' \otimes B'$ est dense dans $(A \hat{\varepsilon} B)'_s$. (On en déduit que ${}^t\hat{j}_\otimes(A' \otimes B')$ est dense dans $(A \hat{\pi} B)'_s$ puisque ${}^t\hat{j}_\otimes(A \hat{\varepsilon} B)'_s$ est dense dans $(A \hat{\pi} B)'_s$).

Soit E (resp. F) un sous-espace admissible de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$). On vérifie facilement que l'injection de $E \varepsilon F$ (resp. $E \pi F$, $E \hat{\varepsilon} F$, $E \hat{\pi} F$) dans $\mathcal{E} \varepsilon \mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{E} \pi \mathcal{F}$, $\mathcal{E} \hat{\varepsilon} \mathcal{F}$, $\mathcal{E} \hat{\pi} \mathcal{F}$) est continue.

Soit $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{K}$) un sous-espace hilbertien de E (resp. F) (de noyau H_E (resp. K_F)).

Posons : $G_{E \otimes F} = H_E \otimes K_F$.

Comme $H_E \in \mathcal{L}(\overline{E}'_s, E_\sigma)$ et $K_F \in \mathcal{L}(\overline{F}'_s, F_\sigma)$ on sait que : $G_{E \otimes F} \in \mathcal{L}(\overline{E}' \varepsilon \overline{F}', E \varepsilon F)$. Or $\overline{E}' \varepsilon \overline{F}'$ est dense dans $(\overline{E} \hat{\varepsilon} \overline{F})'_s = (\overline{E \hat{\varepsilon} F})'_s$. $G_{E \otimes F}$ admet donc sur $(\overline{E \hat{\varepsilon} F})'_s$ un prolongement $G_{E\varepsilon F} \in \mathcal{L}((\overline{E \hat{\varepsilon} F})'_s, E \varepsilon F) \in \mathcal{L}((\overline{E \hat{\varepsilon} F})'_s, (E \hat{\varepsilon} F)_\sigma)$.

De plus, $\forall \eta', \lambda' \in E'$, $\forall \xi', \mu' \in F'$,

$$\begin{aligned} \langle G_{E\varepsilon F}(\bar{\lambda}' \otimes \bar{\mu}'), \eta' \otimes \xi' \rangle &= \langle G_{E \otimes F}(\bar{\lambda}' \otimes \bar{\mu}'), \eta' \otimes \xi' \rangle \\ &= \langle H_E \bar{\lambda}', \eta' \rangle \cdot \langle K_F \bar{\mu}', \xi' \rangle. \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que $G_{E\varepsilon F}$ est un noyau hermitien de type positif. Il définit un sous-espace hilbertien de $E \hat{\varepsilon} F$ qu'on appellera le *produit tensoriel de* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{K}$ et que l'on notera $\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{K}$.

Supposons que $\mathcal{E} = \mathbf{C}^X$, $\mathcal{F} = \mathbf{C}^Y$ (X, Y ensembles quelconques). Alors $\mathcal{E} \hat{\varepsilon} \mathcal{F} = \mathbf{C}^{X \times Y}$.

Notons $H(x, t)$ (resp. $K(y, v)$, $G(z, w)$) les noyaux reproduisants de $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{K}$, $\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{K}$).

Si $z = (x, y)$, $w = (t, v)$, alors :

$$G(z, w) = H(x, t) \cdot K(y, v).$$

EXEMPLE 2.4 :

$X = Y = [0, 1]$. Posons $D = X \times Y$.

$$E = F = C^0(0, 1) \quad , \quad E \otimes F = C^0(D) \quad , \quad \mathcal{E} = \mathbf{R}^X \quad , \quad \mathcal{F} = \mathbf{R}^Y.$$

$\mathcal{H} = \mathcal{K} = \{ u \in \mathcal{D}'(0, 1) ; u, u' \in L^2(0, 1)$ *et* $u(0) = 0 \}$, muni du produit scalaire : $(u \mid v)_1 = \int_0^1 u'(t) \cdot v'(t)\, \mathrm{d}t$.

Désignons par $\mathcal{L}$ l'espace $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

On montre que :

$$\mathcal{L} = \{ u \in \mathcal{D}'(D) \quad ; \quad u, u'_x, u'_y, u''_{xy} \in L^2(D)$$

et

$$u(0, y)(= u(x, 0)) = u'_x(x, 0)(= u'_y(0, y)) = 0,\ x, y \in [0, 1] \}$$

muni du produit scalaire :

$$(u \mid v)_{\mathcal{L}} = \int_D u''_{xy}(x, y) \cdot v''_{xy}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

(iv) *Produits tensoriels symétrique et extérieur*

A étant un espace vectoriel (topologique localement convexe), on désignera dans la suite par $A^{\otimes n}(A_\varepsilon^{\otimes n})$, $n \in \mathbf{N}^*$, le produit tensoriel de n exemplaires de A (muni de la topologie inductive ε) ($n \geqslant 2$).

On notera $A^{\vee n}(A_\varepsilon^{\vee n})$ (resp. $A^{\wedge n}(A_\varepsilon^{\wedge n})$) le sous-espace vectoriel (topologique) de $A^{\otimes n}(A_\varepsilon^{\otimes n})$ formé des tenseurs symétriques (resp. antisymétriques).

On notera aussi $\hat{A}_\varepsilon^{\vee n}$ (resp. $\hat{A}_\varepsilon^{\wedge n}$) la fermeture de $A_\varepsilon^{\vee n}$ (resp. $A^{\wedge n}$) dans $\hat{A}_\varepsilon^{\otimes n}$, complété de $A_\varepsilon^{\otimes n}$ pour la topologie ε. Si A est séparé, il en est de même de $\hat{A}_\varepsilon^{\vee n}$ et de $\hat{A}_\varepsilon^{\wedge n}$.

Etant donné un élément σ du nième groupe symétrique G_n, on désignera par U_σ l'application :

$$\left| \begin{array}{l} A^{\otimes n} \mapsto A^{\otimes n} \\ a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)} \end{array} \right.$$

On posera : $u = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in G_n} U_\sigma$ (resp. $v = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in G_n} \varepsilon_\sigma U_\sigma$ où ε_σ est la signature de la permutation $\sigma \in G_n$).

On sait que u (resp. v) applique $A^{\otimes n}$ sur $A^{\vee n}$ (resp. $A^{\wedge n}$). On vérifie facilement que cette application est faiblement continue de $A_\varepsilon^{\otimes n}$ sur $A_\varepsilon^{\vee n}$ (resp. $A_\varepsilon^{\wedge n}$).

Etant donné $a_1, \dots, a_n \in A$, on posera :

$$a_1 \vee \dots \vee a_n = u(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)\ (\text{resp. } a_1 \wedge \dots \wedge a_n = v(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)).$$

Soit A' le dual topologique de A.

Si $a'_1, \ldots, a'_n \in A'$, on a :

$$\langle a_1 \vee \ldots \vee a_n, a'_1 \vee \ldots \vee a'_n \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in G_n} \langle a_1, a'_{\sigma(1)} \rangle \ldots \langle a_n, a'_{\sigma(n)} \rangle$$

$$\left(\text{resp. } \langle a_1 \wedge \ldots \wedge a_n, a'_1 \wedge \ldots \wedge a'_n \rangle = \frac{1}{n!} \det ([\langle a_i, a'_j \rangle]_{1 \leq i,j \leq n})\right).$$

Soit E un sous-espace admissible de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E (de noyau H_E).

On appellera nième puissance tensorielle symétrique (resp. extérieure) de $\mathcal{H}$ et on le désignera par $\mathcal{H}^{\vee n}$ (resp. $\mathcal{H}^{\wedge n}$), le sous-espace hilbertien de $\hat{E}_\varepsilon^{\vee n}$ (resp. $\hat{E}_\varepsilon^{\wedge n}$) image de $\mathcal{H}^{\otimes n}$ par l'application u (resp. v).

Notons $H_E^{\vee n}$ (resp. $H_E^{\wedge n}$) le noyau de $\mathcal{H}^{\vee n}$ (resp. $\mathcal{H}^{\wedge n}$) (relativement à $\hat{E}_\varepsilon^{\vee n}$ (resp. $\hat{E}_\varepsilon^{\wedge n}$)).

On a : $H_E^n = u \circ H_E^{\otimes n} \circ u^*$ (resp. $H_E^{\vee n} = v \circ H_E^{\otimes n} \circ v^*$).

On en déduit immédiatement que :

$$\forall \eta_1, \ldots, \eta_n \in E, \qquad \forall \lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \in E',$$

$$\langle H_E^{\vee n}(\bar{\lambda}'_1 \vee \ldots \vee \bar{\lambda}'_1), \eta_1 \vee \ldots \vee \eta_n \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in G_n} \langle H_E \bar{\lambda}'_1, \eta_{\sigma(1)} \rangle \ldots \langle H_E \bar{\lambda}'_n, \eta_{\sigma(n)} \rangle$$

$$\left(\text{resp. } \langle H_E^{\vee n}(\bar{\lambda}'_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\lambda}'_n, \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n) \rangle = \frac{1}{n!} \det ([\langle H_E \bar{\lambda}'_i, \eta_j \rangle]_{1 \leq i,j \leq n})\right).$$

Si $\mathcal{E} = \mathbf{C}^X$, $\hat{\mathcal{E}}_\varepsilon^{\vee n} \subset \mathbf{C}^{X^n}$, et l'on aura, avec des notations évidentes :

$$H^{\vee n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in G_n} H(x_1, t_{\sigma(1)}) \ldots H(x_n, t_{\sigma(n)})$$

$$\left(\text{resp. } H^{\wedge n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{n!} \det ([H(x_i, t_j)]_{1 \leq i,j \leq n}\right).$$

EXEMPLE 2.5 : Supposons que $X = [0, 1]$, $E = C^0[0, 1]$, $\mathcal{E} = \mathbf{R}^X$ et que :

$$\mathcal{H} = \{ u \in \mathcal{D}'(0, 1) \quad ; \quad u, u' \in \mathcal{L}^2(0, 1) \quad \text{et} \quad u(0) = 0 \}.$$

Soit $\mathcal{K}$ la somme directe hilbertienne des espaces :

$$\mathcal{H}^{\vee 0} = \mathbf{R} \quad , \quad \mathcal{H}^{\vee 1} = \mathcal{H} \quad , \quad \mathcal{H}^{\vee 2}, \ldots, \mathcal{H}^{\vee p}, \ldots .$$

Tout élément $k \in \mathcal{K}$ est une suite $(k_0, k_1, \ldots, k_p, \ldots)$ et l'on a : $(k \mid k')_{\mathcal{K}} = \sum_{p \in \mathbf{N}} (k_p \mid k'_p)_{\mathcal{K}^{\vee p}}$ (si $k' = (k'_0, k'_1, \ldots, k'_p, \ldots)$).

Etant donné un élément quelconque $h \in \mathcal{H}$, on vérifie facilement que l'élément $\left(1, h, \frac{h^{\otimes 2}}{\sqrt{2!}}, \ldots, \frac{h^{\otimes p}}{\sqrt{p!}}, \ldots\right) \in \mathcal{K}$ et a pour norme : $e^{\|h\|^2_{\mathcal{H}}}$.

Quels que soient $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, on a :

$$(\mathrm{EXP}(h_1) \mid \mathrm{EXP}(h_2)) = e^{(h_1|h_2)_{\mathcal{H}}}.$$

D'autre part, la famille $(\mathrm{EXP}(h))_{h \in \mathcal{H}}$ est libre et totale dans $\mathcal{K}$.

H étant le noyau de $\mathcal{K}$, considérons la fonction $\tilde{K}$ définie sur X^2 par : $(x, t) \to \tilde{K}(x; t) = e^{H(x;t)}$ · $\tilde{K}$ est un noyau positif sur X^2 car pour toute suite finie de points distincts $t^1, t^2, ..., t^n \in X$, $n \in \mathbf{N}^*$, det $([\tilde{K}(t^i; t^j)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n})$ est un Grammien.

On note que : $\tilde{\mathcal{K}} = \{ u \in \mathcal{D}'(0, 1); u, u' \in \mathcal{L}^2(0, 1) \}$ muni du produit scalaire :

$$(u \mid v)_{\tilde{\mathcal{K}}} = u(0) \cdot v(0) + \int_0^1 u'(x) \cdot v'(x) \cdot e^{-x}\, dx.$$

En effet,

$$\tilde{K}(t^i; t^j) = e^{H(t^i;t^j)} = e^{(H(.;t^i)|H(.;t^j))_{\mathcal{H}}} = (\mathrm{EXP}(H(.t^i)) \mid \mathrm{EXP}(H(.;t^j)))_{\mathcal{K}}.$$

$\tilde{K}$ définit donc un sous-espace hilbertien $\tilde{\mathcal{K}}$ de $\mathcal{E}$.

B. FONCTIONS « SPLINE » ET METHODE D'ELEMENTS FINIS

3. Fonctions « spline » d'interpolation

Soient X un ensemble quelconque, E un sous-espace admissible de $\mathbf{C}^X$ et $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E.

Problème : Etant donné $k_i \in \mathcal{H}$, $\alpha_i \in \mathbf{C}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et

$$M_n(\alpha) = \{ h \in \mathcal{H} ; (h \mid k_i) = \alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant n \}$$

déterminer (s'il existe) l'ensemble :

$$\Sigma = \{ \sigma \in M_n(\alpha) ; \forall h \in M_n, \|\sigma\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|h\|_{\mathcal{H}} \}.$$

Résolution du problème

On sait que si les vecteurs $k_1, ..., k_n$ sont linéairement indépendants, $M_n(\alpha)$ n'est pas vide.

Si les vecteurs $k_1, ..., k_n$ sont linéairement dépendants, $M_n(\alpha)$ n'est pas vide à condition que $\alpha_1, ..., \alpha_n$ vérifient certaines conditions de compatibilité.

Nous supposerons donc que $k_1, ..., k_n$ sont linéairement indépendants.

$M_n(\alpha)$ est alors une variété linéaire fermée de $\mathcal{H}$. On vérifie sans difficulté que Σ se réduit alors à un élément σ tel que :

$$\forall x \in X \quad , \sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (k_i \mid H(., x))_{\mathcal{H}} \qquad \lambda_i \in \mathbf{C}.$$

σ est appelée la fonction « spline » relative à $M_n(\alpha)$ et $\mathcal{H}$. Si $(h \mid k_i)_{\mathcal{H}} = h(x_i)$, $x_i \in X$, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H(.\,;x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_E \varepsilon_{x_i} = H_E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_{x_i}\right)$$
$$= H\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right).$$

Application 3.1 : *Méthode d'éléments finis (de Lagrange) d'ordre 1 et de degré 1 sur un maillage de type triangulaire.*

($*$) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, borné et polyédrique, admettant une triangulation $\mathcal{T}$.

$\bar{\Omega}$ est alors la réunion d'un nombre fini de n-simplexes fermés (non dégénérés dans $\mathbf{R}^n$), d'intérieurs disjoints deux à deux, tels que chaque face d'un quelconque de ces n-simplexes soit ou bien une face commune à un autre n-simplexe de $\mathcal{T}$, ou bien une partie de la frontière de Ω.

Désignons par $\mathcal{T}^0$ le squelette d'ordre zéro de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ et par $|\mathcal{T}|$ le polyèdre associé à $\mathcal{T}$; on a : $\bar{\Omega} = |\mathcal{T}|$.

Définition 3. 1 : Soit $\zeta \in |\mathcal{T}|$. Notons $S(\zeta)$ le plus petit simplexe de $\mathcal{T}$ contenant ζ.

On appellera *coordonnées barycentriques généralisées de ζ relatives à $\mathcal{T}$*, les scalaires ζ_t, $t \in \mathcal{T}^0$, définis de la façon suivante :

(i) Si $t \notin S^0(\zeta)$ (c'est-à-dire si t n'est pas un sommet de $S(\zeta)$), alors $\zeta_t = 0$.

(ii) Si $t \in S^0(\zeta)$, alors ζ_t est la coordonnée barycentrique de ζ relative au sommet t de $S(\zeta)$. On écrira : $\zeta = (\zeta_t)_{t \in \mathcal{T}^0}$.

Dans la suite, $\mathcal{H}$ sera l'espace de Hilbert défini dans l'exemple 1.2. On sait que si $e \in \mathcal{H}$, alors $e \in C^0[0, 1]$ et $e(0) = 0$.

($**$) Soit :

$$\mathcal{K} = \left\{ e \in C^0(\Omega)\,;\, \forall \zeta \in |\mathcal{T}|,\, e(\zeta) = \sum_{t \in \mathcal{T}^0} e(\zeta_t\,;t),\, e(.\,;t) \in \mathcal{H},\, t \in \mathcal{T}^0 \right\}.$$

Tout élément $e \in \mathcal{K}$ est associé à une famille $(e(.\,;t))_{t \in \mathcal{T}^0}$ d'éléments de $\mathcal{H}$. $\mathcal{K}$ a une structure d'espace vectoriel. Etant donné deux éléments quelconques e et f de $\mathcal{K}$, associés respectivement aux familles $(e(.\,;t))_{t \in \mathcal{T}^0}$ et $(f(.\,;t))_{t \in \mathcal{T}^0}$ d'éléments de $\mathcal{H}$, on vérifie facilement que l'application :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mapsto \mathbf{R} \\ (e, f) \mapsto ((e \mid f)) = \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}^0} \int_0^1 e'(z\,;t) \cdot f'(z\,;t)\, \mathrm{d}z = \sum_{t \in \mathcal{T}^0} (e(.\,;t) \mid f(.\,;t))_{\mathcal{H}} \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{K}$.

Nous poserons : $|||e||| = \{ ((e \mid e)) \}^{\frac{1}{2}}$.

Pour la norme associée à ce produit scalaire, $\mathcal{K}$ est un espace *préhilbertien séparé*. En effet :

$$|||e||| = 0 \Leftrightarrow \left(e'(.\,;t) \equiv 0 \quad , \quad t \in \mathcal{T}^0\right) \Leftrightarrow \left(e(.\,;t) = \theta_{\mathcal{H}}\right.$$

$\left.(\text{car } e(0\,;t) = 0),\ t \in \mathcal{T}^0\right) \Leftrightarrow e = \theta_{\mathcal{K}}$.

(***) Montrons que $\mathcal{K}$ est *complet*. Soit $(e_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{K}, |||\ |||)$. Chaque élément e_p est associé à une famille $(e_p(.\,;t))_{t\in\mathcal{T}^0}$, $(p \in \mathbf{N})$ d'éléments de $\mathcal{H}$.

Chacune des suites $(e_p(.\,;t))_{p\in\mathbf{N}}$, $t \in \mathcal{T}^0$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}$ et converge donc vers un élément $\bar{e}(.\,;t) \in \mathcal{H}$, $t \in \mathcal{T}^0$.

L'élément $\bar{e} \in \mathcal{K}$ associé à la famille $(\bar{e}(.\,;t))_{t\in\mathcal{T}^0}$ est la limite dans $(\mathcal{K}, |||\ |||)$ de la suite $(e_p)_{p\in\mathbf{N}}$.

Soit $\zeta = (\zeta_t)_{t\in\mathcal{T}^0} \in |\mathcal{T}|$.

Etant donné $e \in \mathcal{K}$, on a :

$$|e(\zeta)| = \left| \sum_{t\in\mathcal{T}^0} e(\zeta_t\,;t) \right| = \left| \sum_{t\in\mathcal{T}^0} \int_0^{\zeta_t} e'(z\,;t)\,\mathrm{d}z \right|$$
$$\leqslant \sum_{t\in\mathcal{T}^0} \int_0^{\zeta_t} |e'(z\,;t)|\,\mathrm{d}z \leqslant \sum_{t\in\mathcal{T}^0} \int_0^1 |e'(z\,;t)|\,\mathrm{d}z \leqslant (\mathrm{Card}\,(\mathcal{T}^0))^{\frac{1}{2}} \cdot |||e|||.$$

Donc
$$\boxed{\sup_{\zeta\in\bar{\Omega}} |e(\zeta)| \leqslant (\mathrm{Card}\,(\mathcal{T}^0))^{\frac{1}{2}} \,.\, |||e|||}$$

On en déduit que $\mathcal{K}$ est un sous-espace hilbertien de $C^0(\bar{\Omega})$.

(****) Déterminons le *noyau reproduisant de* $\mathcal{K}$.

On sait que c'est une fonction $(\zeta, \zeta') \mapsto K(\zeta, \zeta')$, symétrique, définie positive sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ telle que pour tout $\zeta \in \bar{\Omega}$, $K(.\,,\zeta) \in \mathcal{K}$.

Soit $(K_t(.\,,\zeta))_{t\in\mathcal{T}^0}$ la famille d'éléments de $\mathcal{H}$ à laquelle est associé $K(.\,,\zeta)$.

Quels que soient $e \in \mathcal{K}$ et $\zeta = (\zeta_t)_{t\in\mathcal{T}^0}$, on a :

$$e(\zeta) = ((e \mid K(.,\zeta))) = \sum_{t\in\mathcal{T}^0} (e(.\,;t) \mid K_t(.\,;\zeta))_{\mathcal{H}} = \sum_{t\in\mathcal{T}^0} e(\zeta_t\,;t)$$
$$= \sum_{t\in\mathcal{T}^0} (e(.\,;t) \mid H(.,\zeta_t))_{\mathcal{H}}.$$

On en déduit que pour tout $\zeta = (\zeta_t)_{t\in\mathcal{T}^0} \in \bar{\Omega}$, on a :

$$K_t(.\,,\zeta) = H(.\,,\zeta_t) \quad , \quad t \in \mathcal{T}^0.$$

On montre facilement que la famille $(K(.\,,\zeta))_{\zeta\in\mathcal{T}^0}$ est *libre*.

(****) Soit $M(\alpha) = \{ e \in \mathcal{K} ; e(t) = \alpha(t), (\alpha(t) \in \mathbf{R}), t \in \mathcal{T}^0 \}$. $M(\alpha)$ est une variété linéaire fermée dans $\mathcal{K}$.

Soit σ la fonction « spline » relative à $M(\alpha)$ et $\mathcal{K}$:

$$\sigma = \sum_{\eta \in \mathcal{T}^0} \lambda_\eta K(., \eta), \quad \lambda_n \in \mathbf{R}, \quad \eta \in \mathcal{T}^0.$$

Ainsi quel que soit $\zeta = (\zeta_t)_{t \in \mathcal{T}^0} \in \bar{\Omega}$, on a :

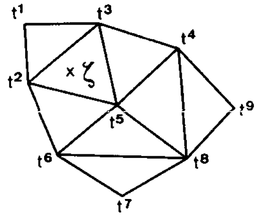
$$\sigma(\zeta) = \sum_{\eta \in \mathcal{T}^0} \lambda_\eta \left(\sum_{t \in \mathcal{T}^0} K_t(\zeta_t, \eta) \right) = \sum_{\eta \in \mathcal{T}^0} \lambda_\eta \left(\sum_{t \in \mathcal{T}^0} H(\zeta_t, \eta_t) \right).$$

$$\text{Or } H(\zeta_t, \eta_t) = \zeta_t - (\zeta_t - \eta_t)_+ = \begin{cases} \zeta_t & \text{si } \eta_t = 1 \\ 0 & \text{si } \eta_t = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que σ est une fonction affine sur chaque simplexe de $\mathcal{T}$.

Soit τ la fonction déterminée par la méthode des éléments finis d'ordre 1 qui prend les mêmes valeurs que σ aux sommets de $\mathcal{T}$.

τ coïncide sur Ω avec la fonction « spline » σ.



$$\zeta = (0, \zeta_{t^2}, \zeta_{t^3}, 0, \zeta_{t^5}, 0, 0, 0, 0)$$

Notations 3.1 : Etant donné $n \in \mathbf{N}^*$, considérons :

(i) les ensembles $X_i = [0, 1]$, $1 \leqslant i \leqslant n + 1$

(ii) les espaces $E_i = C^0(X_i)$ et $\mathcal{E}_i = \mathbf{R}^{X_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n + 1$.

Notons $X(n)$ (resp. $E(n)$; $\mathcal{E}(n)$) le produit cartésien de $X_1, \ldots, X_{n+1}$ (resp. $E_1, \ldots, E_{n+1}$; $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{n+1}$).

E_i (resp. $E(n)$) est un sous-espace admissible de $\mathcal{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n + 1$, (resp. $\mathcal{E}(n)$).

Nous noterons $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ un point générique de $X(n)$ de composantes : $x_i \in X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n + 1$.

$\mathcal{H}_i$ désignera un sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}_i$, de noyau H_i, $1 \leqslant i \leqslant n + 1$.

On notera L_n la fonction suivante définie sur $(X(n))^2$:

$$(x, t) \mapsto L_n(x\,;t) = \sum_{i=1}^{n+1} H_i(x_i\,;t_i).$$

L_n est le noyau d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{L}_n$ de $\mathcal{E}(n)$ (cf. exemple 2.3).

Etant donné $m \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$(*)$ $h = \dfrac{1}{m}$

$(*)$ $J(n) = \{ j = (j_1, ..., j_{n+1}) \in \mathbf{N}^{n+1}\,;\, 0 \leqslant j_i \leqslant m \}$

$(*)$ pour tout $j \in J(n)$, $\hat{t}^j = (j_1 h, ..., j_{n+1} h)\,;\, \hat{t}^j \in X(n)$.

$(*)$ $Y(n) = \left\{ x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in X(n)\,;\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$

et $J_1(n) = \{ j \in J\,;\, \hat{t}^j \in Y(n) \} = \left\{ j \in J\,;\, |j| = \sum_{i=1}^{n+1} j_i = m \right\}$.

On supposera que $X(n)$ et $Y(n)$ sont munis de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^{n+1}$. $Y(n)$ est un n-simplexe.

$Y(n)$ a pour sommets les points $a_i = (0, ..., 0, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{1}, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

Quel que soit $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in Y(n)$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i a_i.$$

On désignera par $\hat{\mathcal{C}}(n)$ le complexe simplicial (géométrique) de sommets $\hat{t}^j \in Y(n)$, $(j \in J_1(n))$, ayant pour simplexes les sous-ensembles, d'intérieur non vide, de $Y(n)$, du type suivant :

$$\{ x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in Y(n);\ x_i - j_i h > 0 \ \ et \ \ x_i - (j_i + 1)h < 0, 1 \leqslant i \leqslant n + 1 \}.$$

$|\hat{\mathcal{C}}(n)|$ désignant le polyèdre associé à $\hat{\mathcal{C}}(n)$, on a :

$$|\hat{\mathcal{C}}(n)| = Y(n).$$

Soit $\hat{\Sigma}$ un n-simplexe (quelconque) de $\hat{\mathcal{C}}$ de sommets

$$\hat{t}^{j(1)}, ..., \hat{t}^{j(n+1)} \qquad \text{où} \qquad \hat{t}^{j(i)} = \sum_{l=1}^{n+1} j_l(i) h \cdot a_l, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n + 1.$$

Soit, d'autre part, $\hat{t}$ un point quelconque de Σ;

$$\hat{t} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\hat{\Sigma}) \cdot \hat{t}^{j(i)} = \sum_{l=1}^{n+1} t_l a_l,$$

$$\lambda_i(\hat{\Sigma}),\ a_i \in [0, 1],\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\hat{\Sigma}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1.$$

On a :

$$t_l = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\hat{\Sigma}) j_l(i) \,.\, h, \qquad 1 \leqslant l \leqslant n + 1.$$

Posons : $J(\hat{\Sigma}) = (j_l(i))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant n+1}}$.

Comme les vecteurs $\hat{t}^{j(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n + 1$ sont linéairement indépendants, $J(\hat{\Sigma})$ est inversible :

$$\lambda_i(\hat{\Sigma}) = \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{il} t_l \cdot \frac{1}{h} \qquad \text{avec} \qquad (\alpha_{il})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant n+1}} = (J(\Sigma))^{-1}.$$

Application 3.2 : *Méthode d'éléments finis (de Lagrange) d'ordre 1 sur un maillage de type rectangulaire.*

Nous utiliserons ci-dessous, les notations 3.1. Nous supposerons que $H_i(x_i; t_i)$ est le noyau défini dans l'exemple 1.2. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. La fonction L définie sur $(X(m) \times X(p))^2$ par :

$$((x, y), (t, v)) \to L(x, y; t, v) = L_n(x; t) \times L_p(y; v)$$

est le noyau d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}(n)\ \varepsilon\ \mathcal{E}(p)$ (cf. exemples 2.3 et 2.4).

Notons M la restriction de L à $(Y(n) \times Y(p))^2$ et $\hat{\mathcal{C}}$ le produit cartésien des complexes simpliciaux $\hat{\mathcal{C}}(n)$ et $\hat{\mathcal{C}}(p)$, de sommets $\hat{t}^i$, $i \in J_1(n)$ et $\hat{v}^j$, $j \in J_1(p)$ respectivement.

Soient x^1 et x^2 deux éléments de $Y(n)$ tels que :

$$\varepsilon_i(x_i - j_i h) \geqslant 0, \qquad \varepsilon_i = \pm 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n + 1, \qquad l = 1, 2,$$

j étant un élément *fixé* de $J_1(n)$.

Quel que soit $\lambda \in [0, 1]$, on a évidemment : $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in Y(n)$. D'autre part, quels que soient $\lambda \in [0, 1]$ et $i = 1, 2, ..., (n + 1)$:

$$\begin{aligned}(\lambda x_i^1 + (1 - \lambda)x_i^2 - j_i h)_+ &= (\lambda(x_i^1 - j_i h) + (1 - \lambda)(x_i^2 - j_i h))_+ \\ &= \lambda(x_i^1 - j_i h)_+ + (1 - \lambda)(x_i^2 - j_i h)_+.\end{aligned}$$

On en déduit facilement que pour tout

$$(\hat{t}^i, \hat{v}^j) \in |\hat{\mathcal{C}}(n)| \times |\hat{\mathcal{C}}(p)| \qquad (i \in J_1(n), j \in J_1(p)),$$

l'application :

$$\left| \begin{array}{l} |\hat{\mathcal{C}}(n)| \times |\hat{\mathcal{C}}(p)| \mapsto \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto M(x, y\,; \hat{t}^i, \hat{v}^j) \end{array} \right.$$

se réduit à une fonction affine par rapport à x (resp. y) sur la fermeture de tout ensemble de la forme : $\hat{\Sigma}_1 \times \{ v \}$ (resp. $\{ t \} \times \hat{\Sigma}_2$) où $\hat{\Sigma}_1$ (resp. $\hat{\Sigma}_2$) est un n-simplexe (resp. p-simplexe) de $\hat{\mathcal{C}}(n)$ (resp. $\hat{\mathcal{C}}(p)$) et $v \in |\hat{\mathcal{C}}(p)|$ (resp. $t \in |\hat{\mathcal{C}}(n)|$).

Soit ψ une application *inversible* de $|\hat{\mathcal{C}}(n)| \times |\hat{\mathcal{C}}(p)|$ dans $\mathbf{R}^{n+p}$, simpliciale par rapport à chacun de ses arguments (cf. fig. 3.2).

$\mathcal{C} = \psi(\hat{\mathcal{C}})$ est un complexe simplicial (géométrique) de $\mathbf{R}^{n+p}$ (de même dimension que $\hat{\mathcal{C}}$).

$\mathcal{C}$ a pour sommets les points $\eta^{ij} = \psi(\hat{t}^i, \hat{v}^j)$, $i \in J_1(n)$, $j \in J_1(p)$ et pour n-simplexes les ensembles $\psi(\hat{\Sigma}_1 \times \{ \hat{v}^j \})$ et $\psi(\{ \hat{t}^i \} \times \hat{\Sigma}_2)$.

Posons : $Z = \psi(|\hat{\mathcal{C}}(n)| \times |\hat{\mathcal{C}}(p)|)$.

Désignons par K la fonction numérique définie sur Z^2 par :

$$\forall \zeta, \eta \in Z,\ K(\zeta; \eta) = M(\psi^{-1}(\zeta); \psi^{-1}(\eta)).$$

K définit un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de $\mathbf{R}^z$.

On vérifie facilement que pour tout

$$\eta^{ij} \in Z,\ i \in J_1(n), j \in J_1(p),$$

l'application : $\left| \begin{array}{l} Z \mapsto \mathbf{R} \\ \zeta \mapsto K(\zeta\,; \eta^{ij}) \end{array} \right.$ se réduit à une fonction affine sur la fermeture de tout ensemble de la forme :

$$\psi(\hat{\Sigma}_1 \times \{ v \})(\text{resp. } \psi(\{ t \} \times \hat{\Sigma}_2)).$$

Il en est de même de la fonction « spline » :

$$\sigma = \sum_{i \in J_1(n), j \in J_1(p)} \lambda_{ij} K(.\,; \eta^{ij}),\ \lambda_{ij} \in \mathbf{R}.$$

De plus, $\sigma \in C^0(Z)$.

On montre facilement que σ est déterminée de manière unique par ses valeurs aux sommets de $\mathcal{C}$.

Soit Ω la réunion d'une famille finie d'ensembles du type : $\psi(|\hat{\Sigma}_1| \times |\hat{\Sigma}_2|)$, et $\bar{\Omega}$ la fermeture de Ω.

Soit τ la fonction déterminée par la méthode des éléments finis d'ordre 1 qui prend les mêmes valeurs que σ aux sommets de $\mathcal{T}$ contenus dans $\bar{\Omega}$.

τ coïncide avec σ sur $\bar{\Omega}$, comme on peut le vérifier facilement.

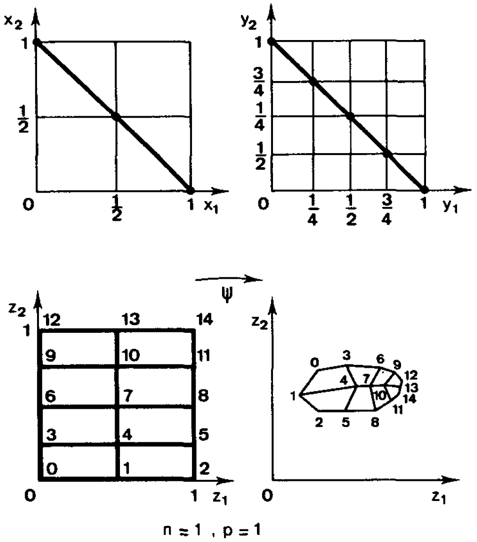


Figure 3.2

4. Puissances tensorielles symétriques d'espaces hilbertiens et méthodes d'éléments finis

Lemme 4.1 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ et E^* son dual algébrique.

(i) Soient $e_1, \ldots, e_n$, n éléments linéairement indépendants de E. Etant donné $k \in \mathbf{N}^*$, posons : $k_* = C^k_{n+k-1} = C^{n-1}_{k+n-1}$; k_* est le nombre de monômes d'un polynôme homogène de degré k à n variables.

Soit $\{ \alpha^j = (\alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n) ; 1 \leqslant j \leqslant k_* \}$ une famille d'éléments de $\mathbf{C}^n$.

Pour que la famille $\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^j_i e_i \right)^{\vee k} ; 1 \leqslant j \leqslant k_* \right\}$ soit *libre* dans $E^{\vee k}$,

il faut et il suffit que les points : $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^k$ forment un système *unisolvent* dans $\mathbf{C}^n$ pour les polynômes *homogènes* de degré k.

(ii) Soient $e'_1, \ldots, e'_n \in E'$ tels que :

$$\Delta_n = \det ([\langle e_i, e'_j \rangle]_{1 \leqslant j \leqslant n}) \neq 0.$$

Il existe un *seul* système de k_* polynômes homogènes

$$\Pi_j^k\begin{pmatrix} e_1, \dots, e_n \\ e'_1, \dots, e'_n \end{pmatrix} = \sum_{|\beta|=k} \mu_\beta^j((e'_1)^{\vee \beta_1} \vee \dots \vee (e'_n)^{\vee \beta_n}), \mu_\beta^j \in \mathbf{C}, |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

tels que : $\langle \Pi_j^k\begin{pmatrix} e_1, \dots, e_n \\ e'_1, \dots, e'_n \end{pmatrix}, \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^l e_i\right)^{\vee k} \rangle = \delta_{jl}, \quad 1 \leqslant j, l \leqslant k_*.$

Preuve :

(i) Notons θ_k l'élément neutre de $E^{\vee k}$.

Pour que les éléments $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^j \cdot e_i\right)^{\vee k}$, $1 \leqslant j \leqslant k_*$ soient linéairement indépendants dans $E^{\vee k}$, il faut et il suffit que :

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant k_*} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^j e_i\right)^{\vee k} = \theta_k \Rightarrow \lambda_j = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k_*.$$

Or, $\displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant k_*} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^j e_i\right)^{\vee k}$

$$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant k_*} \lambda_j \cdot \left[\sum_{|\beta|=k} c_\beta(\alpha_1^j)^{\beta_1} \dots (\alpha_n^j)^{\beta_n}(e_1^{\vee \beta_1} \vee \dots \vee e_n^{\vee \beta_n})\right]$$

$$= \sum_{|\beta|=k} \sum_{1 < j < k_*} \lambda_j(\alpha_1^j)^{\beta_1} \dots (\alpha_n^j)^{\beta_n} \, c_\beta(e_1{}^{\beta_1} \vee \dots \vee e_n{}^{\beta_n}).$$

Comme $c_\beta \neq 0$, $|\beta| = k$, on a :

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant k_*} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^j e_i\right)^k = \theta_k \Leftrightarrow \sum_{1 \leqslant j \leqslant k_*} \lambda_j(\alpha_1^j)^{\beta_1} \dots (\alpha_n^j)^{\beta_n} = 0, |\beta| = k.$$

Soit $D(k)$ le déterminant de la matrice ayant pour lignes (resp. colonnes) les éléments de la forme :

$$(\alpha_1^j)^{\beta_1} \dots (\alpha_n^j)^{\beta_n} \quad , \quad |\beta| = k \text{ (resp. } 1 \leqslant j \leqslant k_*).$$

Pour que $\lambda_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant k_*$, il faut et il suffit que $D(k) \neq 0$, c'est-à-dire que les points $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{k_*}$ forment un système unisolvent dans $\mathbf{C}^n$ pour les polynômes homogènes de degré k.

(ii)

$$\langle \Pi_j^k, \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^l e_i\right)^{\vee k} \rangle = \langle \sum_{|\beta|=k} \mu_\beta^j((e'_1)^{\vee \beta_1} \vee \dots \vee (e'_n)^{\vee \beta_n}), \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^l e_i\right)^{\vee k} \rangle$$

$$= \sum_{|\beta|=k} \mu_\beta^j\left(k! \prod_{1 \leqslant s \leqslant n} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i^l \langle e_i, e'_s \rangle\right)^{\beta_s}\right), \quad 1 \leqslant j, l \leqslant k^*.$$

Posons :

$$\gamma_s^j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i^j \langle e_i, e'_s \rangle, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant k_*,$$

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \vdots \\ \alpha_n^j \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} \gamma_1^j \\ \vdots \\ \gamma_n^j \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \langle e_1, e'_1 \rangle \dots \langle e_n, e'_1 \rangle \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \langle e_1, e'_n \rangle \dots \langle e_n, e'_n \rangle \end{pmatrix}$$

On a : $\gamma^j = A\alpha^j$ avec det $(A) = \Delta_n \neq 0$.

On sait qu'il existe un seul système de k_* polynômes homogènes de n variables complexes P_j, $1 \leqslant j \leqslant k_*$ tels que :

$$P_j(\alpha^l) = \delta_{jl} \quad , \quad 1 \leqslant j, l \leqslant k_*.$$

La transformation linéaire : $\left| \begin{array}{l} \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n \\ z \to Az = v \end{array} \right.$, étant inversible applique l'espace vectoriel des polynômes homogènes à n variables complexes, de degré k, sur lui-même.

On en déduit que les polynômes homogènes Q_l, $1 \leqslant l \leqslant k_*$ définis par : $Q_l(z) = P_l(A^{-1}z)$ sont linéairement indépendants.

$$\text{Or } Q_l(\gamma^j) = P_l(A^{-1}A\alpha^j) = P_l(\alpha^j) = \delta_{lj} \quad , \quad 1 \leqslant l, j \leqslant k_*.$$

Il en résulte que les points $\gamma^1, \dots, \gamma^{k_*}$ forment un système unisolvent pour les polynômes homogènes de n variables complexes, de degré k.

Lorsque j $(1 \leqslant j \leqslant k_*)$ est fixé, il existe donc un seul système de scalaires μ_β^j, $|\beta| = k$, tels que :

$$(k!)\left(\sum_{|\beta| = k} \mu_\beta^j (\gamma_1^l)^{\beta_1} \dots (\gamma_n^l)^{\beta_n} \right) = \delta_{jl}, \qquad 1 \leqslant j, l \leqslant k_*. \,\|$$

EXEMPLE 4.1 :

Lemme 4.1 * L'ensemble : $\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n ;\ |\alpha| = k \}$ est un système de points unisolvent dans $\mathbf{C}^n$ pour les polynômes homogènes de degré k.

** Avec les mêmes hypothèses et notations que dans le lemme 4.1 (i), posons :

$$u_j = \frac{1}{\Delta_n} \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \langle e_1 \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_n, e'_1 \wedge \dots \wedge e'_j \wedge \dots \wedge e^n \rangle e_i \right],$$

$$1 \leqslant j \leqslant n,$$

$u_0 = \sum_{j=1}^n u_j$. On a : $\langle u_j, e'_k \rangle = \delta_{jk}$, $\langle u_0, e'_k \rangle = 1, \qquad 1 \leqslant j, k \leqslant n.$

Etant donné $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\beta| = k$,

soit $\Pi_\beta^k\begin{pmatrix} e_1, ..., e_n \\ e'_1, ..., e'_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta!} \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=0}^{\beta_i - 1} (ku_i - ju_0)$, où $\beta! = \beta_1! ... \beta_n!$.

On a : $\left\langle \Pi_\beta^k, \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j e'_j}{k}\right)^{\vee k} \right\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ et $|\alpha| = k$. Il en résulte que les polynômes Π_β^k sont les seuls polynômes homogènes de degré k vérifiant les conditions ci-dessus.

Preuve : * Considérons n variables réelles $x_1, ..., x_n$ indépendantes. (On vérifie facilement que) les n applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$:

$$x_1 \to e^{x_1}, ..., x_n \to e^{x_n}$$

sont linéairement indépendantes.

Il en est de même des applications de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}_+$:

$$(x_1, ..., x_n) \to (e^{x_1})^{\alpha_1} ... (e^{x_n})^{\alpha_n} = e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}, |\alpha| = k.$$

Soit $V = \sum_{|\alpha|=k} \mu_\alpha e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}$, $\mu_\alpha \in \mathbf{C}$.

$$\frac{\partial^k v}{\partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_n^{\beta_n}} = \sum_{|\alpha|=k} \mu_\alpha (\alpha_1)^{\beta_1} ... (\alpha_n)^{\beta_n} . e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}, |\beta| = k.$$

On établit sans difficulté que : $(\{ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{C}^n ; |\alpha| = k \}$ est un système de points unisolvent pour les polynômes homogènes à n variables complexes de degré $k)$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{|\beta|=k} \mu_\beta . \alpha_1^{\beta_1} ... \alpha_n^{\beta_n} = 0, |\alpha| = k \Rightarrow \mu_\beta = 0, |\beta| = k \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{|\alpha|=k} \mu_\alpha . \alpha_1^{\beta_1} ... \alpha_n^{\alpha_n} = 0, |\beta| = k \Rightarrow \mu_\alpha = 0, |\alpha| = k \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{|\alpha|=k} \mu_\alpha \cdot \alpha_1^{\beta_1} ... \alpha_n^{\beta_n} . e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \equiv 0, |\beta| = k \Rightarrow \mu_\alpha = 0, |\alpha| = k \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^k v}{\partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_n^{\beta_n}} \equiv 0, |\beta| = k \Rightarrow \mu_\alpha = 0, |\alpha| = k \right).$$

Or si $\dfrac{\partial^k v}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \equiv 0$, $|\beta| = k$, v est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. On en déduit facilement que $v \equiv 0$, c'est-à-dire que $\mu_\alpha = 0$, $|\alpha| = k$.

$$** \left\langle \Pi_{\beta'}^k, \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i e_i'}{k}\right)^{\vee k} \right\rangle = \frac{1}{\beta!} \prod_{s=1}^n \sum_{j=0}^{\beta_s+1} \left\langle k u_s - j u_0, \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i e_i'}{k} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\beta!} \prod_{s=1}^n \prod_{j=0}^{\beta_s+1} \left(\frac{k\alpha_s}{k} - j \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{k} \right)$$

$$= \frac{1}{\beta!} \prod_{s=1}^n \prod_{j=0}^{\beta_s+1} (\alpha_s - j) \text{ car } \sum_{i=1}^n \alpha_i = k.$$

S'il existe i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que : $\alpha_{i_0} \neq \beta_{i_0}$, alors il existe i_1, $1 \leqslant i_1 \leqslant n$ tel que $0 \leqslant \alpha_{i_1} \leqslant \beta_{i_1} - 1$ et

$$\left\langle \Pi_{\beta'}^k, \left(\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j e_j'}{k}\right)^{\vee k} \right\rangle = 0.$$

Si $\alpha_i = \beta_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a :

$$\left\langle \Pi_{\beta'}^k, \left(\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j e_j'}{k}\right)^{\vee k} \right\rangle = \frac{1}{\beta!} \left(\prod_{s=1}^n \beta_s(\beta_s - 1) \dots 2.1 \right) = 1. \;\|$$

Définition 4.1 : Soit E un espace vectoriel sur **C**. Etant donné un simplexe géométrique Σ de sommets $e_1, \dots, e_q \in E$ et de dimension $(q-1)$, $(q \in \mathbf{N}^*)$, nous appellerons *treillis barycentrique d'ordre* $k \in \mathbf{N}^*$, *associé à* Σ et nous le noterons Σ_k, l'ensemble :

$$\Sigma_k = \left\{ \sum_{i=1}^q \frac{\alpha_i}{k} e_i \in E \,;\, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbf{N}^q, |\alpha| = k \right\}.$$

Soit $\mathcal{C}$ un complexe simplicial géométrique de sommets $e_1, \dots, e_n \in E$. On appellera treillis barycentrique d'ordre k associé à $\mathcal{C}$ et on le notera $\mathcal{C}_k$, l'ensemble :

$$\mathcal{C}_k = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{C}} \Sigma_k, \text{ où } \Sigma \text{ désigne un simplexe de } \mathcal{C}.$$

Tout élément $t \in \mathcal{C}_k$ s'écrit sous la forme :

$$t = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{k} e_i \text{ où } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n \text{ et } |\alpha| = k.$$

Théorème 4.1 : Soient E un espace vectoriel sur **C** et $e_1, \dots, e_n$, n éléments linéairement indépendants de E.

Soit, d'autre part, $\mathcal{C}$ un complexe simplicial de sommets $e_1, \ldots, e_n \in E$. La famille $\{ t^{\vee k} \in E^{\vee k} ; t \in T_k \}$ forme un système libre dans $E^{\vee k}$.

Preuve : Résulte immédiatement du lemme 4.2.

Application 4.1 : *Méthode d'éléments finis (de Lagrange) d'ordre* $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$, *sur un maillage de type triangulaire.*

a) *Éléments finis rectilignes*

Nous ferons ci-dessous les mêmes hypothèses et nous utiliserons les mêmes notations que dans l'application 3.1. Notons $K^{\vee k}$ le noyau du sous-espace hilbertien $\mathcal{H}^{\vee k}$ de $(C^0(\overline{\Omega}))^{\vee k}$. Désignons par $\delta_\zeta \in (C^0(\overline{\Omega}))'$ la mesure de Dirac au point (quelconque) $\zeta \in \overline{\Omega}$.

On sait que : $\forall \zeta, \eta \in \overline{\Omega}$, $K(\zeta, \eta) = \langle K\delta_\eta, \delta_\zeta \rangle$
et que : $\forall \zeta^1, \ldots, \zeta^k, \eta^1, \ldots, \eta^k \in \overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned}\langle K^{\vee k}(\delta_{\eta^1} \vee \ldots \vee \delta_{\eta^k}), \delta_{\zeta^1} \vee \ldots \vee \delta_{\zeta^k} \rangle & \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathcal{G}_k} \langle K\delta_{\eta^1}, \delta_{\zeta^{\rho(1)}} \rangle \ldots \langle K\delta_{\eta^k}, \delta_{\zeta^{\rho(k)}} \rangle \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathcal{G}_k} K(\eta^1, \zeta^{\rho(1)}), \ldots, K(\eta^k, \zeta^{\rho(k)}) \\ &= \langle K\delta_{\eta^1} \ldots K\delta_{\eta^k}, \delta_{\zeta^{\rho(1)}} \ldots \delta_{\zeta^{\rho(k)}} \rangle .\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{C}_k$ le treillis barycentrique d'ordre k associé à $\mathcal{C}$. Quel que soit $\zeta \in \mathcal{C}_k$ (notons $S_k(\zeta)$ le treillis barycentrique d'ordre k associé à $S(\zeta)$) et posons :

$$h(\zeta) = K^{\vee k}\left(\sum_{t \in S_k(\zeta)} \frac{\alpha_t(\zeta)}{k} \delta_t \right)^{\vee k} \in \mathcal{K}^{\vee k}, \alpha_t(\zeta) \in \mathbf{N}, t \in S_k(\zeta), \sum_{t \in S_k(\zeta)} \alpha_t(\zeta) = k.$$

Comme $h(\zeta) = \left(K\left(\sum_{t \in S_k(\zeta)} \frac{\alpha_t(\zeta)}{k} \delta_t \right)\right)^{\vee k} = \left(\sum_{t \in S_k(\zeta)} \frac{\alpha_t(\zeta)}{k} K\delta_t \right)^{\vee k}$, on déduit du théorème 4.1 que la famille $(h(\zeta))_{\zeta \in \mathcal{C}_k}$ est libre dans $\mathcal{H}^{\vee k}$.

Etant donné deux éléments ζ et $\eta \in \mathcal{C}_k$, on a

$$\begin{aligned}((h(\zeta) \mid h(\eta)))_{\mathcal{K}^{\vee k}} &= \langle h(\zeta), \left(\sum_{t \in S_k(\eta)} \frac{\alpha_t(\eta)}{k} \delta_t \right)^{\vee k} \rangle \\ &= \left(\langle K\left(\sum_{t \in S_k(\zeta)} \frac{\alpha_t(\zeta)}{k} \delta_t \right), \sum_{t \in S_k(\eta)} \frac{\alpha_t(\eta)}{k} \delta_t \rangle \right)^k \\ &= \left(\langle K\left(\sum_{t \in S_k(\zeta)} \frac{\alpha_t(\zeta)}{k} \delta_t \right), \sum_{t \in S_k(\eta)} \frac{\alpha_t(\eta)}{k} \delta_t \rangle \right)^k\end{aligned}$$

car l'application
$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^{|\mathcal{T}|} \mapsto \mathbf{R} \\ \zeta \mapsto K(\zeta, t) \end{array} \right. , \quad t \in \mathcal{T}^0$$

se réduit à une fonction affine sur la fermeture de chaque n-simplexe de $\mathcal{T}$. Ainsi :
$$(h(\zeta) \mid h(\eta))_{\mathcal{K}^{\vee k}} = \langle h(\zeta), (\delta_\eta)^{\vee k} \rangle.$$

Soit σ la restriction à la diagonale de $(|\mathcal{T}|^k)$ de la fonction « spline » $\chi = \sum_{\zeta \in \mathcal{T}_k} \mu(\zeta) \cdot h(\zeta)$, $\mu(\zeta) \in \mathbf{R}$, relative à $\mathcal{K}^{\vee k}$ (et aux points $h(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{T}_k$).

Quel que soit $\eta \in \bar{\Omega}$, on a :
$$\sigma(\eta) = \langle \chi, (\delta_\eta)^{\vee k} \rangle = \sum_{\zeta \in \mathcal{T}^k} \mu(\zeta) \left[\sum_{t \in S_k(\zeta)} \frac{\alpha_t(\zeta)}{k} K(t, \eta) \right]^k.$$

σ se réduit donc à un polynôme de degré (inférieur ou) égal à k sur chaque n-simplexe de $\mathcal{T}$. De plus, $\sigma \in C^0(|\mathcal{T}|)$.

D'autre part, si $\eta \in \mathcal{T}_k$, on a :
$$\sigma(\eta) = \sum_{\zeta \in \mathcal{T}_k} \mu(\zeta) \langle h(\zeta), (\zeta_\eta)^{\vee k} \rangle = \sum_{\zeta \in \mathcal{T}_k} \mu(\zeta)((h(\zeta) \mid h(\eta)))_{\mathcal{K}^{\vee k}}.$$

Il en résulte que σ est déterminé de manière unique par la donnée de ses valeurs aux points de $\mathcal{T}_k$.

Si τ est la fonction d'éléments finis d'ordre k qui prend les mêmes valeurs que σ aux points de $\mathcal{T}_k$ contenus dans $\bar{\Omega}$, τ coïncide avec σ sur $\bar{\Omega}$.

b) *Eléments finis courbes*

Soit : $\zeta \mapsto \sigma(\zeta)$, $\eta \in \mathcal{T}_k$ la restriction à la diagonale de $|\mathcal{T}|^k$ de la fonction « spline » : $\chi = \sum_{t \in \mathcal{T}_k} \mu(t) \cdot h(t)$, $\mu(t) \in \mathbf{R}$, définie en a) telle que :
$$\sigma_\eta(\eta') = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \eta \neq \eta' \\ 1 & \text{si} \quad \eta = \eta' \end{cases}, \ \eta, \eta' \in \mathcal{T}_k.$$

Soit $\tilde{\mathcal{T}}_k = (v(\eta))_{\eta \in \mathcal{T}_k}$ un système de points de $\mathbf{R}^n$ tel que l'application $\tilde{\psi}_k$ de $\mathcal{T}_k$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par : $\tilde{\psi}_k = \sum_{\eta \in \mathcal{T}_k} \sigma_\eta \cdot v(\eta)$ soit inversible.

L'image de $\mathcal{T}$ par $\tilde{\psi}_k$ est composée d'éléments finis courbes.

Posons : $|\tilde{\mathcal{T}}| = \tilde{\psi}_k(|\tilde{\mathcal{T}}|)$ et, $\forall z \in |\tilde{\mathcal{T}}|$, $\tilde{h}(z) = h(\tilde{\psi}_k^{-1}(z))$. Alors la restriction $\tilde{\sigma}$ à la diagonale de $|\tilde{\mathcal{T}}|^k$ de la fonction « spline » :
$$\tilde{\chi} = \sum_{z \in \ \ k} \tilde{\mu}(z) \cdot \tilde{h}(z) \quad , \tilde{\mu}(z) \in \mathbf{R},$$

est une fonction d'interpolation de Lagrange d'ordre k associée à la famille d'éléments finis courbes qui est l'image de $\mathcal{T}$ par ψ_k.

Notons que $\tilde{\sigma}$ est définie de manière unique par la donnée de ses valeurs aux points de $\tilde{\mathcal{C}}_k$.

Application 4.2 : *Méthode d'éléments finis d'Hermite sur un maillage de type triangulaire*

Considérons un n-simplexe Σ (quelconque) de $\mathcal{C}$ de sommets $t^1, \ldots, t^{n+1} \in \mathcal{C}^0$. Notons P_Σ le polynôme de degré minimal sur $\mathbf{R}^n$ tel que : $\forall t \in \Sigma_k$, $P_\Sigma(t) = \sigma(t)$.

P_Σ coïncide avec σ sur $|\bar{\Sigma}|$.

a) *Dérivées d'ordre 1. Éléments finis de classe C^0*

Supposons maintenant que P_Σ soit déterminé de manière *unique* par la donnée *simultanée* de ses valeurs $P_\Sigma(t^j)$ aux sommets de Σ et de ses dérivées premières $P'_\Sigma(t^j, \zeta^{jl})$ aux sommets t^j de Σ, dans des directions ζ^{jl} (telles que $t^j + \zeta^{jl} \in |\Sigma|$), $1 \leqslant l \leqslant r(j)$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$) convenablement choisies.

Alors σ sera (encore) déterminée de manière *unique* si l'on remplace la donnée de ses valeurs aux points $t \in \Sigma_k \backslash \Sigma^0$ par celle de ses dérivées premières $\sigma'(t^j; \zeta^{jl})$, $1 \leqslant l \leqslant r(j)$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$.

EXEMPLE : 4.2.1.

$k = 3, n = 2$

On remplace la donnée de $\sigma\left(\dfrac{2t^j + t^l}{3}\right)$ par celle de $\sigma'(t^j; t^l - t^j)$, $j, l = 1, 2, 3, j \neq l$.

On peut supposer que $\sigma\left(\dfrac{t^1 + t^2 + t^3}{3}\right)$ est donné ou non. Dans les deux cas, $\sigma \in C^0(|\mathcal{C}|)$.

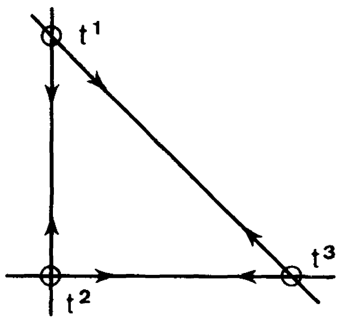


Figure 4.2.1

b) *Dérivées d'ordre supérieur à 1. Éléments finis de classe C^r, $r \in \mathbf{N}^*$*

EXEMPLE 4.2.2.

$k = 4, n = 2$

P_Σ est déterminé de manière unique par la donnée *simultanée* de ses valeurs aux sommets de Σ et de dérivées premières $P'_\Sigma(t^j; t^l - t^t)$,

$P'_\Sigma\left(\dfrac{t^j + t^l}{2}; t^q - \dfrac{t^j + t^l}{2}\right)$, $j, q, l = 1, 2, 3,$

$j \neq l \neq q \neq j$.

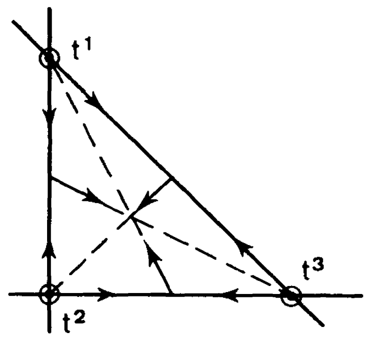


Figure 4.2.2

σ sera (encore) déterminé de manière unique si l'on remplace la donnée de ses valeurs aux points de $\Sigma_k \backslash \{ t^1, t^2, t^3 \}$ par celle de ses dérivées premières $\sigma'(t^j; t^j - t^l)$, $\sigma'\left(\frac{t^j + t^l}{2}; t^q - \frac{t^j + t^l}{2}\right)$, $j, q, l = 1, 2, 3, j \neq l \neq q \neq j$.

EXEMPLE 4.2.3.

$$k = 5, n = 2$$

On laisse au lecteur le soin de traiter de la même manière que dans l'exemple précédent, le cas où l'on se donne la valeur de σ, de ses différentielles premières et secondes aux sommets de Σ, et de ses dérivées premières

$$\sigma'\left(\frac{t^j + t^l}{2}; t^q - \frac{t^j + t^l}{2}\right), j, l, q = 1, 2, 3, \quad j \neq l \neq q \neq j.$$

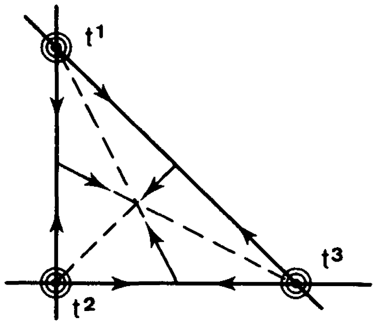


Figure 4.2.3

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATTEIA M., *Fonctions « spline » et noyaux d'Aronszajn-Bergman*, R.I.R.O., n° 3, 1970.

[2] BERGMAN-SCHIFFER, *Kernel functions and differential equations*, Academic Press, 1953.

[3] CIARLET P. G. and RAVIART P. A., *General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite elements methods*, Arch. Rat. Mech. Anal., 46 (1972), pp. 177-199. *Interpolation Theory over Curved Element with applications to finite elements methods*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1 (1972), pp. 217-249.

[4] GARNIR, *Analyse fonctionnelle*, tome 1, Birkhauser-Verlag.

[5] GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques*, A.M.S.

[6] HILTON and WYLIE, *Homology theory*, Cambridge University Press.

[7] KARLIN S., *Total Positivity*, Standford, 1968.

[8] NEVEU J., *Fonctions aléatoires gaussiennes*, Cours de Montréal, 1968.

[9] NICOLAIDES R. A., *On a class of finite elements generated by Lagrande interpolation.*

[10] RAVIART P. A., Cours de D.E.A. sur les éléments finis, année 1971-1972.

[11] SCHWARTZ L., *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels tologiques et noyaux associés*, J. d'Analyse Math., Jérusalem, 1964.

[12] SPANIER E. H., *Algebraic topology*, Mac Graw Hill, 1966.

[13] TREVES, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, 1967.

[14] ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, Mac Graw-Hill, 1971.